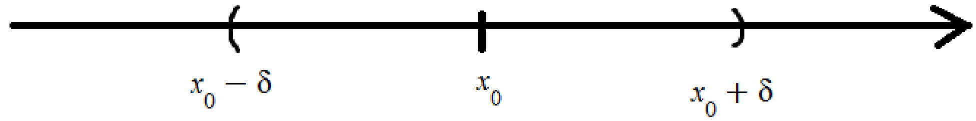
4. A függvény határértékének definíciója. Folytonosság. Szakadási helyek és típusaik.

forrás: http://dannbislondon.blogr.ws/files/CIMG2098-UK-London-TowerBridge_01.jpg

Függvény határértéke

Az elz fejezetekben megismertük a sorozat határértékének fogalmát, több módszert is láttunk a határérték meghatározására. Azért is volt fontos sokat foglalkozni a témával, mivel a sorozatok is "speciális" függvények, így általában a függvények határértékének egyik fajta definíciója is a sorzatoknál tanultakra van visszavezetve (ez a Heine-féle).

Függvény határértékének kétféle definícióját ismerjük: Heine-féle és Cauchy-féle. Az x_0 pont környezetén értjük a $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ intervallumot, ahol δ tetszőleges pozitív számot jelöl:



Feltesszük, hogy a függvények az x_0 környezetében értelmezve vannak, akkor az x_0 pontban így értelmezzük a határértéket:

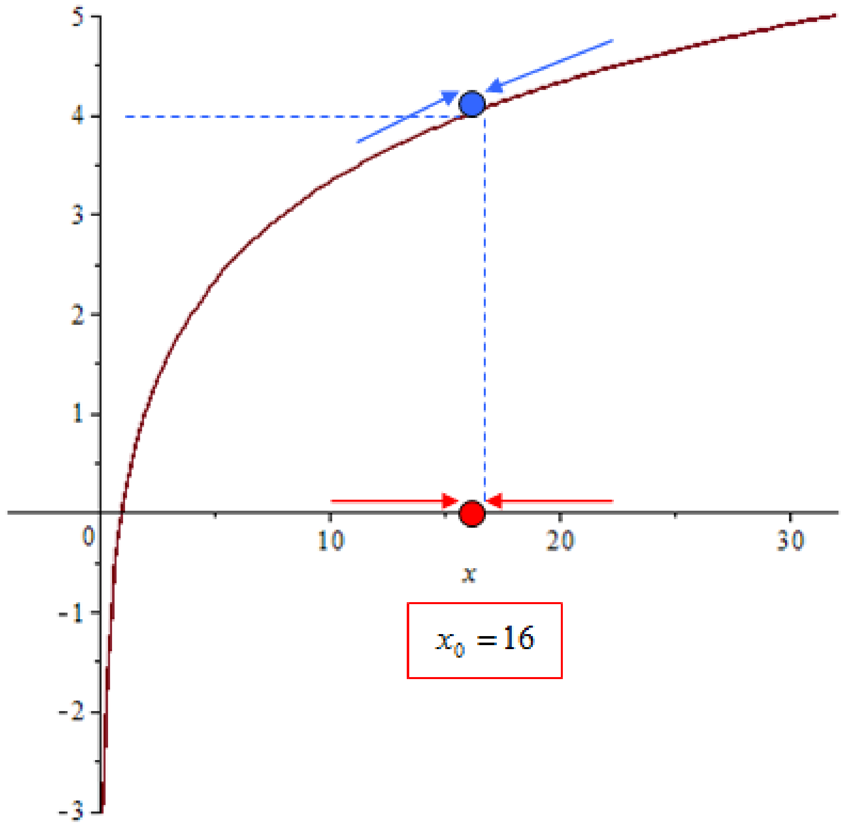
Heine-féle definíció:

Akkor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban létezik a határértéke,ha megadható olyan ***A*** *valós szám, hogy valahányszor $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ sorozat esetén a függvényértékek sorozata mindannyiszor* ***A****-hoz konvergál, azaz $f(x_n) \to A$.*

Jelölésben: $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$

A fenti definícióból látható, hogy a határérték egyértelmen meghatározott, hiszen a sorozatokra vonatkozó unicitás-tétel igaz rá, mivel a definíciót a sorozatoknál tanultakra vezettük vissza. (Az unicitás-tétel a sorozatok határértékének egyértelmségét mondja ki.)

Szemléletesen azt jelenti, hogy ha „ballagunk" az x tengelyen x_0 felé, közben az $f(x)$ függvény értékei az A szám felé tartanak:



Az ábrán azt jelenti, hogy ha x→16 , akkor a függvényértékek 4-hez közelítenek, akár bal oldalról, akár jobb oldalról nézzük.

> *restart*

> $f := x \rightarrow \log_2(x)$

$$f := x \rightarrow \log_2(x) \tag{1.1}$$

> $f(x)$

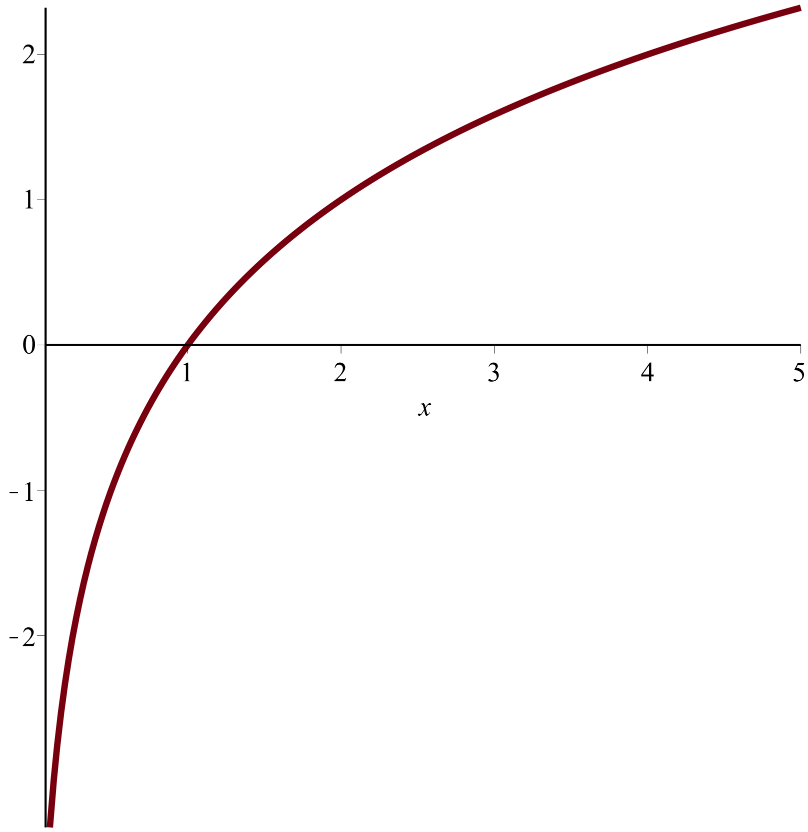
$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \tag{1.2}$$

> $hely := tickmarks = [[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20], [-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]]$

> $gorbe := plot(f(x), x = 0.1 ..5, discont = true, hely, thickness = 3) :$

$gorbe$

$hely := tickmarks = [[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20], [-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]]$

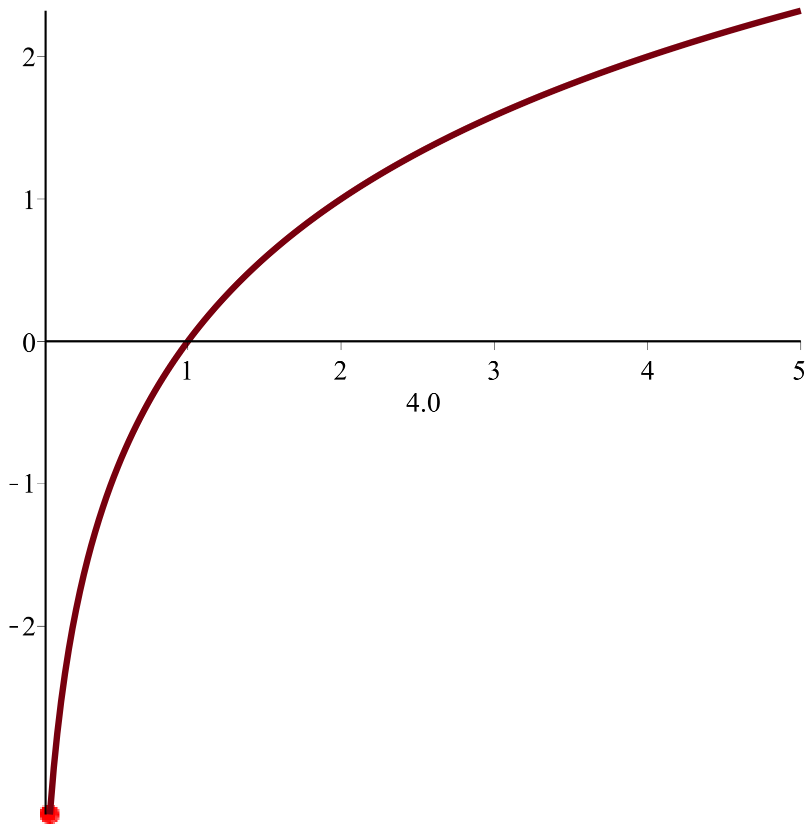


>

> $with(plots):$

> $rajzokbal := [seq(display([pointplot([x, f(x)], color = red, symbolsize = 18, symbol = solidcircle), gorbe]), x = 0.1 ..4, 0.1)]$
:

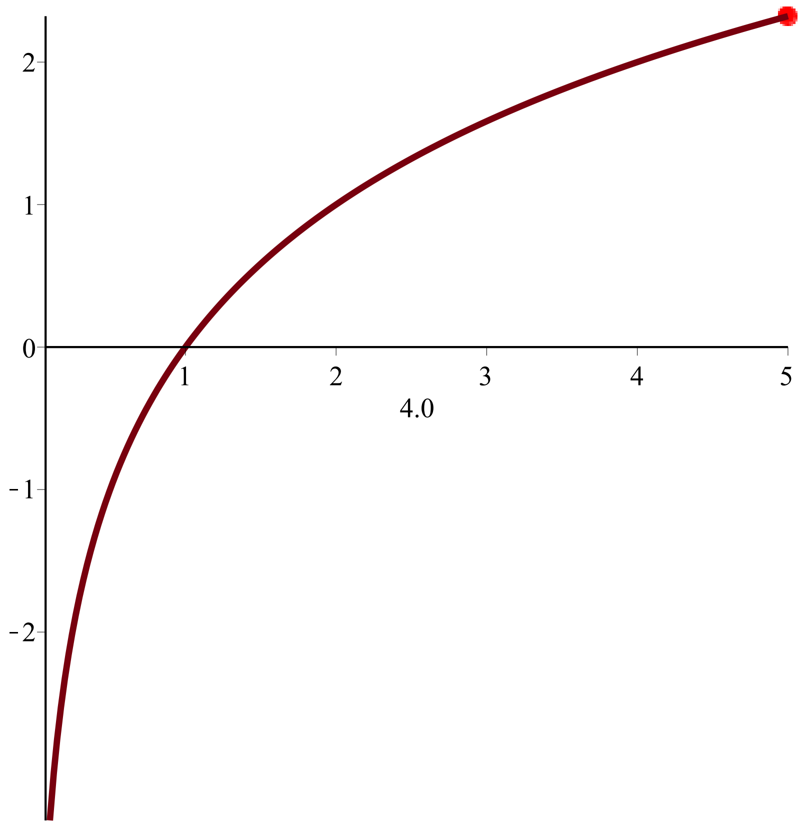
> $display(rajzokbal, insequence = true)$



Baloldali határérték

> $rajzokjobb := [seq(display([pointplot([x, f(x)], color = red, symbolsize = 18, symbol = solidcircle), gorbe]), x = 5 ..4, -0.1)]$
> :

> $display(rajzokjobb, insequence = true)$

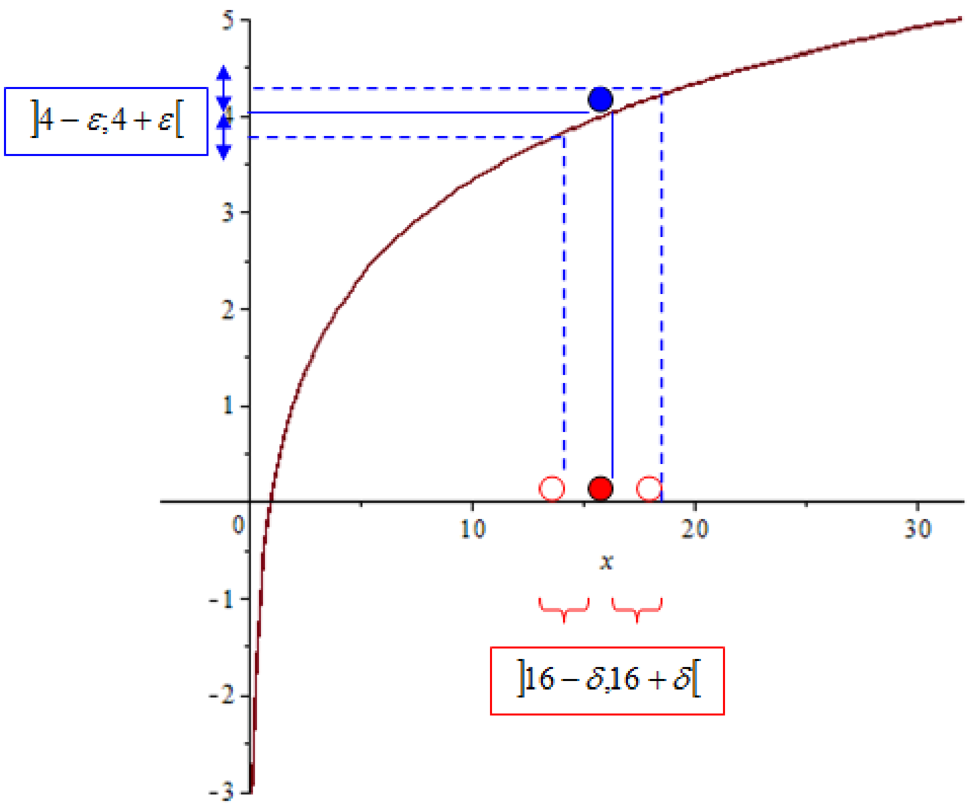


Jobboldali határérték

>
>
>

Megadjuk a másik, **Cauchy-féle definíció**t is:
Az $f(x)$ függvénynek az x_0-ban létezik a határértéke, ha megadható olyan ***A*** *valós szám, hogy bármely $\varepsilon>0$-hoz van olyan δ , hogy ha $|x-x_0|$, $x\neq x_0$ akkor $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. (δ,ε kicsiny valós pozitív számokat jelölnek)*
(Ez az ún környezetes definíció.)

Szemléletesen:



A hely kis megváltozása a függvényértékek kicsiny változását vonja maga után.

Bizonyítható, hogy a két definíció ekvivalens. Ettl most eltekintünk.
A megadott definíciók pontbeli határértékre vonatkoznak.

Folytonosság

Függvény pontban való folytonossága

Szintén kétféle definíciót mondunk ki, az egyik a Heine-féle a sorozatok határérték fogalmára támaszkodik.

Heine-féle definíció:

Akkor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény az x_0 pontban folytonos, ha minden olyan x_n sorozatra, amely $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, a függvényértékek sorozata $f(x_0)$-hoz konvergál,
azaz $f(x_n) \to f(x_0)$.

