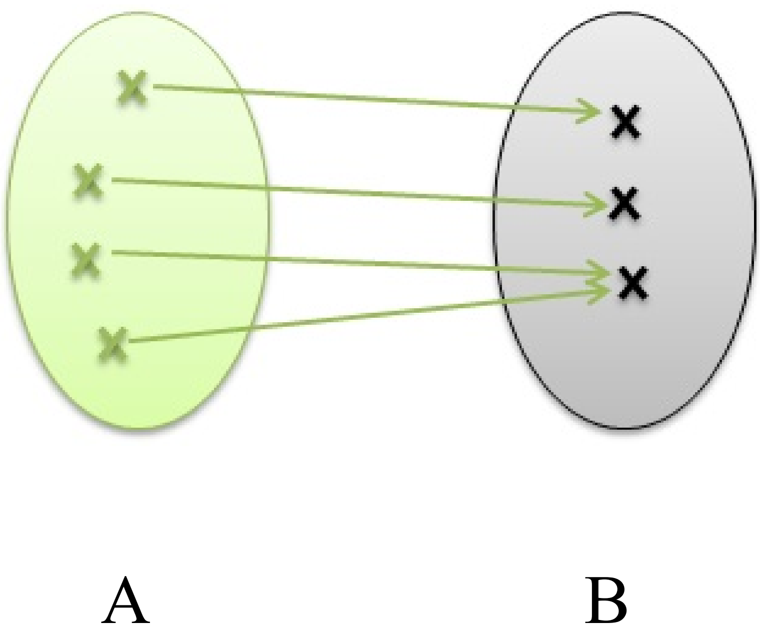
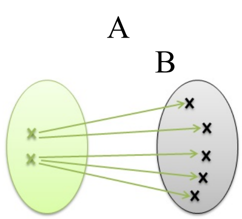
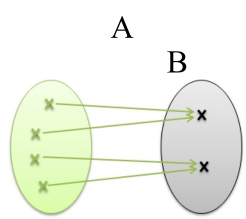
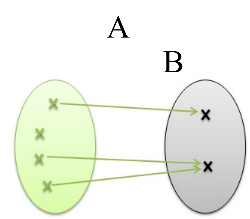
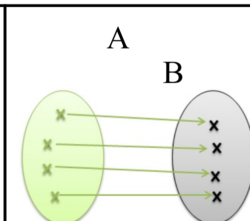
> *restart*;
> *with*(*plots*) :

Függvény definíciója

Adott két halmaz A és B. Az f hozzárendelés függvény, ha az **A halmaz minden eleméhez** hozzárendeli a **B halmaz egyetlen elemét.**



Az A halmaz a függvény értelmezési tartománya. A B halmaz az értékkészlet.
A következ hozzárendelések példákat mutatnak függvényekre és olyan hozzárendelésekre, amelyekben nem teljesül a függvény definíciójának egyik, vagy másik feltétele.

			
Egy - több hozzárendelés **Nem függvény**, mert az A halmaz elemeihez a B halmaznak nem egyetlen elemét	Több - egy hozzárendelés **Függvény**	**Nem függvény**, mert az A halmaz nem minden eleméhez rendeltünk hozzá elemet a B halmazból.	Egy-egy értelm, vagy más szóval kölcsönösen egyértelm hozzárendelés

rendeltük.			**Függvény**

A függvény jelölésére általában kis betket használunk: f, g, h, ...
Az f függvény értelmezési tartományának D_f, értékkészletének R_f a jelölése.

A függvény megadása többféle módon történhet:

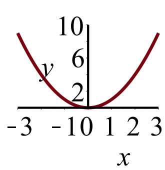
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; x \mapsto x^2$

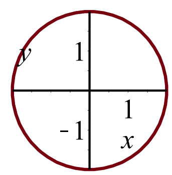
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; f(x) = x^2$, a továbbiakban leginkább ezt a jelölést használjuk

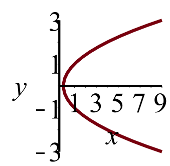
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; y = x^2$, a függvény síkbeli derékszög Descartes koordináta - rendszerben ábrázolt grafikonjának egyenlete.

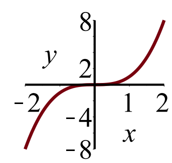
x szokásos elnevezése független változó, y, vagy f(x) a függvény érték.

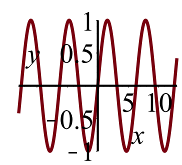
Az alábbi grafikonokat vizsgáljuk meg, lehetnek-e függvény képei (ill. egy függvény képeinek részei)?











Az értelmezési tartomány

Két lehetség van:

1. A függvény megadásával együtt az értelmezési tartományt is megadják, ekkor nincs dolgunk az értelmezési tartomány meghatározásával.
2. A függvénynek csak a hozzárendelési utasítását adják meg. Ekkor az értelmezési a független változóknak az a legbvebb halmaza, ahol a függvény értelmezhet.

Jelölés: D_f

(Az értelmezési tartományt meghatározását egyszeren úgy is szoktuk fogalmazni, hogy megtesszük a szükséges ”kikötéseket”.)

A legfontosabb függvény típusok, ahol kikötést kell tenni:

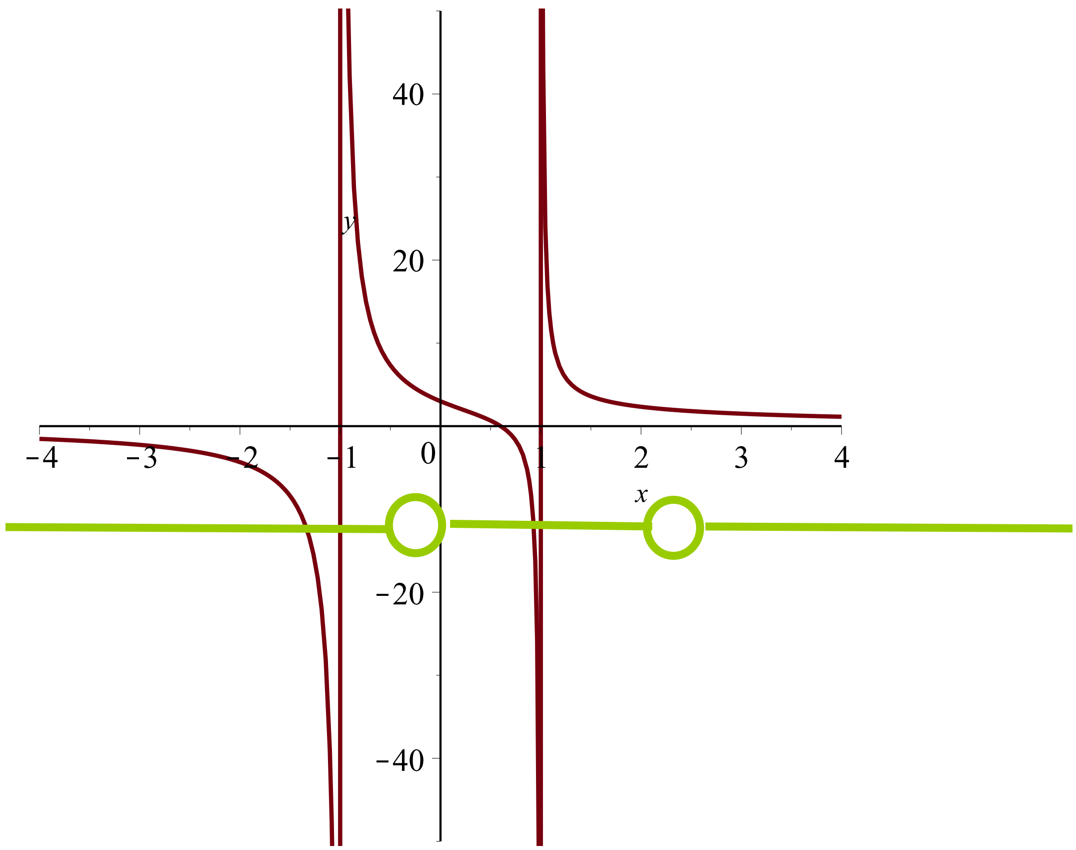
$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ $\qquad h(x) \neq 0$

A nullával való osztásnak nincs értelme, a tört nevezje nem lehet 0.

Példa: $f(x) = \dfrac{5x-3}{x^2-1}$ $\qquad$ Kikötés: $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$

D_f: $\mathbb{R} \setminus \{-1; +1\}$

```
> plot([(5 x - 3)/(x^2 - 1)], x=-4..4, y=-50..50);
```



> $solve(x^2 - 1 \neq 0)$

$$\{x \neq -1, x \neq 1\} \quad \mathbf{(1.1.1)}$$

A páros gyökkitev alatt csak nem negatív szám állhat.

$f(x) = \sqrt[2n]{g(x)} \qquad g(x) \geq 0 \qquad n \geq 1,\ n \in N$

Példa:

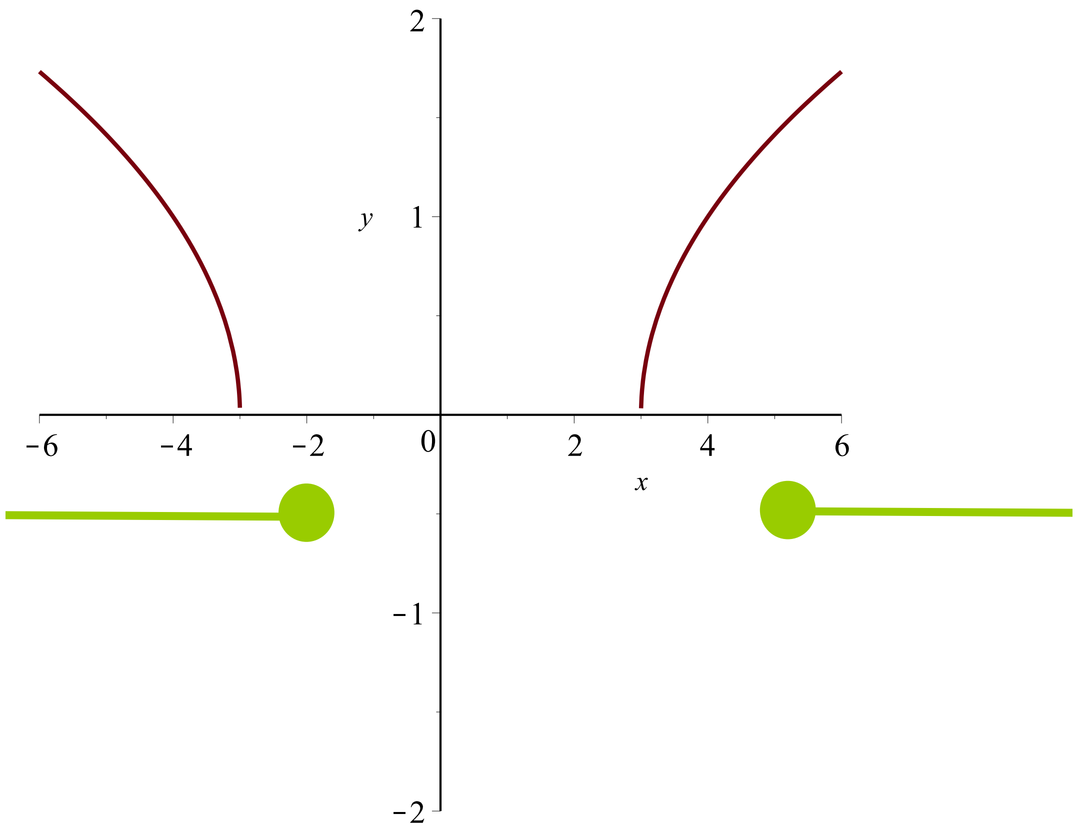
$f(x) = \sqrt{|x| - 3}$

Kikötés:

$|x| - 3 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 3 \Rightarrow x \geq 3$ vagy $x \leq -3$

D_f: $]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$

> $plot([\sqrt{|x| - 3}], x = -6..6, y = -2..2);$



> $solve(|x| - 3 \geq 0)$

$$RealRange(3, \infty), RealRange(-\infty, -3) \quad \textbf{(1.1.2)}$$

Csak pozitív számnak vehetjük a logaritmusát.

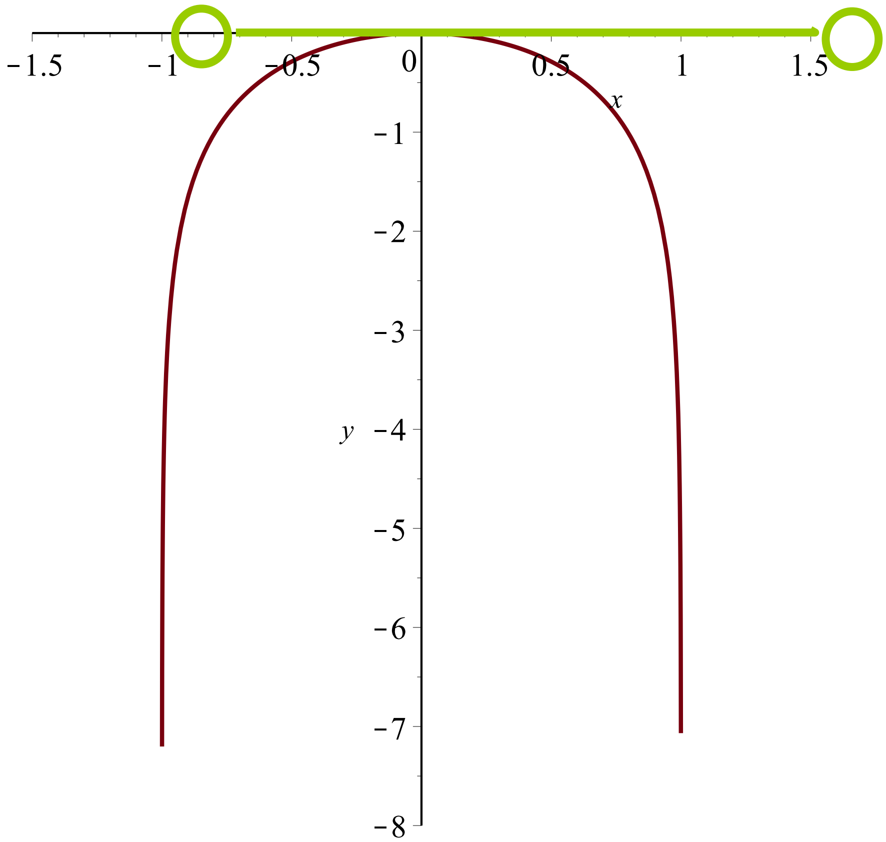
$f(x) = \log_a g(x) \qquad g(x) > 0 \quad a > 0 \quad a \neq 1$

Példa:

$f(x) = \ln(1 - x^2) \qquad 1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

D_f: $]-1;1[$

> $plot([\ln(1 - x^2)], x = -1.5..1.5, y = -8..0);$



> $solve(1 - x^2 > 0)$

$$RealRange(Open(-1), Open(1)) \quad (1.1.3)$$

Figyelem!
Minden függvényekkel kapcsolatos feladatnál, ha a feladat nem adja meg az értelmezési tartományt, az els dolgunk meghatározni azt, vagyis a szükséges kikötéseket megtenni, akár kérdezi ezt a feladat, akár nem.

Mikor kell kikötést tenni? Ha a függvény képlete tartalmaz osztást, páros gyököt, vagy/és logaritmust. (A tgx és a ctgx függvények a sinx és cosx függvények hányadosai, osztást tartalmaznak, tehát a tgx és ctgx függvények esetén is kikötést kell tennünk.)

Függvény tulajdonságok

Zérushely

Azon $x \in D_f$, amelyre $f(x) = 0$

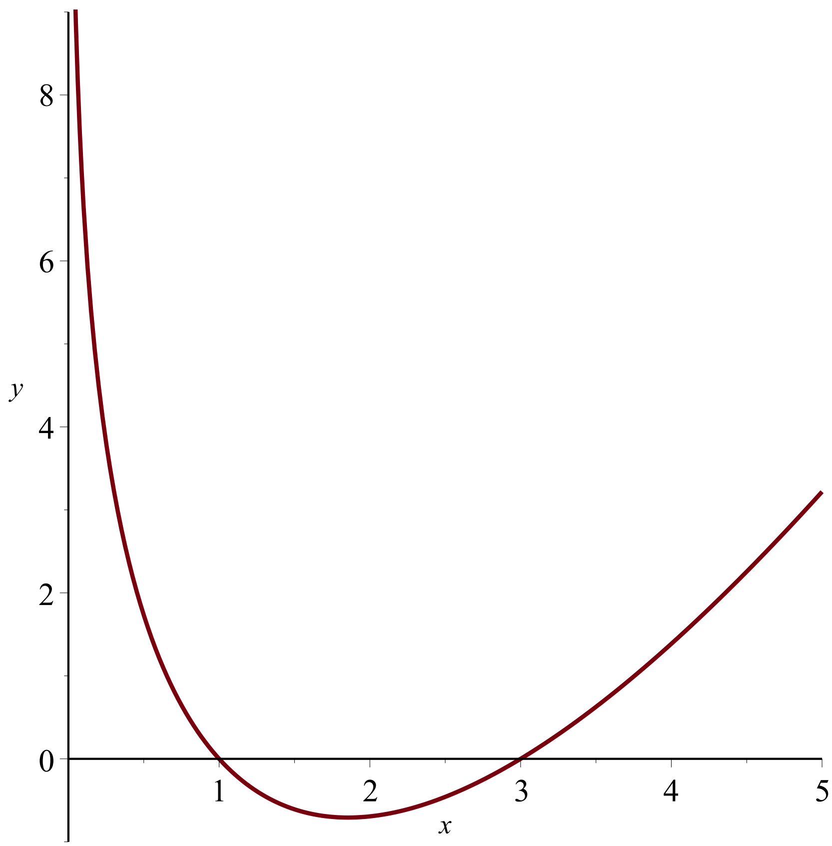
Szemléletesen: ahol a függvény az x tengelyt metszi.

