```
> restart
> with(plots) :
```

Forrás: http://nobinagupta.blogspot.hu/2011/01/plaint-perpetuity-paper-construction-on.html

Sorok, bevezet példák

Akhilleusz és a tekns

A tekns versenyfutásra hívja ki a fürgelábú Akhilleuszt, aki nála tízszer gyorsabb; a hs elfogadja a kihívást, s ellenfelének 1 stadion elnyt ad. Mire Akhilleusz elér arra a pontra, ahonnan ellenfele indult, addig az is megtesz egy tized stadion távolságot, valamennyi elnye tehát marad. Akhilleusz villámgyorsan lefutja ezt is – ám a teknős újfent előrébb iszkol, ezúttal egy század stadionnyit. Mire Akhilleusz ledolgozza hátrányát, a tekns még mindig eltte marad: egy ezred stadion távolságra. És ez így megy a végtelenségig, a tekns elnye folyamatosan csökken, de soha nem fogy el: álljon ellenfele bármilyen jó futó hírében, képtelen t megelzni.

Józan eszünk azt mondatja velünk, hogy ez lehetetlen.
1 stadion = 184,8 m ókori mértékegység, az egyszerbb számolás kedvéért legyen a tekns elnye 100 m, Akhilleusz sebessége 5 m/s, a tekns sebessége ennek tized része 0,5 m/s. Azt gondolom, hogy ezzel a feltételezéssel nagyon méltányosak voltunk a teknshöz. Tegyük fel továbbá, hogy Akhilleusz t id alatt éri utol a tekns. Ekkor a következ egyenletet írhatjuk fel:

$5 \cdot t = 0.5 \cdot t + 100$

$4.5 \cdot t = 100$

$t = \frac{100}{4.5} = \frac{200}{9} = 22,22$

Nézzük ugyanezt a számolást Maple-ben, és ábrázoljuk a két versenyz út - id függvényét:

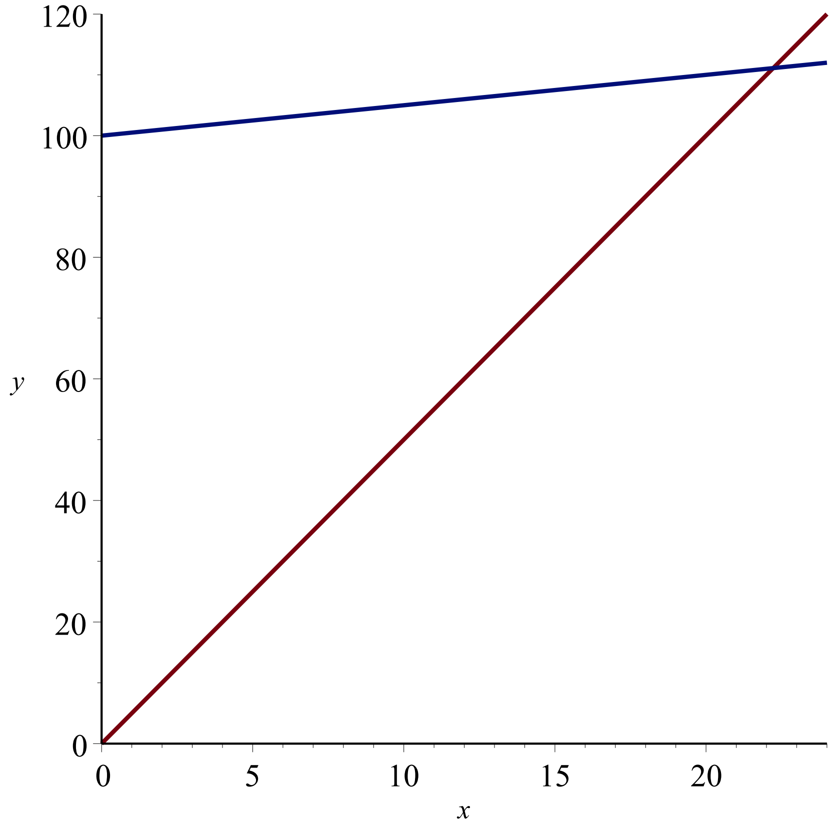
> $utolér := solve(0.5 \cdot t + 100 - 5 \cdot t, t)$

