5. A differenciálszámítás elemei: differenciahányados, differenciálhányados, derivált függvény.

A differenciálszámítás elemei

Differenciahányados, differenciálhányados, derivált függvény

Ennek a fejezetnek az a célja, hogy megértsük az alapfogalmakat és elsajátítsuk a deriválás mveletét.
A differenciálszámítás kialakulását geometriai és mechanikai problémák siettették.
A függvény adott pontban való differenciálhatóságát is többféleképpen definiálhatjuk. Mi a határérték fogalmára támaszkodó definíciót fogjuk használni.

definíció:

Legyen $f(x)$ az x_0 pont valamely környezetében értelmezve. Ha az $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \neq x_0$, differenciahányados függvénynek létezik a (véges) határértéke az x_0 pontban, akkor az $f(x)$ függvényt az x_0 pontban differenciálhatónak nevezzük. Ezt a határértéket az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosának nevezzük.

Jele: $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ vagy szokásos jelölések még: $f'(x)\Big|_{x=x_0}$, $\dfrac{d}{dx}f\Big|_{x=x_0}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}f\Big|_{x=x_0}$

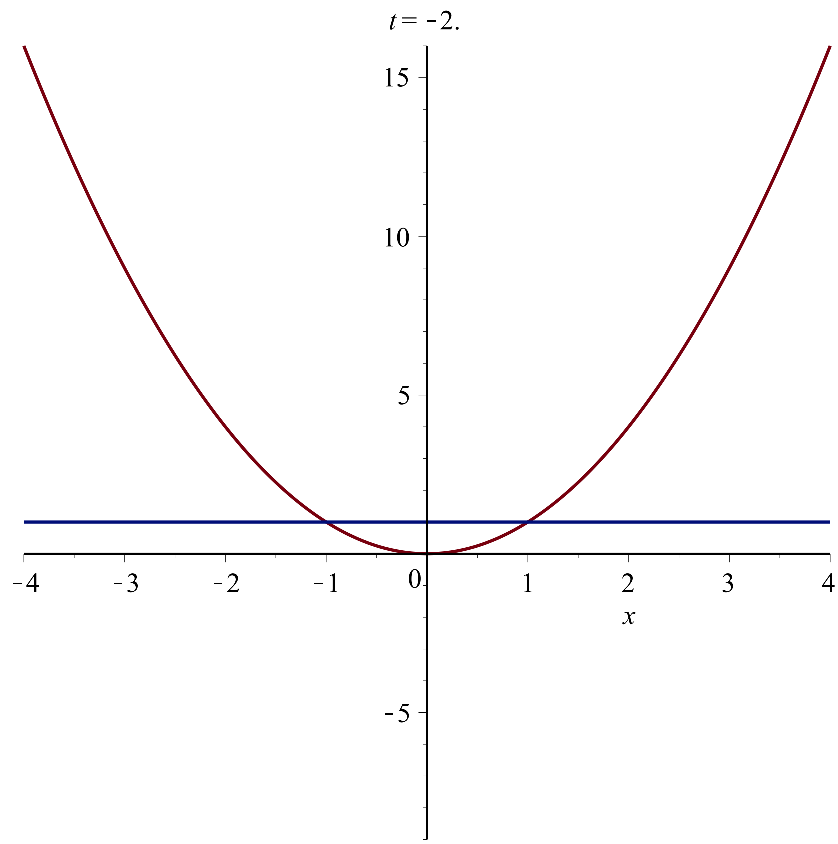
Ha azt mondjuk, hogy $f'(x_0)$ létezik, az azt jelenti, hogy $f(x)$ az x_0 pontban differenciálható. Ha $x = x_0 + \Delta x$ alakú, akkor $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, $\Delta x \neq 0$; ezzel a kifejezéssel is gyakran találkozhatunk tankönyvekben.

A differenciálhányados definíciójára egyaránt megfogalmazhatunk Heine-féle és Cauchy-féle definíciót is, mint a határérték és folytonosság esetében. Ezektl most eltekintünk.