Jelölésben: $\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0)$

Cauchy-féle definíció:

Az $f(x)$ függvény az x_0-ban folytonos, , ha bármely ε>0 -hoz van olyan δ (ε,x_0)>0 , hogy ha $|x - x_0| < \delta$, x≠x_0 , akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
(ε,δ kicsiny valós számokat jelölnek, δ függ ε-tól és x_0-tól)

A két definíció ekvivalens.

A Heine-féle definícióból, a számsorozatokra megismert tételekbl és a folytonosság definíciójából adódnak a következ állítások:

- Ha $f(x) \geq 0$ és $\lim_{x \to x_0} f(x)$ létezik, akkor $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$.
- Ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ és $\lim_{x \to x_0} g(x)$ létezik, akkor létezik és

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$$

és ha $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

- Ha $f(x) \geq g(x)$ az x_0 hely valamely környezetében és a $\lim_{x \to x_0} f(x)$ és $\lim_{x \to x_0} g(x)$ határértékek léteznek, akkor $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq \lim_{x \to x_0} g(x)$
- Az $f(x)$ függvénynek x_0-ban akkor és csak akkor létezik a határértéke, ha $\{f(x_n)\}$ sorozat konvergál valahányszor $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$
- Az $f(x)$ függvény x_0-ban akkor és csak akkor folytonos, ha létezik a határértéke és $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Féloldali folytonosság

Ugyanúgy megadjuk a kétféle definíciót:

Heine-féle definíció:
Akkor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvény az x_0 pontban balról (ill. jobbról) folytonos, ha minden olyan x_n sorozatra, amely $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, amelynek tagjaira $x_n < x_0$ ($x_0 < x_n$), a függvényértékek sorozata $f(x_0)$-hoz konvergál, azaz $f(x_n) \to f(x_0)$.

Jelölésben: $\lim_{x_n \to x_0 - 0} f(x_n) = f(x_0)$ ill. $\lim_{x_n \to x_0 + 0} f(x_n) = f(x_0)$

Cauchy-féle definíció:\011
Az $f(x)$ függvény az x_0-ban balról (ill. jobbról) folytonos, ha bármely ε>0

-hoz van olyan 0<δ(x_0 ,ε) , hogy ha x<x_0 (ill. x_0 <x) és $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
(ε és δ kicsiny valós számokat jelölnek, δ függ az x_0 -tól és ε-tól)

Tétel:
Az $f(x)$ függvény az x_0 pontban akkor és csak akkor folytonos, ha x_0 -ban balról is és jobbról is folytonos.

Tehát 3 pontban foglalhatjuk össze, hogy mikor mondjuk, hogy az adott pontban folytonos-e a függvény:
- értelmezve legyen az adott pontban
- létezzen a határértéke az adott pontban (azaz van bal és jobb oldali határértéke és ezek egyenlk)
- a határérték megegyezik a függvény adott pontbeli helyettesítési értékével

Intervallumon folytonos függvények

Definíció:
Az $f(x)$ függvényt egy nyitott intervallumon folytonosnak nevezünk, ha az intervallum bármely pontjában folytonos (azaz minden pontjában).

Definíció:
Az $f(x)$ függvényt egy zárt intervallumon folytonosnak nevezünk, ha az intervallum bármely bels pontjában folytonos, a balvégpontban jobbról és a jobbvégpontban balról folytonos.

Definíció:
Az $f(x)$ függvényt egy $\Im$ intervallumon (ami lehet nyitott vagy zárt) egyenletesen folytonosnak nevezünk, ha bármely ε>0 -hoz van olyan δ(ε) >0 , amely csak ε-tól függ, de a helytől nem(!), hogy valahányszor

$|x - x^*| < \delta$, $x, x^* \epsilon \Im$, akkor $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$.

Folytonos függvények fokozatos-változás tulajdonsága:

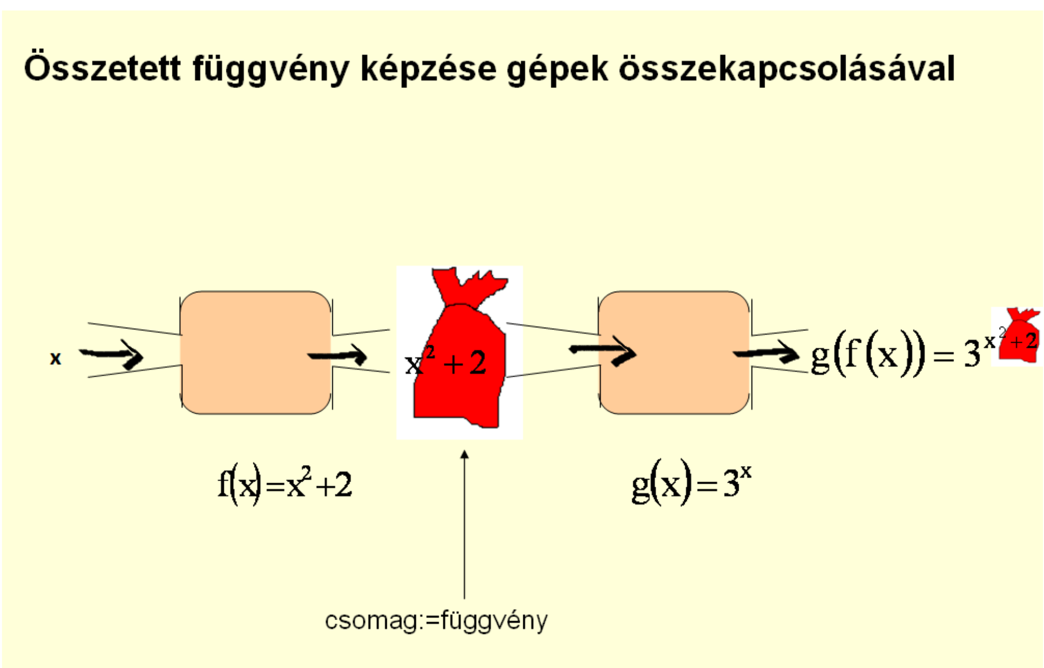
A folytonos függvények egy nagyon fontos tulajdonságát fejezi ki, nevezetesen, hogy a függvényértékei csak fokozatosan változhatnak, nem lehet „ugrás" egy folytonossági pontban.

Tételként így szól:

Ha $f(x)$ folytonos x_0-ban és $k < f(x_0) < K$, akkor van az x_0 -nak olyan környezete, amelybe es minden x pontra $k < f(x) < K$ teljesül.

Összetett függvény fogalma:

Legyen $f(x)$ és $g(x)$ két adott függvény. Az $f(g(x))$ összetett függvényen értjük azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya $g(x)$ értelmezési tartományának az a része, ahol olyan értéket vesz fel, ahol $f(x)$ értelmezve van. Az $f(g(x))$ összetett függvény hozzárendelési utasítása a következ: az x_0 helyen az összetett függvény értéke az $f(x)$ függvénynek a $g(x_0)$ helyen felvett értéke. Az $f(x)$ függvényt küls, a $g(x)$ függvényt bels függvénynek nevezzük.



Összetett függvény meghatározását segíti a gépek összekapcsolásával alkotott szabály

Tétel:

Az $f(g(x))$ összetett függvény folytonos az x_0 helyen, ha a $g(x)$ függvény folytonos x_0-ban és az $f(x)$ küls függvény folytonos $g(x_0)$ -ban.

Mveletek folytonos függvényekkel: (tétel)

Ha két függvény folytonos az x_0 pontban, akkor összegük, különbségük és szorzatuk is folytonos az x_0 pontban. Hányadosuk is folytonos, ha a nevezben lév függvény az x_0 pontban nullától különböz.

Az $f(x) = c$ és az $f(x) = x$ függvények mindenütt folytonosak.

Racionális egész függvénynek nevezünk egy olyan függvényt, amely a független változóból (legyen ez) és valós számokból véges sok összeadás (kivonás) és szorzás mveletekkel lett képezve. Általános alakjuk:

$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$, ahol $a_n \neq 0$.

Ezt n-ed fokú polinomnak is nevezzük. A racionális egész függvények mindenütt folytonosak.

A **racionális törtfüggvény** olyan függvény, amely két polinom hányadosaként áll el. Általános alakjuk:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0}{b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + b_{m-2} \cdot x^{m-2} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0}$$

Bármely racionális törtfüggvény a nevez zérus helyeit kivéve mindenütt folytonos.

Racionális függvényeknek nevezzük a racionális egész és racionális törtfüggvények összességét.

Irracionális függvényeknek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek a független változóból (legyen ez x) és valós számokból véges sok összeadás (kivonás) és szorzás, osztás és egész kitevs gyökvonás mveletekkel állíthatók el.

A racionális és irracionális függvényeket együtt **algebrai függvény**eknek nevezzük.

Trigonometrikus függvények:
A szinusz és koszinusz függvények mindenütt folytonosak.

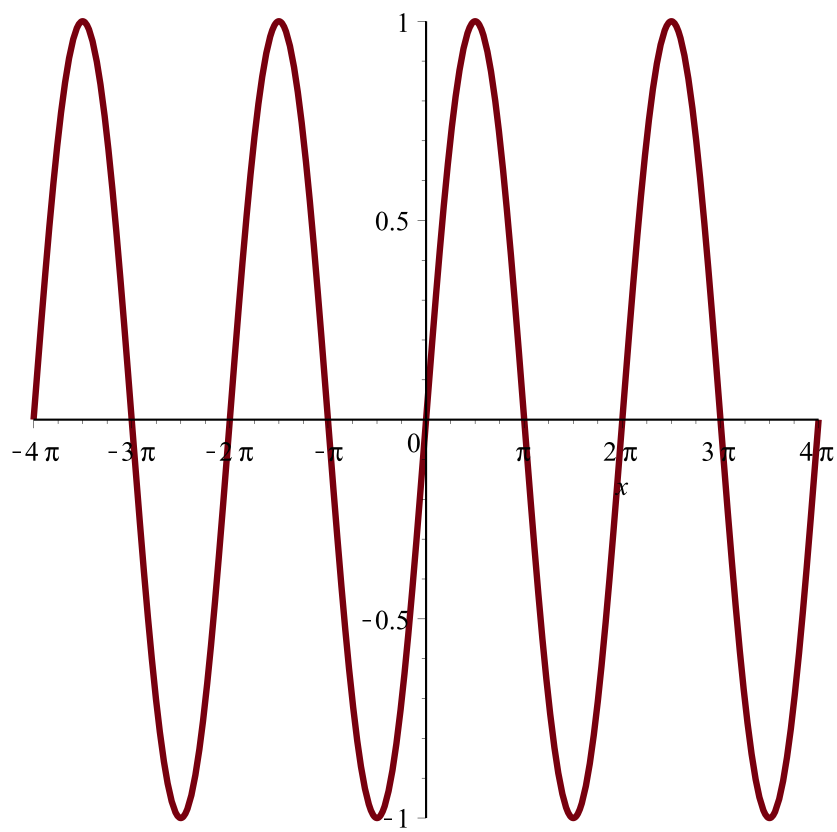
> *restart*

> $s := \sin(x)$

$$s := \sin(x) \tag{2.1}$$

>

> $sgorbe := plot(s, x = -4\pi..4\pi, thickness = 3) : sgorbe$

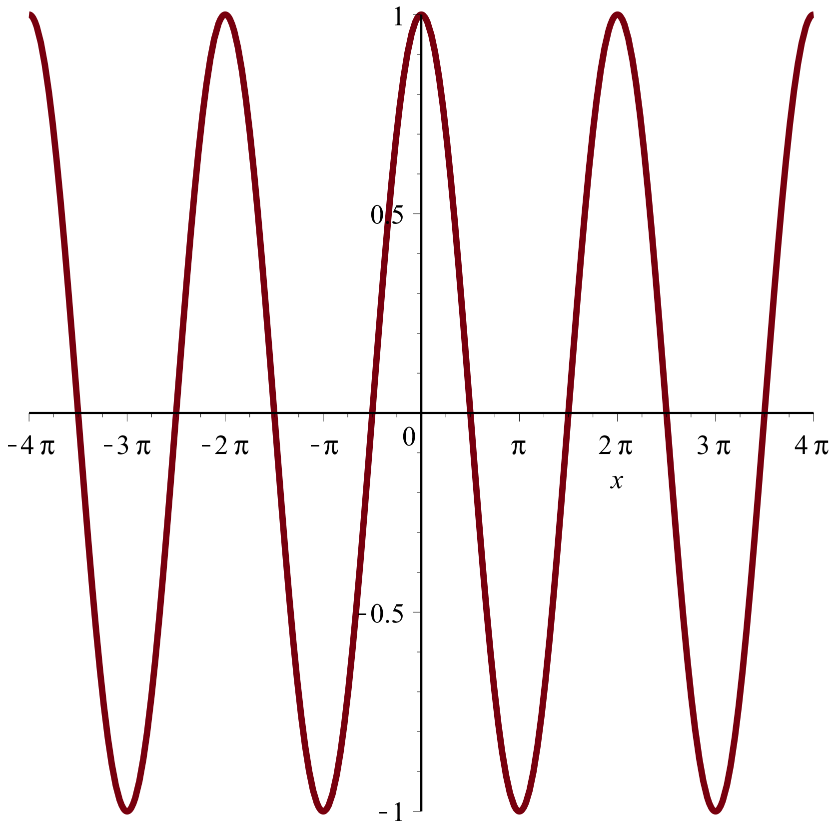


> $restart$

> $c := \cos(x)$

$$c := \cos(x) \tag{2.2}$$

> $cgorbe := plot(c, x = -4\pi..4\pi, thickness = 3) : cgorbe$

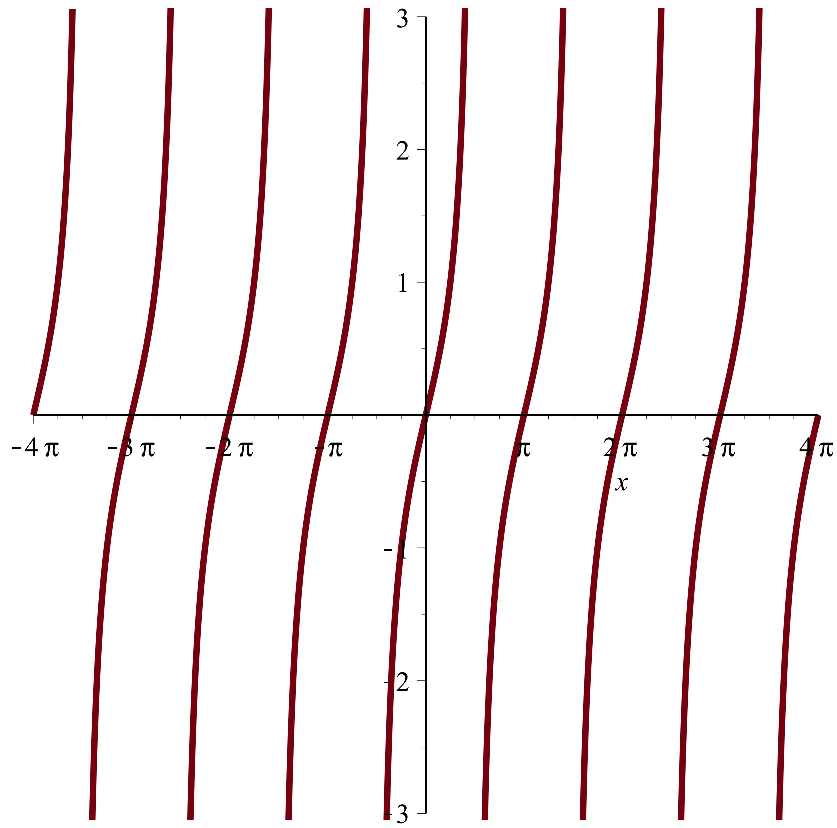


> $restart$

> $tg := \tan(x)$

$$tg := \tan(x) \tag{2.3}$$

> $tgorbe := plot(tg, x = -4\pi..4\pi, discont = true, thickness = 3) :$
> $tgorbe$



>

A tangens függvény az $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \epsilon \mathbb{Z}$ helyek kívételével mindenütt folytonos.