$$utolér := 22.22222222 \quad \textbf{(1.1)}$$

> $evalf(utolér, 10)$

$$22.22222222 \quad \textbf{(1.2)}$$

> $plot([5 \cdot x, 0.5 \cdot x + 100], x = 0 ..24, y = 0 ..120);$

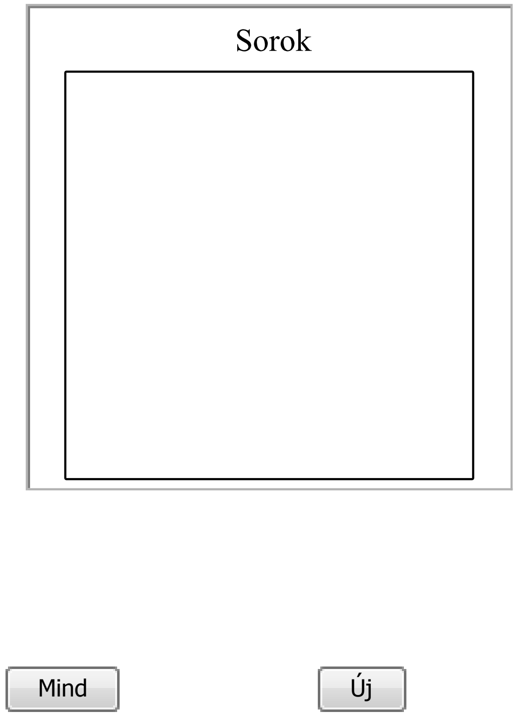


Tehát azt kaptuk, hogy az indulás után 200/9 másodperc múlva, azaz tíz jegyre kerekítve 22, 22222222 s múlva éri utol Akhilleusz a teknst, és nem soha, ahogy a bevezet szöveg sugallja. Hogyan tudjuk feloldani az ellentmondást?

Nézzünk egy másik bevezet példát. Tekintsünk egy egységnyi oldalú négyzetet. Az ábrára kattintva színezzük ki. Elször egy 1/2 terület téglalapot, majd egy fele akkor 1/4 terület négyzetet, majd újra egy téglalapot kapunk, amelynek 1/8-ad a területe, és így tovább.

A területek összege a következ lesz: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}... = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...$

A mind gombra kattintva az animációval automatikusan kiszinezhetjük a négyzetet. A folyamat a végtelenségig folytatódik, ha a téglalapok és a négyzetük területeibl bármilyen sokat összeadunk, a konstrukcióból látszik, hogy a kapott összeg sohasem lesz 1-nél több. Lehetséges, hogy egy végtelen tagú összeg véges? Mit értsünk végtelen tagú összeg alatt? A következkben ezeket a kérdéseket próbáljuk meg tisztázni.



A sor matematikai fogalma

Számsornak a következ végtelen tagú összeget nevezzük:

$S = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

Ezután definiáljuk a számsor részletösszegeit:

$S_1 = a_1$ a sor els részletösszege

$S_2 = a_1 + a_2$ a sor második részletösszege

...

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ a sor n. részletösszege

A részletösszegek számsorozatot alkotnak.

A számsort konvergensnek nevezzük, ha a részletösszegek sorozatának véges határértéke létezik.

$\lim_{n \to \infty} S_n = S$

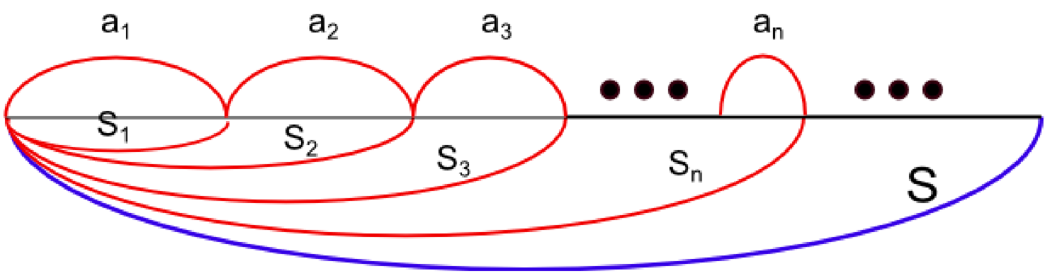
Fontos megkülönböztetnünk a következ két sorban lev összeget:

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$ a sor n. részletösszege, n bármilyen nagy szám lehet, de véges. Tehát ez egy véges tagú összeg.

$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ a sor összege, a végtelen tagú összeg. Ez az összeg lehet véges, vagy végtelen, a részletösszegek sorozatának határértékétl függen.