Szemléletesen:

Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt az $x_0 = 1$ hely (rögzített pont) környékén. Δx=1; 0,5; 0,3; 0,2; 0, 1 értékeket veszi fel. A függvénygörbéhez szelket rajzolva, láthatjuk, hogy a differenciahányadosok a szelk meredekségeit adják meg, a differenciálhányados az érint meredekségét adja meg. Mondhatjuk azt is, hogy a szelk határhelyzete az érint az adott pontban. Innen származnak olyan elnevezések a közgazdaságtanban, hogy a határbevételi függvény a bevételi függvény deriváltja. Általában, amelyik függvény neve elé odatesszük a „határ” jelzőt, az adott függvény deriválását jelenti.

```
> with(plots):
> animate( plot, [[x^2,(2+t)*(x-1)+1],x=-4..4], t=-2..0 );
```



definíció:

Ha $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, illetve $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ határértékek léteznek, akkor azt mondjuk, hogy létezik az $f(x)$ bal illetve jobboldali differenciálhányadosa az x_0 pontban, ezek jele: $f'_-(x_0)$ illetve $f'_+(x_0)$.

Ezek után nyilvánvaló, hogy $f'(x_0)$ akkor és csakis akkor létezik, ha $f'_+(x_0)$ és $f'_-(x_0)$

léteznek és egyenlk, azaz:

$$f'_-(x_0) \quad = f'_+(x_0) \quad = f'(x_0).$$

definíció:
Az $f(x)$ függvényt az [a;b] intervallumon akkor nevezzük differenciálhatónak, ha minden bels pontban differenciálható, továbbá az ***a*** pontban a jobboldali és a ***b*** pontban a baloldali differenciálhányadosa létezik.

definíció:
A differenciálhányados és a differenciálhányados függvény:
Azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya azon pontok halmaza, ahol differenciálható és amelynek értéke egy ilyen helyen éppen az differenciálhányadosa ebben a pontban, az függvény differenciálhányados függvényének, vagy derivált függvényének nevezzük. (gyakran röviden csak differenciálhányadosának vagy deriváltjának)

A differenciálhányadosra vonatkozó rendrelv:
Ha az $f(x)$,$g(x)$ és $h(x)$ függvények az x_0 pont valamely környezetében értelmezve vannak és e környezetben $f(x) \le g(x) \le h(x)$, továbbá $f(x_0) = h(x_0)$ és $f'(x_0) = \mathrm{h}'(x_0)$, akkor $g(x)$ differenciálható az x_0 helyen és $g'(x_0) = f'(x_0) = \mathrm{h}'(x_0)$.

Tétel:
Konstans differneciálhányadosa mindenütt 0. ($f(x) = c$)
Bizonyítás:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{c - c}{x_n - x_0} = 0$$