Határozzuk meg a következ függvény zérushelyét:
$f(x) = (x-3) \cdot \ln x \qquad D_f : x > 0$

$(x-3) \cdot \ln x = 0$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$, vagy $\ln x = 0 \Rightarrow x_2 = 1$ Szorzat akkor egyenl nullával, ha valamelyik tényezje nulla.

> *plot*([(x − 3) · ln(x)], x = 0 ..5, y =−1 ..9);



> *solve*((x − 3) · ln(x) = 0)

1, 3 **(2.1.1)**

Paritás

Definíció:

Az f(x) függvényt párosnak nevezzük, ha f(-x) = f(x) minden $x \in D_f$ esetén. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a függvény az y tengelyre tengelyesen szimmetrikus.
Az f(x) függvényt páratlannak nevezzük ,ha f(-x) = -f(x) minden $x \in D_f$ esetén. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a függvény az origóra középpontosan szimmetrikus.
Ha egy függvényre a fent leírtak egyike sem áll fenn, akkor azt mondjuk róla, hogy se nem páros se nem páratlan.
Az elnevezés onnan származik, hogy minden páros hatvány függvény páros és minden páratlan hatványfüggvény páratlan. (Ábrák a hatványfüggvényekrl, a különböz függvény típusoknál.)
A trigonometrikus függvények közül a cos(x) függvény páros a többi páratlan.

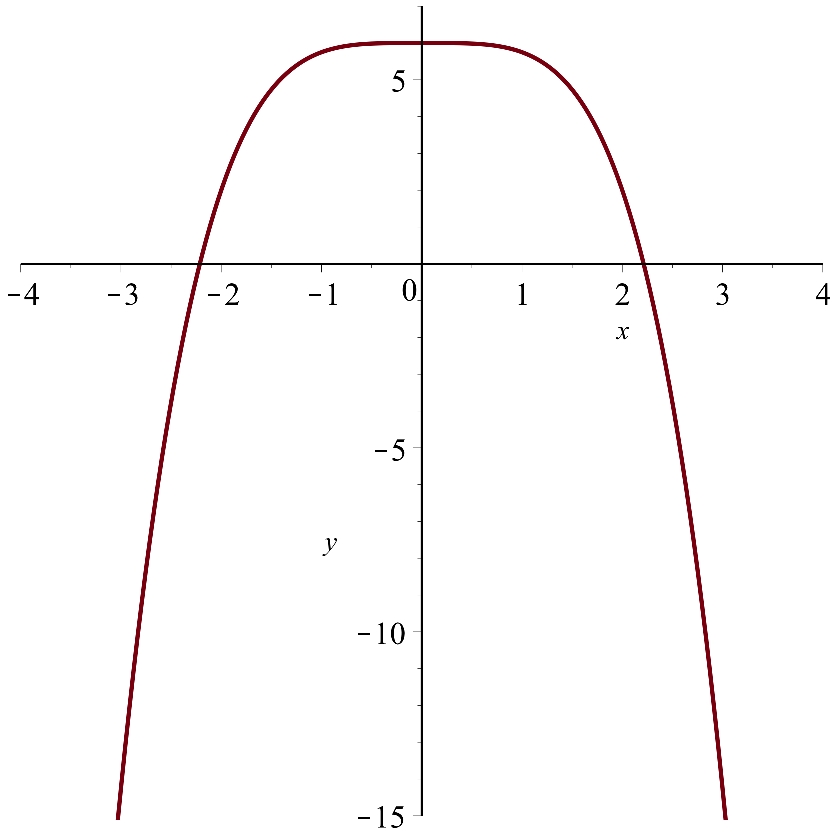
Példák:

Az $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 6$ függvény páros.

> $f(x) := -\frac{1}{4}\cdot x^4 + 6$

$$f := x \to -\frac{1}{4}x^4 + 6 \qquad \textbf{(2.2.1)}$$

> $plot\left(\left[-\frac{1}{4}\cdot x^4 + 6\right], x = -4..4, y = -15..7\right);$



>

> $f(-x)$

$$-\frac{1}{4}x^4+6 \quad \textbf{(2.2.2)}$$

> **if** $f(-x)=f(x)$ **then** *print*(*páros függvény*); **elif** $f(-x)=-f(x)$
then *print*(*páratlan függvény*); **else** *print*(*se nem páros, se nem páratlan függvény*);
end if;

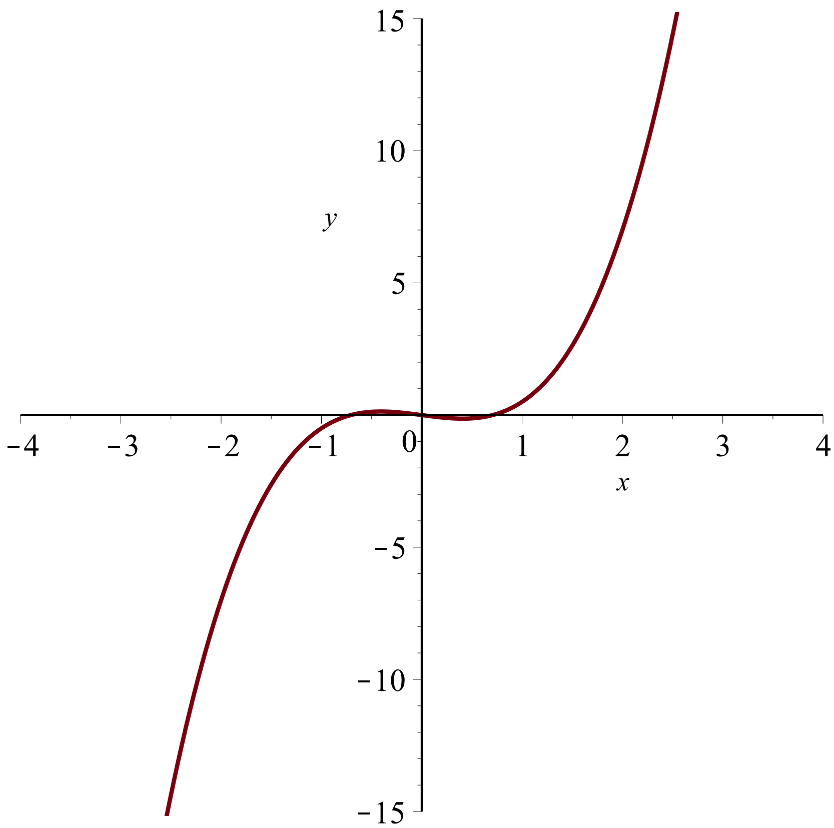
páros függvény **(2.2.3)**

A $g(x)=-\frac{1}{2}x+x^3$ függvény páratlan.

> $g(x) := -\frac{1}{2}x+x^3$

$$g := x \rightarrow -\frac{1}{2}x+x^3 \quad \textbf{(2.2.4)}$$

> $plot\left(\left[-\frac{1}{2}x+x^3\right], x=-4..4, y=-15..15\right);$



> $g(-x)$

$$\frac{1}{2}x - x^3 \tag{2.2.5}$$

> **if** $g(-x) = g(x)$ **then** *print*(*páros függvény*); **elif** $g(-x) = -g(x)$
> **then** *print*(*páratlan függvény*); **else** *print*(*se nem páros, se nem páratlan függvény*);
> **end if**;

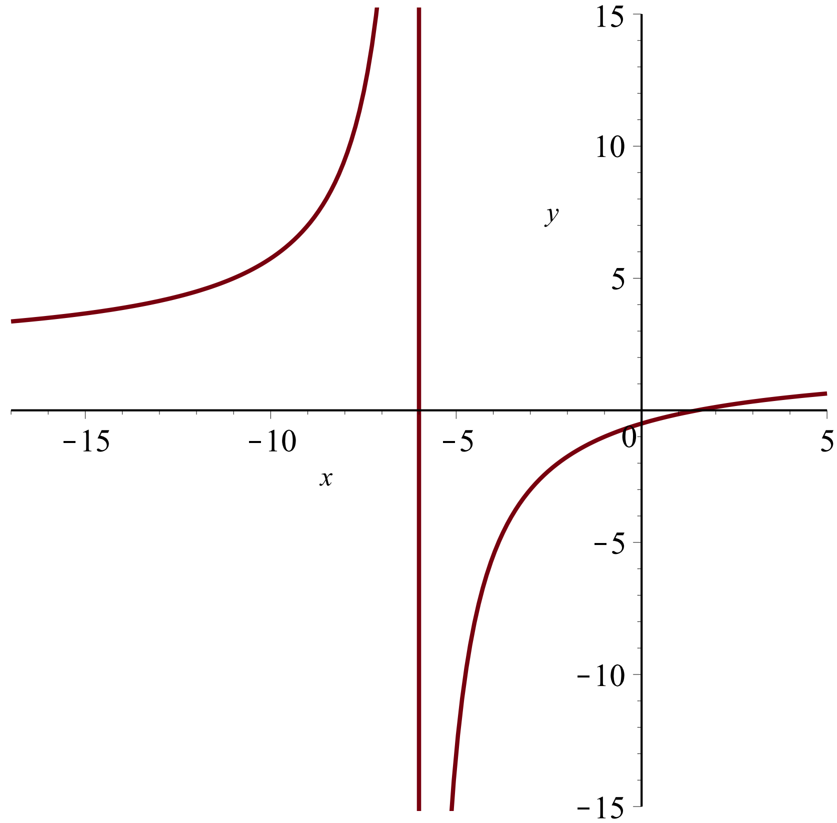
$$\textit{páratlan függvény} \tag{2.2.6}$$

A következ $h(x) = \dfrac{2 \cdot x - 3}{x + 6}$ függvény se nem páros, se nem páratlan.

> $h(x) := \dfrac{2 \cdot x - 3}{x + 6}$

$$h := x \rightarrow \frac{2x - 3}{x + 6} \tag{2.2.7}$$

> $plot\left(\left[\dfrac{2 \cdot x - 3}{x + 6}\right], x = -17..5, y = -15..15\right);$



> $h(-x)$

$$\frac{-2x-3}{-x+6} \qquad \textbf{(2.2.8)}$$

> **if** $h(-x) = h(x)$ **then** *print*(*páros függvény*); **elif** $h(-x) = -h(x)$
> **then** *print*(*páratlan függvény*); **else** *print*(*se nem páros, se nem páratlan függvény*);
> **end if**;

se nem páros, se nem páratlan függvény **(2.2.9)**

Hogyan tudjuk eldönteni ábrázolás nélkül számolással, hogy egy függvény páros, vagy páratlan? Helyettesítsük a függvény képletébe x helyett -x-et, majd egyszerüsítsük le a képletet amennyire lehet, és ezután nézzük meg, hogy visszakaptuk-e az eredeti függvényt, vagy a -1-szeresét.

$f(x) = x^2 + \cos(x)$ $\quad f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos(x) = f(x)$, ezért a függvény páros.

$g(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ $\quad g(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x^3}{x^2+1} = -\dfrac{x^3}{x^2+1} = -g(x)$, tehát a g(x) függvény páratlan.

$h(x) = 3 \cdot x^2 - x$ $\quad h(-x) = 3 \cdot (-x)^2 - (-x) = 3 \cdot x^2 + x$, $h(-x) \neq h(x)$ és $h(-x) \neq -h(x)$, ezért a függvény se nem páros, se nem páratlan.

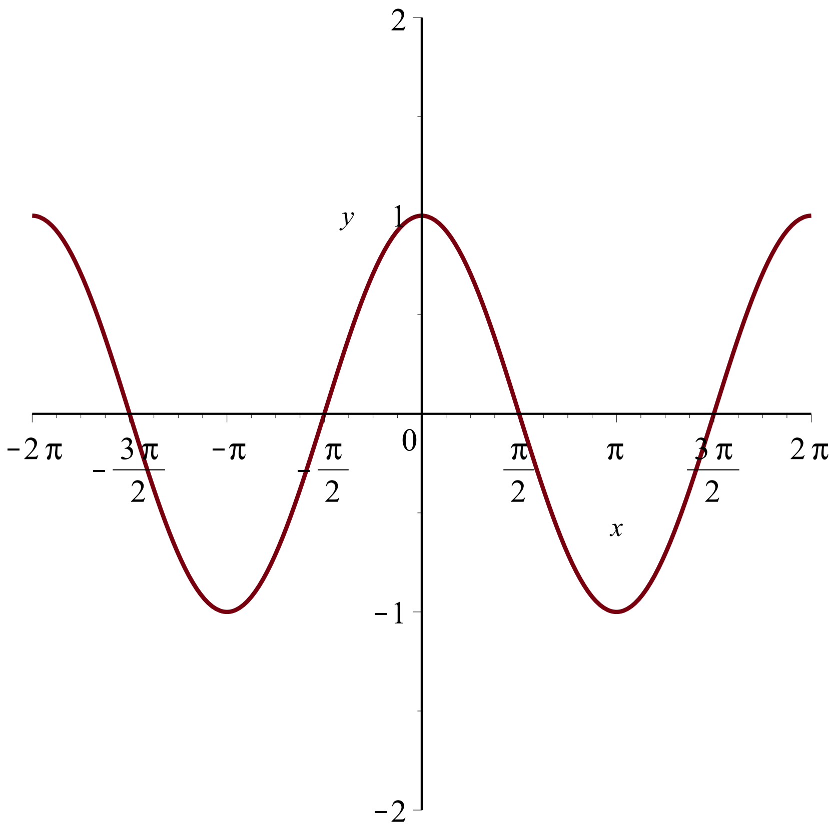
Periodikusság

Definíció:
Az f(x) függvényt peridikusnak nevezzük, ha van olyan p valós szám, amelyre f(x+p) = f(x). Az ilyen tulajdonságú valós számok között a legkisebbet a függvény periódusának nevezzük.

Példa:

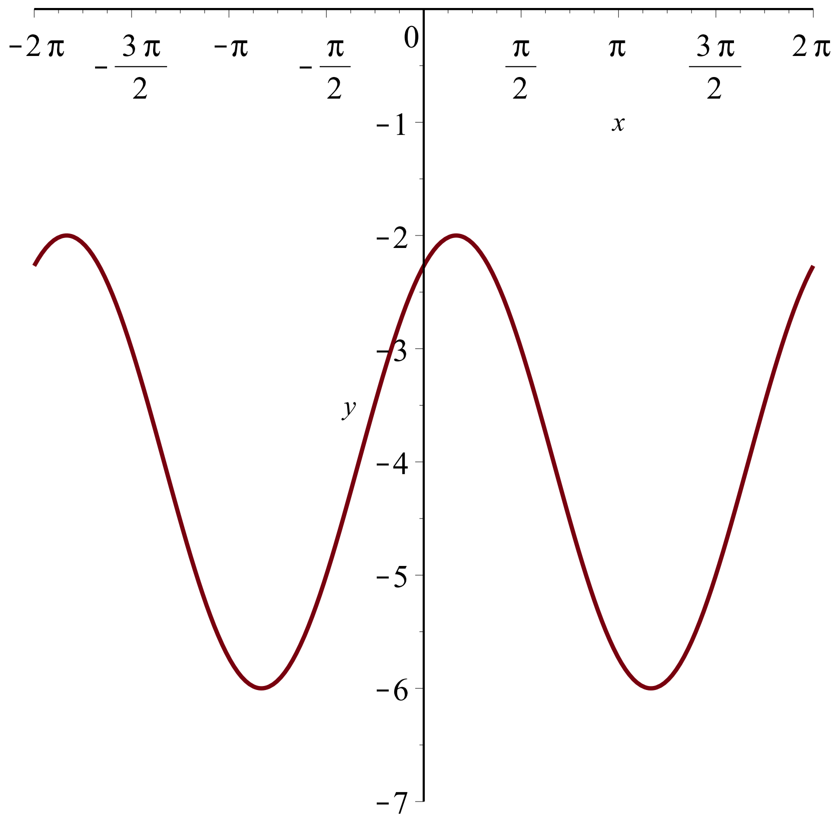
$f(x) = \cos x$ periódusa $= 2\pi$

> $plot(\cos(x), x = -2 \cdot \pi..2 \cdot \pi, y = -2..2);$



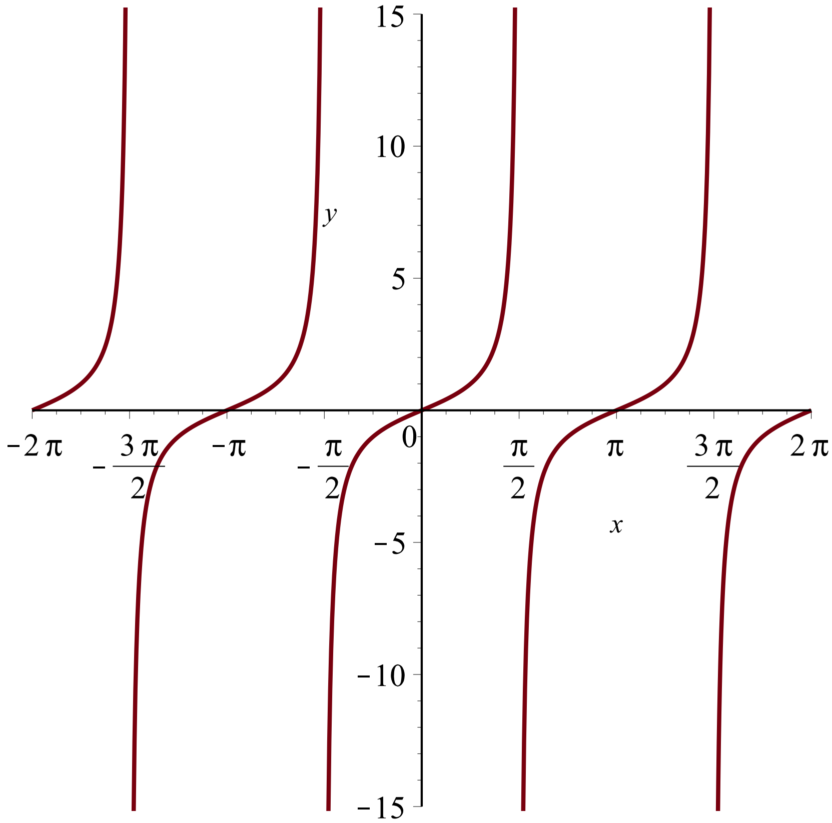
$g(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 4$ periódusa $= 2\pi$