A sorok definíciója kapcsán két sorozattal találkozunk a tagok és a részletösszegek sorozatával. A következ ábra ezt szemlélteti egy véges összeg sor esetén.

a_1, a_2, a_3, ...a_n a sor tagjainak sorozatát alkotják, S_1, S_2, S_3,...S_n a részletösszegek sorozata és S a végtelen tagú összeg jele.



A mértani sor

Most vizsgáljunk meg néhány sort, hogyan tudjuk kiszámítani a sorösszeget, hogyan lehet eldönteni, hogy a sor konvergens, vagy divergens.
Tekintsük elször a mértani sort. Középiskolai tanulmányokból a mértani sorozat jól ismert. Ebben a sorozatban az egymást követ tagok hányadosa állandó. Ha felírjuk a mértani sorozat összegét, de az n. tagnél nem hagyjuk abba az összegzést, hanem a végtelenségig folytatjuk, akkor kapjuk a mértani sort.
Mértani sor:

$S = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^n + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} + \ldots$

A mértani sor részletösszegei:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_1 \cdot q$

...

$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + \ldots + a_1 . q^{n-1}$

Az n. részletösszeget zárt formában fel tudjuk írni, ha felhasználjuk a mértani sorozat jól ismert összegképletét:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + \ldots + a_1 . q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad q \neq 1$$

A sorozatok fejezetben tanulmányoztuk a q^n sorozatot és különböz q-k esetén felírtuk a határértéküket. Idézzük fel:

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0 \text{ , ha } |q| < 1$$

$\lim_{n \to \infty} q^n = 1$, ha $q = 1$

$\lim_{n \to \infty} q^n = +\infty$, ha $q > 1$

Különben osszillálva divergens a sorozat

Mivel az összegképletbl következik, hogy $q \neq 1$, ezért látható, hogy csak akkor lesz véges határértéke az n. részletösszegnek, S_n-nek, ha $|q| < 1$.

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + \ldots + a_1 . q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \cdot (1-q^n) \qquad q^n \to 0, \, ha \, |q| < 1$$

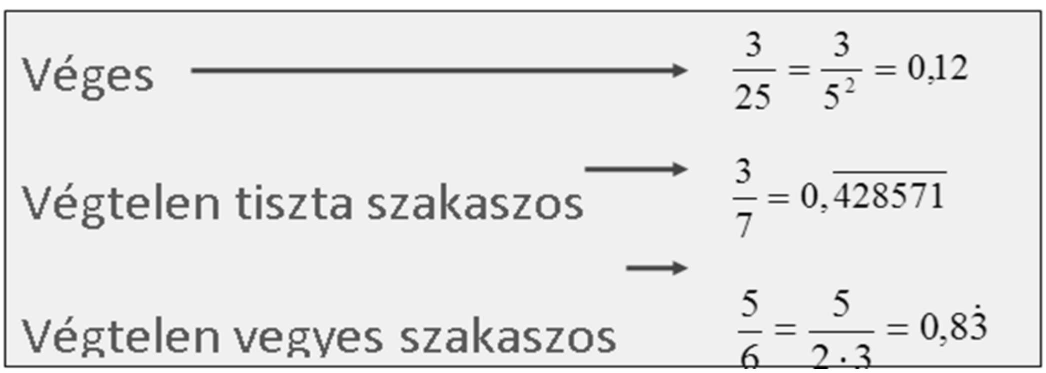
Ekkor a keresett határérték, más szóval a mértani sor összege:

$S = \dfrac{a_1}{1-q}$ ezt úgy is mondhatjuk, hogy a mértani sor konvergens.
Ha $|q| \geq 1$, akkor a mértani sor divergens.

Szorosan kapcsolódik a mértani sorok témájához a racionális számok tizedestört alakja. A középiskolai tanulmányok során itt általában maradt egy hiány, ezt fogjuk most pótolni.