Exponenciális függvény

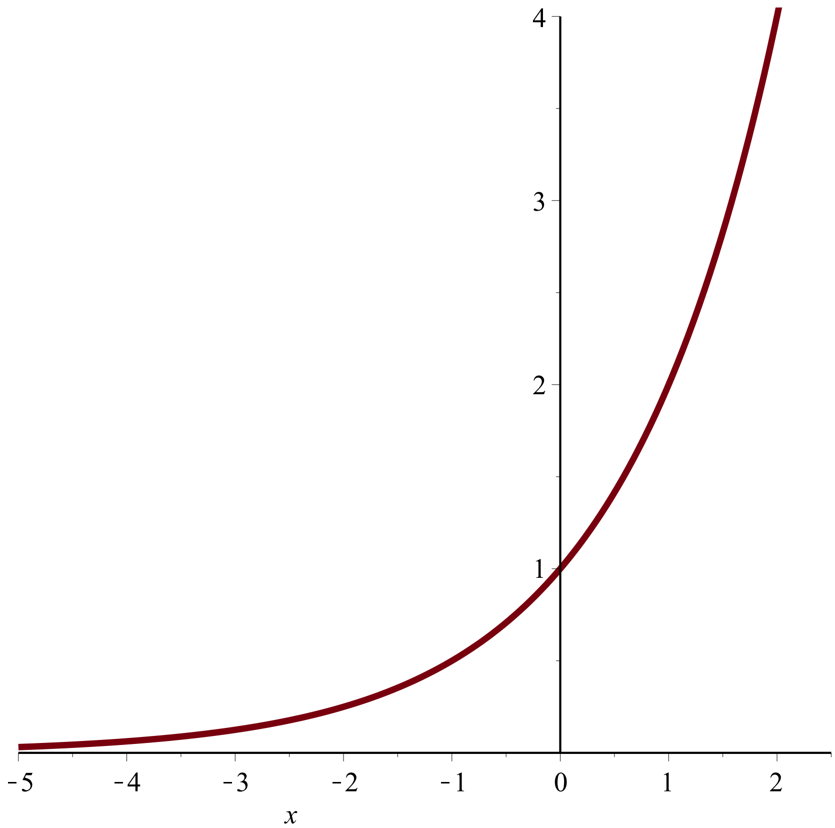
Az exponenciális függvény mindenütt folytonos.

> $restart$

> $k := 2^x$

$$k := 2^x \tag{2.4}$$

> $kgorbe := plot(k, x = -5\,..5, discont = true, thickness = 3) : kgorbe$

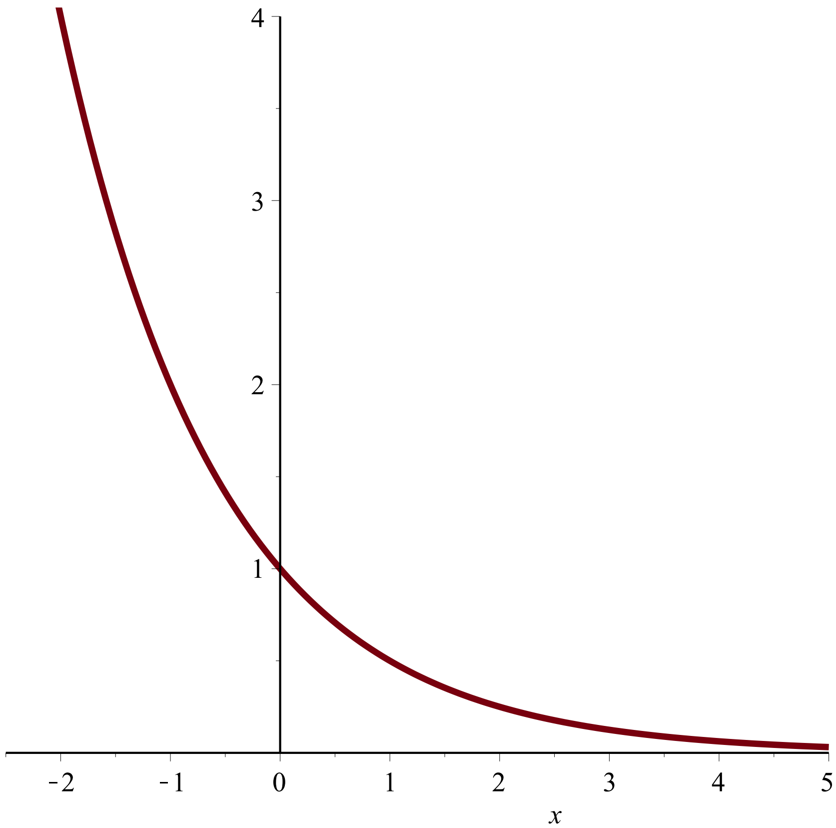


> $restart$

> $ke := \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

$$ke := \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \tag{2.5}$$

> $kegorbe := plot(ke, x = -5 ..5, discont = true, thickness = 3) :$
> $kegorbe$



Logaritmus függvény

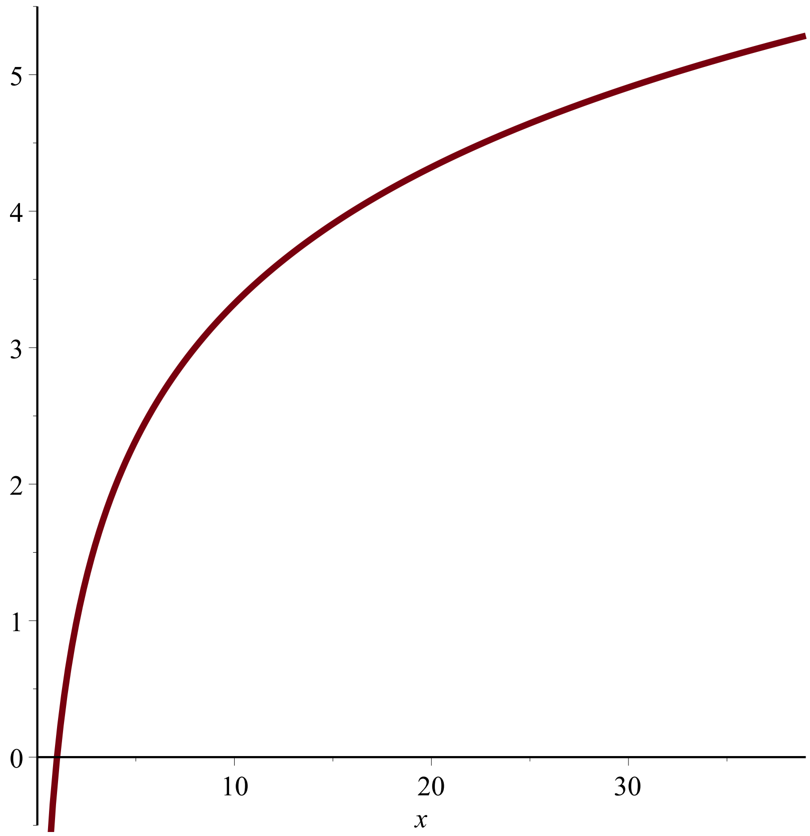
A logaritmus függvény az értelmezési tartományán mindenütt folytonos.

> $restart$

> $l2 := \log_2(x)$

$$l2 := \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \tag{2.6}$$

> $l2gorbe := plot(l2, x = 0..39, discont = true, thickness = 3) : l2gorbe$

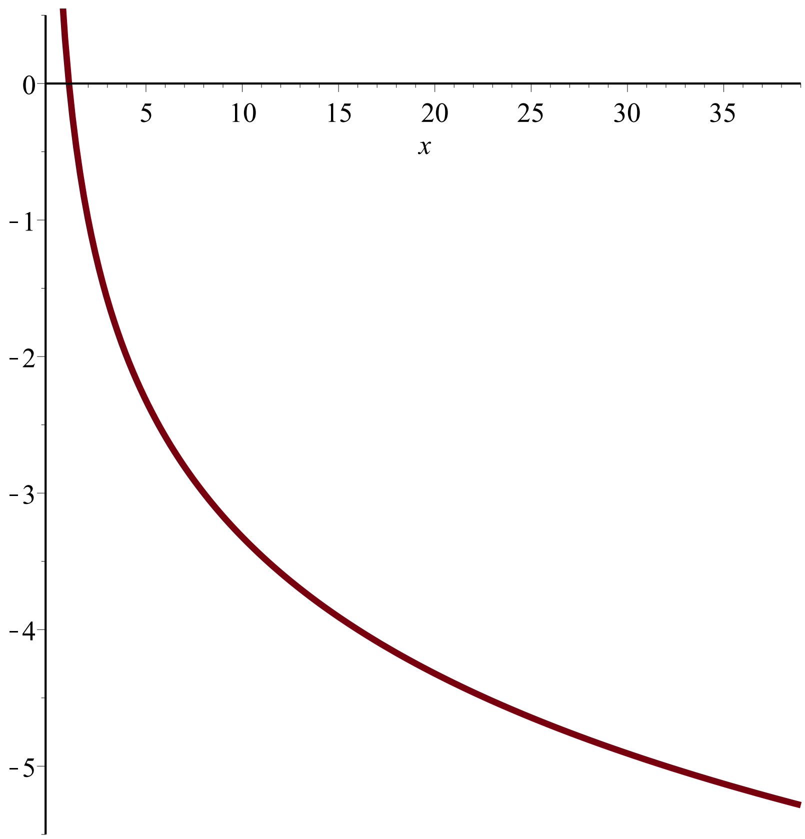


> *restart*

> $ld2 := \log_{\frac{1}{2}}(x)$

$$ld2 := -\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \qquad (2.7)$$

> $ld2gorbe := plot(ld2, x = 0.01 ..39, \; discont = true, thickness = 3)$:
> *ld2gorbe*

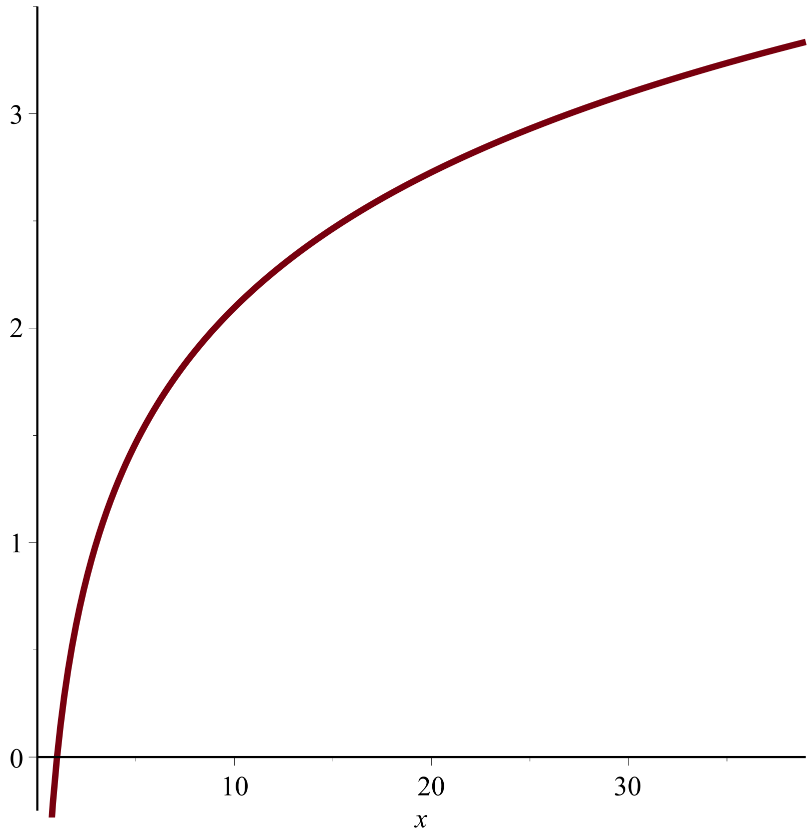


> *restart*

> $l3 := \log_3(x)$

$$l3 := \frac{\ln(x)}{\ln(3)} \tag{2.8}$$

> $l3gorbe := plot(l3, x = 0\,..39, discont = true, thickness = 3) : l3gorbe$

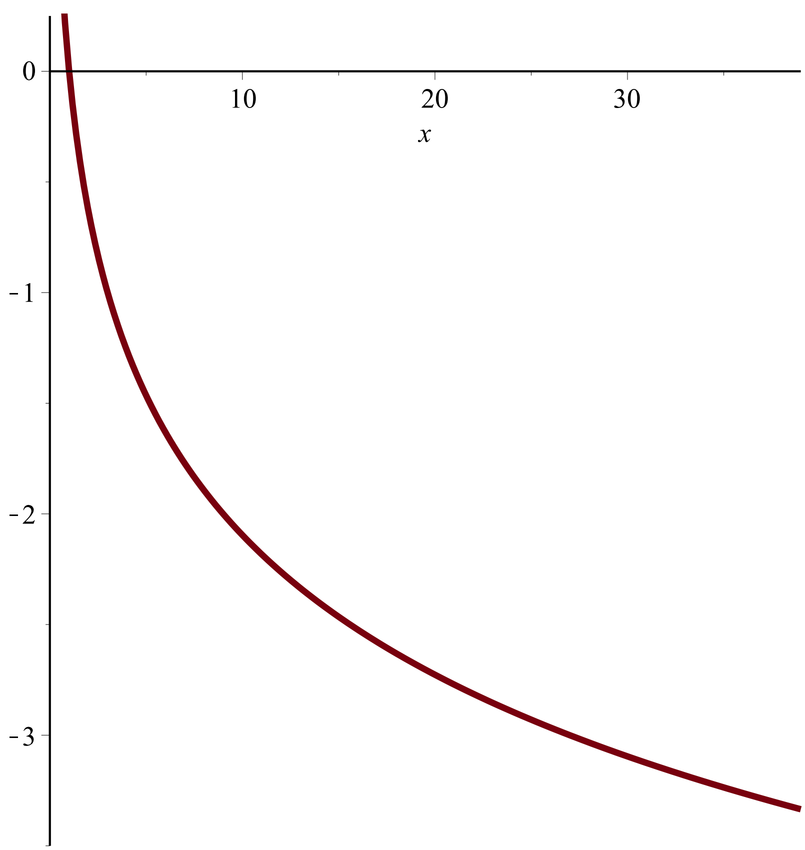


> *restart*

> $ld3 := \log_{\frac{1}{3}}(x)$

$$ld3 := -\frac{\ln(x)}{\ln(3)} \tag{2.9}$$

> $ld3gorbe := plot(ld3, x = 0\,..39, discont = true, thickness = 3)$:
> $ld3gorbe$



Az irracionális kitevj hatványfüggvényt, az exponenciális, a logaritmus, a trigonometrikus függvényeket és ezekbl összetett függvényeket közös néven **transzcendens függvény**eknek nevezzük.

Az **elemi függvény**ek körébe az algebrai és a transzcendens függvényeknek nevezzük.

Folytonos függvények tulajdonságai

Véges zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai:

Tétel:

Véges zárt intervallumon folytonos függvény korlátos ezen az intervallumon.

Tétel:

Véges zárt intervallumon folytonos függvény felveszi széls értékeit.

