6. Differenciálszámítás alkalmazásai: érint, lineáris közelítés, függvényvizsgálat,szélsérték, monotonitás, inflexiós hely, konvexitás Közelítés Taylor-polinommal.

A differenciálszámítás alkalmazásai

Monotonitás

Definíció:
Az f(x) függvényrl azt mondjuk , hogy
szigorúan monoton csökken, ha $f(x_1) > f(x_2)$
monoton csökken, ha $f(x_1) \geq f(x_2)$
szigorúan monoton n, ha $f(x_1) < f(x_2)$
monoton n, ha $f(x_1) \leq f(x_2)$
az értelmezési tartomány bármely x_1 és x_2, $x_1 < x_2$ elemeire.

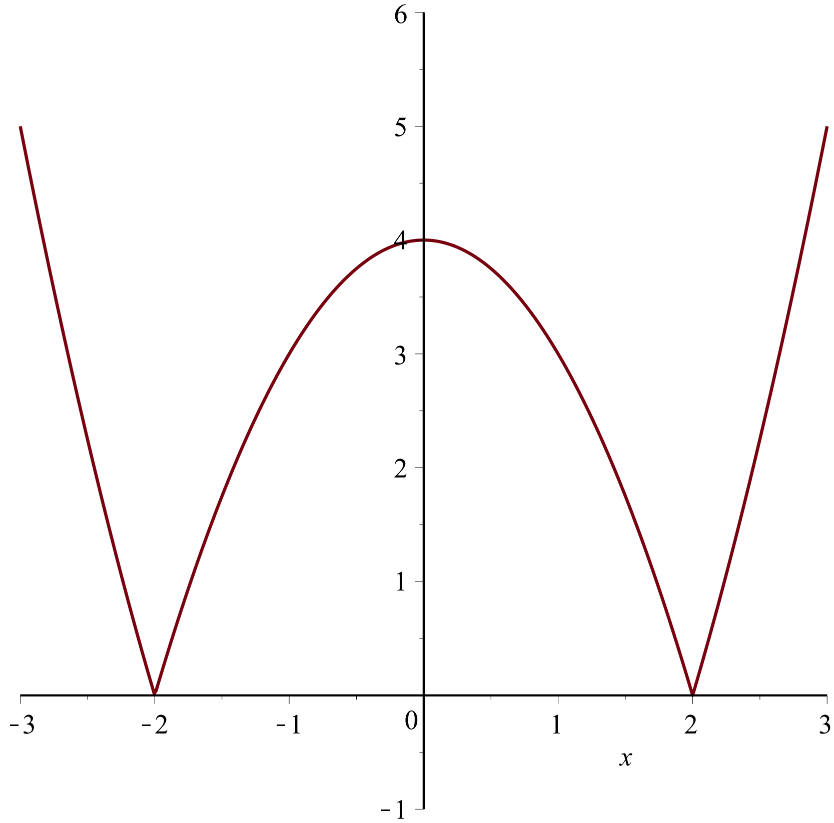
Példa: Az $f(x) = |x^2 - 4|$ függvény

> $restart;$

> $a := |x^2 - 4|;$

$$a := |x^2 - 4| \tag{1.1.1}$$

> $plot(a, x = -3..3, -1..6)$



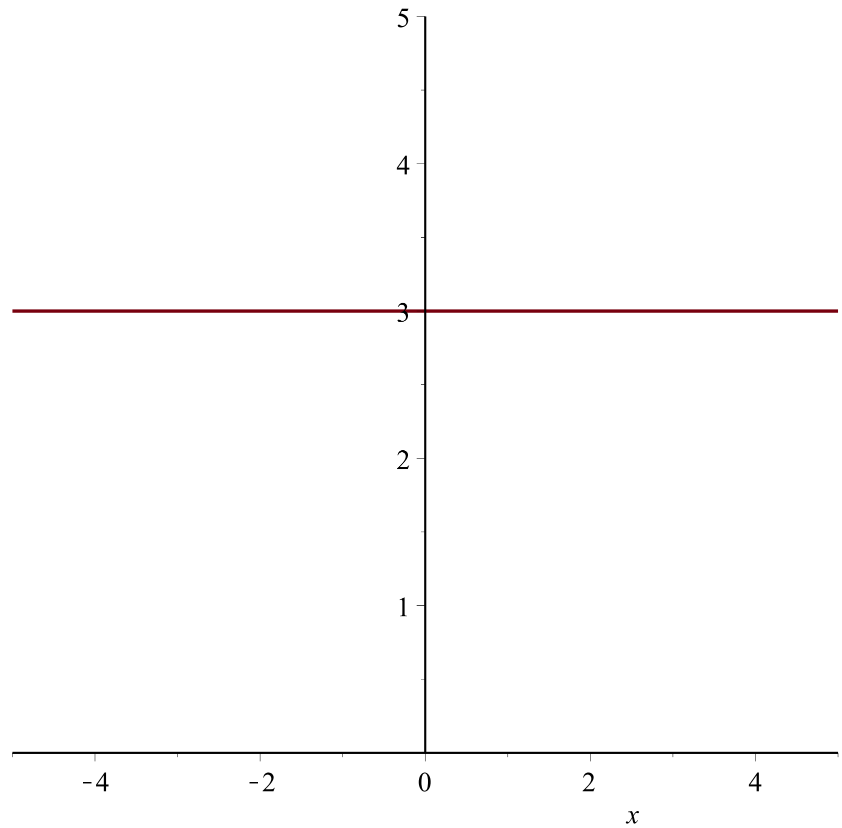
a]-∞;-2] intervallumon szigorúan monoton csökken,
a [-2; 0] intervallumon szigorúan monoton n,
a [0;2] intervallumon szigorúan monoton csökken,
a [2; ∞[intervallumon szigorúan monoton nő.

Az $f(x) = constans$ függvényt

```
> restart;
> const := 3;
```

$$const := 3 \quad \textbf{(1.1.2)}$$

```
> plot(const, x=-5..5, 0..5)
```



A constans függvényt egyszerrre mondjuk csökkennek és növekvnek.

A monotonitás deriválttal való kapcsolatát fejezi ki a következ tétel:

Ha az $f(x)$ az]a;b[intervallumon differenciálható, akkor annak, hogy $f(x)$ az]a;b[-on növeked (csökken) legyen, szükséges és elegend feltétele, hogy $f'(x) \geq 0$ illetve $f'(x) \leq 0$ teljesüljön. A szigorú növekedés (szigorú csökkenés) szükséges és elegend feltétele, hogy $0 < f'(x)$ illetve $f'(x) < 0$ legyen, de a derivált az]a;b[intervallum egyetlen részintervallumán sem lehet azonosan 0.

Szélsérték

Definíció :

Azt mondjuk, hogy valamely alulról (felülrl) korlátos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek létezik *abszolút minimuma (maximuma)*, ha értékkészletének van minimuma (maximuma), és ekkor az értékkészlet minimumát (maximumát) nevezzük a szóban forgó függvény *abszolút minimumának (maximumának)*. Ha az f függvénynek van abszolút minimuma (maximuma), akkor az értelmezési tartományának azt az elemét (lehet több is!), ahol a függvényérték f abszolút minimumával (maximumával) egyenl, f abszolút minimumhelyének (maximumhelyének) nevezzük.

Az abszolút szélsérték (extrémum, optimum) kifejezés az abszolút minimum és az abszolút maximum gyjtneve.

A definíció másképpen:
Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény az $a\in D_f$ helyen abszolút minimumot (maximumot) "vesz fel", ha minden $x\in D_f$ számra fennáll az $f(x)\geq f(a)$ ($f(x)\leq f(a)$) egyenltlenség.
Helyi minimumnak (maximumnak) nevezzük az $f(a)$ értéket, ha az egyenltlenség az *a hely* egy kis környezetében teljesül.