Racionális számok tizedestört alakja:

Hogyan kapjuk meg egy p/q alakú közönséges tört tizedes tört alakját? Úgy, hogy p-t (a számlálót) elosztjuk q-val (a nevezvel).
Nézzünk erre néhány példát:



Mit mondhatunk a fenti példák alapján a racionális számok tizedes tört alakjáról? Ha az osztás során elfordul 0 maradék, a tizedes tört véges, ha nem fordul el 0 maradék, akkor végtelen. A második példában a 7-tel való osztásnál hány különböz maradék lehet? Legfeljebb 6 féle (1, 2, 3, 4, 5, 6), „legrosszabb" esetben a 6 különböző maradék elő is fordul. Ezt látjuk a második osztásnál, ezért a kapott tizedes törtben a 6 hosszúságú szakasz (428571) ismétldik. A harmadik példánál a tizedes vessz után egy 8-as jön, majd az ismétld maradékok miatt csupa hármas következik, az ismétld szakasz itt 1 hosszúságú. Tehát a racionális számok tizedes tört alakja véges, vagy végtelen szakaszos tizedes tört. Azt is meg tudjuk mondani a nevez (osztó) ismeretében, hogy mikor lesz az osztás végeredmény véges, vagy végtelen szakaszos tizedes tört. Ha a nevez prímtényezs felbontásában csak 2-es és 5-ös számok szerepelnek, az osztás végeredmény véges, hiszen a tört bvítésével a

nevezben 10 hatványt kaphatunk. Ha a nevez prímtényezs felbontásában csak 2-tl és 5-tl különböz számok vannak, akkor a tizedes tört végtelen, ún. tiszta szakaszos, ha a nevez felbontásában 2, vagy 5 valamelyike, vagy mindegyike elfordul, de ha más tényezk is vannak, akkor a tizedes tört szintén végtelen, de ún. vegyes szakaszos. Azért vegyes szakaszos, mert nem csak az ismétld számok szerepelnek benne, hanem az elején ott van néhány más szám (kakukktojás) is. Ez látható a 3. példában.
Miért pont azok a számok lesznek véges tizedes törtek, amelyeket 2 és 5 hatványt tartalmazó nevezj törtekbl kapunk? Ennek az oka, hogy 10-es számrendszerben számolunk. A 3-as számrendszerben az 1/3 és minden olyan szám, amelynek nevezjében csak 3 hatványok vannak, véges tizedes tört lesz.
Most vizsgáljuk meg ugyanezt a kérdést "visszafelé". Könnyen belátható, hogy egy véges tizedestört közönséges tört alakra hozható, ha a törtet bvítjük úgy, hogy a nevez 10 hatvány legyen. Például:

$$\frac{3}{20}=\frac{3}{2^2\cdot 5}=\frac{3\cdot(2\cdot 5^2)}{(2^2\cdot 5)\cdot(2\cdot 5^2)}=\frac{150}{2^3\cdot 5^3}=\frac{150}{(2\cdot 3)^3}$$

De hogy látható be, hogy a végtelen szakaszos tizedestört mindig $\frac{p}{q}$ alakú, racionális számot ad.

$$S = 0,787878... = \frac{78}{10^2}+\frac{78}{10^4}+\frac{78}{10^6}+...$$

$a_1=\frac{78}{10^2}$, $q=\frac{1}{10^2}<1$ $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{78}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{78}{99}=\frac{26}{33}$ Így megkaptuk azt a közönséges törtet, amibl osztással a példa tizedestörtje adódik. Ezt
számológéppel könnyen ellenrizhetjük, ha elosztjuk a tört számlálóját a nevezjével.
Vigyázzuk arra, hogy ha mértani sor összegét számoljuk soha ne felejtsük el ellenrizni, hogy a mértani sor hányadosa $|q|<1$ legyen.
Hogy számolja ki a Maple a sorösszeget?

> $a := sum\left(\frac{78}{10^{2k}}, k=1..infinity\right);$

$$a := \frac{26}{33} \quad \textbf{(3.1)}$$

> $evalf(a, 10)$

$$0.7878787879 \quad \textbf{(3.2)}$$

Az evalf utasítás 10 számjegyre kerekítve adta meg az eredményt, ezért 9 az utolsó jegy.