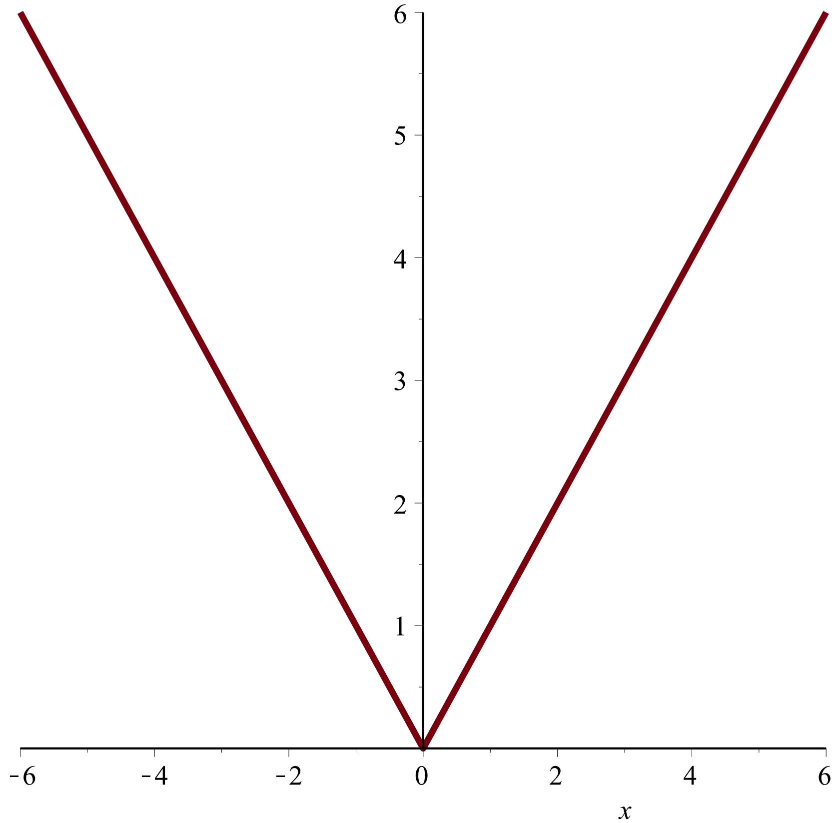
Differenciálhatóság és folytonosság

Tétel: (A differenciálhatóság szükséges feltétele)
Ha $f(x)$ differenciálható az x_0 pontban, akkor ott folytonos is.
Úgy is szoktuk fogalmazni, hogy a differenciálhatóságból következik a folytonosság, de a folytonosságból a differenciálhatóság még nem. Például:

```
> restart
> f := |x|
```

$$f := |x| \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

```
> plot(f, x=-6..6, thickness=3)
```



Tekintsük a baloldali differenciálhányadost az x=0 pontban: $\lim_{x \to 0 - 0} \frac{|x| - 0}{x}$ =- 1

Tekintsük a jobboldali differenciálhányadost az x=0 pontban: $\lim_{x \to 0 + 0} \frac{|x| - 0}{x} = 1$

Mivel a két féloldali határérték nem egyezik meg, ezért a 0 pontban nem diffenciálható, de ott folytonos, hiszen mindkét féloldali határértéke 0.

definíció:

Egy függvényt egy intervallumon akkor nevezünk folytonosan differenciálhatónak, ha differenciálhányados függvénye folytonos ezen az intervallumon.

Differenciálási szabályok

Differenciálási szabályok tétele:
Ha $f(x)$ és $g(x)$ differenciálható x_0-ban, akkor összegük, különbségük, szorzatuk is, és ha a nevezőben levő függvény x_0-ban 0-tól eltérő értéket vesz fel, akkor a hányadosuk is differenciálható, továbbá érvényesek az alábbi összefüggések:

$$(f \pm g)'\Big|_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(f \cdot g)'\Big|_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

ha $g(x_0) \neq 0$, akkor $\left(\dfrac{f}{g}\right)'\Bigg|_{x=x_0} = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

$(c \cdot f(x))'\Big|_{x=x_0} = c \cdot f'(x_0)$, ahol c valós számot jelöl.

A fenti szabályok bizonyítását most mellőzzük.

Elemi függvények deriválása:
A bizonyításoktól, levezetésektl eltekintünk, táblázatos formában foglaljuk össze:

$f(x)$	$f'(x)$
$const$	0
x	1
x^n, n=szám	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
$ctg(x)$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$arctg(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$arcctg(x)$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$sh(x)$	$ch(x)$
$ch(x)$	$sh(x)$

Összetett függvény differenciálhányadosa:

Ha a $g(x)$ függvény differenciálható x_0-ban és $f(x)$ differenciálható $g(x_0)$-ban, akkor az $f(g(x))$ összetett függvény is differenciálható x_0-ban és

$$(f(g(x)))'\Big|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

A fenti szabályt szokták láncszabálynak is hívni. Bizonyítását nem részletezzük.

Mivel néha nehéz felismerni az összetett függvényt, vagy legalábbis jól kell beazonosítani, hogy melyik a küls függvény és melyik a bels függvény, ehhez is készült egy segédtáblázat, melynek segítségével egyszersödik a deriválás.