Péda: Legyen az értelmezési tartomány a Föld hegyeinek halmaza.
Ekkor abszolút maximum: Helyi maximum:

<u>**Szélsérték létezésének szükséges feltétele:**</u>

Ha az $f(x)$ az x_0 pont valamely környezetében mindenütt differenciálható és a differenciálhányados függvénye x_0-nál eljelet vált, akkor az x_0-ban az $f(x)$ függvénynek szigorú helyi széls értéke van; mégpedig maximum, ha $f'(x)$ eltte pozitív, utána negatív; minimum, ha $f'(x)$ eltte negatív, utána pozitív.

Szélsérték meghatározása magasabb rend deriváltakkal:
Tétel:
Ha az x_0 pontban az els 0-tól különböz differenciálhányados páros rend, akkor a függvénynek szélsértéke van az x_0 helyen, mégpedig ha a kérdéses differenciálhányados pozitív, akkor minimuma van, ha negatív, akkor maximuma van. Ha az els nullától különböz differenciálhányados páratlan rend és e rendszám nagyobb 1-nél, akkor ha ez a differenciálhányados pozitív, a függvény x_0 valamely környezetében növeked, ha negatív, akkor csökken.

Példa:
Hol van szélsértéke az $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$ függvénynek?

Megoldás:
Ott lehet a függvénynek szélsértéke, ahol az els derivált eltnik, azaz $f'(x) = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} = x^{-2} + x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \left(x^{-2} + x^{\frac{1}{2}}\right)' = -2x^{-3} + \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{-4 + x^{\frac{5}{2}}}{2x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4 + x^{\frac{5}{2}}}{2x^3} = 0 \Rightarrow -4 + x^{\frac{5}{2}} = 0 \Rightarrow x^{\frac{5}{2}} = 4 \Rightarrow \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{5}} = 4^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{16} \Rightarrow x$$
$$= \sqrt[5]{16}$$

Ezzel még csak azt kaptuk meg, hogy hol lehet szélsértéke a függvénynek. Megvizsgáljuk, hogy a kapott helyen eljelet vált-e. Ehhez táblázatot készítünk:

	$x < \sqrt[5]{16}$	$x = \sqrt[5]{16}$	$\sqrt[5]{16} < x$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	lokális minim\um	↗

Eldönthetjük a szélsérték típusát a második derivált segítségével is:

$$f''(x) = \left(-2x^{-3} + \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \right)' = -2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = \frac{6}{x^4} - \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \Rightarrow f''\left(\sqrt[5]{16}\right)$$

$$= \frac{6}{\left(\sqrt[5]{16}\right)^4} - \frac{1}{4\sqrt{\left(\sqrt[5]{16}\right)^3}} =$$

$$= \frac{6}{2^{\frac{16}{5}}} - \frac{1}{2^2 \cdot 2^{\frac{12}{10}}} = \frac{6}{2^{\frac{16}{5}}} - \frac{1}{2^{\frac{32}{10}}} = \frac{6}{2^{\frac{16}{5}}} - \frac{1}{2^{\frac{16}{5}}} = \frac{5}{2^{\frac{16}{5}}} > 0 \Rightarrow \text{lokális minimum van}$$