Határozzuk meg a következ sor összegét:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$$

Elször írjuk fel a sorozat néhány tagját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots + \frac{2}{3^n} + \ldots$$

Észrevehetjük, hogy ez egy $q = \frac{1}{3}$ hányadosú mértani sor, melynek els eleme $a_1 = \frac{2}{3}$, mivel $|q| < 1$ alkalmazhatjuk a mértani sor összegképletét:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

Mi történne akkor, ha elfeledkeznénk a $|q| < 1$ feltételrl és automatikusan alkalmaznánk a mértani sor képletét.
Legyen a sor az $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$ sor, ez egy $|q| = -1$ hányadosú, $a_1 = 1$ kezdérték mértani sor. Az összegképlet alapján $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$
Most tekintsük a részletösszegek sorozatát:
$S_1 = 1$, $S_2 = 1 - 1 = 0$, $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$ $S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$, elbb-utóbb észreveszzük, hogy a részletösszegek sorozata az 1, 0, 1, 0, 1, ... oszcillálva divergens sorozat. Tehát, ha nem teljesül a $|q| < 1$ feltétel az összegképlet alkalmazása hamis eredményre vezet.

```
> a := sum((-1)^k, k=1..infinity);
```

$$a := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \qquad \textbf{(3.3)}$$

Az összegzést a Maple program sem tudta elvégezni :)

Konvergencia kritériumok

Ha a sorunk nem mértani, hogyan tudjuk eldönteni, hogy konvergens-e ?

Konvergencia szükséges (de nem elégséges) feltétele:

Ha S konvergens $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0$ (A sor konvergenciájának szükséges, de nem elégséges feltétele a tagok sorozatának 0 határértéke.)
Ha egy sor konvergens, akkor a tagok sorozatának határértéke 0, de ha a tagok sorozatának határértéke 0, abból nem következik a sor konvergenciája.
Nézzünk egy példát. Tekintsük az úgynevezett harmonikus sort:

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

de a sor mégsem konvergens.

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\frac{1}{n}\geq 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+\ldots=1+k\cdot\frac{1}{2}\to\infty$$

Itt a sort alulról becsültük, és a kapott sor ∞-hez tart, akkor a nála nagyobb, vagy egyenlő tagokból álló sor is a végtelenbe tart.

A harmonikus sor divergenciája a Maple-ben:

```
> a := sum(1/k, k=1..infinity);
```

$$a := \infty \qquad \textbf{(4.1)}$$

Tehát, ha egy sor tagjainak határértéke a ∞-ben 0, az még nem jelenti azt, hogy a sor konvergens, de ha a tagok sorozata nem tart 0-hoz akkor a sor **biztosan nem konvergens**.
Egy ilyen sorra is nézzünk meg egy példát:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$$

$$a_n=\frac{n}{n+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\to 1$$ $\Rightarrow$ a sor nem konvergens

```
> a := sum(k/(k+1), k=1..infinity);
```

$$a := \infty \qquad \textbf{(4.2)}$$

A feladat megoldás során, tehát elször mindig nézzük meg, hogy a sor tagjainak mi a határértéke, ha nem 0, már nem kell tovább foglalkozni a sorral, mert biztosan nem konvergens, ha 0, akkor további vizsgálódásra van szükség, mert lehet, hogy a sor konvergens, de az is lehet, hogy nem.
Ebben az esetben a konvergencia eldöntésében segítenek a különböz kritériumok.

Minoráns kritérium

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens és $b_n \geq a_n$ minden n-re, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens

Szavakban megfogalmazva: Ha a sorunknál találunk egy tagonként nem nagyobb (kisebb, vagy egyenl) sort és az divergens, akkor a vizsgálatunkra kijelölt sor is divergens lesz.
A minoráns kritériumot a harmonikus sor divergenciájának bizonyításánál használtuk fel.

Majoráns kritérium

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens és $b_n \geq a_n$ minden n-re, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens

Szavakban megfogalmazva: Ha a sorunknál találunk egy tagonként nem kisebb (nagyobb, vagy egyenl) sort és az konvergens, akkor a vizsgálatunkra kijelölt sor is konvergens lesz.

Egy példa a majoráns kritériumra:
Döntsük el, hogy a következ sor konvergens, vagy divergens:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \frac{1}{n!} + \ldots$$

Alulról becsüljük az n faktoriálist.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{n-1}$$

Mivel a faktoriálisok reciprokai alkotják a sorozatot, ezést a 2 hatványokat helyettesítve fels becslést kapunk. A majoráló sor, mértani, összege az ismert képlettel könnyen adódik.

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \to 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

Most azt nem tudtuk meg, hogy a kérdéses sor összege pontosan mennyi, de tudjuk, hogy a sor konvergens és összege nem lehet több, mit 3.
Mit mond errl a Maple?

```
> a := sum(1/k!, k=0..infinity);
```

$$a := e \tag{4.3}$$

```
> evalf(a, 10)
```

$$2.718281828 \tag{4.4}$$

```
> b := 1 + sum(1/2^k, k=0..infinity);
```

$$b := 3 \tag{4.5}$$

A sor összege e, a természetes alapú logaritmus alapszáma, ami (a közelít értéket is kiírattuk az evalf utasítással) valóban kisebb, mint 3. Tananyagunk kereteit ez a számolás meghaladja, így elhisszük a Maple eredményét.
További kritériumok is rendelkezésünkre állnak a sorok konvergenciájának vizsgálatához.