$f(g(x))$	$(f(g(x)))'$
f^n n=szám	$n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
$\ln f$	$\frac{1}{f} \cdot f'$
$\log_a f$	$\frac{1}{f \cdot \ln a} \cdot f'$
$\sin f$	$\cos f \cdot f'$
$\cos f$	$-\sin f \cdot f'$
tgf	$\frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
$ctgf$	$-\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$

$f(g(x))$	$(f(g(x)))'$
e^f	$e^f \cdot f'$
a^f	$a^f \cdot \ln a \cdot f'$
$arctgf$	$\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
$arcctgf$	$-\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
$\arcsin f$	$\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
$\arccos f$	$-\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
shf	$chf \cdot f'$
chf	$shf \cdot f'$

Maple ellenrz panel a deriváláshoz

```
> with(Student[Calculus1]):
> DerivativeTutor();
> DerivativeTutor(x*sin(x));
> DerivativeTutor(x*sin(x), -2*Pi..2*Pi);
> DerivativeTutor(x*sin(x), x=-2*Pi..2*Pi);
```

Maple gyakorló panel a deriváláshoz

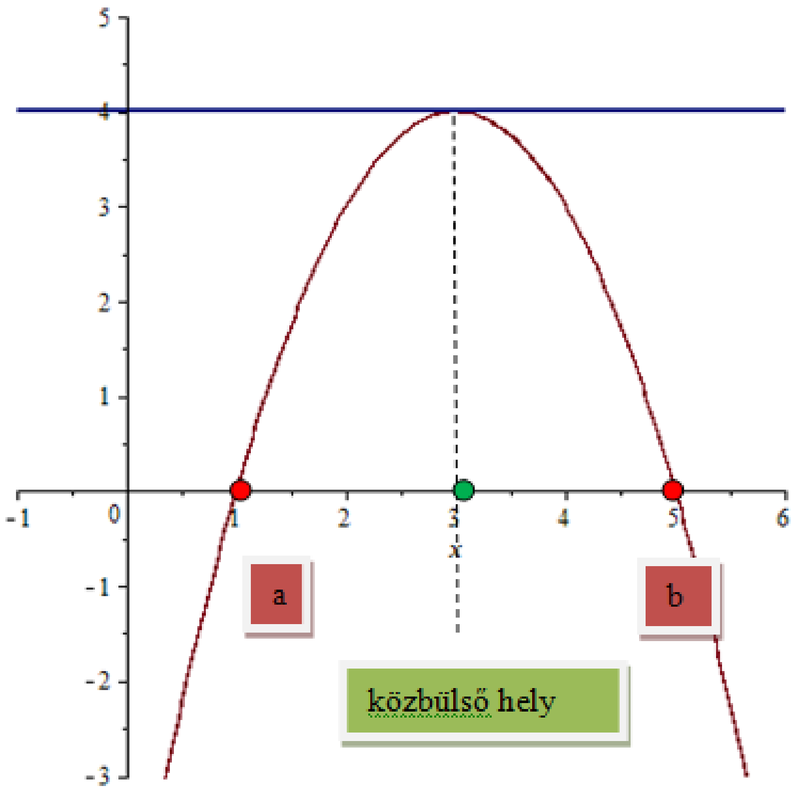
```
> with(Student[Calculus1]):
> DiffTutor();
> DiffTutor(x*cos(x));
> DiffTutor(x*cos(x), x);
```

Középérték tételek

Rolle-tétel:
Ha $f(x)$ folytonos a véges zárt [a;b] intervallumon és differenciálható a nyitott]a;b[intervallumon, továbbá ha $f(a) = f(b)$, akkor létezik legalább egy bels pont, ahol a differenciálhányados 0.

Ennek a tételnek következményeaz, hogy a derivált 0 volta szükséges feltétele a széls érték létezésének.