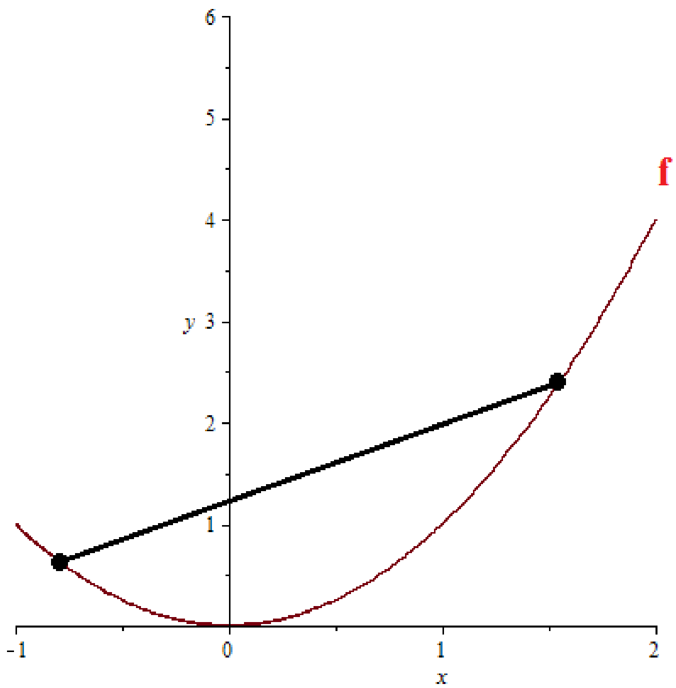
Példa:

Konvexitás, inflexiós hely

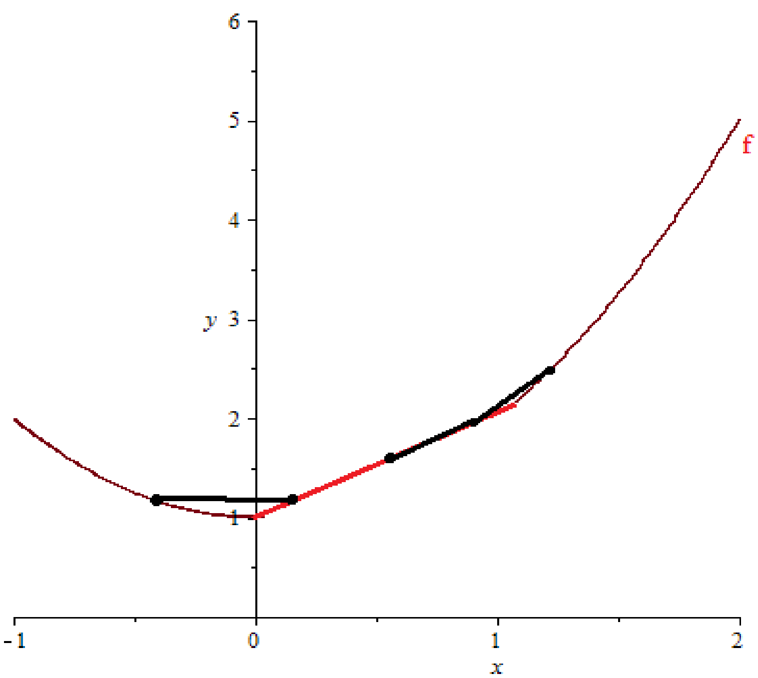
Definíció:
Legyen $\mathrm{I} \in \Im$. Azt mondjuk, hogy valamely $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ függvény (alulról) *konvex (szigorúan konvex),* ha bármely $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$, $x_1 < x_2$ esetében az $(x_1, f(x_1))$ és az $(x_2, f(x_2))$ pontot összeköt egyenesszakasz (húr) egyetlen pontja sincs "alatta" (minden pontja "felette" van) az $f\big|_{]x_1, x_2[}$ függvény grafikonjának.

szigorúan konvex:

konvex:



f
y
x

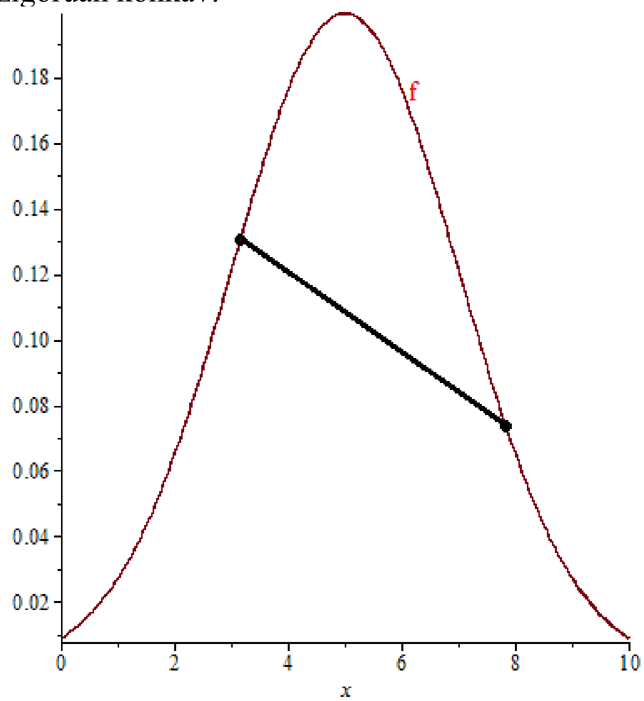


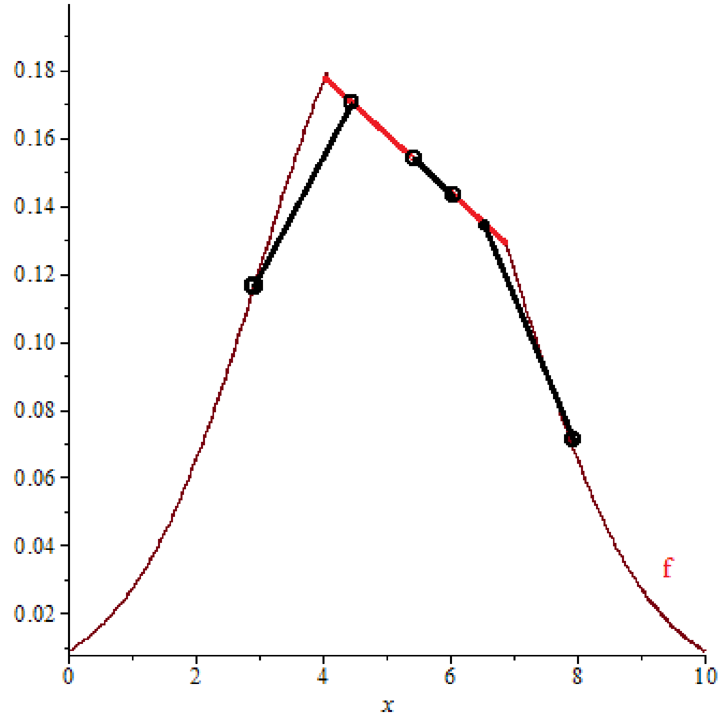
f
y
x

Definíció:

Legyen $\mathrm{I} \in \mathfrak{I}$. Azt mondjuk, hogy valamely $f : \mathrm{I} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (alulról) *konkáv (szigorúan konkáv),* ha bármely $x_1, x_2 \in \mathrm{I}, x_1 < x_2$ esetében az $(x_1, f(x_1))$ és az $(x_2, f(x_2))$ pontot összeköt egyenesszakasz (húr) egyetlen pontja sincs "felette" (minden pontja "alatta" van) az $f\Big|_{]x_1, x_2[}$ függvény grafikonjának.

szigorúan konkáv: konkáv:





Definíció:
Azt a valós számot, amelyben a függvény konvexbl konkávba (konkávból konvexbe) vált inflexiós helynek nevezzük.

Konvexség és konkávság eldöntése differenciálhányadosokkal:

Tétel:
Ha az $f(x)$ az]a;b[intervallumon kétszer differenciálható, akkor annak, hogy $f(x)$ az]a;b[-on konvex (konkáv) legyen, szükséges és elegend feltétele, hogy $f''(x) \geq 0$ illetve $f''(x) \leq 0$ teljesüljön]a;b[-ben. A szigorú növekedés (szigorú csökkenés) szükséges és elegend feltétele, hogy $f''(x) > 0$ illetve $f''(x) < 0$ legyen, de a második derivált az]a;b[egyetlen részintervallumán sem lehet azonosan 0.