Gyökkritérium:

$S = \sum_{1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha $\sqrt[n]{a_n} \to a < 1 \quad n \to \infty$

divergens, ha $\sqrt[n]{a_n} \to a > 1 \quad n \to \infty$

ezzel a módszerrel nem lehet eldönteni a konvergenciát, ha $\sqrt[n]{a_n} \to a = 1 \quad n \to \infty$

Példa a gyökkritériumra:
Döntsük el, hogy konvergens-e a következ sor?

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n \cdot n^2}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{3^n}{7^n \cdot n^2}} = \frac{3}{7 \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to \frac{3}{7} < 1, \text{ mert } \sqrt[n]{n} \to 1, \text{ ha } n \to \infty$$

Tehát a sor konvergens.

> $simplify\left(\sqrt[k]{\frac{3^k}{7^k \cdot k^2}}\right)$

$$\left(\frac{3^k\, 7^{-k}}{k^2}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{4.6}$$

> $limit(\textbf{(4.6)}, k = infinity)$

$$\frac{3}{7} \tag{4.7}$$

Hányadoskritérium:

$S = \sum_{1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a < 1 \quad n \to \infty$

divergens, ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a > 1 \quad n \to \infty$

ezzel a módszerrel nem lehet eldönteni a konvergenciát, ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a = 1 \quad n \to \infty$

Példa a hányadoskritériumra:
Döntsük el, hogy konvergens-e a következ sor?

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{5^n} = \frac{5^n \cdot 5}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{5^n} = \frac{5}{n+1} \to 0 < 1, \text{ ha } n \to \infty$$

Tehát a sor konvergens.

> $simplify\left(\frac{\frac{5^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{5^k}{k!}}\right)$

$$\frac{5}{k+1} \tag{4.8}$$

> $limit(\mathbf{(4.8)}, k = infinity)$

$$0 \tag{4.9}$$

> $a := sum\left(\frac{5^k}{k!}, k = 0 ..infinity\right);$

$$a := e^5 \tag{4.10}$$

> $evalf(a, 4)$

$$148.4 \tag{4.11}$$

Egyéb sorokra vonatkozó összefüggések

Egy érdekes sor a teleszkópikus sor:

$$S = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots$$

Átalakítjuk az n. tagot:

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Az átalakítást alkalmazzuk minden tagra, látható, hogy minden kapott tört szerepel egyaránt pozitív és negatív eljellel is, kivéve az els és az utolsó tagot:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

, ha $n \rightarrow \infty$

> $b := Sum(1/(k\cdot(k+1)), k = 1 ..10)$

$$b := \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k\,(k+1)} \tag{5.1}$$

> $b := sum(1/(k\cdot(k+1)), k = 1 ..10);$

$$b := \frac{10}{11} \quad (5.2)$$

> $b := sum(1/(k\cdot(k+1)), k=1..100);$

$$b := \frac{100}{101} \quad (5.3)$$

> $a := sum(1/(k\cdot(k+1)), k=1..infinity);$

$$a := 1 \quad (5.4)$$

A váltakozó eljel sorokat alternáló soroknak is nevezük. Emlékezzünk vissza, általában nem igaz, hogy ha a sor tagjainak sorozata 0-hoz tart, akkor a sor konvergens. Erre láttuk ellenpéldának a harmonikus sort. A váltakozó eljel sorokra igaz a következ tétel:

Leibniz tétel: A váltakozó eljel sor konvergens, ha tagjainak abszolút értéke monoton csökkenve 0-hoz tart.
A hiba (a pontos sor összegtl való eltérés) nem nagyobb, mint az els elhagyott tag abszolút értéke:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots$$

Számoljuk ki, hogy mekkora hibát követünk el a sorösszeg kiszámításában, ha az els 5 tagot adjuk össze.

$$S_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{60}{60} - \frac{30}{60} + \frac{20}{60} - \frac{15}{60} + \frac{12}{60} = \frac{47}{60}$$

$$|a_6| = \frac{1}{6} \qquad |S - S_5| \le \frac{1}{6} \qquad \frac{37}{60} \le S \le \frac{57}{60}$$