> $plot\left(2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 4, x = -2 \cdot \pi..2 \cdot \pi, y = -7..0\right)$



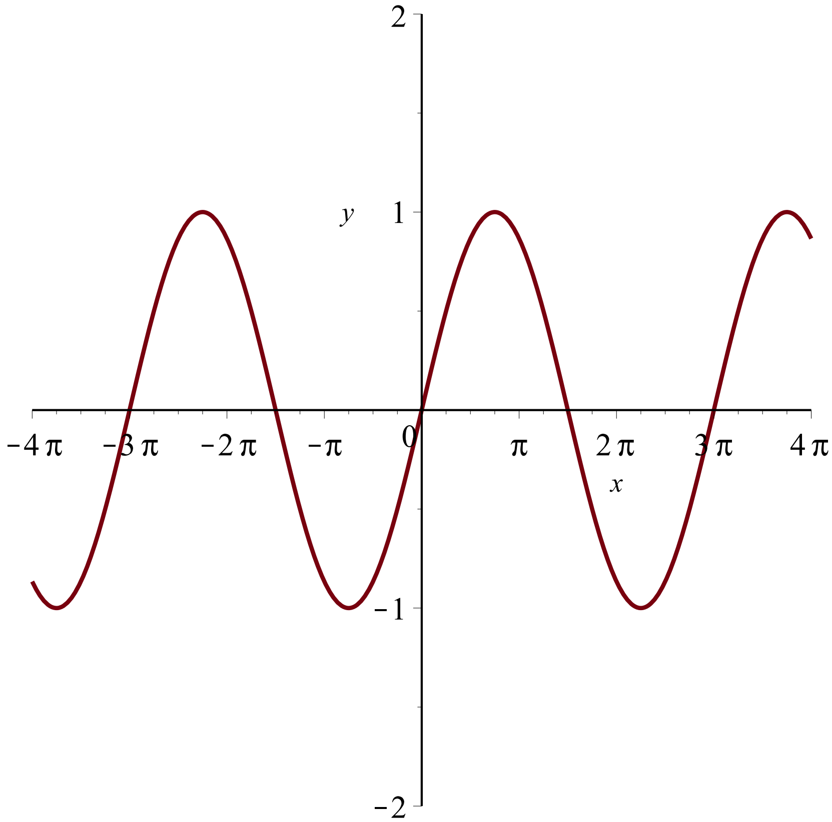
$g(x) = \mathrm{tgx}$ periódusa $= \pi$

> $plot(\tan(x), x = -2 \cdot \pi ..2 \cdot \pi, y = -15 ..15, discont = true)$



$h(x) = \sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ periódusa $2\pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi$

> $plot\left(\sin\left(\frac{2}{3}x\right), x = -4\cdot\pi..4\cdot\pi, y = -2..2\right);$



Általában is igaz, hogy $\sin(k \cdot x)$ függvény periódusa $2\,\pi \cdot \frac{1}{k}$

Monotonitás

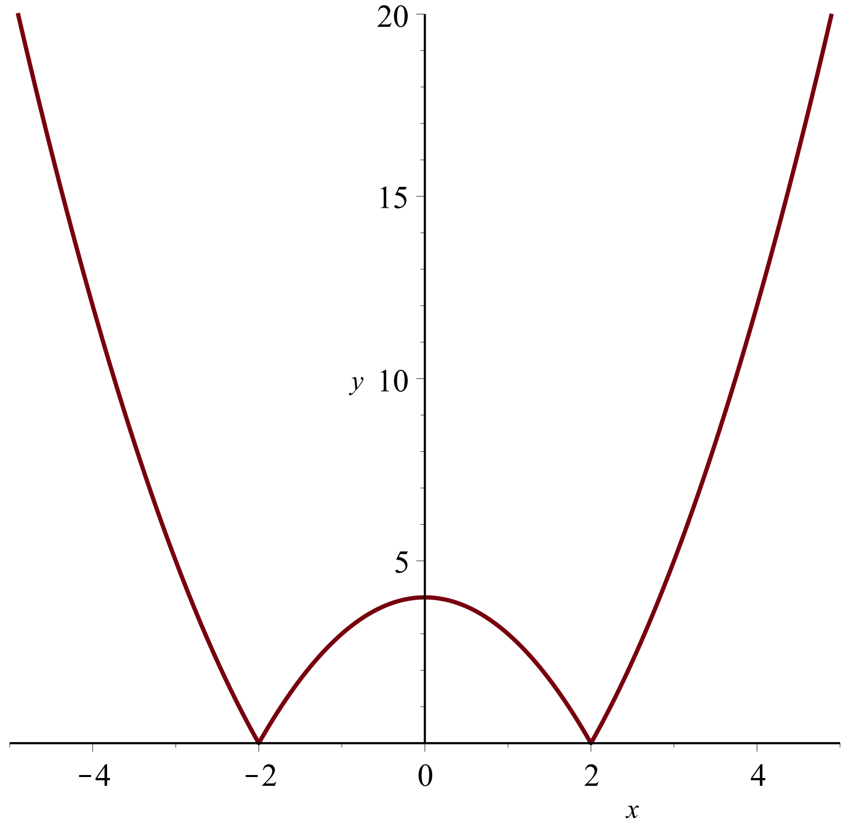
Definíció:
Az f(x) függvényrl azt mondjuk , hogy

szigorúan monoton csökken, \011ha $f(x_1) > f(x_2)$
monoton csökken, ha $f(x_1) \geq f(x_2)$
szigorúan monoton n, ha $f(x_1) < f(x_2)$
monoton n, ha $f(x_1) \leq f(x_2)$

az értelmezési tartomány bármely ,x_1 és x_2 $x_1 < x_2$ elemeire.
Példa:

Az $f(x) = |x^2 - 4|$ függvény

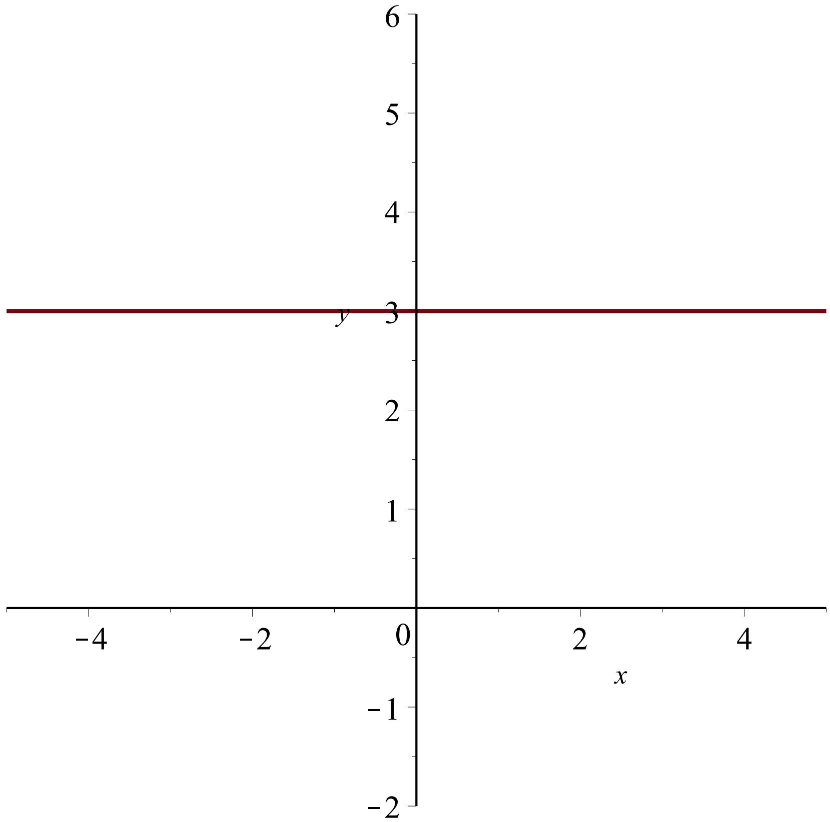
> $plot([|x^2-4|], x=-5..5, y=0..20)$;



a]-∞, -2] intervallumon szigorúan monoton csökken,
a [-2, 0]   intervallumon szigorúan monoton n,
a [0, 2]   intervallumon szigorúan monoton csökken,
a [2, ∞[intervallumon szigorúan monoton nő.

Az constans függvényt egyszerre mondjuk csökkennek és növekednek.

> $plot(3, x=-5..5, y=-2..6)$;



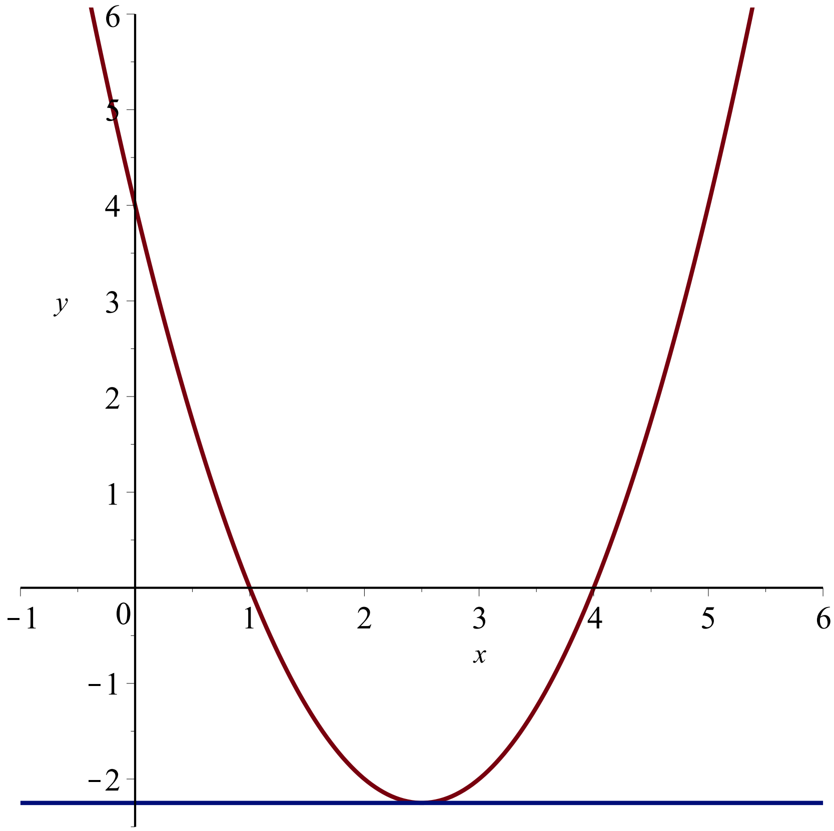
Korlátosság

Definíció:
Egy f(x) függvényt alulról korlátosnak nevezzük, ha van olyan k szám, amelyre $f(x) \geq k$.
Az f(x) függvényt felülrl korlátosnak nevezzük, ha van olyan K szám, amelyre $f(x) \leq K$.
A függvényt korlátosnak nevezzük, ha alulról is és felülrl is korlátos.

Példa:
Az $f(x) = x^2 - 5 \cdot x + 4$ függvény alulról korlátos. Alsó korlát pl. k = -3 vagy -2,5. Alsó korlátnak bármilyen -2,25-nél nem nagyobb szám alkalmas. Más szóval, ha találunk egy alsó korlátot, akkor bármilyen nála kisebb szám is jó lesz alsó korlátnak. Végtelen sok alsó korlát van. A legnagyobb alsó korlátot, ha létezik a függvény alsó határának, idegen szóval infimumának nevezzük.
Ebben az esetben a függvény alsó határát, a függvény képletének teljes négyzetté kiegészítésével kaphatjuk meg:

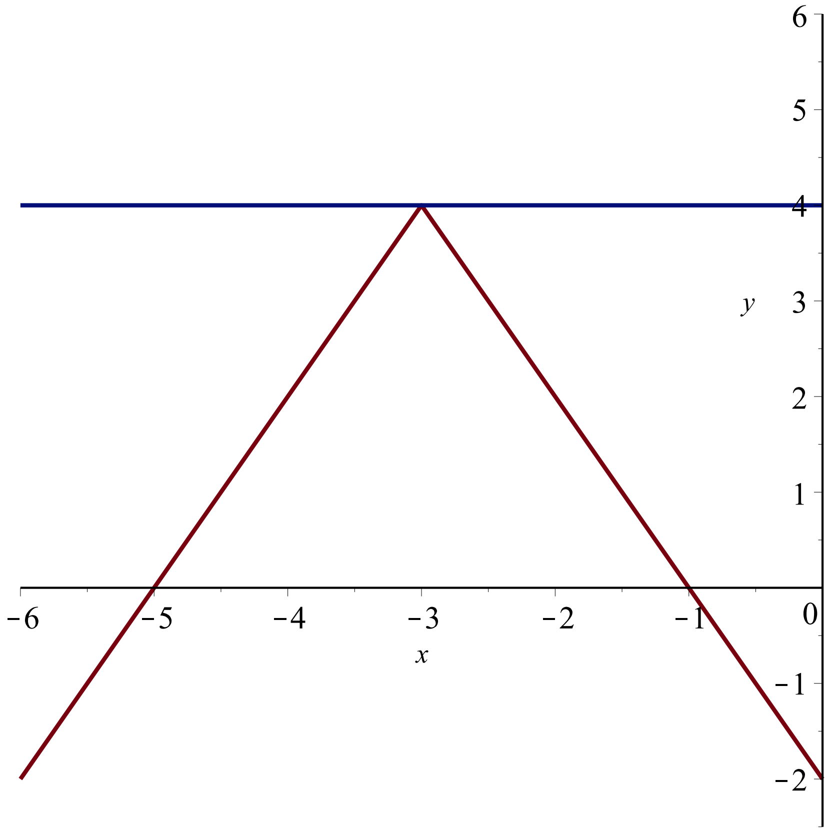
$f(x) = x^2 - 5 \cdot x + 4 = (x - 2.5)^2 - 2.25$

> $plot\left(\left[x^2 - 5 \cdot x + 4, -2.25\right], x = -1 ..6, y = -2.5 ..6\right);$



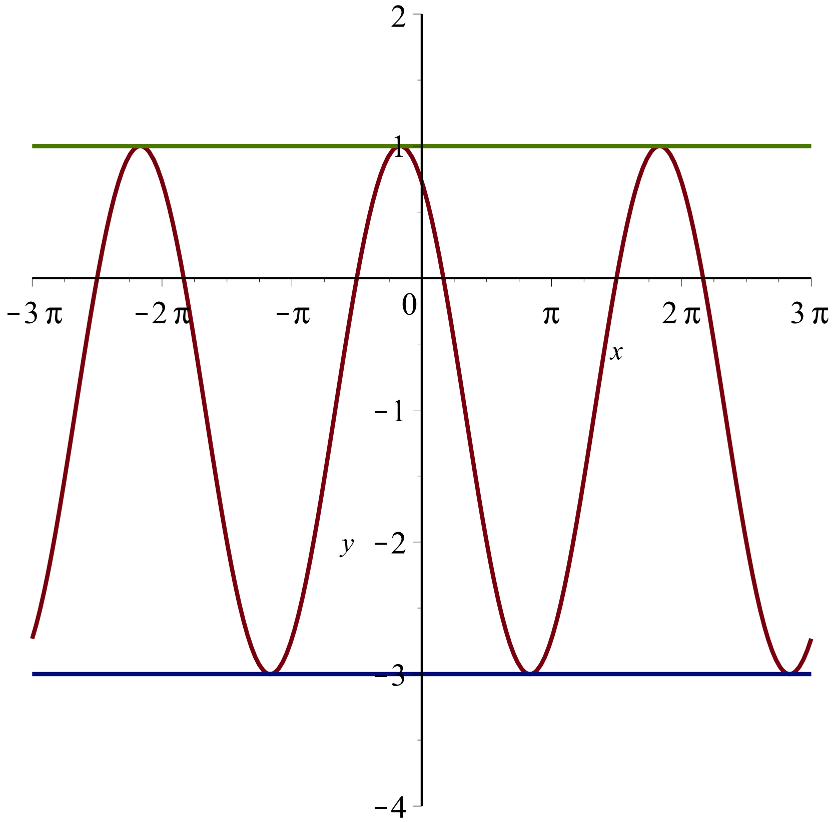
Az $f(x) = -2|x+3|+4$ függvény felülrl korlátos. Fels korlát például K=5 vagy K=4. Ha egy függvénynek megtaláljuk egy fels korlátját, bármely annál nagyob szám alkalmas lesz fels korlátnak. A legkisebb fels korlátot, ha létezik fels határnak, idegen szóval szupremumnak nevezzük.