Inflexiós pont kritériumai deriváltakkal
Ha az $f(x)$ az x_0 pont valamely környezetében mindenütt kétszer differenciálható és x_0 -ban inflexiós pontja van, akkor a második differenciálhányados függvénye szükségképpen 0, azaz $f''(x) = 0$.

Inflexiós pont magasabb rend deriváltakkal:
Ha az els el nem tn differenciálhányados páratlan rend az x_0 pontban, akkor az $f(x)$ -nek az x_0-ban inflexiós pontja van.

Függvényvizsgálat

A függvénydiszkusszió általános sémája :

1. *Meghatározzuk a függvény értelmezési tartományát, szakadási pontokat, folytonossági intervallumokat, értékkészletet, zérushelyeket és jeltartási intervallumokat, a görbe szimmetriatengelyeit és pontjait (paritás).*
2. *Meghatározzuk az első deriválttal a monotonitási intervallumokat, szélsőérték helyeit és értékeit.*
3. *Meghatározzuk a második deriváltakkal a függvénygörbe konvex és konkáv részeit, inflexiós pontjait.*
4. *Meghatározzuk a függvény határértékeit a – és + végtelenben és a szakadási pontokban.*
5. *Megrajzoljuk a függvény görbéjét, ha lehet.*

Példák függvényvizsgálatra

HAGYOMÁNYOS MEGOLDÁS:

Végezze el az $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 25}{e^x}$ **függvény teljes vizsgálatát!**

Megoldás:

- Értelmezési tartomány meghatározása:D_f: $x \in \mathbb{R}$
- szimmetria tulajdonságok, periodicitás:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 10\cdot(-x) + 25}{e^{-x}} = \frac{x^2 + 10x + 25}{e^{-x}} \neq \begin{cases} f(x) \Rightarrow \text{se nem páros} \\ -f(x) \Rightarrow \text{se nem páratlan} \end{cases}$$

- nem periodikus
- zérushely: f(x) = 0 $\Leftrightarrow$
- $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{e^x} = 0$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$
$$(x-5)^2 = 0$$
$$x = 5$$

- szélsérték, monotonitási szakaszok: A függvénynek ott lehet széls értéke, ahol az els deriváltja eltnik.
- $$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 10x + 25}{e^x}\right)' = \frac{(x^2 - 10x + 25)'\cdot e^x - (x^2 - 10x + 25)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2} =$$

$$\frac{(2\cdot x - 10)\cdot e^x - (x^2 - 10x + 25)\cdot e^x}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{e^x\cdot(2x - 10 - x^2 + 10x - 25)}{(e^x)^2} = \frac{-x^2 + 12x - 35}{e^x}$$

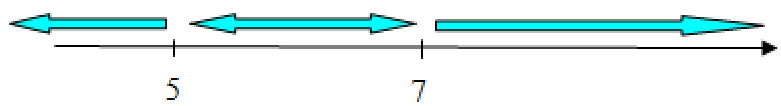
-

$$\frac{-x^2+12x-35}{e^x}=0$$

$-x^2+12x-35=0 \qquad a=-1 \quad b=12 \quad c=-35$

$$x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot(-1)\cdot(-35)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-12\pm\sqrt{144-140}}{-2}=\frac{-12\pm2}{-2}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-12+2}{-2}=5 \\ x_2=\dfrac{-12-2}{-2}=7 \end{cases}$$



	x <	$x=5$	$5<x$ <7	$x=7$	7 <
f '(	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	lok .n	↗	lok .n	↘

Azaz a függvény a]-∞;5[intervallumban monoton nő, az [5;7] intervallumban monoton csökken, a [7;∞[intervallumban monoton nő.
Az x = 5 helyen lokális maximuma van, ennek értéke $f(5)=0$, mert ez éppen a zérushelye is. A z x =7 helyen lokális minimuma van, ennek értéke $f(7)=\dfrac{7^2-10\cdot7+25}{e^7}=\dfrac{4}{e^7}=0,004$