> $b := sum\left((-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}, k=1..5\right);$

$$b := \frac{47}{60} \quad (5.5)$$

> $a := sum\left((-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}, k=1..infinity\right);$

$$a := \ln(2) \quad (5.6)$$

> $c := evalf(a, 10);$

$$c := 0.6931471806 \quad (5.7)$$

> $d := |c - b|$

$$d := 0.0901861527 \quad (5.8)$$

Pozitív tagú sorok

Ha $a_n > 0$ minden n-re, akkor az $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ részletösszegei monoton nnek, ezért, ha a pozitív tagú sor korlátos, akkor konvergens is.

Abszolút konvergensnek nevezünk egy sort, ha a sor tagjainak abszolút értékeibl képezett sor is konvergens.
Példa abszolút konvergens sorra:

$$S=\sum_{1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{2^k}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+(-1)^k\cdot\frac{1}{2^k}+\ldots=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$$

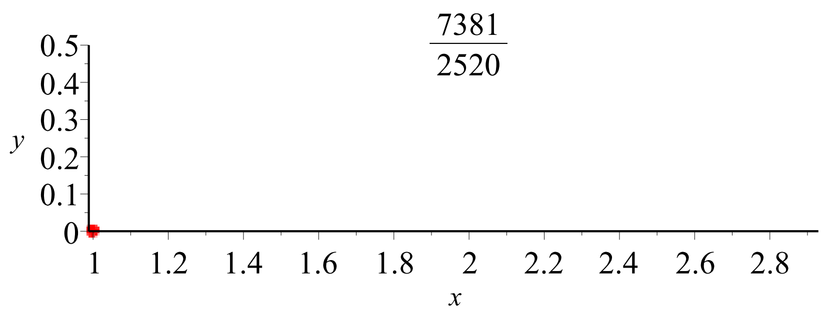
$$S=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}=1$$

Feltételesen konvergensnek nevezünk egy sort, ha a sor konvergens, de nem abszolút konvergens.
Feltételesen konvergens sorra példa a váltakozó eljel harmonikus sor.

Szemléltetés

A harmonikus sor szemléltetésére nézzünk meg két animációt, az elsben a számegyenesen ábrázoljuk a sor részletösszegeit, a másodikban a koordináta-rendszerben:

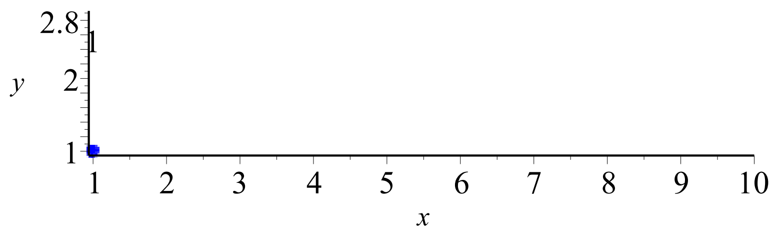
```
> a := 0 :
> K := NULL :
> for i from 1 to 10 do
      a := a + 1/i :
  p := pointplot({seq([a, 0], n = 1 ..10)}, color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 12) :
  d := display({p, q}, scaling = constrained) :
  q := textplot([2, 0.5, a]) :
  K := K, d :
  od:
  display([K], insequence = true);
```




```
> a:=0:
```

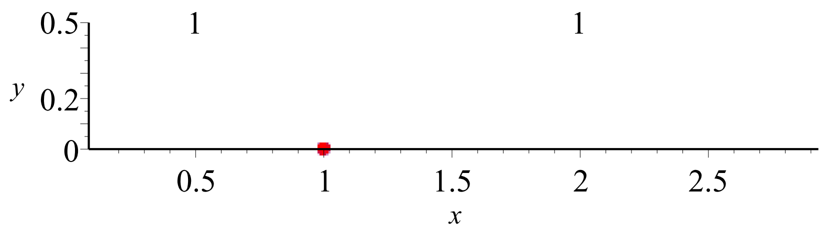
> $K := NULL$:

```
> for i from 1 to 10 do
     a:=a+1/i:
  p:=pointplot({seq([i, a], n = 1 .. 30)}, color = blue, symbol =
  solidcircle, symbolsize = 12):
  q:=textplot([i,2.5,convert(a,string)]):
  d:=display({p,q},scaling=constrained):
  K:=K,d:
  od:
  display([K],insequence=true);
```




```
> a:=0:
> K := NULL :
> for i from 1 to 10 do
     a:=a+1/i:
  p:=pointplot({seq([a, 0], n = 1 .. 11)}, color = blue, symbol =
  solidcircle, symbolsize = 12):
  e:=pointplot({seq([1/i, 0], n = 1 .. 11)}, color = red, symbol
  = solidcircle, symbolsize = 12):
  q:=textplot([2,0.5,a]):
  f:=textplot([0.5,0.5,1/i]):
  d:=display({p,e,q,f},scaling=constrained):
  K:=K,d:
  od:
  display([K],insequence=true);
```