> $plot([-2\cdot|x+3|+4, 4], x=-6..0, y=-2.5..6);$

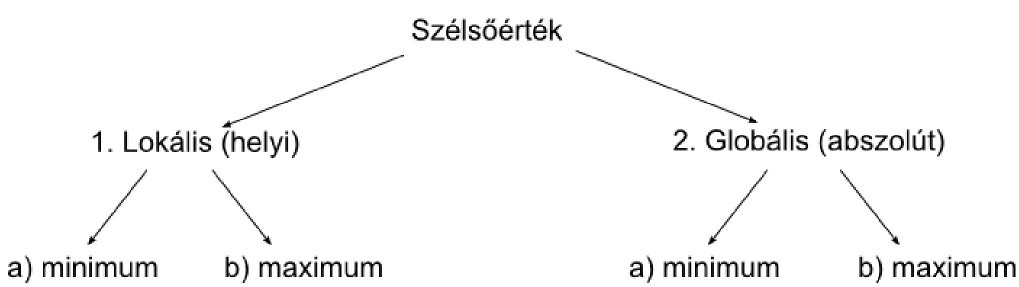


A $g(x) = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ függvény korlátos. Korlátok például -3 és 1.

> $plot\left(\left[-2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1, -3, 1\right], x = -3 \cdot \pi..3 \cdot \pi, y = -4..2\right);$



Szélsérték



1) Lokális (helyi)
a) minimum
Az f(x) függvény lokális (helyi) minimumát az x_1 helyen veszi fel, és minimum értéke $f(x_1)$, ha x_1-nek van olyan ε sugarú környezete, hogy a $f(x_1) \leq f(x)$, ha x az x_1 ε sugarú környezetében van.
Matematikai jelölésekkel: $\exists\ > 0$, hogy $f(x_1) \leq f(x)$, $\forall\ x \in\ ]\, x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon\, [$ esetén.

Hasonlat: „A szűkebb környezetéből negatív értelemben emelkedik ki; az évfolyam legrosszabb matematikusa, a helyi úszóbajnokság utolsó helyezettje, stb.”

b) maximum

Az f(x) függvény lokális (helyi) maximumát az x_1 helyen veszi fel és maximum értéke $f(x_1)$, ha x_1-nek van olyan ε sugarú környezete, hogy a $f(x_1) \geq f(x)$, ha x az x_1 ε sugarú környezetében van.
Matematikai jelölésekkel: $\exists \; > 0$, hogy $f(x_1) \geq f(x)$, $\forall\ x \in \left] x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon \right[$ esetén.

Hasonlat: „A szűkebb környezetéből pozitív értelemben emelkedik ki; az évfolyam legjobb matematikusa, a helyi úszóbajnokság első helyezettje, a falusi szépségkirálynő, stb.”

2) Globális (abszolút)

a) minimum

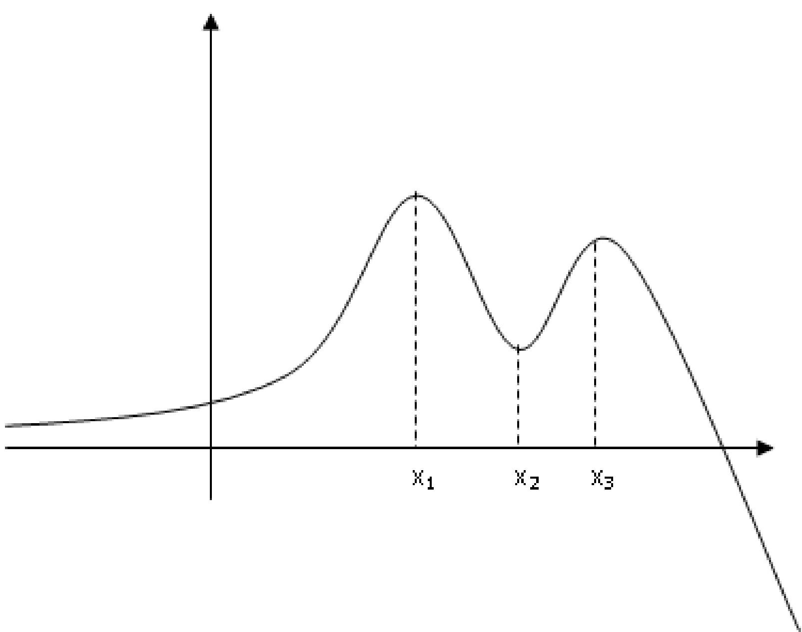
Az f(x) függvény globális (abszolút) minimumát az x_1 helyen veszi fel, és minimum értéke $f(x_1)$, ha $f(x_1) \leq f(x)$ minden $x \in D_f$ esetén.

Hasonlat: „A világ legbénább embere az adott területen.:)”

b) maximum

Az f(x) függvény globális (abszolút) maximumát az x_1 helyen veszi fel, és maximum értéke $f(x_1)$, ha $f(x_1) \geq f(x)$ minden $x \in D_f$ esetén.

Hasonlat: „Az adott terület világbajnoka.”



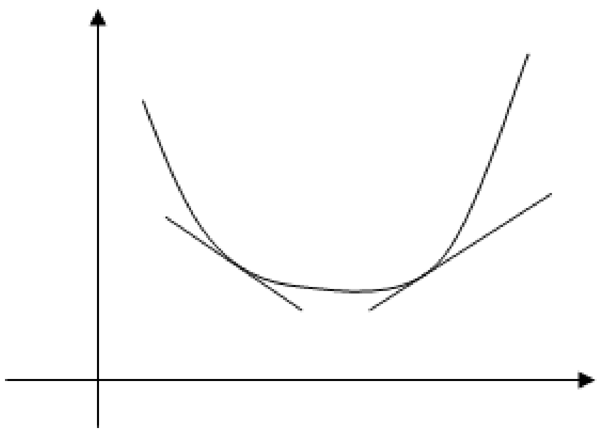
Tegyük fel, hogy az ábrán vázolt függvényre igaz a következ két határérték: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ és

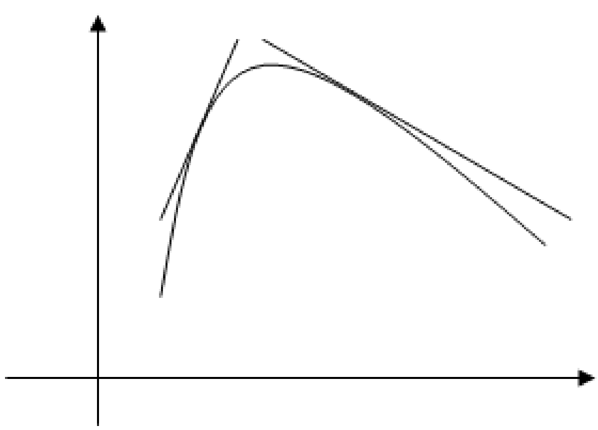
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, akkor az ábrán vázolt függvénynek nincs abszolút minimuma, lokális minimuma x_2-ben, lokális maximuma x_1-ben és x_3-ban van, de x_1 egyben globális maximum hely is.

Konvexitás

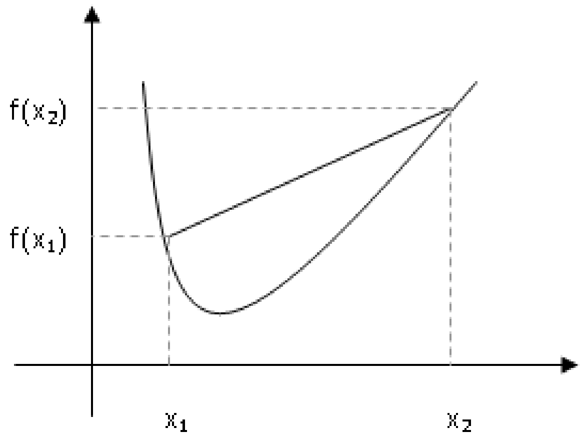
Szemléletes definíciók.

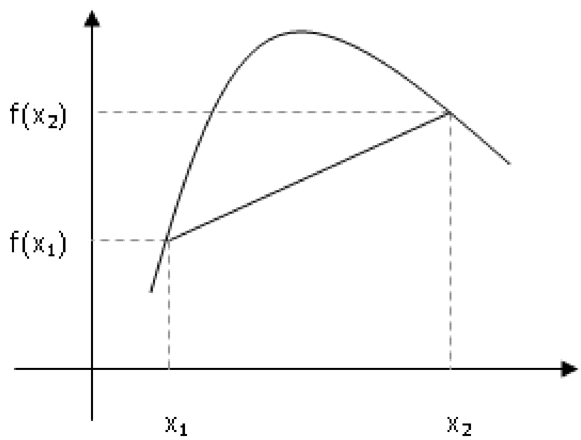
Egy függvény akkor konvex, ha érintje mindenütt a függvénygörbe alatt halad.
Egy függvény akkor konkáv, ha érintje mindenütt a függvénygörbe felett halad.
(Ezt a megfogalmazást és szemléltetést használják a mikroökonómia tanárai.)



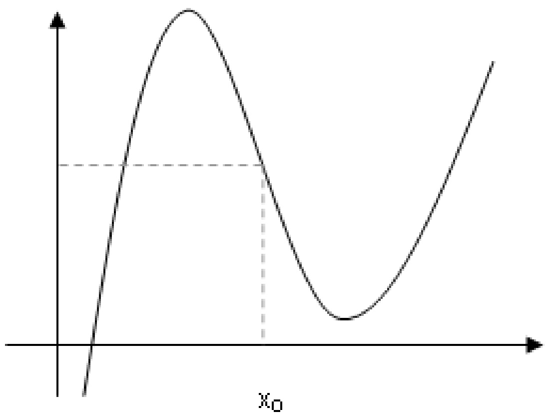


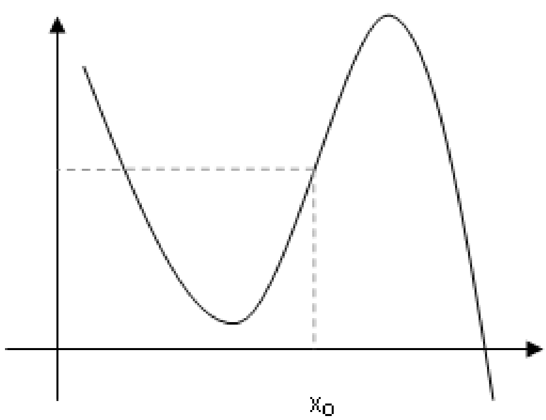
Másik megfogalmazás és szemléltetés:
Az f függvény az értelmezési tartományának egy intervallumában konvex (konkáv), ha az intervallum bármely $x_1 < x_2$ értékeinél fennáll, hogy a függvény grafikonja az $(x_1; f(x_1))$ és az $(x_2; f(x_2))$ pontokat összeköt szakasz alatt (felett) halad.





Az f függvénynek inflexiós pontja van az értelmezési tartományának egy x_0 helyén, ha létezik az értelmezési tartománynak olyan]a; b[(a < x_0 < b) intervalluma, hogy f az]a; x_0]-ban konvex (konkáv), az [x_0; b[-ben konkáv (konvex).
Szemléletesen: Az inflexiós pontban (x_0) a függvény konvexbl konkávba, vagy konkávból konvexbe „billen át”.





Egy vicces ábra a konvexitás szemléltetésére:
Forrás: http://cheezburger.com/1092644096

De a jó ismert Smilik is a konvex, konkáv görbékre utalhatnak:

Elemi függvények és függvénytranszformációk

Az elemi függvények az $f(x) = x$, $f(x) = a^x$ és az $f(x) = \sin(x)$ függvényekbl származtathatók, képlettel megadhatók és véges számú

- konstanssal való szorzás,
- összeadás, szorzás, osztás,
- inverz függvény képzése,
- összetett függvény képzése

mveletek alkalmazásával felírhatók.

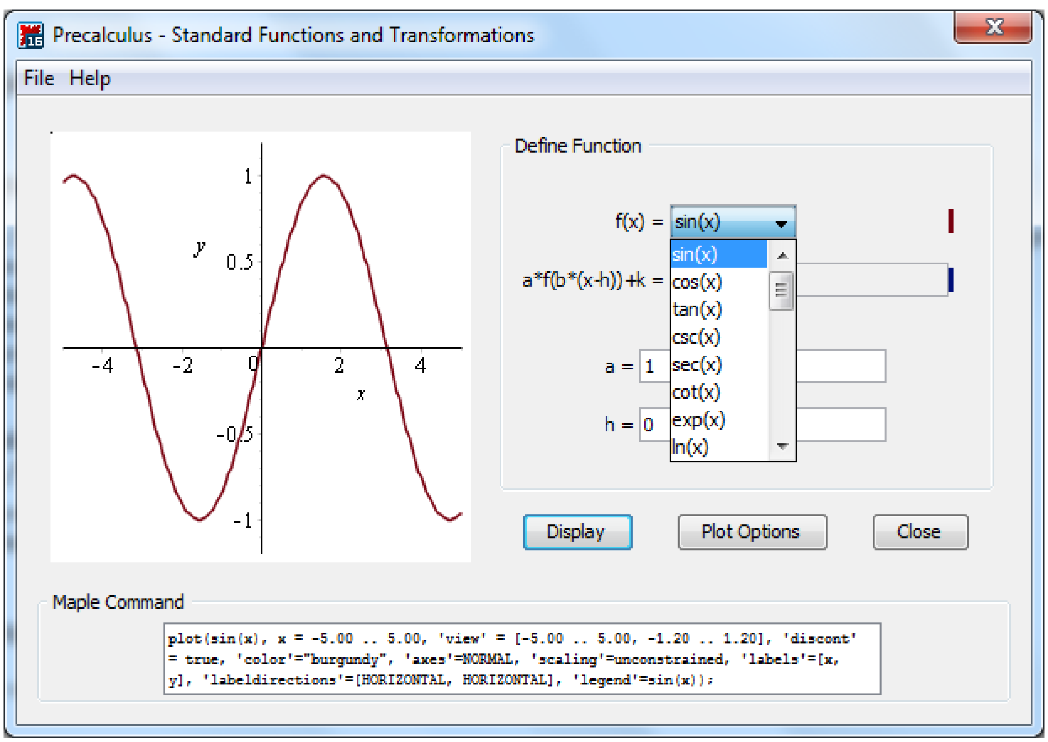
Elemi alapfüggvényeknek nevezzük a

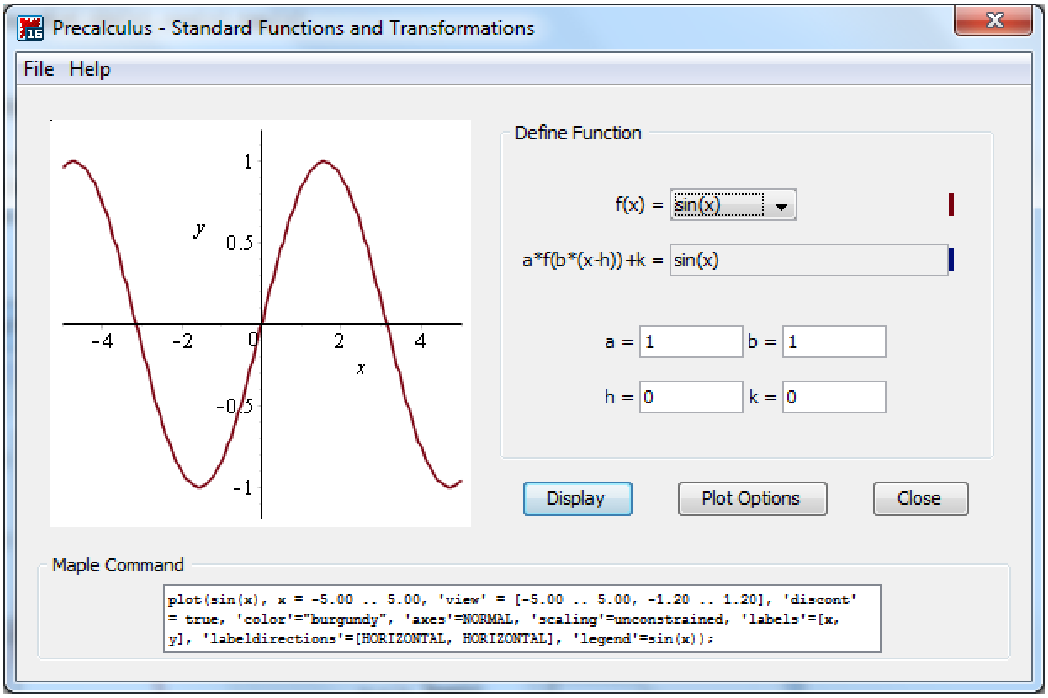
- hatványfüggvényeket, x^n
- exponenciális függvényeket, a^x
- trigonometrikus függvényeket, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$
- és ezek inverzeit.