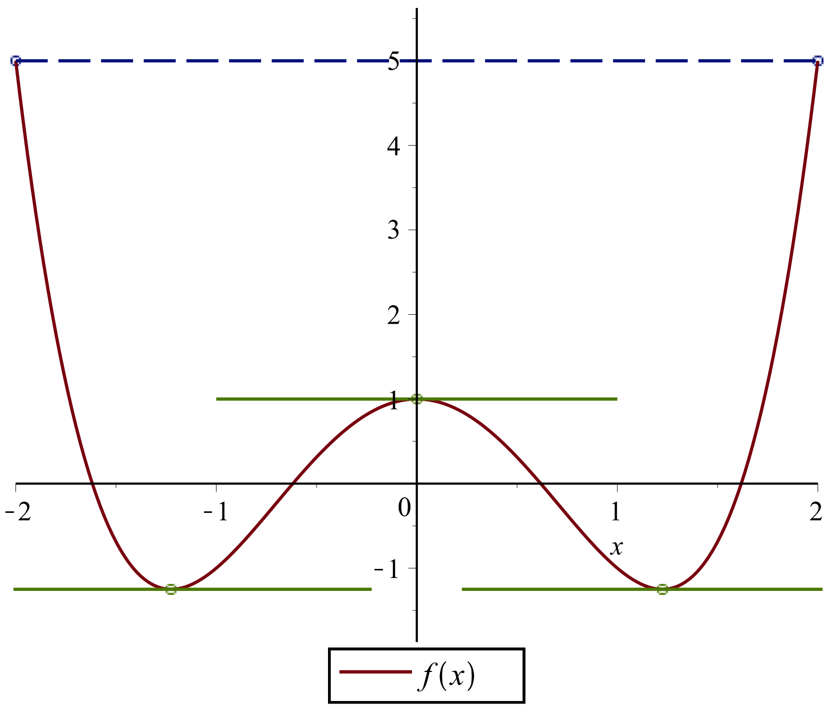
Szemléletesen:



ROLLE-TÉTEL más függvények esetén (kicseréljük az utasításban a függvényt és az intervallumot, és megkeresi van-e közbüls hely)

```
> with(Student[Calculus1]) :
> RollesTheorem(x^4 - 3*x^2 + 1, x=-2..2);
```

Illustration of Rolle's Theorem



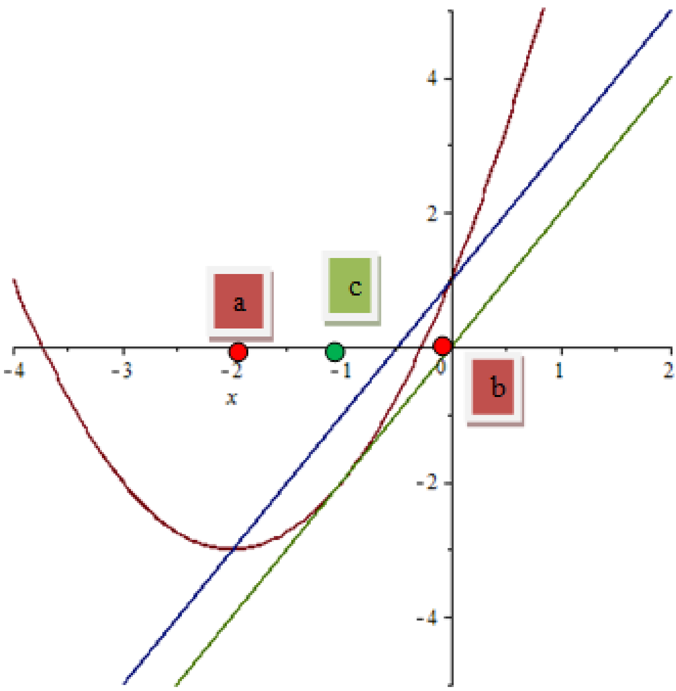
For the function $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ on the interval [-2, 2], a graph showing $f(x)$, the line connecting $(-2, f(-2))$ and $(2, f(2))$, tangents parallel to the line connecting $(-2, f(-2))$ and $(2, f(2))$.

Lagrange-tétel:

Ha $f(x)$ folytonos a véges zárt [a;b] intervallumon és differenciálható a nyitott]a;b[intervallumon, akkor van olyan $\boldsymbol{c}$ bels pont, ahol a differenciálhányados értékére

$$f'(\mathrm{c}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Szemléletesen:



Szokás a differnciálszámítás els középérték tételének is nevezni.
Szemléletesen azt jelenti, hogy van olyan ***c*** bels pont, amelyben olyan érintt rajzolhatunk a függvényhez, amelyik párhuzamos az intervallum végpontjain át húzott szelvel.