Tétel:

Véges zárt intervallumon folytonos függvény ezen az intervallumon egyenletesen is folytonos.

Tétel:

Véges zárt intervallumon folytonos függvény minden a minimuma és maximuma közé es értéket felvesz ezen az intervallumon. St lesz egy olyan hely, ahol azt elször és egy olyan hely, ahol azt utoljára veszi fel.

Tétel:

Egy intervallumon folytonos függvény ezen intervallum bármely két pontjában felvett értékei közé es bármely értéket felvesz e két hely között. Azaz megvan a Bolzano-Darboux féle tulajdonsága. St e két hely között lesz egy els és egy utolsó olyan pont, ahol a függvény ezt a teszleges közbüls értéket felveszi. Ezt úgy mondjuk, hogy bármely folytonos függvény rendelkezik az els és utolsó elérés tulajdonsággal is.

Ez a függhíd mindenütt folytonos, minden gond nélkül átsétálhatunk rajta

Szakadási helyek fajai

Szakadási helyek fajai

definíció:

Megszüntethet szakadási helye van az $f(x)$ függvénynek x_0 -ban, ha itt létezik a határértéke, de az nem egyezik meg az $f(x_0)$ helyettesítési értékkel, vagy ha függvény nincs is értelmezve x_0 -ban. ($\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ vagy $f(x_0)$ nincs értelmezve).

A képen látható hídnak szakadása van,amit ügyesen megjavíthatnak a munkások. Ezek után gond nélkül végig sétálhatunk rajta.

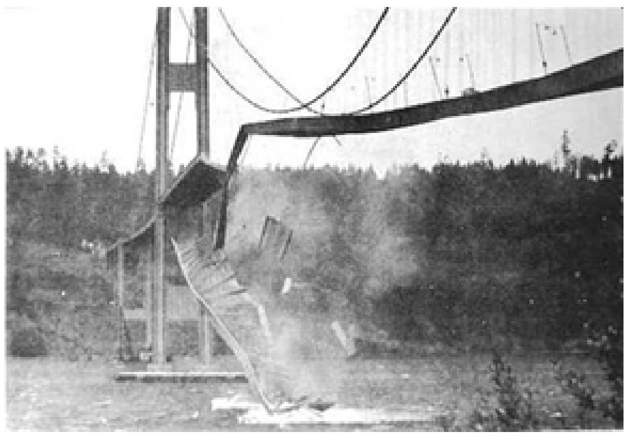
definíció:

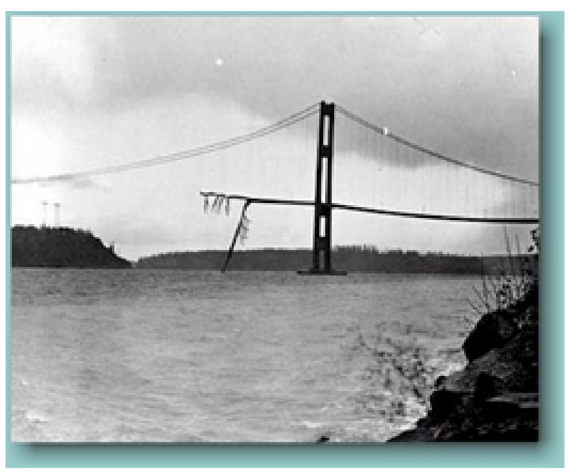
Elsfajú szakadási helye van az $f(x)$ függvénynek x_0 -ban, ha létezik a jobb- és baloldali határértéke, de ezek különbözk; azaz

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

definíció:

Másodfajú szakadási helye van az függvénynek -ban, ha vagy a jobb-, vagy a baloldali, vagy egyik féloldali határértéke sem létezik. (nem megszüntethet szakadás, ld alábbi képen)





Nem megszüntethet szakadás
http://www.mommo.hu/media/A_Tacoma-_hid_osszeomlasa_1940ben

Az eredeti Tacoma-híd ismert volt lengéseirl, himbálódzásáról. Az 5939 láb hosszú hidat 1940 július 1-én adták át. A híd Tacomát és Gig Harbort kapcsolta össze. A hídavatás után 4 hónappal, 1940 november 7-én 42 mérföld/óra sebesség szélvihar támadt a híd környezetében. A szél által keltett lengéshullámok egyik oldaltól a másikig oda-vissza haladtak egyre ersebbé válva, s a híd leszakadásához vezettek. A katasztrófa a híd szerkezetére vezethet vissza.10 évvel késbb épült meg az új híd, mely 40 lábbal hosszabb, mint az els volt.

Az els és másodfajú szakadási helyeket nem megszüntethet szakadási helyeknek nevezzük.

Függvény határértékeinek típusai

A függvény határértékének több típusát különböztetjük meg a hely típusa és a határérték típusa szerint:

Végtelen határértékek:
Itt is kétféle definíciót adunk meg:

Heine-féle definíció:
Akkor mondjuk, hogy az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban a határértéke +∞ ill. -∞ ,ha valahányszor $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ sorozat esetén a függvényértékek sorozata mindannyiszor +∞ ill. -∞ -be divergál, azaz $f(x_n) \to +\infty \ ill \ -\infty$.
Jelölésben: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ vagy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Cauchy-féle definíció:
Az $f(x)$ függvénynek az x_0-ban a határértéke +∞ ill. - , ha bármely M számhoz van olyan 0<δ(x_0, M) , hogy ha $|x - x_0| < \delta, x \neq x_0$, akkor $f(x) \geq M$ ill. $f(x) \leq M$ teljesül.
(δ kicsiny valós számot jelöl, M abszolút értékben "nagy" számot jelent)

A két definíció ekvivalens.
Hasonlóan definiálhatók a féloldali határértékek is.

Véges helyen vett végtelen határértékek:

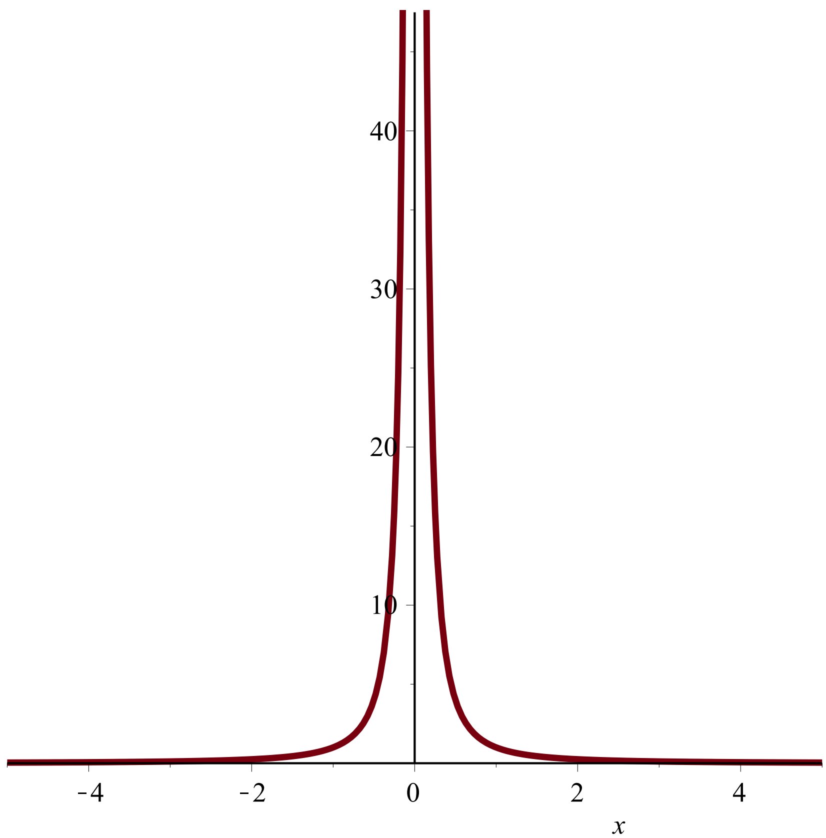
Így viselkedik például az x=0 pontban az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvény:

> *restart*

> $n := \dfrac{1}{x^2}$

$$n := \frac{1}{x^2} \tag{3.1.1}$$

> $ngorbe := plot(n, x = -5..5, discont = true, thickness = 3) :$
> $ngorbe$



>

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x^2} = +\infty \quad \text{illetve} \quad \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

A 0 hely bal és jobb oldali határértéke egyaránt plusz végtelen. Tehát véges helyen végtelen a határértéke.

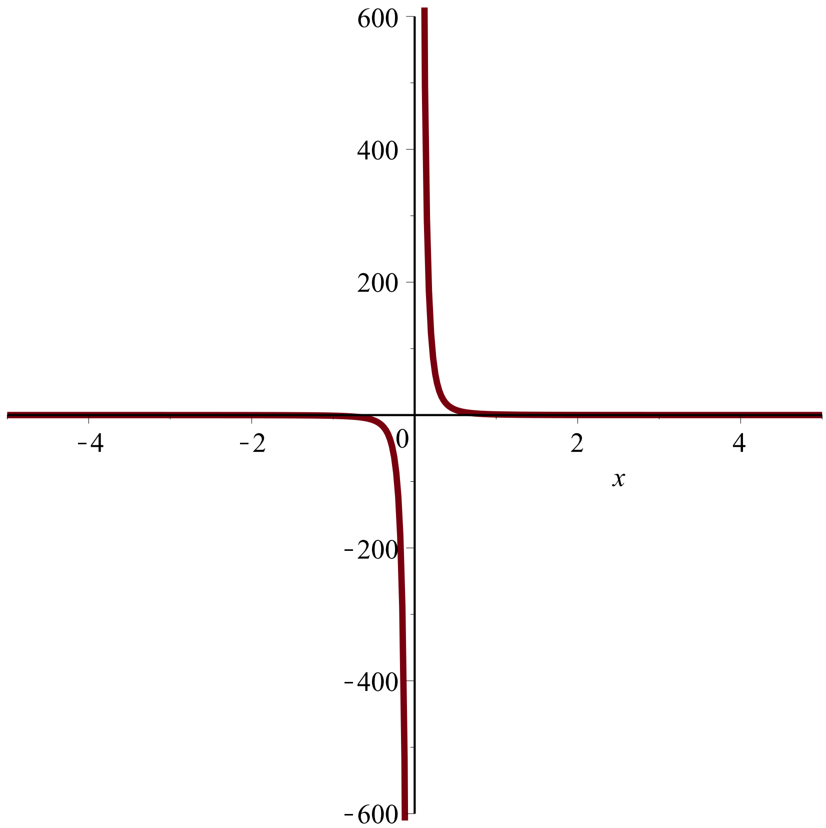
Így viselkedik például az $x_0 = 0$ pontban az $f(x) = \frac{1}{x^3}$ függvény:

> *restart*

> $h := \frac{1}{x^3}$

$$h := \frac{1}{x^3} \tag{3.1.2}$$

> $hgorbe := plot(h, x = -5 ..5, discont = true, thickness = 3) :$
> *hgorbe*



$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x^3} = -\infty \quad \text{illetve} \quad \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

A 0 helyen a baloldali határérték mínusz, a jobb oldali határérték plusz végtelen. Tehát véges helyen végtelen határértékkel találkozunk.

Végtelenben vett végtelen határérték:

Így viselkedik például a $+\infty$-ben az $f(x) = -2 \cdot |x-3| + 5$ függvény:

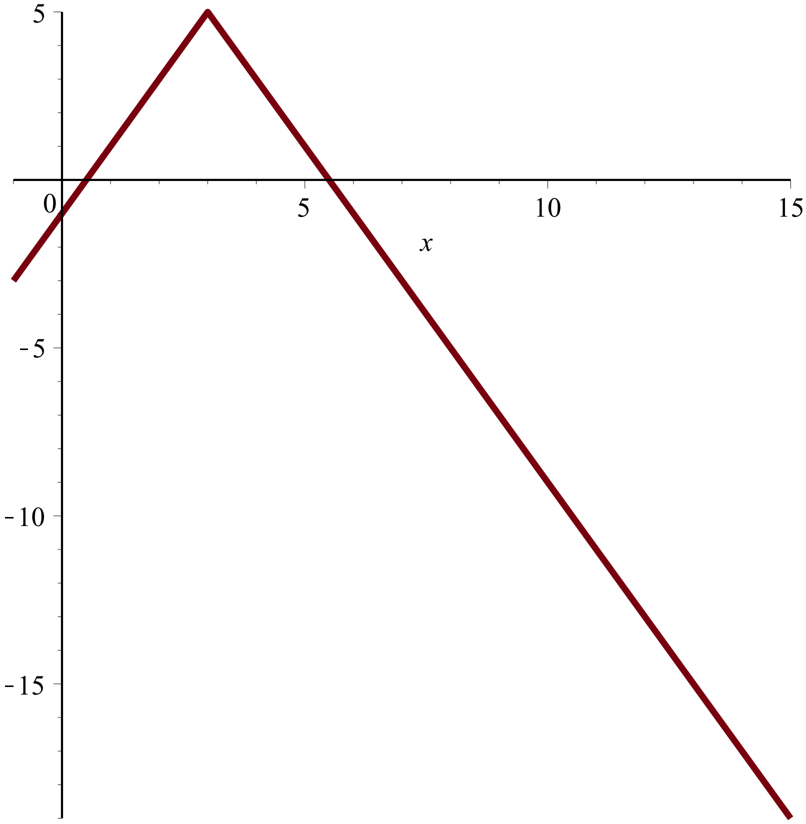
> *restart*

> $ab := -2 \cdot |x-3| + 5$

$$ab := -2\,|x-3| + 5 \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

> $abgorbe := plot(ab, x = -1..15, discont = true, thickness = 3):$

$abgorbe$



>

$\lim_{x \to \infty} (-2 \cdot |x-3| + 5) = -\infty$

Azt látjuk, hogy minél „messzebb” megyünk az x tengelyen a pozitív irányban, a függvény értékei egyre mélyebbre esnek, egyre kisebb értéket vesznek fel.