Az összetett és inverz függvény képzésérl a késbbiekben lesz szó.

Elször nézzünk néhány elemi alapfüggvényt.
Ezeket a függvényeket az alább látható ablakban lehet tanulmányozni.
Az ablak az elemi alapfüggvények nev gomb megnyomásával hozható el.
Az ablak bal oldali képe mutatja a legördül listát, ahonnan a függvényeket választhatjuk. A számunkra szükségesnél a listában több függvény található. A bennünket érdekl függvények: sin(x), cos(x), tan(x) = tg(x), cot(x) = ctg(x), exp(x) = e^x, ln(x) = $\log_e(x)$, log10(x) = lg(x) = $\log_{10}(x)$, abs(x) = $|x|$, sqrt(x) = $\sqrt{x}$
Azonkívül, hogy ezeknek a függvényeknek a képét megnézhetjük, a függvények transzformációit is tanulmányozhatjuk.

Elemi alapfüggvények



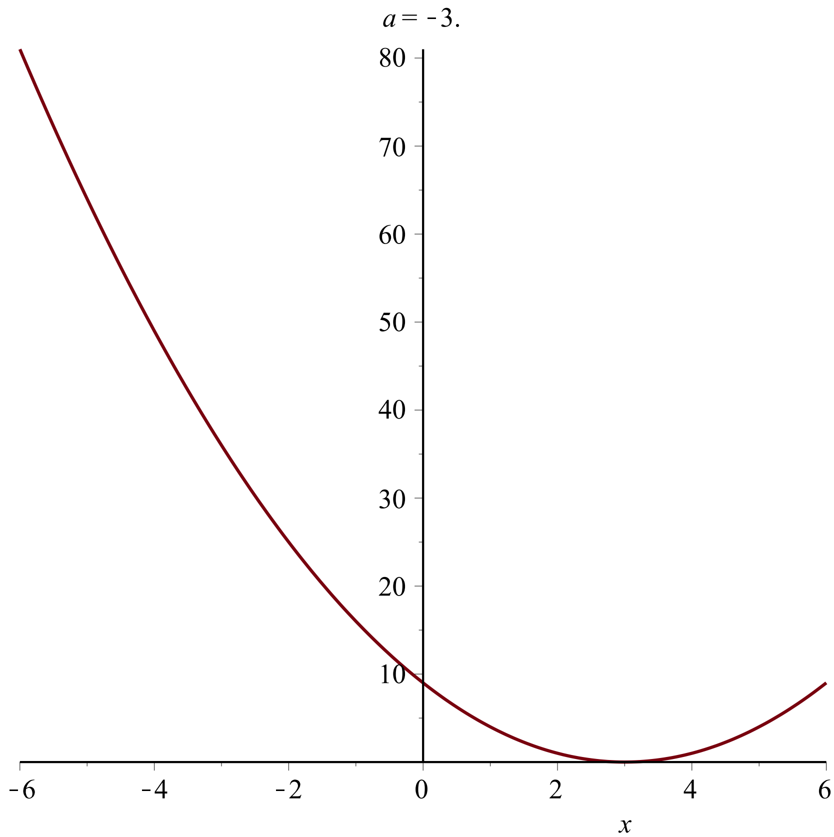


A következ táblázat összefoglalja a függvény transzformációkat.

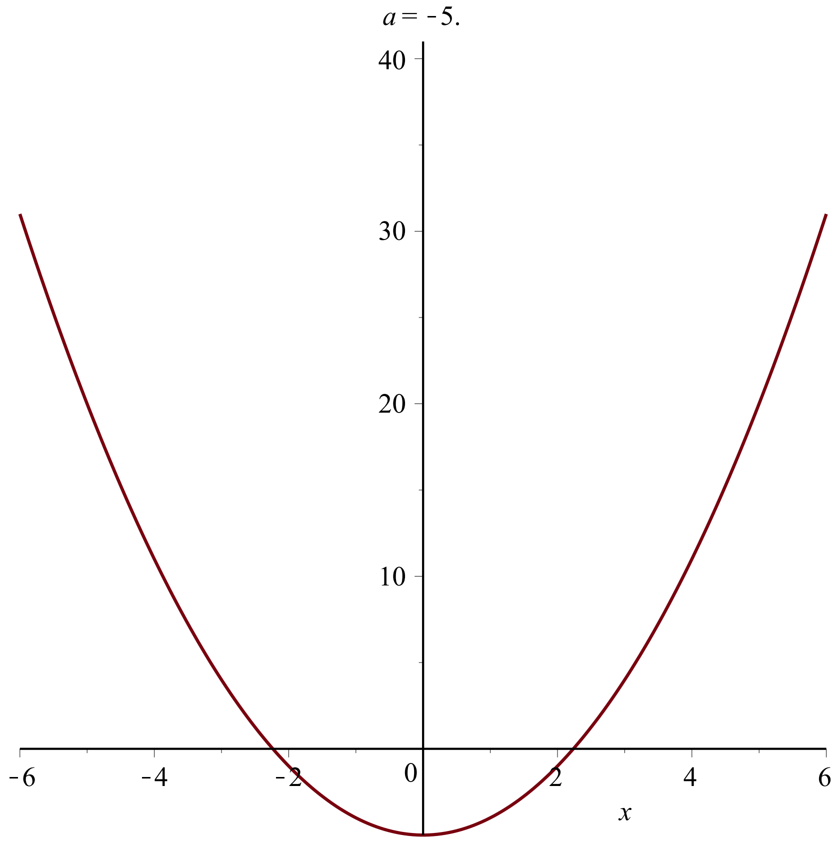
Transzformáció típusa	Független változó transzformáció (x)	Függvényérték transzformáció (y)
Eltolás	$f(x+a)$ eltolás: ha a>0: balra; a<0: jobbra	$f(x)+a$ eltolás: ha a>0: felfelé; a<0: lefelé
Nyújtás, zsugorítás	$f(c \cdot x)$ ha c>1: zsugorítás; 0<c<1: nyújtás	$c \cdot f(x)$ ha c>1: nyújtás; 0<c<1: zsugorítás
Tükrözés	$f(-x)$ tükrözés az y tengelyre	$-f(x)$ tükrözés az x tengelyre

Nézzünk minden transzformációra egy-egy animációt:
A fels (zöld) táblázat els sorában lev két eltolást az x^2 függvényre alkalmazzuk. Sorban $(x+a)^2$, x^2+a beírásával a megfelel utasításba.
Az animáció úgy indul csak el, ha a grafikont kijelöljük (rákattintunk). Ekkor megjelenik az animációt irányító panel.
Lassítsuk le az animáció futását, ekkor jobban tudjuk tanulmányozni a változást.

> $animate(\ plot,\ [\,(x+a)\,\hat{}\,2,\ x=-6\,..6\,],\ a=-3\,..3\ );$



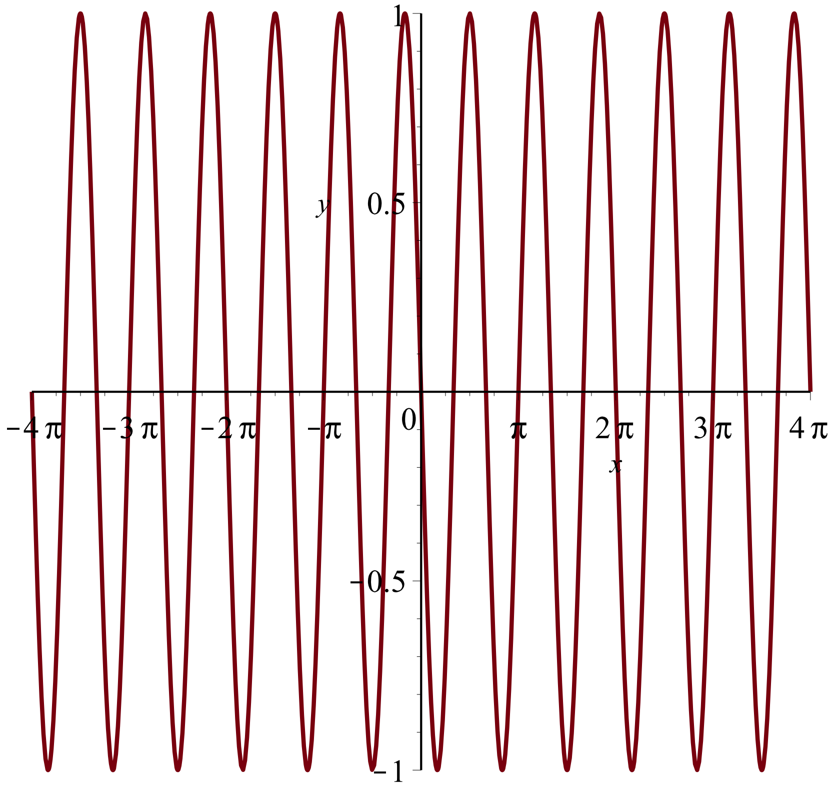
> $animate(\ plot,\ [x\,\hat{}\,2+a,\ x=-6\,..6\,],\ a=-5\,..5\ );$



A második és harmadik sor transzformációit alkalmazzuk a sin(x) függvényre. Először $\sin(c \cdot x)$, majd $c \cdot \sin(x)$ képlet függvényeket animáljuk.

> $animate\left(plot, \left[\sin(c \cdot x), x = -4 \cdot \pi ..4 \cdot \pi\right], c = -3 ..3\right);$

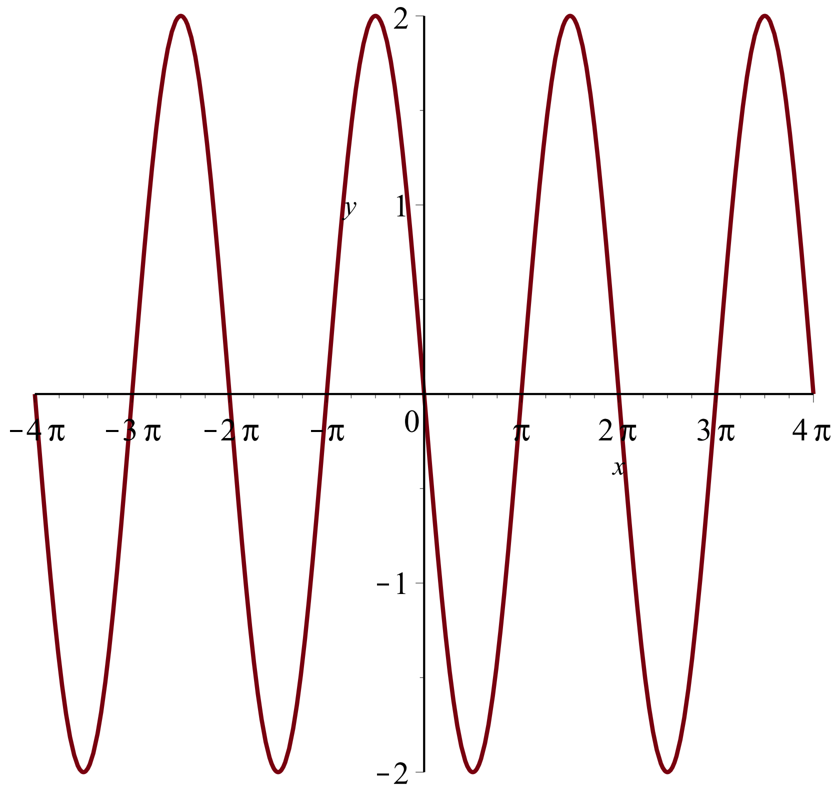
$c = -3.$



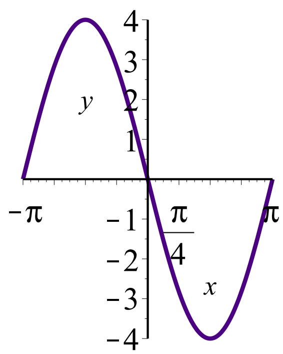
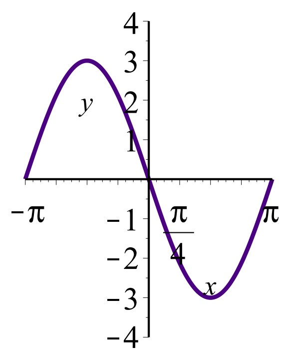
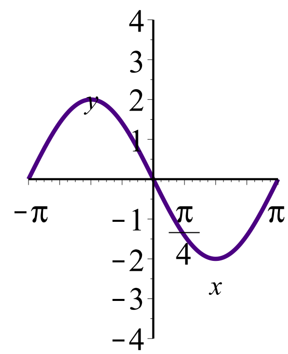
Azt is észrevehetjük, hogyha c értéke negatívból pozitívba vált, a függvény y tengelyre való tükrözése is megtörténik, ahogy a táblázat harmadik sorában látjuk.

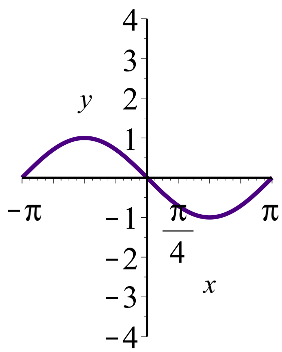
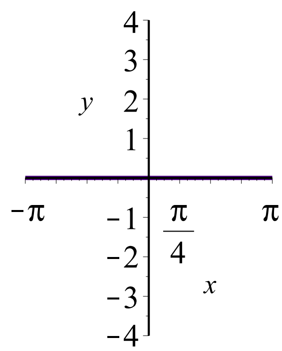
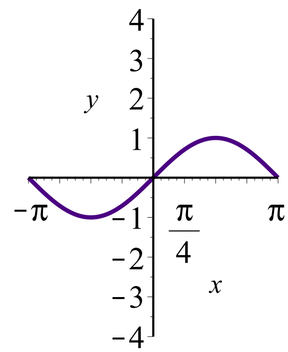
> $animate\left(plot, \left[c \cdot \sin(x), x = -4 \cdot \pi ..4 \cdot \pi\right], c = -2 ..2\right);$

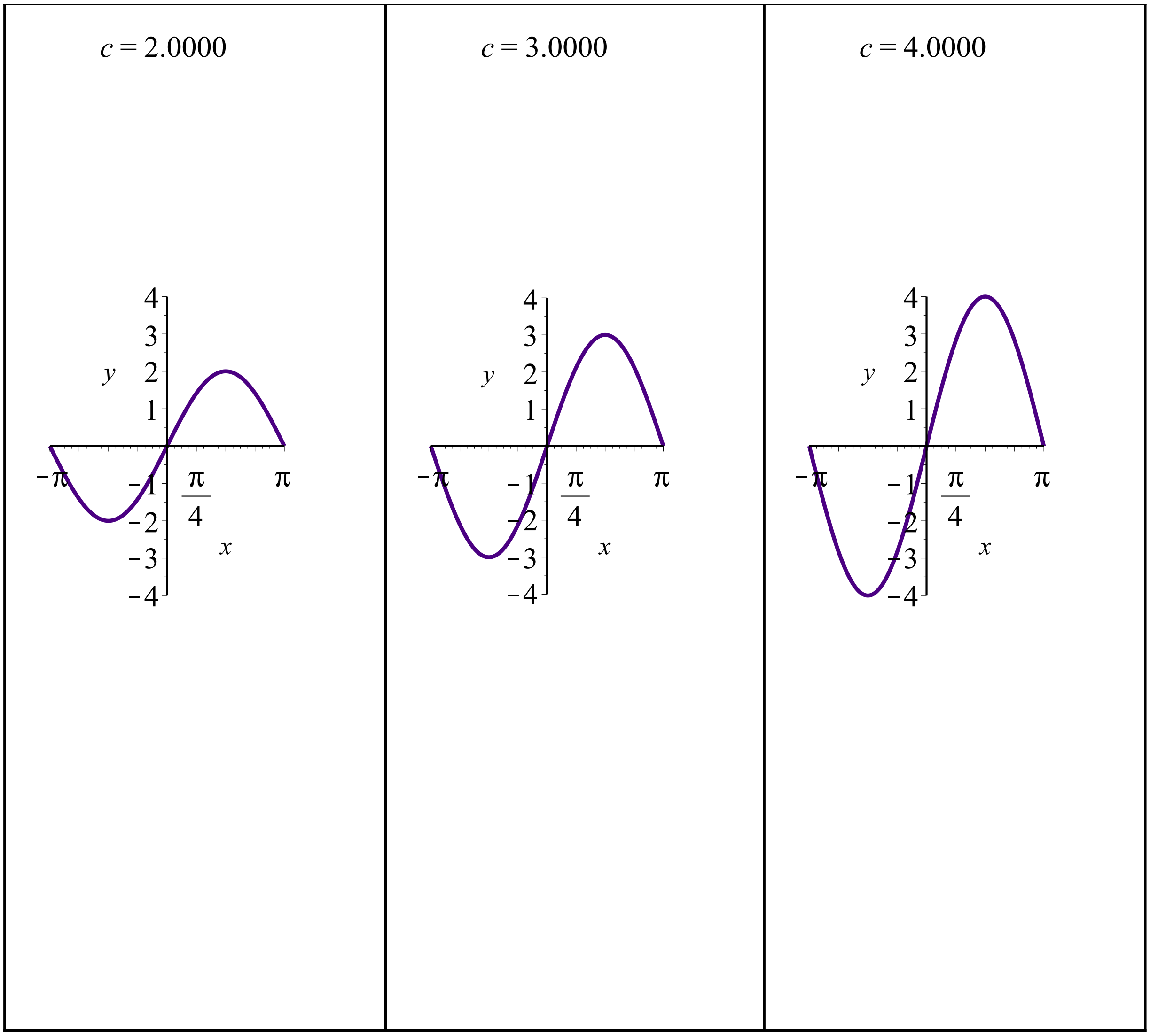
$c = -2.$



Most nézzük meg ugyanezt egy táblázatban különböz c értékekhez rendelve.