• inflexiós pont, görbület (konvexitás)

A függvénynek ott lehet inflexiós pontja, ahol a második differenciálhányados eltnik.

$$f''(x)=\left(\frac{-x^2+12x-35}{e^x}\right)'=\frac{(-x^2+12x-35)'\cdot e^x-(-x^2+12x-35)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{(-2x+12)\cdot e^x-(-x^2+12x-35)\cdot e^x}{(e^x)^2}=$$

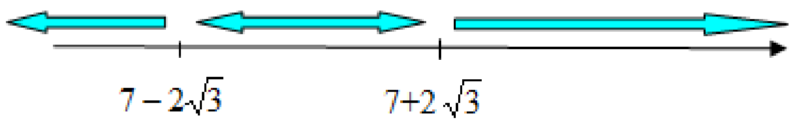
$$=\frac{e^x\cdot(-2x+12-+x^2-12x+35)}{(e^x)^2}=\frac{x^2-14x+47}{e^x}$$

$$\frac{x^2 - 14\,x + 47}{e^x} = 0$$

$x^2 - 14\,x + 47 = 0$ $\qquad$ $a = 1 \quad b = -14 \quad c = 47$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 47}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 148}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{14 \pm 4\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 + 2\sqrt{3} \\ x_2 = 7 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$



	$x < 7 - 2\sqrt{3}$	$x = 7 - 2\sqrt{3}$	$7 - 2\sqrt{3} < x < 7 + 2\sqrt{3}$	$x = 7 + 2\sqrt{3}$	$7 + 2\sqrt{3} < x$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	infl. pont	$\cap$	infl. pont	$\cup$

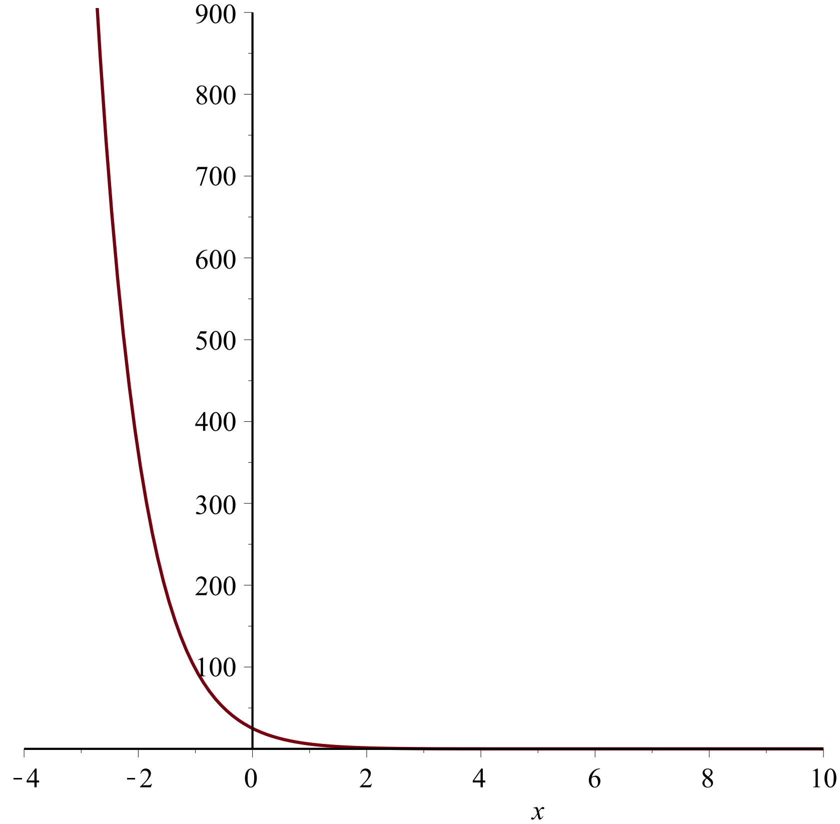
Azaz az f(x) függvény a $]-\infty; 7 - 2\sqrt{3}[$ intervallumban konvex, a $]7 - 2\sqrt{3}; 7 + 2\sqrt{3}[$ intervallumban konkáv, $]7 + 2\sqrt{3}; \infty[$ intervallumban ismét konvex.