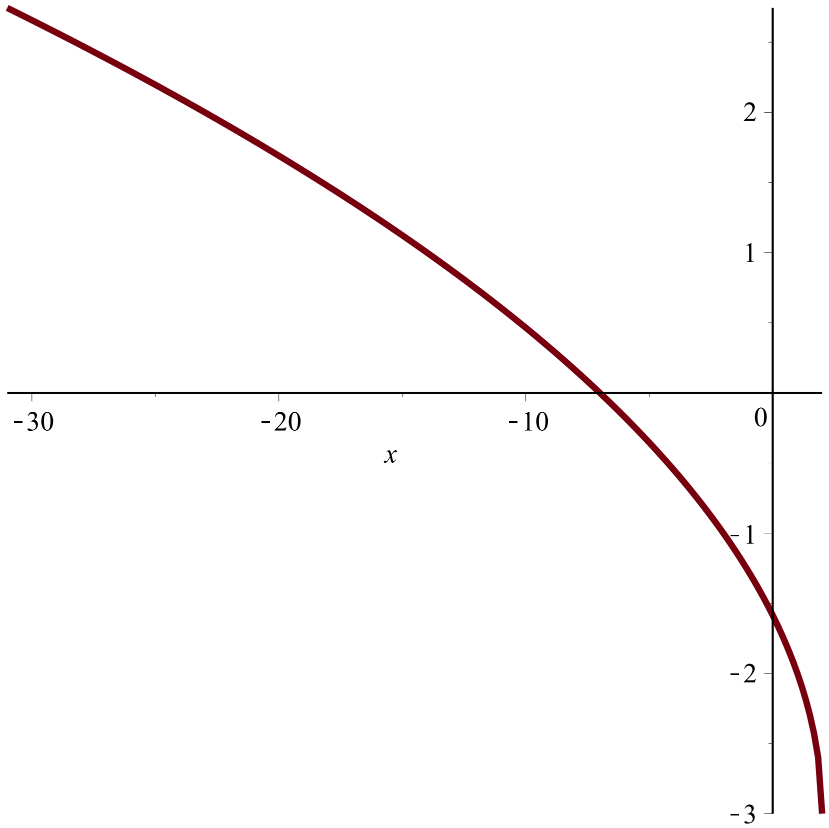
Így viselkedik például a -∞-ben az $f(x) = \sqrt{2-x} - 3$ függvény:

> $restart$

> $gy := \sqrt{2-x} - 3$

$$gy := \sqrt{2-x} - 3 \quad \textbf{(3.2.2)}$$

> $gygorbe := plot(gy, x = -31 ..2, discont = true, thickness = 3) :$
> $gygorbe$



>

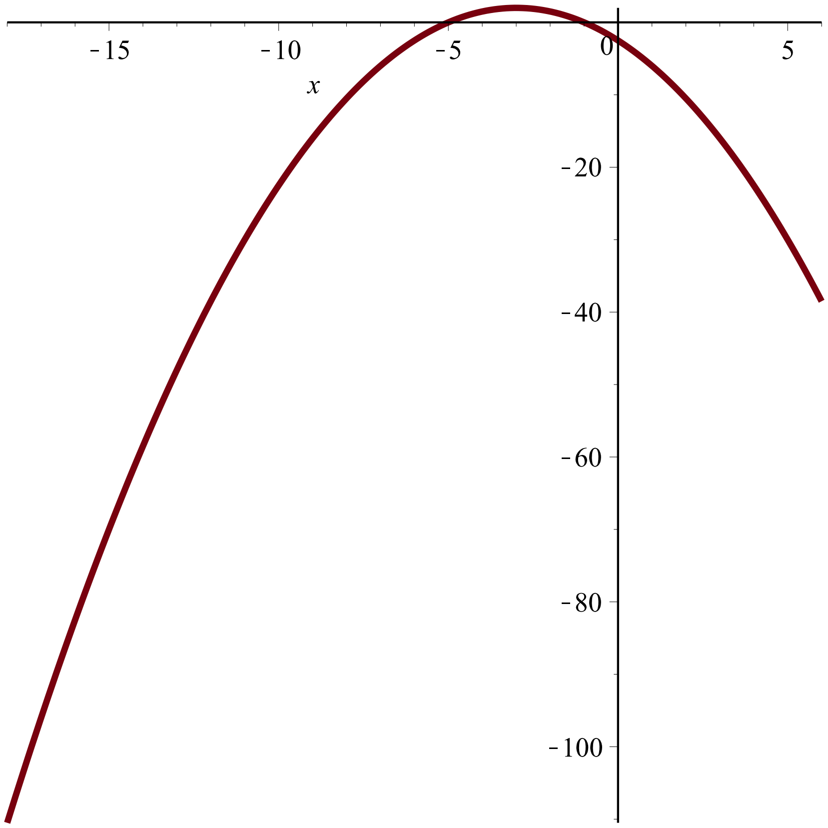
Így viselkedik például a -∞-ben az $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+3)^2 + 2$ függvény:

> $restart$

> $\mathrm{gn} := -\frac{1}{2} \cdot (x+3)^2 + 2$

$$gn := -\frac{1}{2}\,(x+3)^2 + 2 \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

> $gngorbe := plot(gn, x = -18 ..6, discont = true, thickness = 3) :$
> $gngorbe$



>

$$\lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{2} \cdot (x+3)^2 + 2 \right) = -\infty$$

Azt látjuk, hogy minél „messzebb" megyünk az x tengelyen a negatív irányban, azaz ballagunk a mínusz végtelen felé, függvény értékei egyre mélyebbre mennek, egyre kisebb értéket vesznek fel.

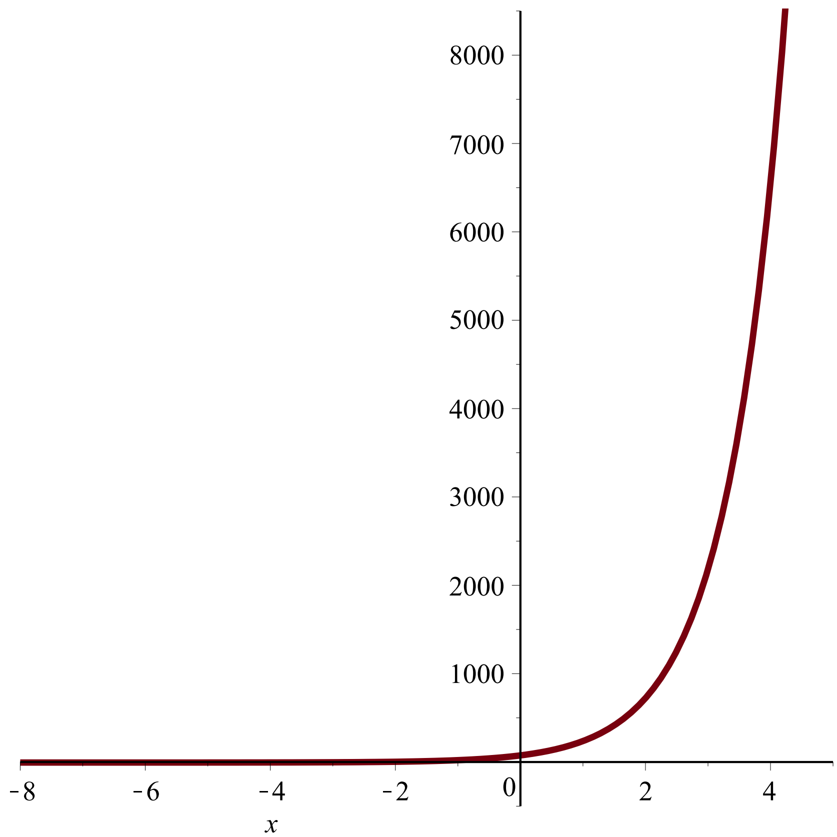
Így viselkedik például a ∞-ben az $f(x) = 3^{x+4} - 6$ függvény:

> *restart*

> ep $:= 3^{x+4} - 6$

$$ep := 3^{x+4} - 6 \qquad \textbf{(3.2.4)}$$

> *epgorbe* $:=$ *plot*(*ep*, $x = -8\,..16$, *discont* = *true*, *thickness* = 3) :
epgorbe



>

$\lim_{x \to \infty} \left(3^{x+4} - 6\right) = \infty$

Azt látjuk, hogy minél „messzebb" megyünk az x tengelyen a függvény értékei egyre magasabbra törnek, egyre nagyobb értéket vesznek fel.

Végtelenben vett véges határérték:

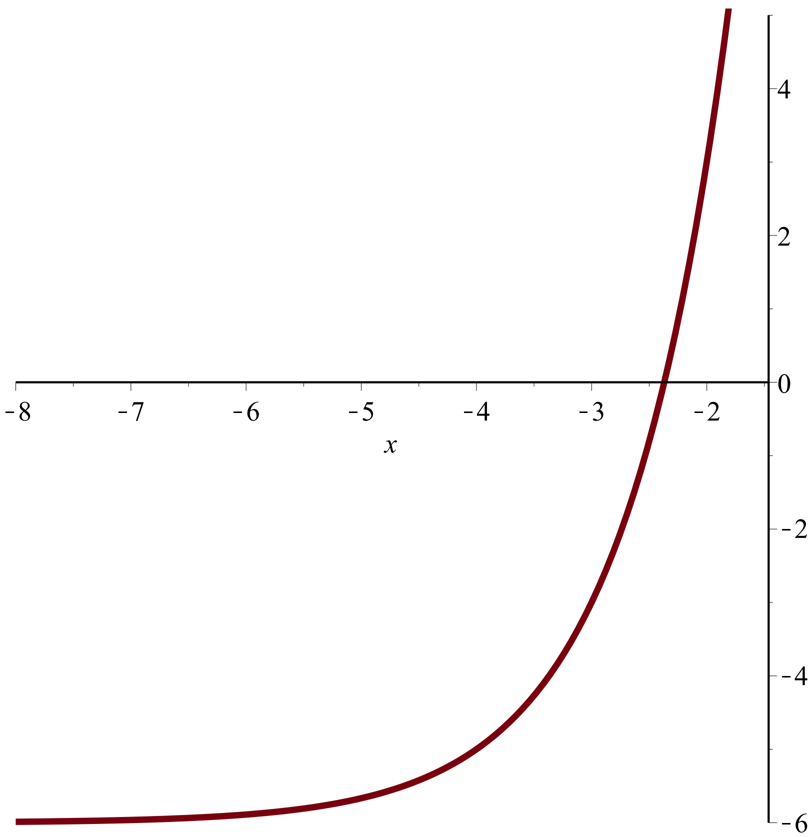
Így viselkedik például a ∞-ben az $f(x) = 3^{x+4} - 6$ függvény:

> *restart*

> $\mathrm{ep} := 3^{x+4} - 6$

$$ep := 3^{x+4} - 6 \quad \textbf{(3.3.1)}$$

> *epgorbe* := *plot*(*ep*, *x* = −8 ..4, *discont* = *true*, *thickness* = 3) :
epgorbe



>

$$\lim_{x \to -\infty} \left(3^{x+4} - 6\right) = -6$$

A mínusz végtelenben a függvény grafikonja nagyon közel megy az y=-6 egyenlet egyeneshez, de sohasem éri el.

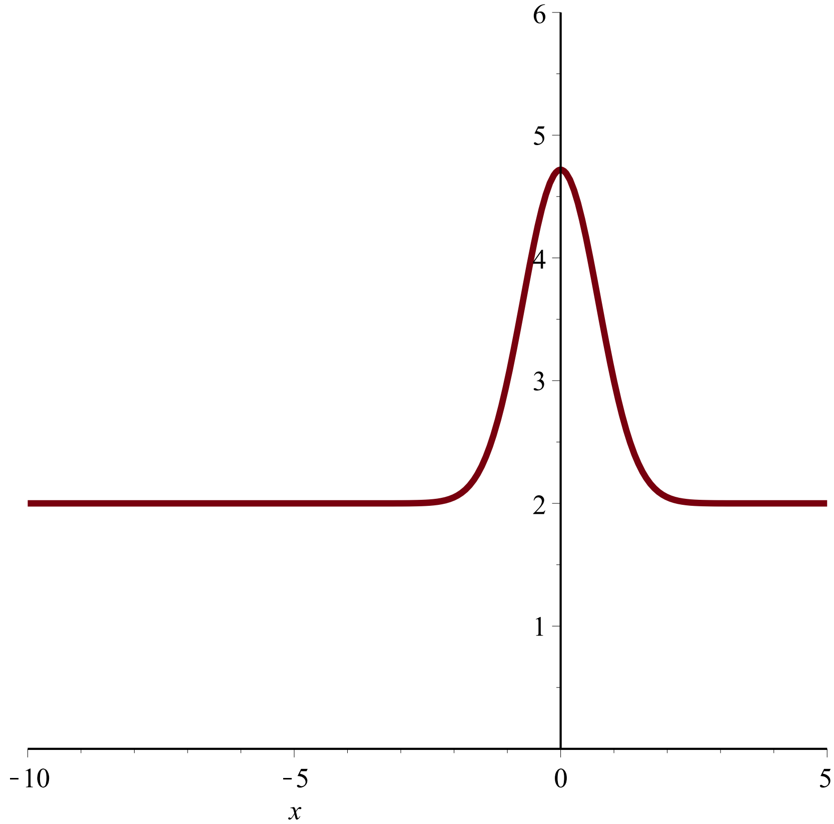
Így viselkedik például a -∞-ben az $f(x) = e^{-x^2+1} + 2$ függvény:

> *restart*

> $e := e^{-x^2+1} + 2$

$$e := e^{-x^2+1} + 2 \qquad \textbf{(3.3.2)}$$

> *egorbe* := *plot*(*e*, *x* = −10 ..5, 0 ..6, *discont* = *true*, *thickness* = 3) :
egorbe



>

$$\lim_{x \to -\infty} \left(e^{-x^2+1} + 2\right) = 2$$

A függvény a mínusz végtelenben nagyon közel megy az y=2 egyenlet egyeneshez, de sohasem éri el.

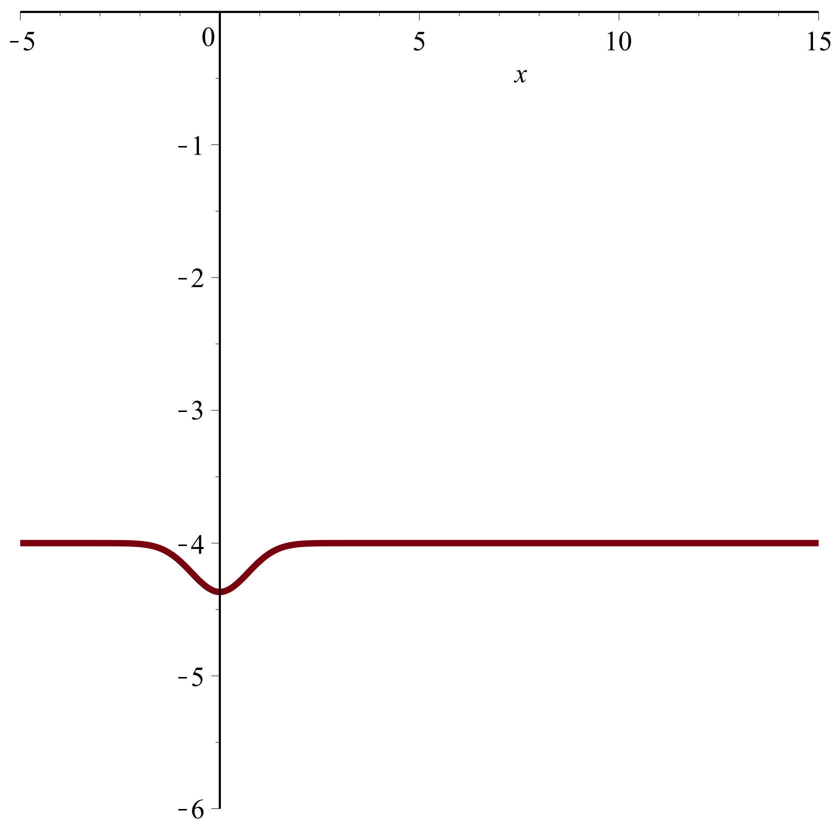
Így viselkedik például a ∞-ben az $f(x) = -e^{-x^2-1} - 4$ függvény:

> *restart*

> $\text{en} := -e^{-x^2-1} - 4$

$$en := -e^{-x^2-1} - 4 \qquad \textbf{(3.3.3)}$$

> *engorbe* := *plot*(*en*, *x* = −5 ..15, −6 ..0, *discont* = *true*, *thickness* = 3) : *engorbe*



>

$$\lim_{x \to \infty} \left(-e^{-x^2-1} - 4 \right) = -4$$

$$-4 = -4 \qquad \textbf{(3.3.4)}$$

A függvény a plusz végtelenben nagyon közel megy az y=-4 egyenlet egyeneshez, de sohasem éri el.