A Lagrange- tétel általánosítása a Cauchy-tétel:
Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos a véges zárt [a;b] intervallumon és differenciálható a nyitott [a;b[intervallumon, továbbá $g'(x)$ a belső pontokban nem nulla, akkor van olyan ξ belső pont, ahol

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

Feladatok az elz fejezetekhez

D1:

Deriválja a következő függvényeket!

$f(x)=(x^3+x)e^{5-x}$

$g(x)=\frac{1-\cos x}{1+\sqrt[3]{x}}$

$h(x)=\ln\left(1+e^{x^3}+10^{\sqrt{x}}\right)$

Megoldás:

$$\left[(x^3+x)e^{5-x}\right]'=(x^3+x)'\cdot e^{5-x}+(x^3+x)(e^{5-x})'=(3x^2+1)e^{5-x}+(x^3+x)\cdot e^{5-x}\cdot(5-x)'=$$
$$=(3x^2+1)e^{5-x}+(x^3+x)\cdot e^{5-x}\cdot(-1)$$

$$\left(\frac{1-\cos x}{1+\sqrt[3]{x}}\right)'=\frac{(1-\cos x)'\cdot(1+\sqrt[3]{x})-(1-\cos x)\cdot(1+\sqrt[3]{x})'}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=\frac{(\sin x)\cdot(1+\sqrt[3]{x})-(1-\cos x)\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$$

$$\left(\ln\left(1+e^{x^3}+10^{\sqrt{x}}\right)\right)'=\frac{1}{1+e^{x^3}+10^{\sqrt{x}}}\cdot\left(1+e^{x^3}+10^{\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{1+e^{x^3}+10^{\sqrt{x}}}\cdot\left(e^{x^3}\cdot 3x^2+10^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

D2:

Írja fel az $f(x)=\frac{1}{x-2}$ függvény grafikonjához húzható érintő egyenletét az y tengellyel való metszéspontjában!

Megoldás:

Először meghatározzuk, hogy hol metszi a függvény az y tengely. Ez ott van, ahol x=0.

Behelyettesítés után kapjuk, hogy $y=-\frac{1}{2}$. Tehát a $P_0\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ ponton átmenő érintő egyenesét kell felírnunk. Ehhez az egyenes iránytényezős egyenletét használjuk, mivel az iránytényezőt vagy meredekséget a függvény differenciálhányadosának értéke adja meg az adott pontban. A meredekség meghatározása:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x-2}\right)'=\left((x-2)^{-1}\right)'=(-1)\cdot(x-2)^{-2}=-\frac{1}{(x-2)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow m=f'(0)=-\frac{1}{(0-2)^2}=-\frac{1}{4}$$

Az egyenes iránytényezős alakja: $y-y_0=m(x-x_0)$. Behelyettesítés után az érintő egyenlete:

$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}(x-0)\Rightarrow y=-\frac{x}{4}-\frac{1}{2}$.