$c = -4.$	$c = -3.0000$	$c = -2.0000$
		

$c = -1.0000$	$c = 0.$	$c = 1.0000$
		

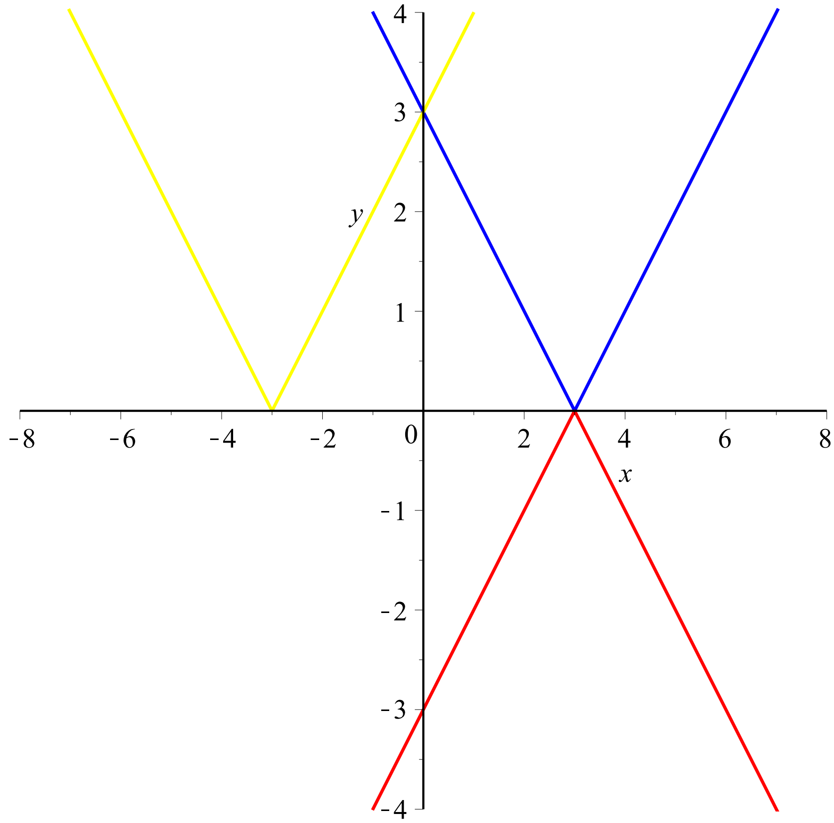


>

Itt is megfigyelhetjük a tükrözést, de most az x tengelyre. Meg tudjuk-e különböztetni a két különböz x és y tengelyre történ tükrözést a sin(x) függvény esetén? Nem, mert a sin(x) páratlan függvény és ezért $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Keressünk egy olyan függvényt, ahol a kétféle tükrözést eredményez transzformáció különböz lesz. Legyen a függvény pl. $|x-3|$

> $plot([|x-3|, -|x-3|, |-x-3|], x=-8..8, y=-4..4, color=[blue, red, yellow])$



Polinomok

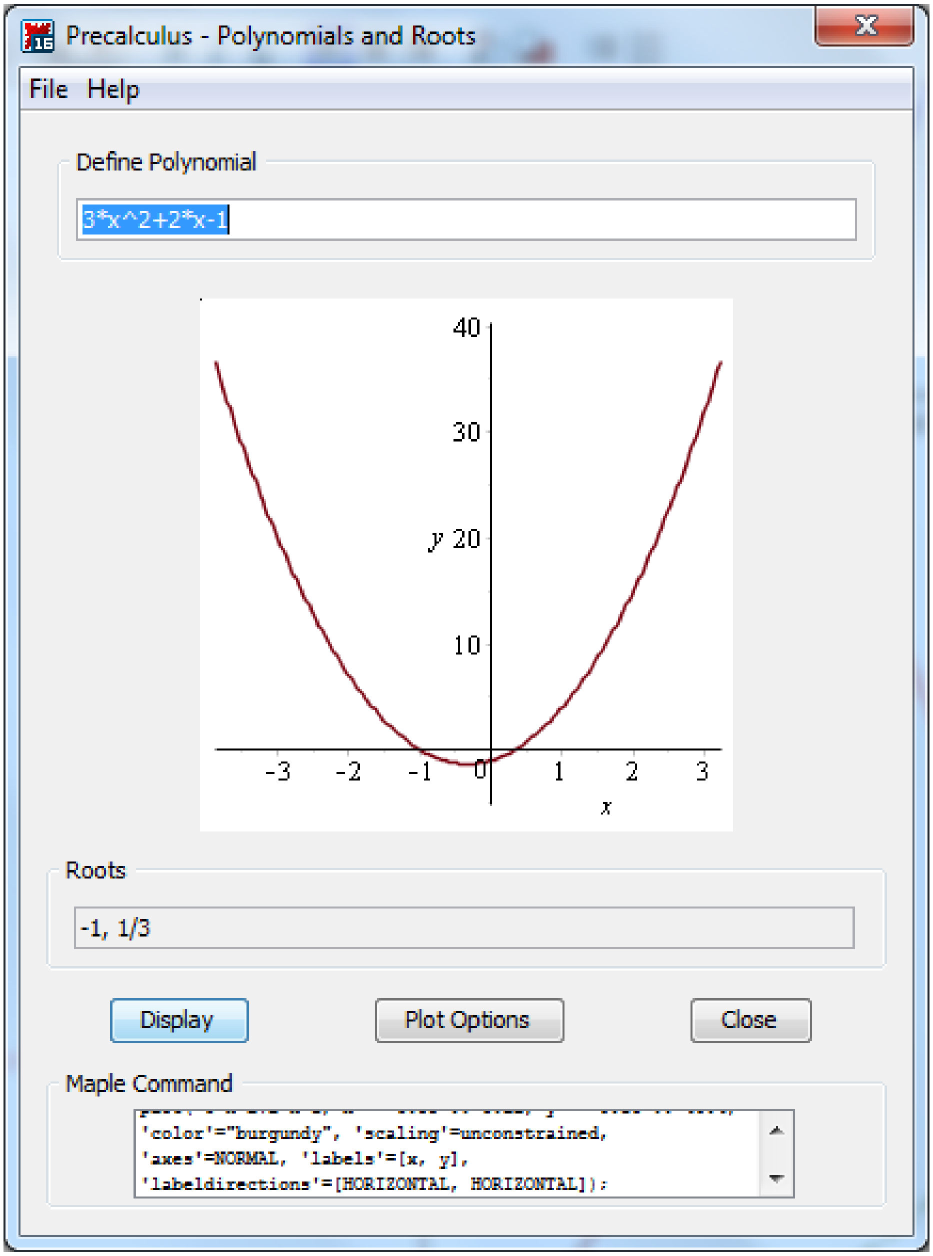
A $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$ alakú függvényeket polinomoknak (vagy racionális egész függvényeknek) nevezzük, ahol n természetes szám és $a_n \neq 0$, valós szám.

Ekkor a polinom n-ed fokú. Az $a_n, a_{n-1}, ...a_1, a_0$ számok is valósak, ezek a polinom együtthatói, az együtthatók között természetesen 0-k is lehetnek. Az elsfokú polinomot lineáris függvénynek is nevezzük. Polinomok például $3 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4$, $5 \cdot x^6 - 2 \cdot x^3 + 1$.

Ne felejtsük el beírni a szorzás és hatványozás jelét, ahogy a képen is látható.

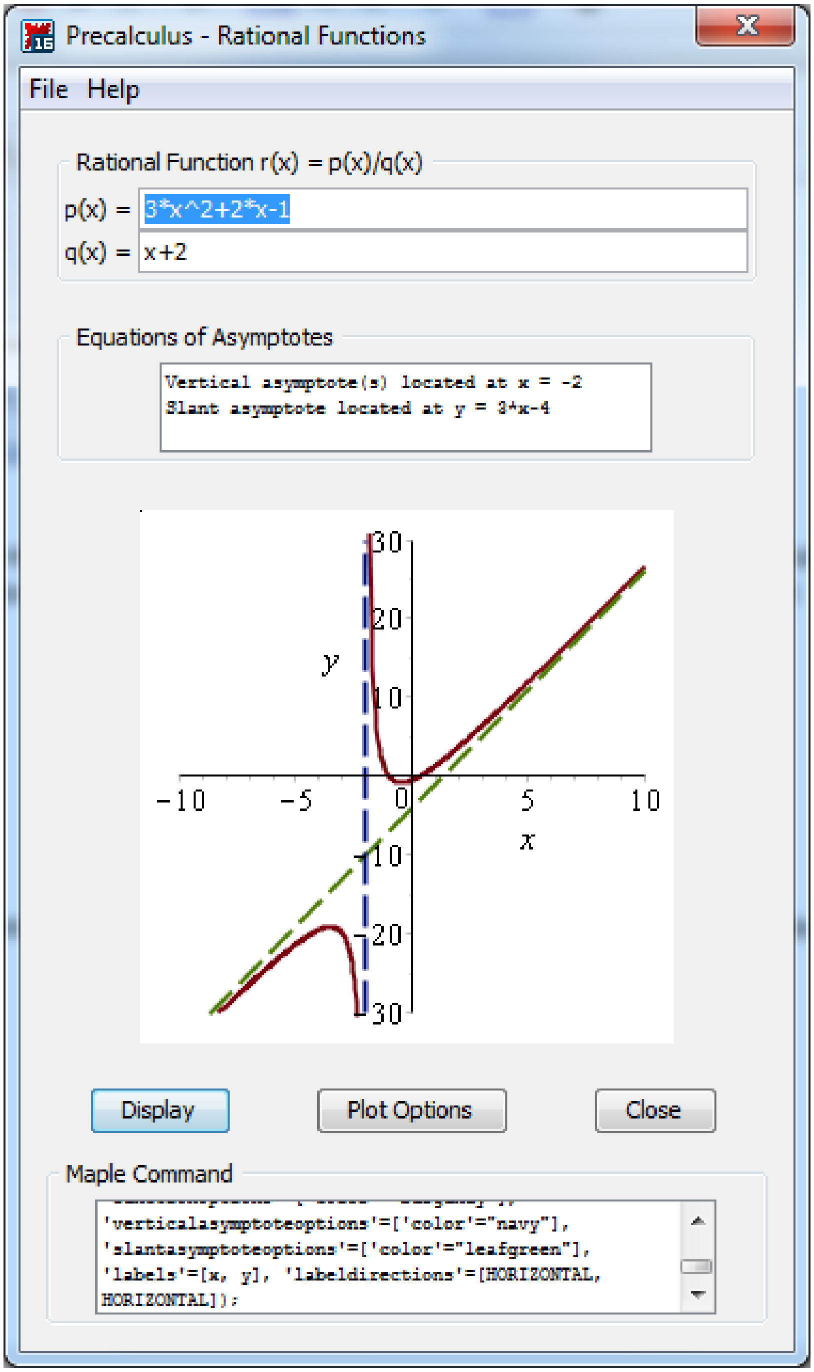
Feladat: Írjuk be a páros és páratlan kitevj hatványfüggvényeket és soroljuk fel a tulajdonságaikat. Miben különböznek egymástól?

Polinomok



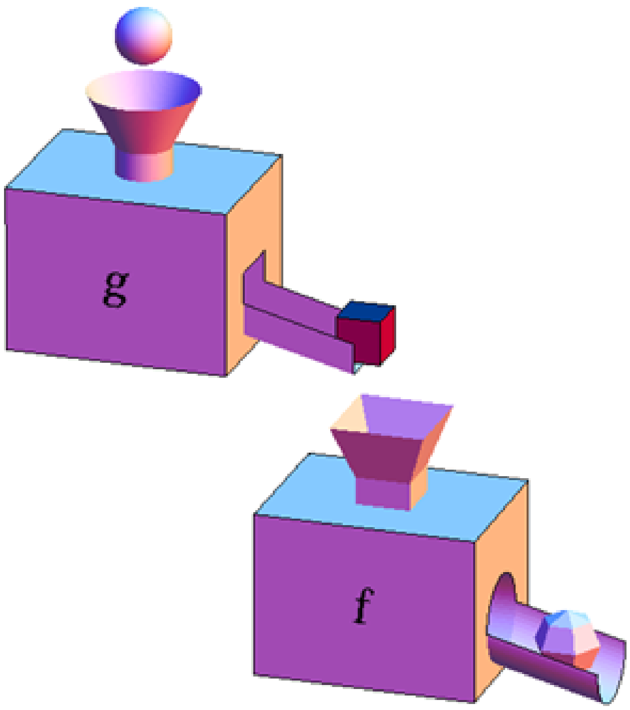
Két polinom hányadosát racionális törtfüggvénynek nevezzük. a következ gombbal egy olyan ablak hívható el, amelybe különböz racionális törtfüggvények képletét írhatjuk be, ezután megkapjuk a függvények képét és így tanulmányozhatjuk ket.

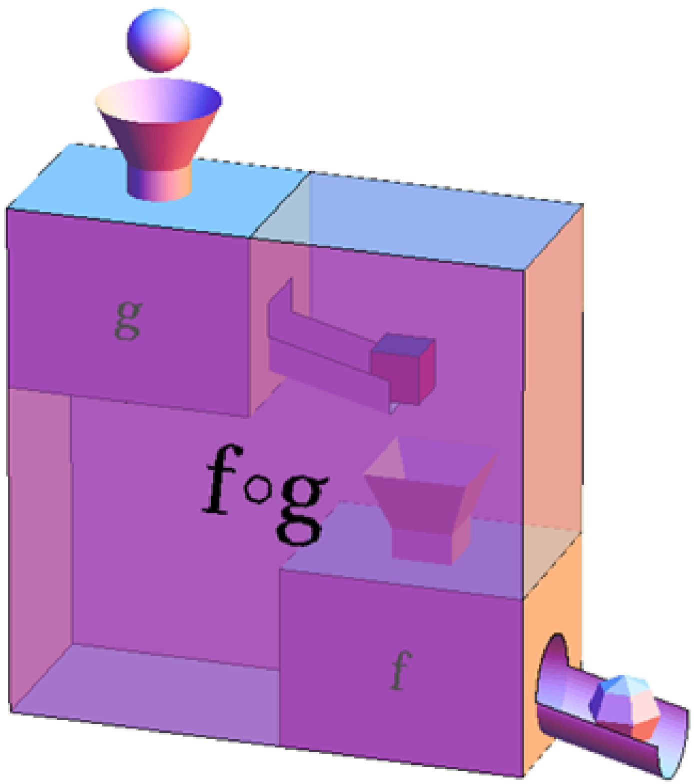
Racionális törtfüggvények



Összetett függvények

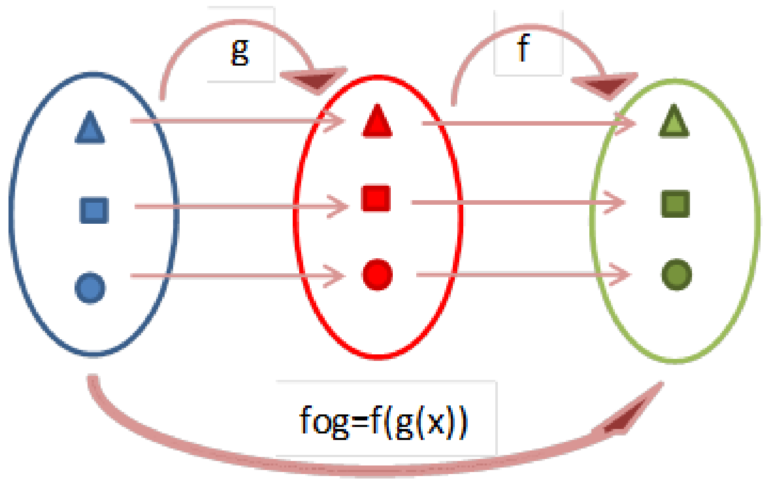
A következ ábra azt szemlélteti, hogy összetett függvényt szemléletesen úgy kaphatunk, hogy két függvény egymásutánját egyetlen függvénnyé kapcsolunk össze:





Forrás: http://mathinsight.org/function_machine_composition

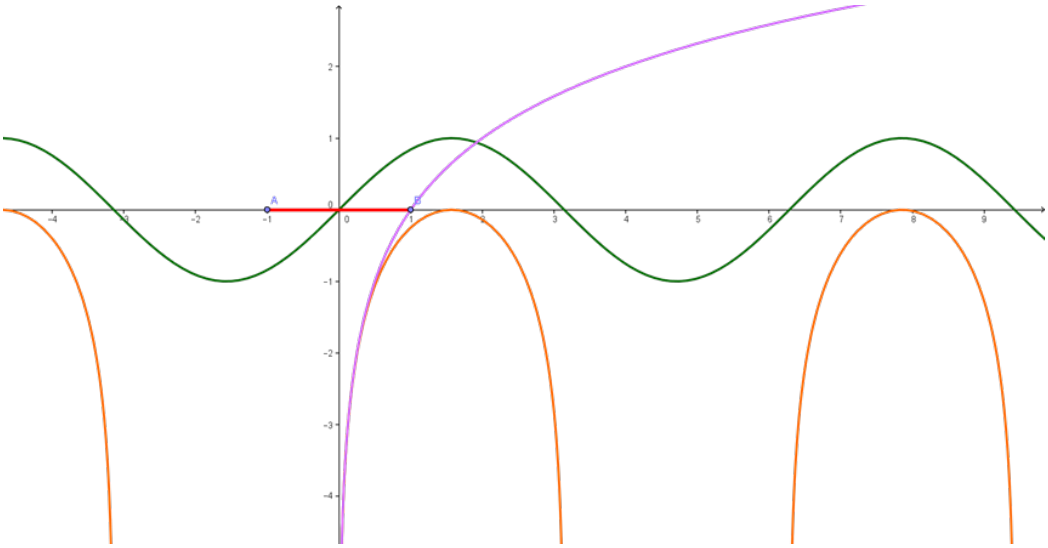
Ha visszatérünk a függvény definíciójához, halmazokkal a következőképpen tudjuk szemléltetni az összetett függvényt:

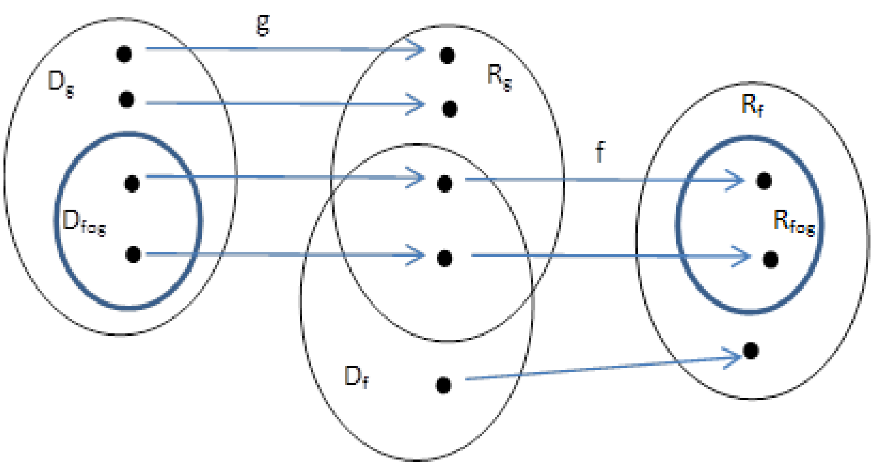


Ha $g(x) = 2\cdot x + 1$ és $f(x) = x^2$, akkor $f \circ g = f(g(x)) = (2\cdot x + 1)^2$

Az összetett függvény értelmezési tartománya:

Legyen most $g(x) = \sin(x)$ $f(x) = \log_2(x)$ ekkor $f(g(x)) = \log_2(\sin(x))$. Számítsuk ki az $f\left(g\left(\frac{7\cdot\pi}{6}\right)\right)$ értékét! Els lépésben a bels függvény értékét határozzuk meg, $\sin\left(\frac{7\cdot\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, ezután a kapott érték kettes alapú logaritmusát kellene meghatároznunk, de mivel negatív értéket kaptunk, ennek nincs logaritmusa.
Hogyan tudjuk meghatározni az összetett függvény értelmezési tartományát úgy, hogy a fenti probléma ne forduljon el?
A g függvény értelmezési tartományának az a részhalmaza lehet csak az összetett függvény értelmezési tartománya, amelyhez tartozó g szerinti függvény értékek az f függvény értelmezési tartományába esnek.
A fenti esetben $\sin(x) > 0$, vagyis $2\cdot k\cdot\pi < x < \pi + 2\cdot k\cdot\pi$ halmaz lesz az összetett függvény értelmezési tartománya.
A kapott összetett függvényt az alábbi ábra mutatja. A bels függvény értékkészletét az x tengelyre vetítve a piros AB szakasz mutatja.
Az is látható, hogy az összetett függvény csak ott van értelmezve, ahol a szinusz függvény pozitív értékeket vesz fel.

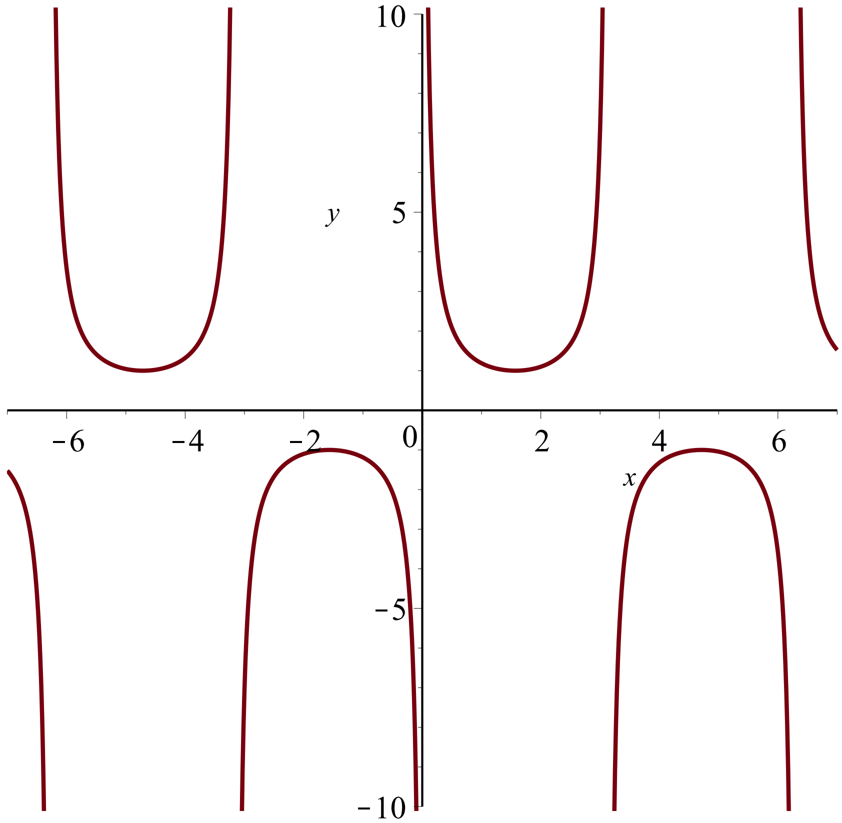




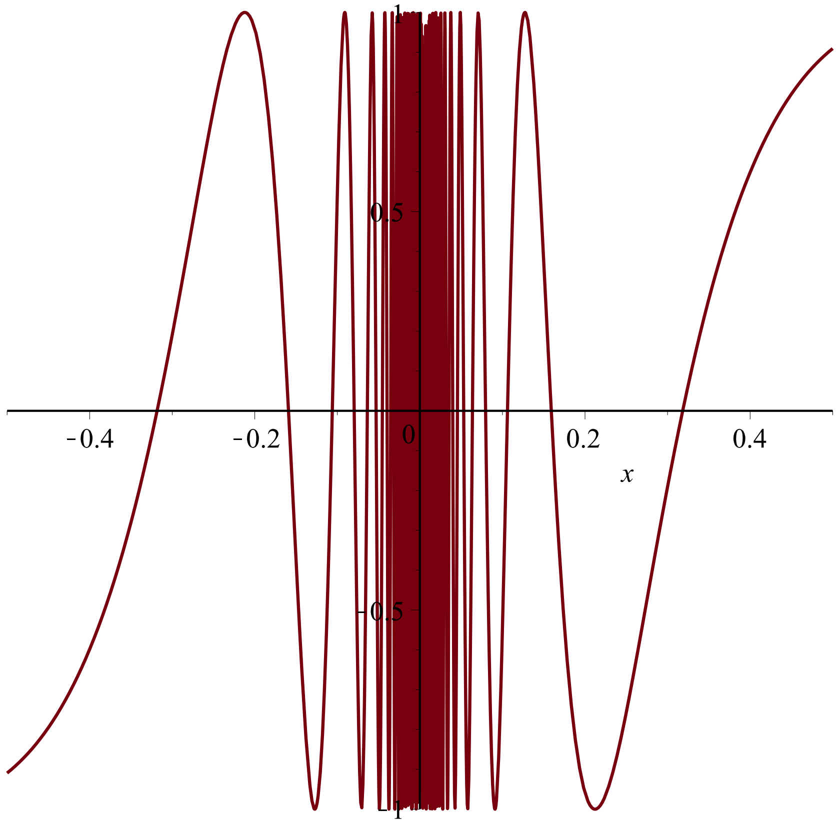
A következ példa azt mutatja, hogy az összetett függvényeknél a küls és bels függvényt nem cserélhetjük fel.

Elször az összetett függvény legyen $f(g(x)) = \dfrac{1}{\sin(x)}$, másodszor $g(f(x)) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

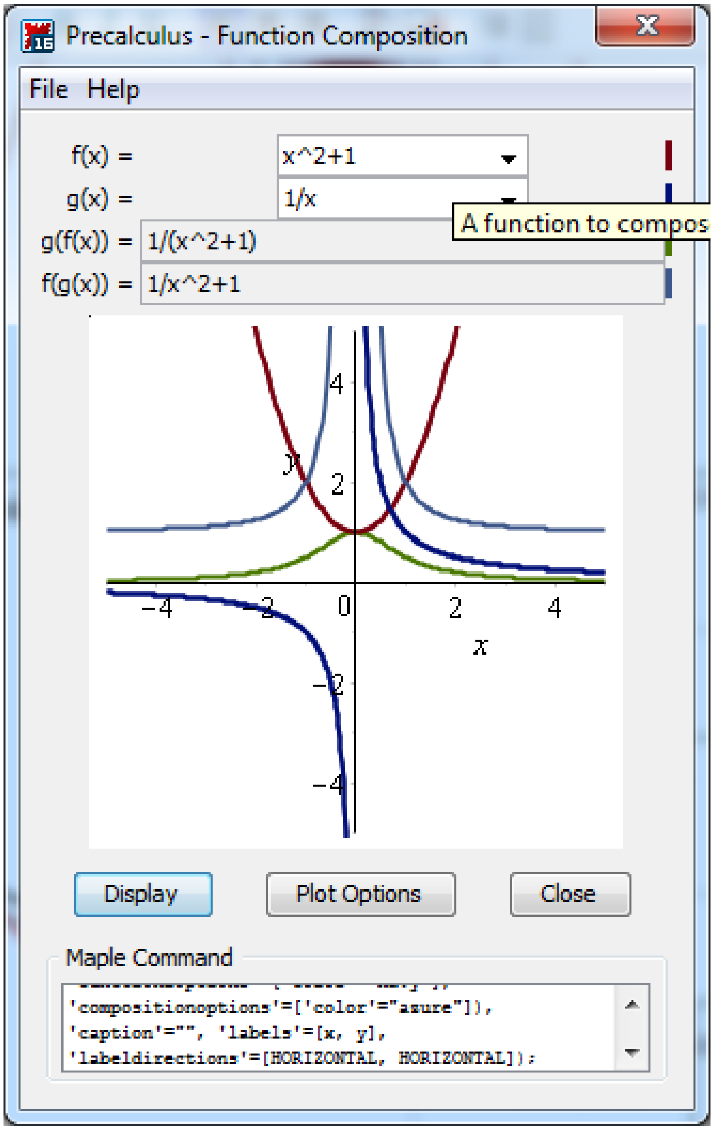
```
> plot([1/(sin(x))], x=-7..7, y=-10..10, discont=true);
```



> $plot(\sin(1/x), x = -0.5 .. 0.5);$



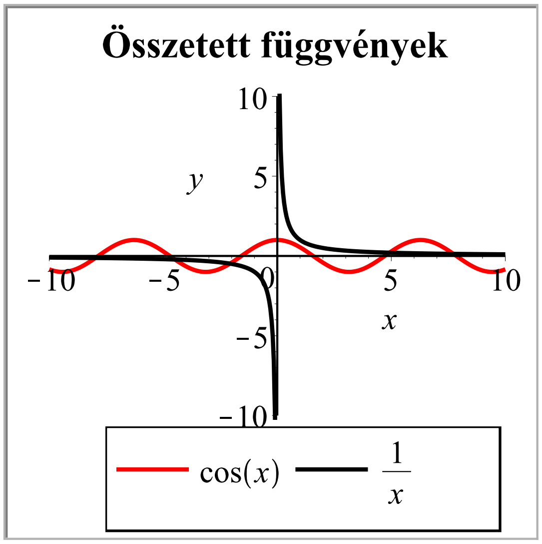
Összetett függvények


Precalculus - Function Composition
File Help
f(x) =
x^2+1
g(x) =
1/x
A function to compos
g(f(x)) =
1/(x^2+1)
f(g(x)) =
1/x^2+1
Display
Plot Options
Close
Maple Command
'compositionoptions'=['color'="azure"]),
'caption'="", 'labels'=[x, y],
'labeldirections'=[HORIZONTAL, HORIZONTAL]);

☑ $f(x) =$

$\cos(x)$

☑ $g(x) =$



Rajzol Töröl

$\frac{1}{x}$

$f(g(x)) =$

$\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$g(f(x)) =$

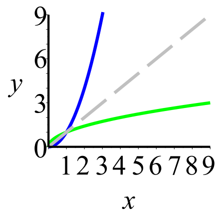
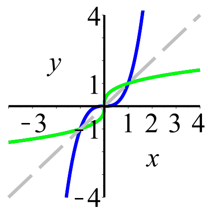
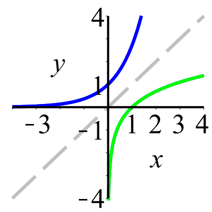
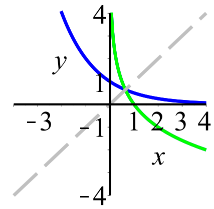
$\frac{1}{\cos(x)}$

Inverz függvények

Az f függvény inverzének nevezzük és f^{-1}-gyel jelöljük azt a függvényt, amely minden valós "a" számhoz (mely az f függvény értékkészletéhez tartozik), azt a "b" számot rendeli, melyhez az f az "a"-t rendelte, vagyis ha $f(b) = a$, akkor $f^{-1}(a) = b$. Az f^{-1} függvény értelmezési tartománya az f függvény értékkészlete, és az f^{-1} függvény értékkészlete az f értelmezési tartománya.

$\mathrm{D}\left(f^{-1}\right) = R(f)$ és $R\left(f^{-1}\right) = \mathrm{D}(f)$

Csak kölcsönösen egyértelm függvénynek lehet inverze. Ha egy függvény nem kölcsönösen egyértelm, akkor értelmezési tartományát leszkítjük a legbvebb kölcsönösen egyértelm tartományra. A táblázat els példájában az $f(x) = x^2$ függvény nem kölcsönösen egyértelm, ezért az értelmezési tartományt le kellett szkíteni a nem negatív számok halmazára.
Ha a függvény képét tükrözzük az y = x egyenesre a függvény képének inverzét kapjuk. Ha az (a, b) pont rajta van egy függvény grafikonján, akkor a (b, a) pont a függvény inverzének grafikonján lesz rajta.