Így viselkedik például a ∞-ben az $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$ függvény:

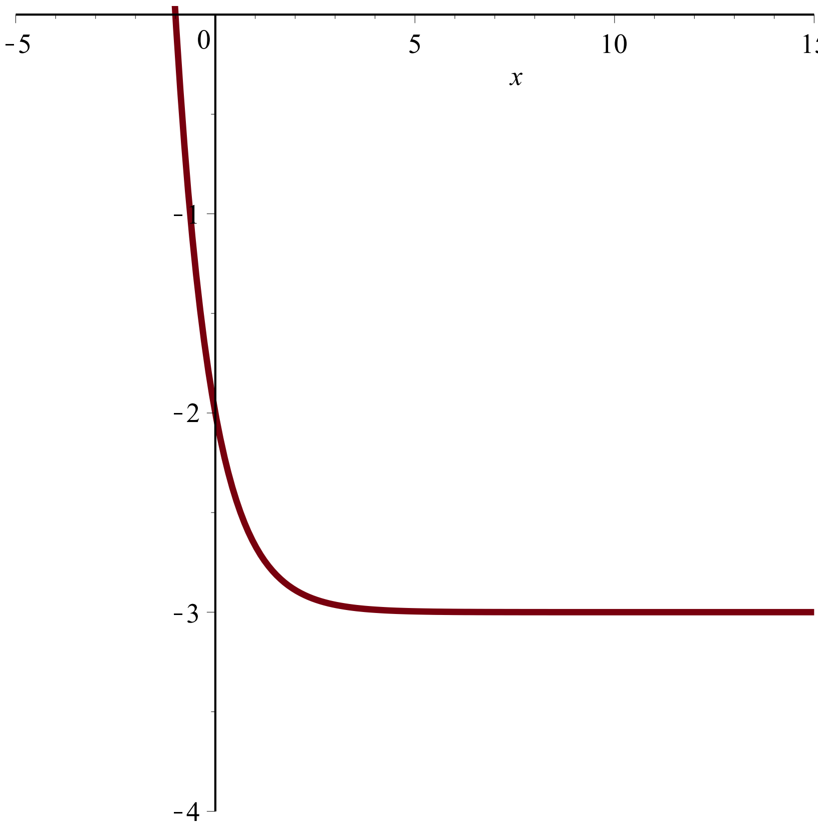
> *restart*

> $\mathrm{he} := \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$

(3.3.5)

$$he := \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3 \tag{3.3.5}$$

> $hegorbe := plot\left(he, x = -5..15, -4..0, discont = true, thickness = 3\right) : hegorbe$



>

$\lim_{x \to \infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3 \right) = -3$

A függvény a plusz végtelenben nagyon közel megy az y=-3 egyenlet egyeneshez, de sohasem éri el.

Véges helyen vett véges határérték

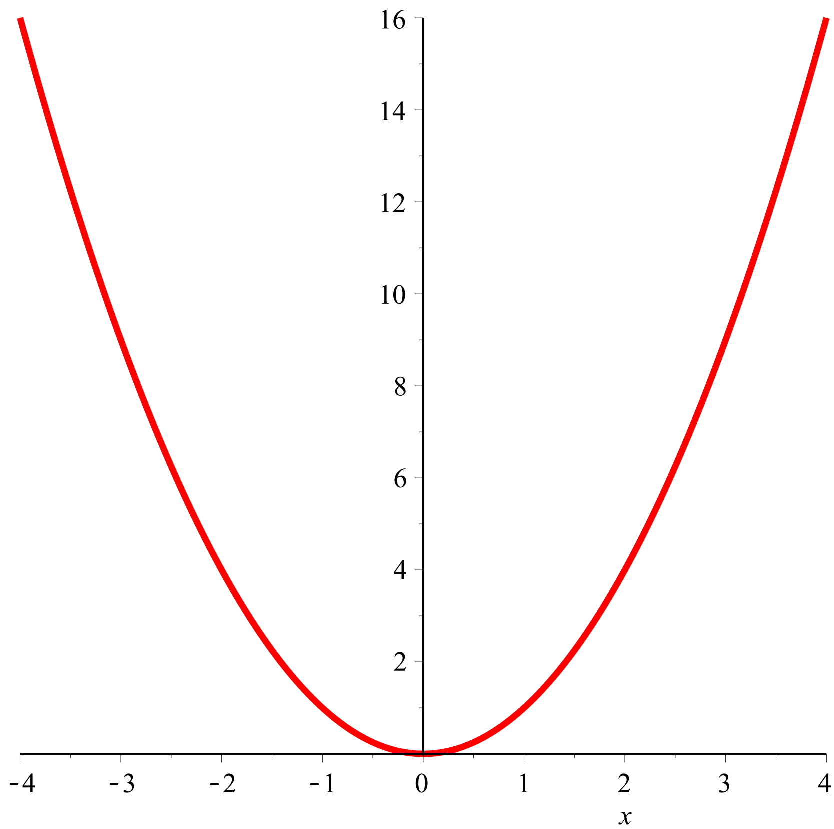
Legyen $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, a vizsgálandó függvény. Határozzuk meg a határértékét az x=2 helyen: $\lim_{x \to 2} x^2 = ?$

> *restart*

> n := x^2

$$n := x^2 \tag{3.4.1}$$

> *ngorbe* := *plot*(*n*, *x* = −4 ..4, 0 ..16, *discont* = *true*, *thickness* = 3, *color* = *red*) : *ngorbe*



>

A Heine-féle sorozatos definíció alapján mondhatjuk a következket: Pl. $x_n = 2 + \frac{1}{n} \to 2$, *ha* $n \to \infty$ Vizsgáljuk meg, hogy ekkor hova tart a megfelel függvényértékek sorozata:

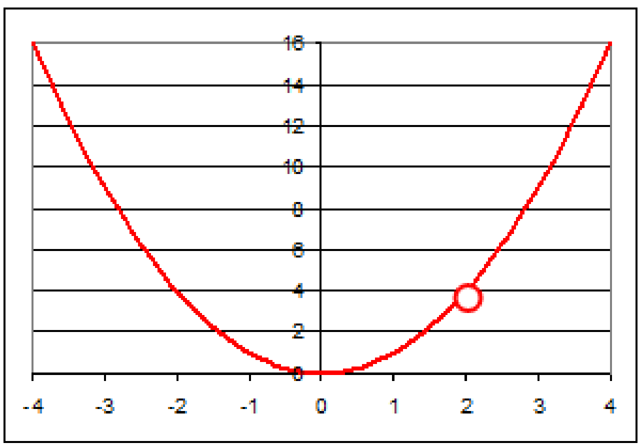
$f(x_n) = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 = 4 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2} \to 4$, *ha* $n \to \infty$. Ha $x_n = 2 - \frac{1}{n}$

$\to 2$, *ha* $n \to \infty$, akkor

$$f(x_n) = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 = 4 - \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2} \to 4, \text{ } ha\ n$$

$\to \infty$. Ha $x_n = 2 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \to 2$, *ha* $n \to \infty$, akkor $f(x_n) = \left(2 \pm \frac{1}{n}\right)^2 = 4 \pm \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2} \to 4$, *ha* $n \to \infty$. A határérték környezeti tulajdonság („Nem érdekel, hogy mit csinál a függvény x = a-ban, csak a környezetében.”) Tehát $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

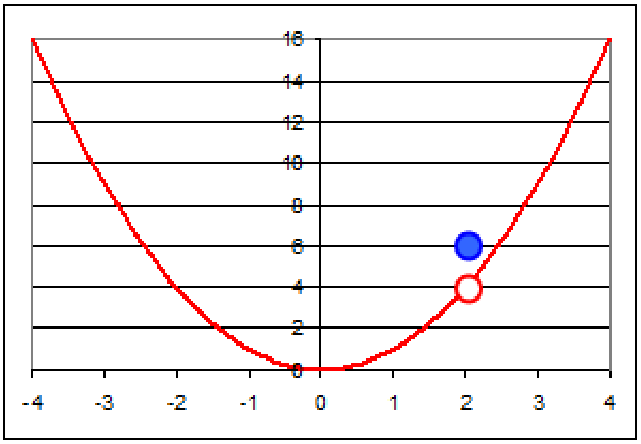
Legyen $g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 2} g(x) = 4$$

[>

Legyen $h(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 6 & \text{x} = 2 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 2} h(x) = 4$$

A fenti 3 függvény f(x), g(x), h(x) a 2 pont környezetében teljesen ugyanúgy viselkedik, eltérés közöttük kizárólag a 2 pontbeli viselkedésben van.

Az f(x) függvény minden valós számra értelmezve van, tehát 2-ben is, a 2 -beli érték „szépen belesimul” a függvény megfelelő értékeinek sorába.

A g(x) értelmezési tartományából hiányzik a 2, tehát g(x) 2-ben nincs értelmezve („lyukas”).

A h(x) függvény ugyan szintén minden valós számra értelmezve van, mint az f(x), de a h(x) 2-beli értéke „renitens”, kilóg a sorból, „kitéptük” a 2-beli értékét és áttettük máshova, 4-bl 6-ba.

Figyelem!!!

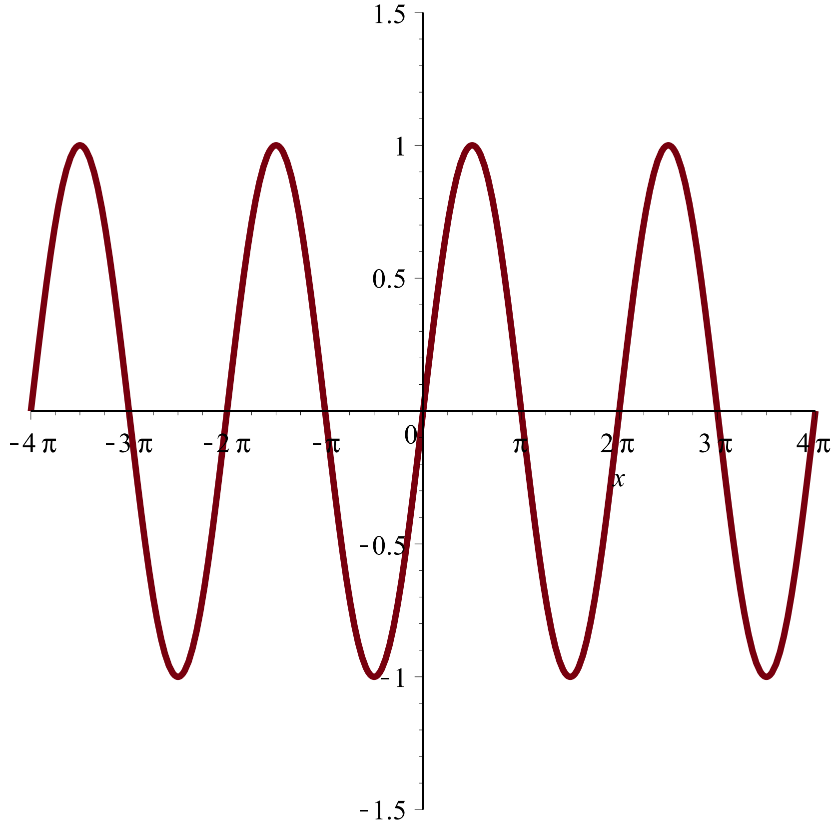
Lássuk az $f(x) = \sin(x)$ függvényt!

> *restart*

> $s := \sin(\mathrm{x})$

$$s := \sin(x) \qquad \textbf{(3.5.1)}$$

> $sgorbe := plot(s, x = -4\pi..4\pi, -1.5..1.5, discont = true, thickness = 3) : sgorbe$



>

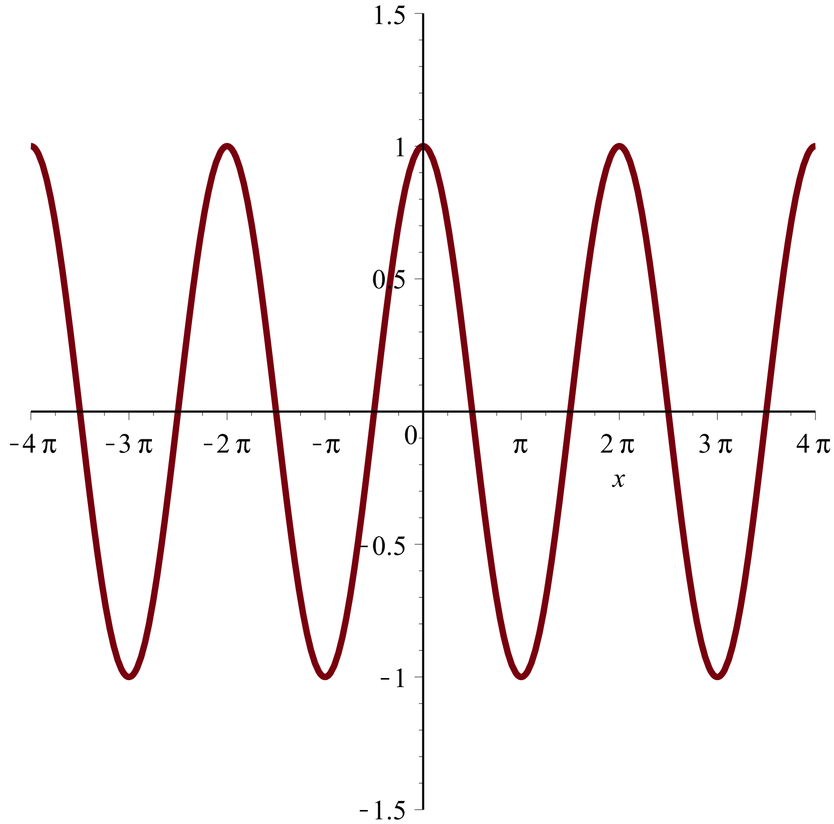
$f(x) = \sin(x)$ esetén $\lim_{x \to \infty} f(x)$ nem létezik, de $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ sem létezik, mert:
Mert van olyan $x_n \to \infty$, hogy $f(x_n) \to 0$ van olyan $x_n \to \infty$, hogy $f(x_n) \to 1$, és bármilyen -1≤A≤1 számot adunk meg mindig találunk olyan végtelenbe tartó sorozatot, amelyhez tartozó függvényérték sorozat A-hoz tart.

Lássuk az $f(x) = \cos(x)$ függvényt!

```
> restart
> c := cos(x)
```

$$c := \cos(x) \tag{3.5.2}$$

> $cgorbe := plot(c, x = -4\,\pi..4\,\pi, -1.5..1.5, discont = true, thickness = 3) : cgorbe$



>

$f(x) = \sin(x)$ esetén $\lim_{x \to \infty} f(x)$ nem létezik, de $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ sem létezik, mert:
Mert van olyan $x_n \to \infty$, hogy $f(x_n) \to 0$ van olyan $x_n \to \infty$, hogy $f(x_n) \to 1$, és bármilyen -1≤A≤1 számot adunk meg mindig találunk olyan végtelenbe tartó sorozatot, amelyhez tartozó függvényérték sorozat A-hoz tart.

Lássuk az $f(x)$= {x}=x-[x] törtrész függvényt!