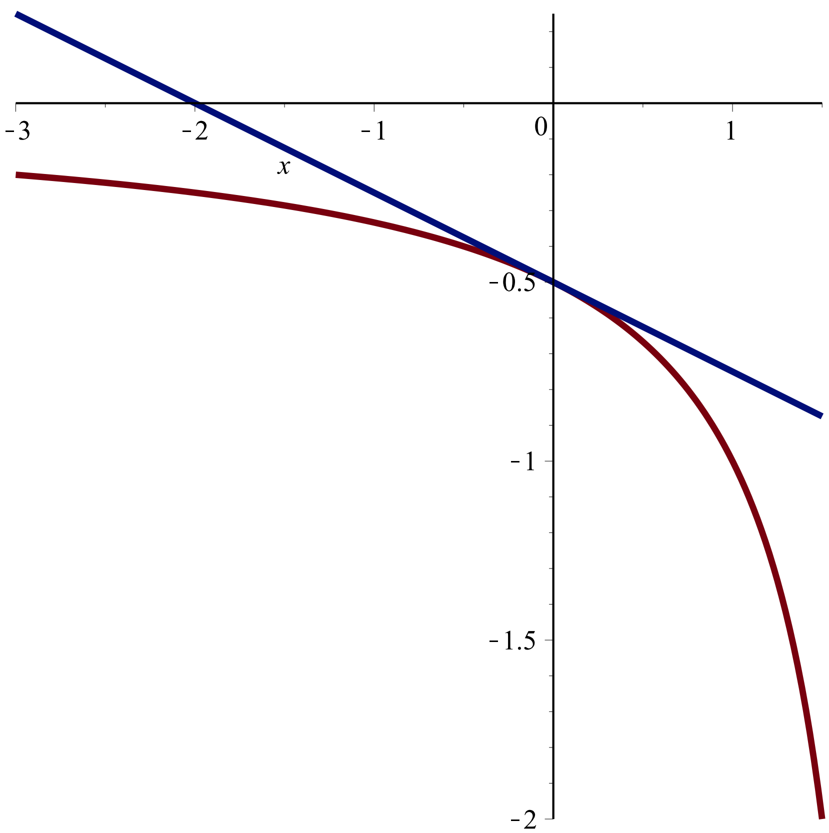
```
> restart
> f := 1/(x-2)
```

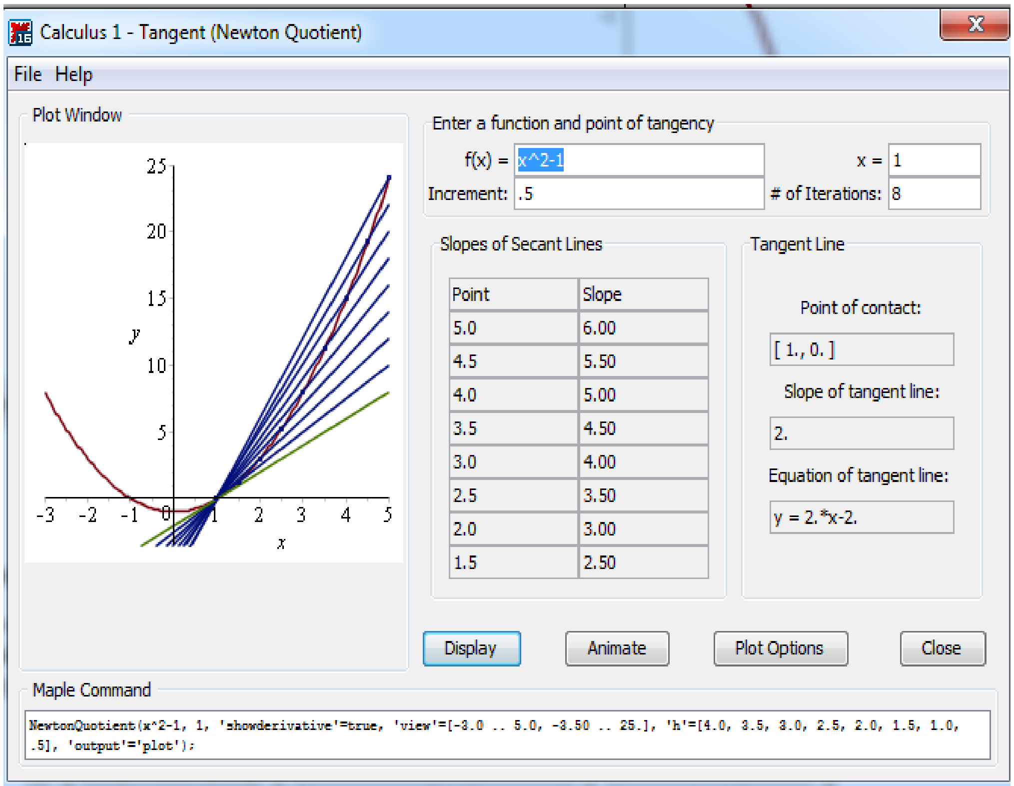
$$f:=\frac{1}{x-2} \qquad \textbf{(1.7.1)}$$