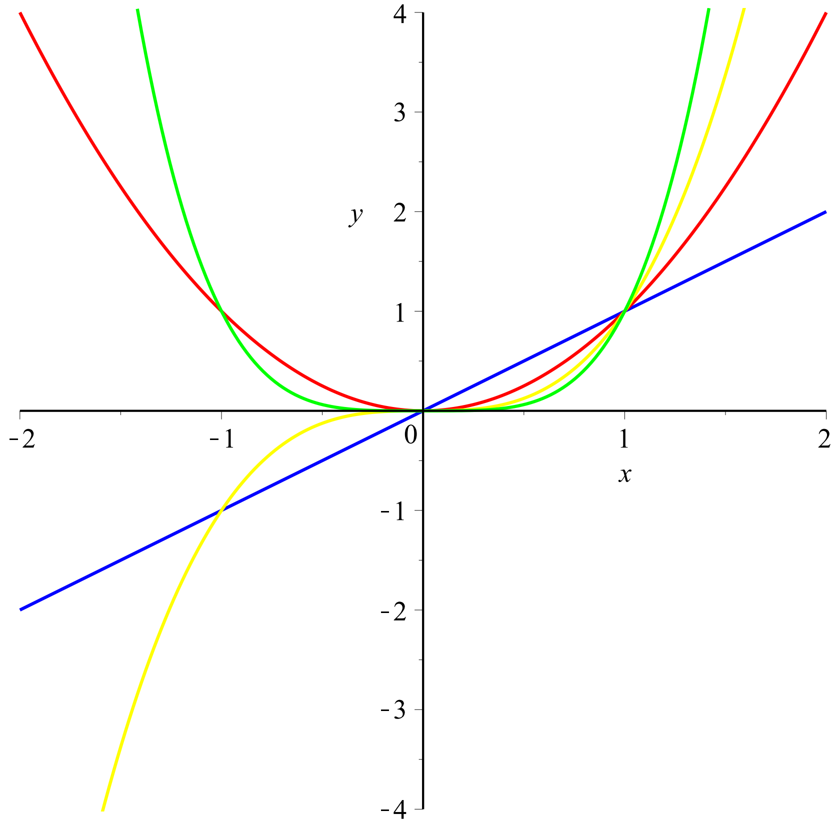
$f(x) = x^2, x \geq 0$ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ 	$f(x) = x^3$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ 	$f(x) = e^x$ $f^{-1}(x) = \ln(x)$ 	$f(x) = 0.5^x$ $f^{-1}(x) = \log_{0.5}(x)$ 

Hogyan kapjuk meg az inverz függvény képletét? Tekintsük például az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvényt. Használjuk az $y = \mathrm{e}^x$ jelölést! Cseréljük fel az x és y betket (most történik a képletben, ami geometriailag a függvény képének tükrözése az $y = x$ egyenesre), $x = \mathrm{e}^y$, majd fejezzük ki y-t. Vegyük mindkét oldal e alapú logaritmusát: $\ln(x) = \ln\left(\mathrm{e}^y\right) \Rightarrow \ln(x) = y$. A $\log_a\left(a^b\right) = b$, vagy e alapra alkalmazva a $\ln\left(\mathrm{e}^a\right) = a$, azonosságot használtuk fel.

Néhány további függvény

Hatványfüggvények
Az alábbi ábrán közös koordináta - rendszerben ábrázoltuk a hatványfüggvényeket, nevezetesen: x, x^2, x^3, x^4 függvényeket. Az ábrán jól látható, hogy minden hatványfüggvénynek két közös pontja van a (0,0) és az (1,1) pontok. A páratlan kitevj hatványok grafikonjai átmennek a (-1,-1) ponton, míg a párosak a (-1,1) ponton. A]0, 1[intervallumon a nagyobb kitevj hatványok értéke kisebb, azaz $x^4 < x^3 < x^2 < x$, az]1, +∞[-ben az egyenlőtlenségek megfordulnak.

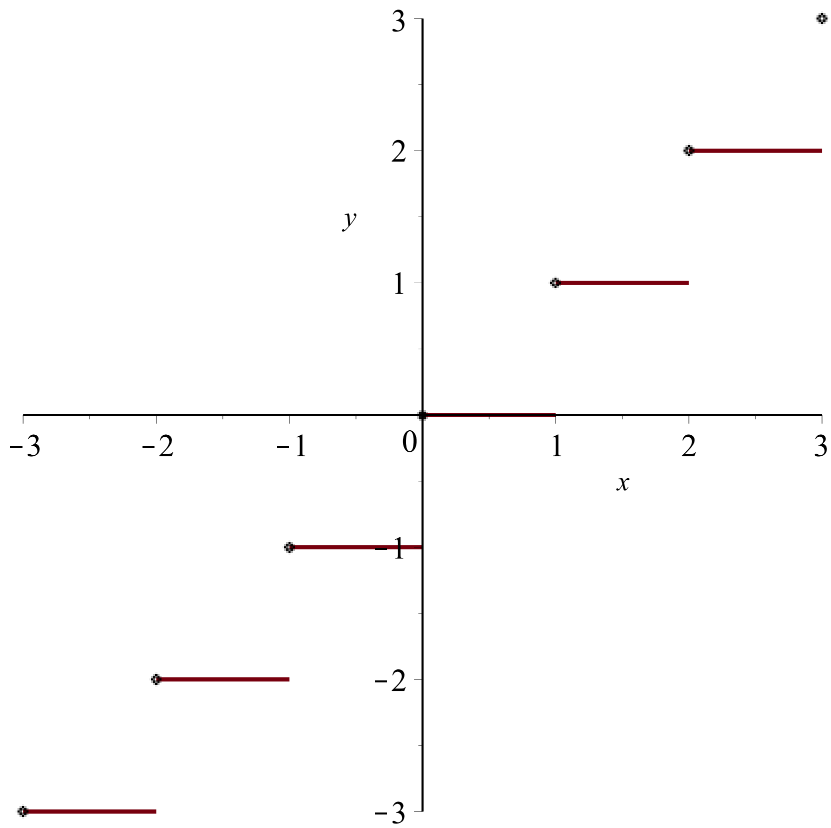
```
> plot([x, (x)^2, (x)^3, (x)^4], x=-2..2, y=-4..4, color=[blue, red, yellow, green]);
```



Egészrész függvény $f(x) = [x]$

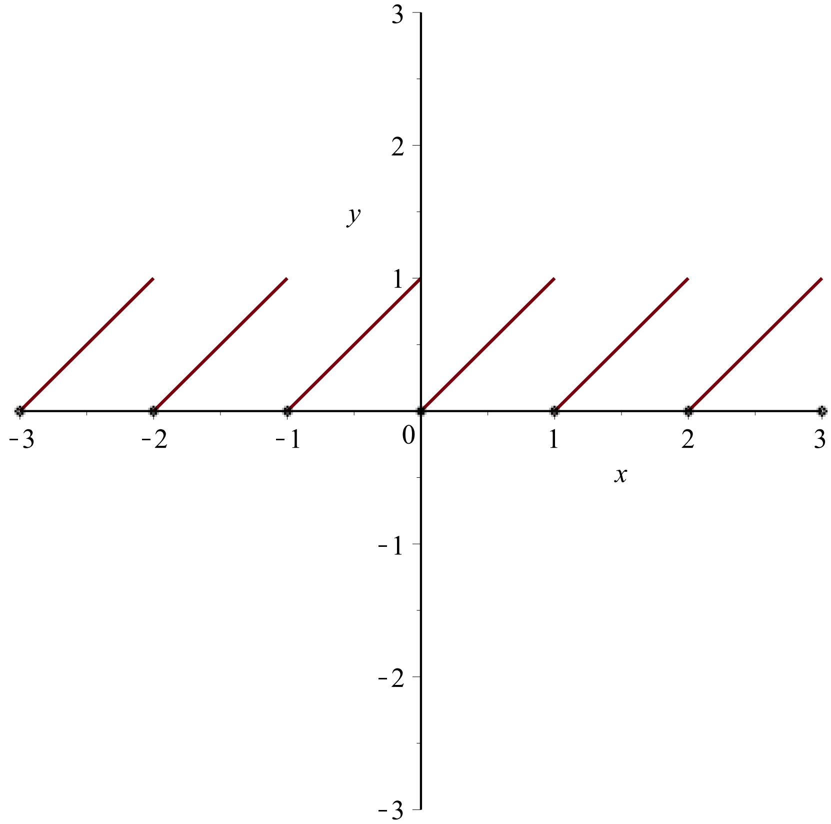
Minden számhoz a nála nem nagyobb (kisebb, vagy egyenl) egész számot rendeli.
Nyilvánvaló, hogy minden egész szám egész része önmaga, a pozitív törtek egész részének kiszámítása sem szokott gondot okozni $[3.2]=3$, vagy $[9.9]=9$, de mennyi az $[-2.3]$?
Mit is mond az egészrész definíciója? Minden számhoz a nála nem nagyobb egész számot rendeljük, ezért $[-2.3]=-3$. az egészrész függvény úgynevezett lépcss függvény. A grafikonon látható szakaszok bal végpontja hozzátartozik a függvény képéhez, a jobb végpont nem.

```
> plot( (floor(x)), x=-3..3, y=-3..3, discont=[showremovable]);
```

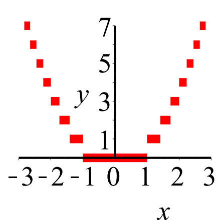
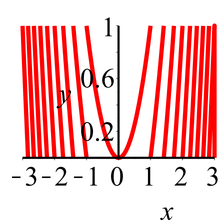
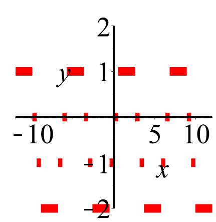
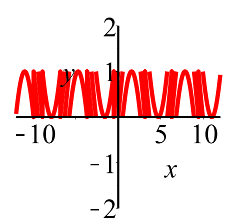


Törtrész függvény $f(x) = \{x\} = x - [x]$
Egy szám törtészét úgy kapjuk meg, ha a számból kivonjuk az egészrészét. Az alább látható grafikonon a szakaszok bal végpontja hozzátartozik a grafikonhoz a jobb végpont nem.

> $plot(x - (\text{floor}(x)), x = -3..3, y = -3..3, discont = true);$

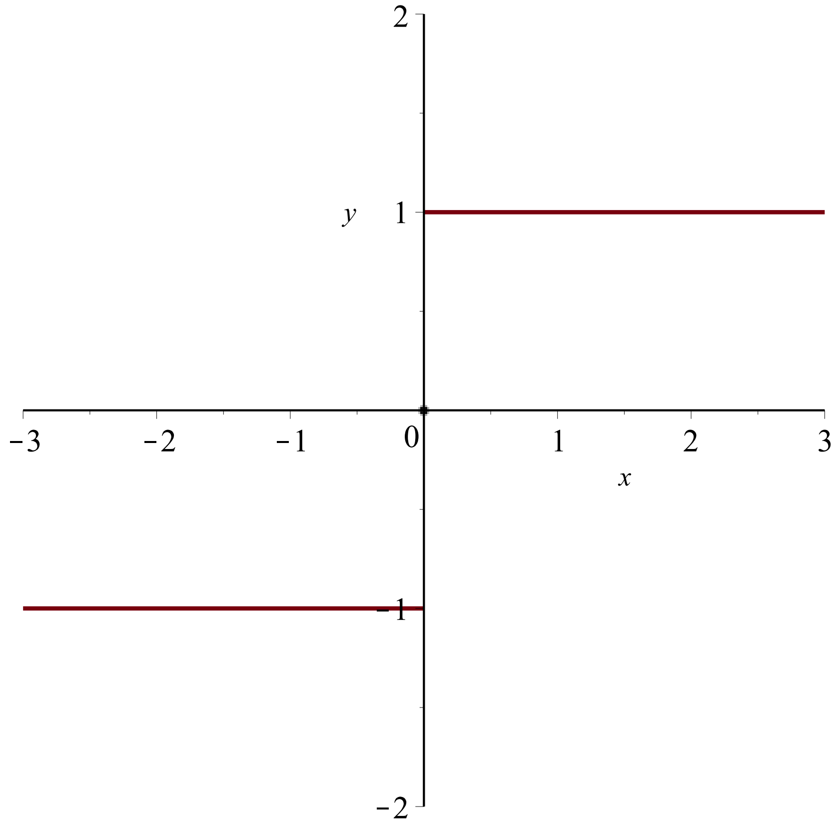


Érdekességképpen nézzük meg az x^2 és a $2 \cdot \sin(x)$ függvények egészrészét és törtrészét:

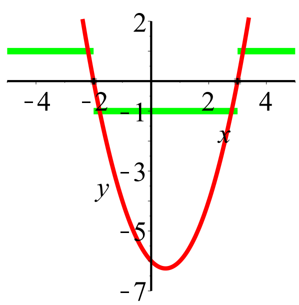
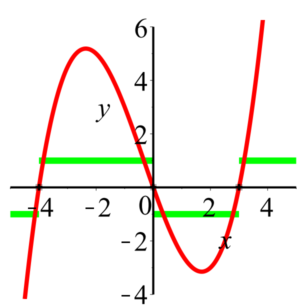
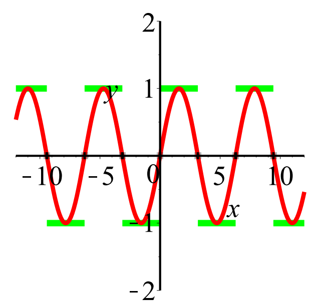
 $[x^2]$	 $\{x^2\}$	 $[2 \cdot \sin(x)]$	 $\{2 \cdot \sin(x)\}$

Eljel függvény (szignum függvény) $f(x) = sgn(x)$
Pozitív számok szignuma 1, negatív számoké -1, a 0 szám szignuma 0.

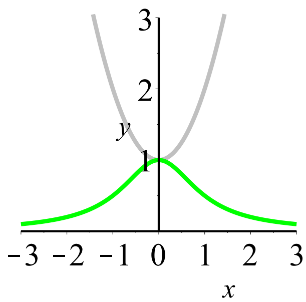
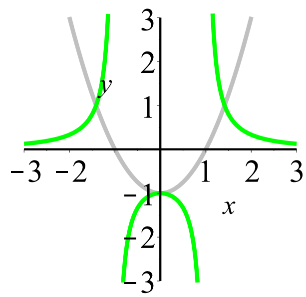
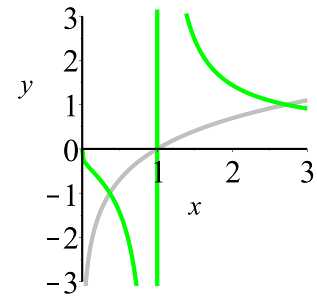
> $plot(\text{signum}(x), x = -3..3, y = -2..2, discont = true);$



Nézzük meg néhány példán, hogyan szemlélteti a szignum a függvények eljelét?
Ha alaposabban megnézzük a grafikonokat látszik a függvények zérushelyénél a zöld pont, ott a szignum függvény mindig 0.

$f(x) = (x-3)\cdot(x+2)$ $g(x) = sgn((x-3)\cdot(x+2))$ 	$f(x) = 0.25\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x+4)$ $g(x) = sgn(0.25\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x+4))$ 	$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = sgn(\sin(x))$ 

Függvények reciprokának ábrázolása:
Ha ismerünk egy függvényt könnyen felvázolhatjuk a reciprokának grafikonját. Ahol a függvényérték 1, vagy -1, az a pont a függvény és reciprok függvény grafikonjának közös pontja lesz. Ahol a függvénynek zérushelye van a reciprok függvénynek szakadása lesz. Minél nagyobb az eredeti függvény függvényértéke, annál kisebb lesz a reciprok függvény értéke és fordítva.

$f(x) = x^2 + 1$ $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ 	$f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ 	$f(x) = \ln(x)$ $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$ 

Feladatok önálló megoldásra

1. Határozzuk meg a következ függvények értelmezési tarományát!

$f(x) = \dfrac{3 \cdot x}{x^2 - x - 6}$

$g(x) = \sqrt{\dfrac{x - 3}{10 - 2 \cdot x}}$

$h(x) = \log_3\left(2 \cdot x^2 - 8\right)$

2. Számítsuk ki a felsorolt függvények zérushelyét!

$f(x) = x^4 - 16\,x^2$

$h(x) = e^x \cdot (x - 3)$

$i(x) = \ln(4 \cdot x + 1)$

3. Melyik függvény páros, vagy páratlan a felsoroltak közül?

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 1}$, $g(x) = x^2 \cdot \sin(x)$, $h(x) = x \cdot \cos(x)$, $i(x) = \dfrac{x^4}{\cos(x)}$, $j(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

4. Ábrázolja az f(x) függvényt és inverzét! Adja meg az értelmezési tartományukat és értékkészletüket!

$f(x) = -\log_2(x+4) - 2$

$f(x) = -\log_2(x-4) + 2$

5. Ábrázolja az f(x) függvényt! Adja meg az értelmezési tartományát és értékkészletét! Adja meg az f(x) függvény inverzét és ábrázolja!

$f(x) = -\sqrt{5-x} + 4$

6. Ábrázolja az f(x) függvényt és a reciprokát! Adja meg az értelmezési tartományukat és értékkészletüket! Adja meg az f(x) függvény inverzét! Páros-e ez a függvény? Írja fel, hogy mely függvényekbl alkottuk meg az f(x) összetett függvényt!

$f(x) = -\log_2(x+3) + 2$

7. Ábrázolja az f(x) függvényt és a reciprokát! Adja meg az értelmezési tartományukat és értékkészletüket! Adja meg az f(x) függvény inverzét! Páros-e ez a függvény? Írja fel, hogy mely függvényekbl alkottuk meg az f(x) összetett függvényt!

$f(x) = -2^{x+4} + 4$

8. Ábrázolja az f(x) függvényt és a reciprokát! Adja meg az értelmezési tartományukat és értékkészletüket! Adja meg az f(x) függvény inverzét és ábrázolja!

$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 - 4$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $g(x) = 2 \cdot x + 3$ $h(x) = \sqrt{x}$

Képezzük a következ összetett függvényeket: $h(g(x))$, $g(h(x))$, $f(g(x))$, $f(h(x))$!
Mit mondhatunk az értelmezési tartományokról?