> *restart*

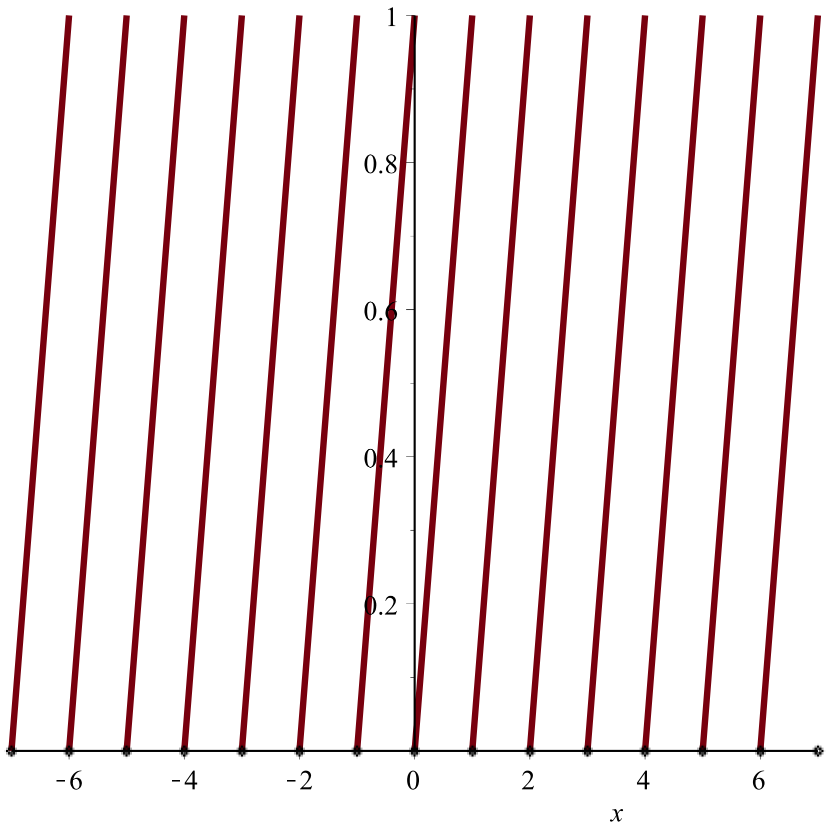
> $er := \mathrm{floor}(x)$

$$er := \mathrm{floor}(x) \tag{3.5.3}$$

> $tr := x - er$

$$tr := x - \mathrm{floor}(x) \tag{3.5.4}$$

> $trgorbe := plot(tr, x = -7..7, discont = true, thickness = 3) :$
> $trgorbe$



>

{x}=x-[x], Egy szám törtrészét úgy kapjuk meg, hogy a számból kivonjuk az egészrészét. Egy szám egészrésze a nála nem nagyobb (kisebb vagy egyenl) egész szám.

Törtrész jelölése: {x}

Egészrész jelölése: [x]

$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 1 \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = 0$ Azaz az x=1 helyen nem létezik a határérték! Nem megszüntethet szakadás van!

Nevezetes függvény határértékek

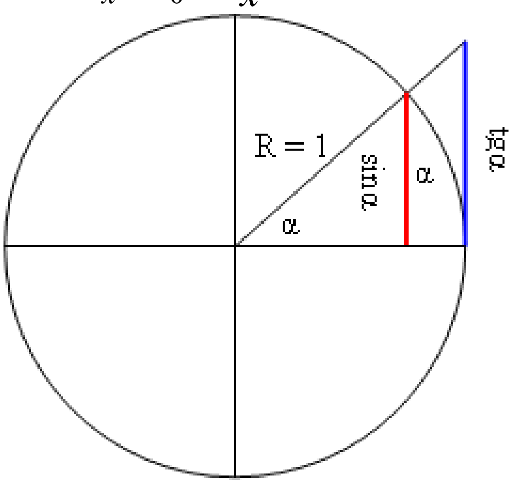
H1: $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

H2: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

H3: $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

$$e=e \tag{4.1}$$

H4: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$



<u>H4 bizonyítás:</u>

x>0 $\sin(x) < x < \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ vegyük a reciprokát,ekkor a reláció megfordul: $\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sin(x)}$ az egyenltlenséget $\sin(x)$-szel szorozva: $\cos(x) < \dfrac{\sin(x)}{x} < 1$, ha $x \to 0$, akkor $\cos(x) \to 1$, ezért a rendr-elv miatt $\dfrac{\sin(x)}{x} \to 1$

A bizonyítás hasonló x<0 esetén is.

H5: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(kx)}{kx} = 1, k \in \mathbb{R}$

H6: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$

H7: $\lim\limits_{x \to \infty} q^x = \begin{cases} 0, & ha\ \ 0 < q < 1 \\ +\infty & 1 < q \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to \infty} q^x = 1,\ ha\ q = 1$

H8: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ =e, $ha\ x > 0$

H9: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^x = \mathrm{e}^k,\ ha\ x > 0$

H10: $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$

A határérték és a folytonosság feladatokban

A határérték és a folytonosság feladatokban

Szemléleten alapuló feladatmegoldás

F1:

A következ utasítással adott a függvény: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{(x^2-4)^2}, & ha\ \ x < 0 \\ -x+2, & x \geq 0 \end{cases}$ Ábrázolja,

majd válaszoljon a következ kérdésekre!

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = ?$ $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = ?$ $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = ?$ $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = ?$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = ?$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ?$

Hol van szakadása és az milyen típusú? Hol folytonos?

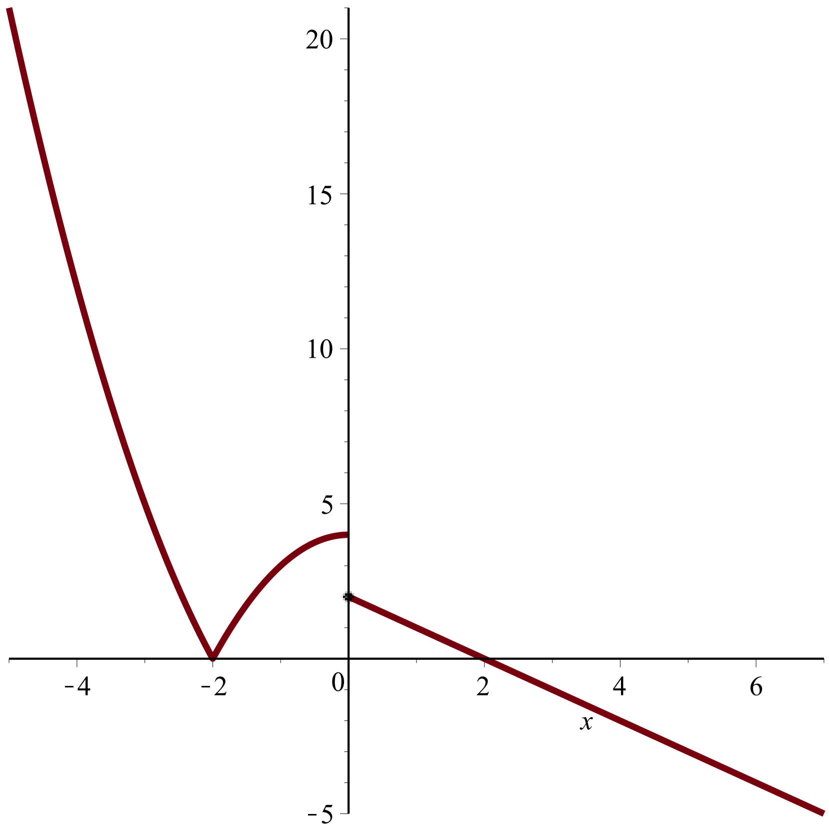
Megoldás:

> *restart*

> $f := \begin{cases} \sqrt{(x^2-4)^2} & x < 0 \\ -x+2 & x \geq 0 \end{cases}$

$$f := \begin{cases} \sqrt{(x^2-4)^2} & x < 0 \\ -x+2 & 0 \leq x \end{cases} \quad \textbf{(5.1.1.1)}$$

> $fgorbe := plot(f, x = -5..7, discont = true, thickness = 3) : fgorbe$



\>

$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 2 \quad \lim_{x \to 0-0} f(x) = 4 \quad \lim_{x \to 2+0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to 2-0} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Az x=0 helyen nem megszüntethet szakadása van, ott nem folytonos, másutt viszont igen.

F2:

Vizsgálja meg a következ függvényt is: $g(x) = \dfrac{2}{|x^2 - 4|} + 3$ az adott helyeken! Hol van szakadása és az milyen típusú? Hol folytonos?

$\lim_{x \to 0+0} f(x) = ? \quad \lim_{x \to 0-0} f(x) = ? \quad \lim_{x \to 2+0} f(x) = ? \quad \lim_{x \to 2-0} f(x) = ? \quad \lim_{x \to -2+0} f(x) = ?$

$\lim_{x \to -2-0} f(x) = ? \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = ? \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = ?$

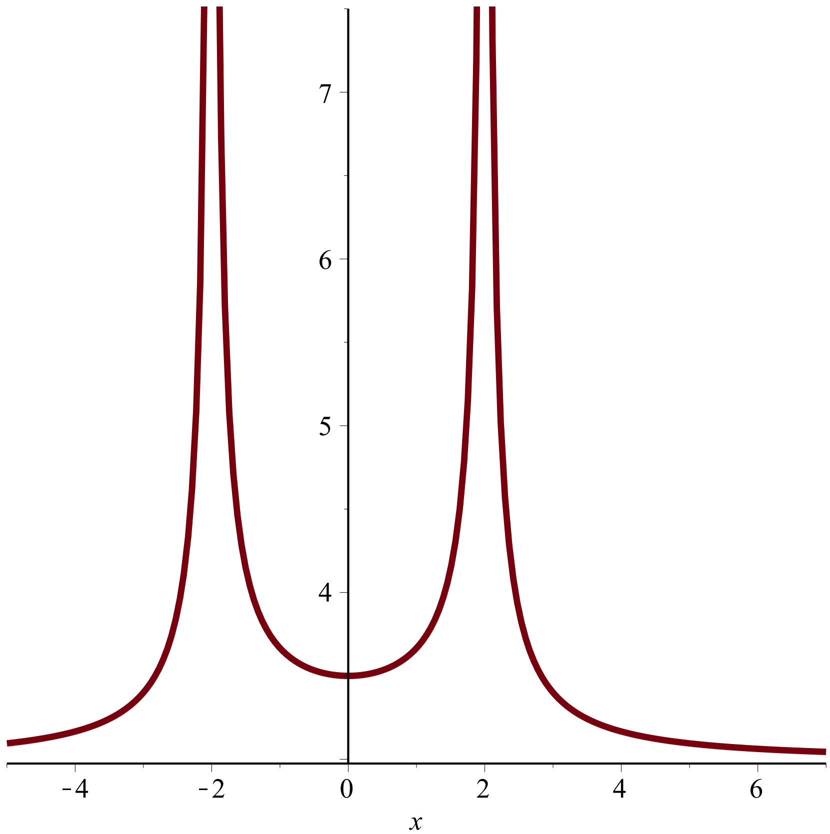
Megoldás:

\> *restart*

> $g := \dfrac{2}{|x^2-4|} + 3$

$$g := \frac{2}{|x^2-4|} + 3 \qquad \textbf{(5.1.1.2)}$$

> $ggorbe := plot(g, x = -5..7, discont = true, thickness = 3) : ggorbe$



>

$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 3$ $\lim_{x \to 0-0} f(x) = 3$ $\lim_{x \to 2+0} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 2-0} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -2+0} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -2-0} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

Nem megszüntethet szakadása van az x=-2 és x=2 helyeken. E helyeken nem folytonos, másutt igen.

F3:

A következ utasítással adott a függvény: $f(x) = \begin{cases} |x-1|+1, & ha\ \ x < 0 \\ -2x+2, & x \geq 0 \end{cases}$ Ábrázolja, majd válaszoljon a következ kérdésekre!

$\lim_{x \to 0+0} f(x) = ?$ $\lim_{x \to 0-0} f(x) = ?$ $\lim_{x \to -1+0} f(x) = ?$ $\lim_{x \to -1-0} f(x) = ?$ $\lim_{x \to 1+0} f(x) = ?$
$\lim_{x \to 1-0} f(x) = ?$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = ?$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = ?$

Hol van szakadása és az milyen típusú? Hol folytonos?

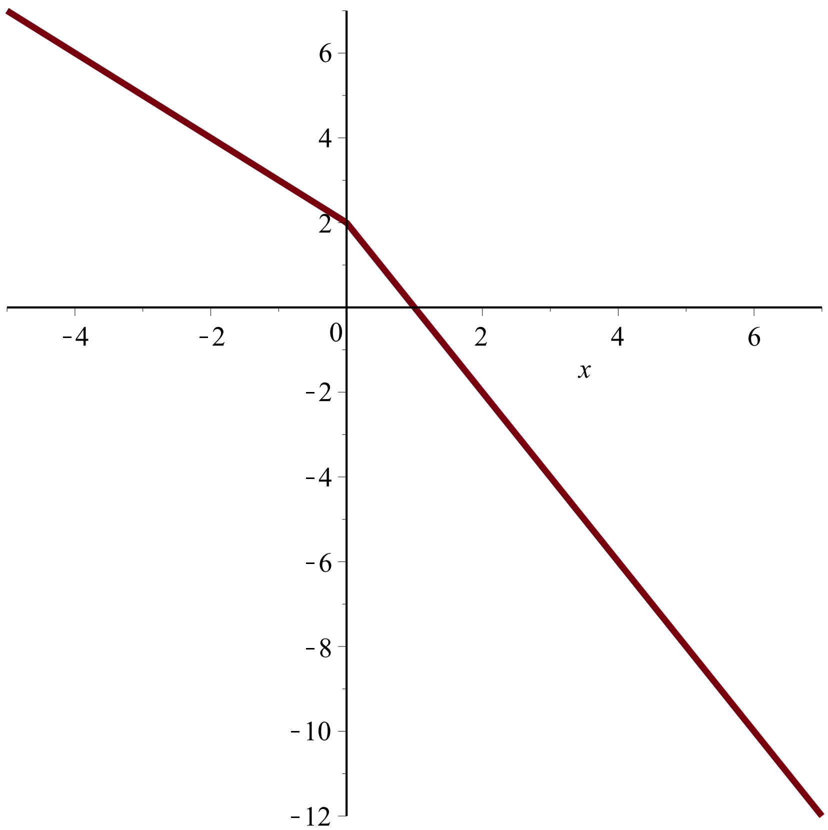
<u>Megoldás:</u>

> *restart*

> $h := \begin{cases} |x-1|+1 & x < 0 \\ -2x+2 & x \geq 0 \end{cases}$

$$h := \begin{cases} |x-1|+1 & x < 0 \\ -2x+2 & 0 \leq x \end{cases} \quad \textbf{(5.1.1.3)}$$

> *hgorbe* := *plot*(*h*, *x* =-5 ..7 , *discont* = *true*, *thickness* = 3) : *hgorbe*



>

$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 2$ $\lim_{x \to 0-0} f(x) = 2$ $\lim_{x \to -1+0} f(x) = 3$ $\lim_{x \to -1-0} f(x) = 3$ $\lim_{x \to 1+0} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 1-0} f(x) = 0$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

A függvény alakja egy töröttvonal, nincs szakadása, az értelmezési tartományán mindenütt folytonos.

F4:

A következ utasítással adott a függvény: $f(x) = \begin{cases} |x-3|+1, & ha\ \ x < 0 \\ -2x^2+2, & x \geq 0 \end{cases}$ Ábrázolja, majd válaszoljon a következ kérdésekre!

$\lim_{x \to 0+0} f(x) = ?$ $\lim_{x \to 0-0} f(x) = ?$ $\lim_{x \to -1+0} f(x) = ?$ $\lim_{x \to -1-0} f(x) = ?$ $\lim_{x \to 1+0} f(x) = ?$

$\lim_{x \to 1-0} f(x) = ?$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = ?$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = ?$

Hol van szakadása és az milyen típusú? Hol folytonos?