> $g := -\frac{x}{4} - \frac{1}{2}$

$$g := -\frac{1}{4}\,x - \frac{1}{2} \tag{1.7.2}$$

> $plot([f, g], x = -3 ..1.5, thickness = 3)$





Szel-érint animációval

D3:

Mennyi az $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x$ függvény differenciahányadosa a $2\le x\le 2{,}2$ intervallumban? Mennyi a differenciálhányados ezen intervallum végpontjaiban?
Megoldás:
A differenciahányados képzéséhez vegyük észre, hogy $x_0=2$ *és* $\Delta x=0{,}2$. A definíció szerint $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\left(\frac{1}{4}\cdot 2{,}2^2-2{,}2\right)-\left(\frac{1}{4}\cdot 2^2-2\right)}{0{,}2}=\frac{\left(\frac{1}{4}\cdot 4{,}84-2{,}2\right)-(-1)}{0{,}2}=$

$$=\frac{-0{,}99+1}{0{,}2}=\frac{1}{20}=0{,}05$$

A differenciálhányadoshoz meghatározzuk a derivált függvényt és annak vesszük a helyettesítési értékeit az intervallum végpontjaiban.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{4}x^2-x\right)'=\frac{1}{4}\cdot 2x-1=\frac{x}{2}-1\Rightarrow\begin{cases} f'(2{,}2)=\frac{2{,}2}{2}-1=0{,}1 \\ f'(2)=\frac{2}{2}-1=0\end{cases}$$

D4:

Mennyi az $f(x)=\frac{x^3}{3}+1$ függvény differenciahányadosa az $1\le x\le 1{,}5$ intervallumban? Melyik x értéknél egyezik az meg az intervallumon belül a differenciálhányadossal?
Megoldás:

A differenciahányados definíciója szerint: $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Legyen $x_0=1$ ekkor $\Delta x=0{,}5$ a feladatban.

Számolás: $\frac{f(1{,}5)-f(1)}{0{,}5}=\frac{\left(\frac{1{,}5^3}{3}+1\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1\right)}{0{,}5}=\frac{\frac{3{,}375}{3}+1-\frac{1}{3}-1}{0{,}5}=1{,}58$ .A differenciálhányados definíciója szerint: $f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+1\right)'=\frac{3x^2}{3}+0=x^2$ függvény melyik helyen veszi fel az 1,58 értéket. Meghatározás: $x^2=1{,}58\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{1{,}58}=\pm 1{,}26$. Tehát két olyan hely is van, ahol a differenciálhányados értéke megegyezik a kérdéses intervallumban vett differenciahányados értékével.

D5:

A függvények ismeretében határozza meg a következő értékeket!

$f(x)=1+\sqrt{x}$ $\quad g(x)=\sqrt{1+x}$

$f'(1)=?$ $\quad g'(1)=?$

Megoldás:

$$f'(x)=\left(1+\sqrt{x}\right)'=\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)'=0+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(1)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

$$g'(x)=\left(\sqrt{1+x}\right)'=\left((1+x)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(1+x)'=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(0+1)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$g'(1)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{1+1}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

D6:

Mennyi $f'(1)$ értéke, ha $f(x)=\frac{1}{x}-e^{x-1}$?

Megoldás:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}-e^{x-1}\right)'=\left(x^{-1}-e^{x-1}\right)'=(-1)x^{-2}-e^{x-1}\cdot 1=-\frac{1}{x^2}-e^{x-1}\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{1^2}-e^{1-1}=-1-1=-2$$

D7:

Mekkora szögben metszi az $f(x)=\frac{1}{x}-2$ függvény grafikonja az x tengelyt?

Megoldás: Az x tengelyt a zérushelyében metszi, ennek meghatározása:

$\frac{1}{x}-2=0\Rightarrow\frac{1}{x}=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}$. A metszés szögét a differenciálhányados adja meg az adott

$$f(x)=\frac{1}{x}-2\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

helyen. Meghatározása: $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-4\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-4\Rightarrow\alpha=-76^\circ=104^\circ$