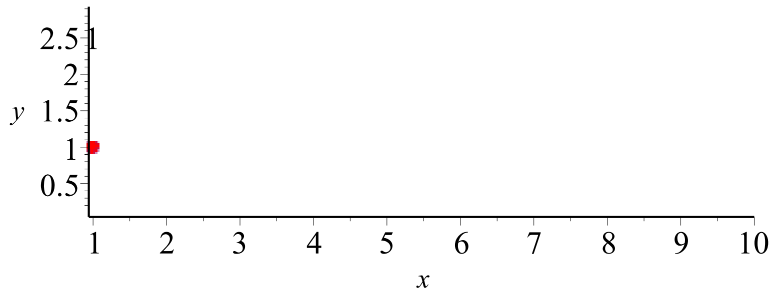
A továbbiakban egy koordináta-rendszerben, ill. egy számegyenesen ábrázoljuk a sor tagjait és részletösszegeit.
Pirossal a sor tagjai jelennek meg, kékkel pedig a részletösszegek.




```
> a:=0:
```

> $K := NULL$:

```
> for i from 1 to 10 do
     a:=a+1/i:
  p:=pointplot({seq([i, a], n = 1 .. 30)}, color = blue, symbol =
  solidcircle, symbolsize = 12):
  e:=pointplot({seq([i, 1/i], n = 1 .. 30)}, color = red, symbol
  = solidcircle, symbolsize = 12):
  q:=textplot([i,2.5,convert(a,string)]):
  d:=display({p,e,q},scaling=constrained):
  K:=K,d:
  od:
  display([K],insequence=true);
```



Pénzügyi példa

Az örökjáradék

Tegyük fel, hogy alapítványt szeretnénk létrehozni, mely évente 100.000 forintot oszt ki az általunk meghatározott célra. Amennyiben feltételezzük, hogy hosszú távon évi 10 százalékos hozam érhet el, mekkora összeget kell most elhelyeznünk, hogy az idk végezetéig teljesíteni tudja az alapítvány a kifizetéseket?
Az örökjáradék egy végtelen tagú összegnek tekinthet, ahol az összeg tagjai az éves kifizetések.
Az örökjáradék esetében a futamidre nincs fels korlát, tehát n tart a végtelenbe.

$$V_{\infty}^{(1)} = \lim_{n \to \infty} V_n^{(1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{a}{i}(1 - \frac{1}{r^n})$$

mivel $\frac{1}{r^n}$ tart a 0-hoz, ezért a zárójelbe tartozó rész az 1-hez tart. Így a következ határértéket

kapjuk:

$$V_\infty^{(1)} = \frac{a}{i}$$

Pl.: $V_\infty^{(1)} = 1\ 000\ 000 \qquad i = 100\ 000$

Feladatok önálló megoldásra

Döntsük el a következ sorokról, hogy konvergensek, vagy divergensek. Ha lehet határozzuk meg a sor összeget (mértani sor, és teleszkópikus sor esetén).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-3n}{5+n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+n}{5n-1}$$

$$0,\overline{23} = ?$$

$$2e^2 + e + \frac{1}{2} + \ldots = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-2n^3}{n^3+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = ?$$

$$3^2 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n \cdot n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+n}{5n-1}$$

$$0,\overline{23} = ?$$

$$2e^2 + e + \frac{1}{2} + \ldots = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+2n}{13n-1}$$

$$0,\overline{201} = ?$$

$$14 + 2\sqrt{7} + 2 + \frac{2}{\sqrt{7}} \ldots = ?$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n}{9^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n+1}$$

$$0,\overline{17} = ?$$

$$5 + \frac{1}{3} + \frac{1}{45} + \ldots = ?$$