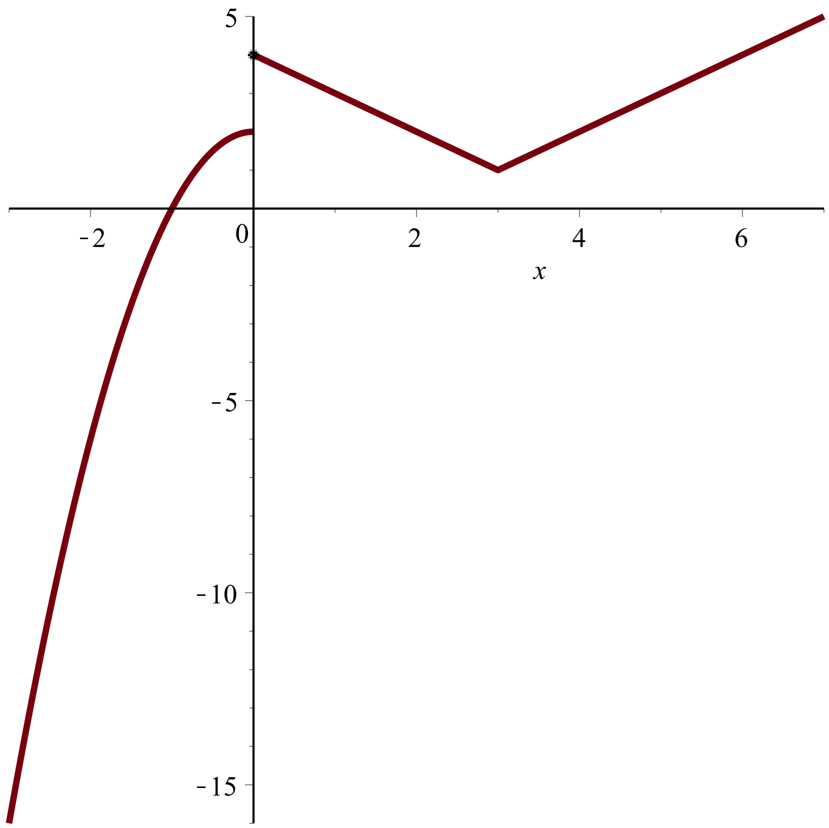
Megoldás:

> *restart*

> $k := \begin{cases} |x-3|+1 & x \geq 0 \\ -2x^2+2 & \mathrm{x} < 0 \end{cases}$

$$k := \begin{cases} |x-3|+1 & 0 \leq x \\ -2x^2+2 & x < 0 \end{cases} \quad \textbf{(5.1.1.4)}$$

> $kgorbe := plot(k, x = -3..7, discont = true, thickness = 3) : kgorbe$



$\lim_{x \to 0+0} f(x) = 4$ $\lim_{x \to 0-0} f(x) = 2$ $\lim_{x \to -1+0} f(x) = 0$ $\lim_{x \to -1-0} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 1+0} f(x) = 3$ $\lim_{x \to 1-0} f(x) = 3$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

A függvénynek az x=0 helyen nem megszüntethet szakadása van, itt nem folytonos, másutt igen az értelmezési tartományán belül.

F5:

A következ utasítással adott a függvény: $f(x) = \begin{cases} -|x-2|+3, & ha \ \ x \geq 1 \\ 2^{x-1}+2, & \mathrm{x} < 1 \end{cases}$ Ábrázolja, majd válaszoljon a következ kérdésekre!

$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$ $\lim_{x \to -2} f(x) = ?$ $\lim_{x \to 10} f(x) = ?$ $\lim_{x \to 1+0} f(x) = ?$ $\lim_{x \to 1-0} f(x) = ?$ $\lim_{x \to \infty} f(x) = ?$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = ?$

Hol van szakadása és az milyen típusú? Hol folytonos?

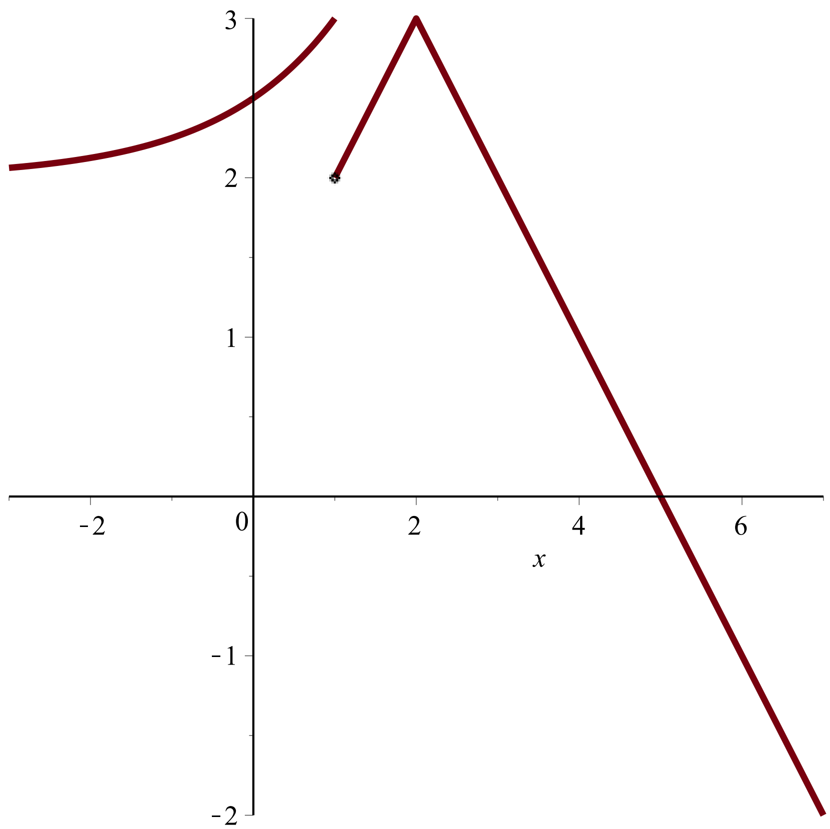
Megoldás:

> *restart*

> $k := \begin{cases} -|x-2|+3 & x \geq 1 \\ 2^{x-1}+2 & \mathrm{x} < 1 \end{cases}$

$$k := \begin{cases} -|x-2|+3 & 1 \leq x \\ 2^{x-1}+2 & x < 1 \end{cases} \qquad \textbf{(5.1.1.5)}$$

> *kgorbe* := *plot*(*k*, *x* = -3 ..7 , *discont* = *true*, *thickness* = 3) : *kgorbe*



>

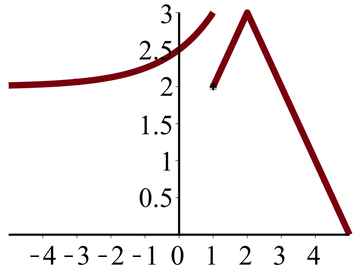
$\lim_{x \to 0} f(x) = 2{,}5$ $\lim_{x \to -2} f(x) = 2{,}125$ $\lim_{x \to 10} f(x) = -5$ $\lim_{x \to 1+0} f(x) = 2$ $\lim_{x \to 1-0} f(x) = 3$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Az x=1 helyen nem megszüntethet szakadása van a függvénynek, itt nem is folytonos; másutt igen, az értelmezési tartományán.

Határérték és folytonosság szemléltetése

Határérték és folytonosság szemléltetése



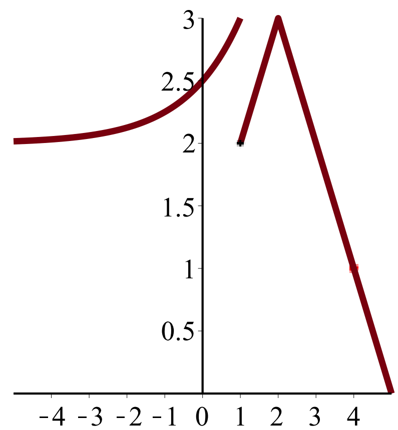
0.9

Baloldali határérték számítása

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \left(2^{x-1} + 2\right) = 2^0 + 2 = 3$$

Jobboldali határérték számítása

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \left(-|x-2| + 3\right) = 2$$



1.0

Mivel a bal és jobb oldali határérték nem egyenl

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) \neq \lim_{x \to 1+0} f(x),$$

ezért a $\lim_{x \to 1} f(x)$ nem létezik. Így nem lehet folytonos sem.

Algebrai átalakításokon alapuló feladatmegoldás

F1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(7x) \cdot \sin(9x)}{3x^2} = ?$$

Megoldás:

A feladat megoldása a $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1,\ k \in \mathbb{R}$ nevezetes határérték alkalmazásán alapul.

Kialakítjuk a nevezetes határértéket, megint csak bvítéssel:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)\cdot\sin(9x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(7x)}{7x}\cdot 7x\cdot\frac{\sin(9x)}{9x}\cdot 9x}{3x^2}=\frac{7\cdot 9}{3}=21$$

Lesz az egyszersítések elvégzése után.

F2:

Határozza meg a következ határértékeket!

$$\lim_{x\to 5}\frac{25-x^2}{x^2+2x+15}=?\quad \lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin(2x)+\sin(3x)}=?\quad \lim_{x\to 4}\frac{12}{(x^2-16)^2}=?$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 5}\frac{25-x^2}{-x^2+2x+15}=\lim_{x\to 5}\frac{(5+x)\cancel{(5-x)}}{\cancel{(5-x)}(x+3)}=\lim_{x\to 5}\frac{(5+x)}{(x+3)}=\frac{5+5}{5+3}=\frac{10}{8}$$

Ilyenkor nagyon jó módszer a számláló, nevező szorzattá alakítása, majd egyszerűsítése.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 2x+\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cancel{x}}{\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{1}\cdot 2\cancel{x}+\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1}\cdot 3\cancel{x}}=\frac{5}{2+3}=1$$

Itt a nevezetes határértékre vezettük vissza a feladatot. Persze ilyenkor is célszerű alkalmazni az egyszerűsítést.

$\lim_{x\to 4}\frac{12}{(x^2-16)^2}="\frac{12}{0^2}"=\frac{12}{+0}=+\infty$ Fontos, hogy a nevezőben négyzetre emelés művelete van, mert így nem kaphatunk negatív valós számot, egyértelműen megállapítható a nevező előjele. Mondhatjuk úgy is: pozitív szám per pozitív nulla határátmenetben plusz végtelen lesz.

F3:

Határozza meg a következ határértékeket!

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x-10}{2x-x^2+15}=?\quad \lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin(2x)\cdot\sin(3x)}=?\quad \lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)^2}{12}=?$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 5}\frac{2x-10}{2x-x^2+15}="\frac{0}{0}"\textit{ típusú}=\lim_{x\to 5}\frac{2\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(-x-3)}=\lim_{x\to 5}\frac{2}{-x-3}=\frac{2}{-(-8)-5)}=\frac{2}{3}$$

Ilyenkor nagyon jó módszer a számláló, nevező szorzattá alakítása, majd egyszerűsítése.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin 2x\cdot\sin 3x}="\frac{0}{0}"\textit{ típusú}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cancel{x^2}}{\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{1}\cdot 2\cancel{x}\cdot\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1}\cdot 3\cancel{x}}=\frac{5}{2\cdot 3}=\frac{5}{6}$$

Itt a nevezetes határértékre vezettük vissza a feladatot. Persze ilyenkor is célszerű alkalmazni az egyszerűsítést.

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-16)^2}{12}=\frac{(4^2-16)^2}{12}=0$$

L'Hospital-szabállyal megoldható feladatok

A következő határérték meghatározásánál a L'Hospital-szabályt alkalmazzuk, átalakítás után.

$$\lim_{x\to\infty}(2x-3)\mathrm{e}^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\mathrm{e}^x}=\frac{2}{\infty}=0$$

A fent nevezett szabályt csak $\frac{\infty}{\infty}$ ill. $\frac{0}{0}$ alakú határértékek és differenciálható függvények esetén használhatjuk, de ezekre az esetekre vezethetk vissza a (szimbolikus jelekkel írva) $0\cdot\infty$ típusú határérték meghatározás is: $0=\frac{1}{\infty}$ ill. $\infty=\frac{1}{0}$ határátmenetek felhasználásával .

Íme még egy példa:

$$\lim_{x\to 0+}x\cdot\ln(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{\mathrm{x}^{-1}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-1\cdot x^{-2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$$

A következ típus is a tört egyszersítésre vezethet vissza:

$1^{\infty}=\left(\mathrm{e}^{ln1}\right)^{\infty}=\mathrm{e}^{\infty\cdot ln1}=\mathrm{e}^{\infty\cdot 0}=\mathrm{e}^{\frac{\infty}{\infty}}$ vagy $\mathrm{e}^{\frac{0}{0}}$, ilyenkor a kitevben alkalmazhatjuk a L'Hospital szabályt a megfelelő feltételek mellett.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{x+1}}{x+1} = ? \qquad \lim_{x \to 2} \frac{x^2+4}{x^2-4} = ?$$

A következő határértékeket L'Hospital-szabály segítségével oldjuk meg.

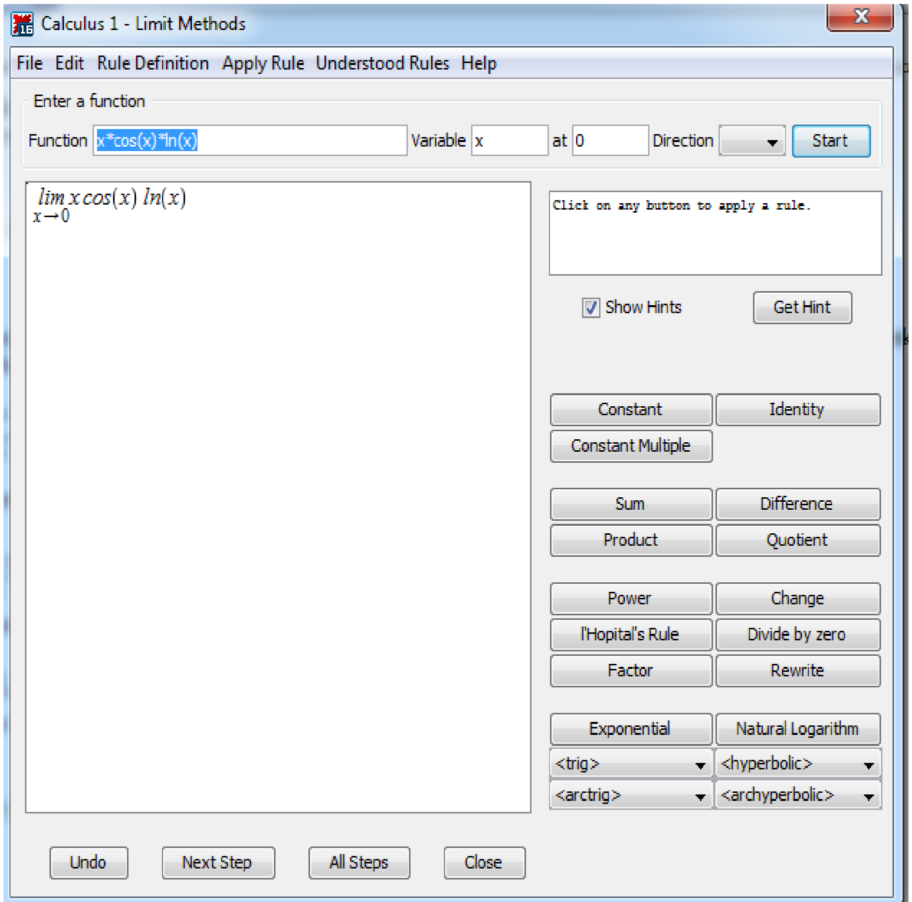
$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = \frac{\frac{1}{1}}{1} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x+1}}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x+1}}{1} = \infty$$

A következő függvény adott helyen történő határértékét kell vizsgálnunk jobbról és balról is.

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \frac{8}{+0} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2-0} \frac{x^2+4}{x^2-4} = \frac{8}{-0} = -\infty$$

Csak a féloldali határértékek léteznek.

Maple gyakorló panel a határérték meghatározására



Határérték meghatározásának gyakorlása