határértékek vizsgálata:

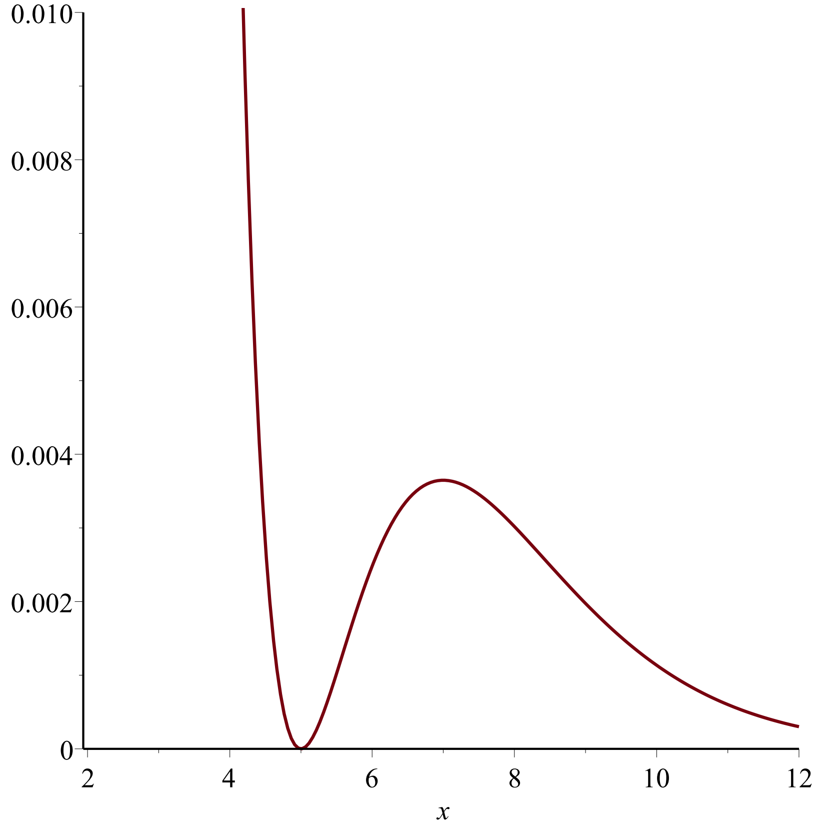
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 10\,x + 25}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow L'Hospital - sz. \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2\,x - 10}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow L'Hospital - sz. \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 10\,x + 25}{e^x} = \left(\frac{\infty}{+0} \right) = \infty$$

függvénygörbe megrajzolása (kiemelve a határértékek):



függvény görbe megrajzolása az inflexiós hely és szélsérték környékének kiemelésével:



Érték készlet meghatározása:
$R_f: f(x) \geq 0, azaz\, f(x) \in \mathbb{R}+ \cup \{0\}$

MEGOLDÁS MAPLE PARANCSOKKAL:

> $restart : with(plots) :$

> $f := x \rightarrow \frac{x^2 - 10\,x + 25}{e^x}$

$$f := x \rightarrow \frac{x^2 - 10\,x + 25}{e^x} \quad \textbf{(1.5.1)}$$

>

> $fgv\_zérushelye := solve(f(x) = 0, x);$

$$fgv\_zérushelye := 5 \quad \textbf{(1.5.2)}$$

> $derivaltf := \frac{d}{dx} f(x)$

$$derivaltf := \frac{2\,x - 10}{e^x} - \frac{x^2 - 10\,x + 25}{e^x} \quad \textbf{(1.5.3)}$$

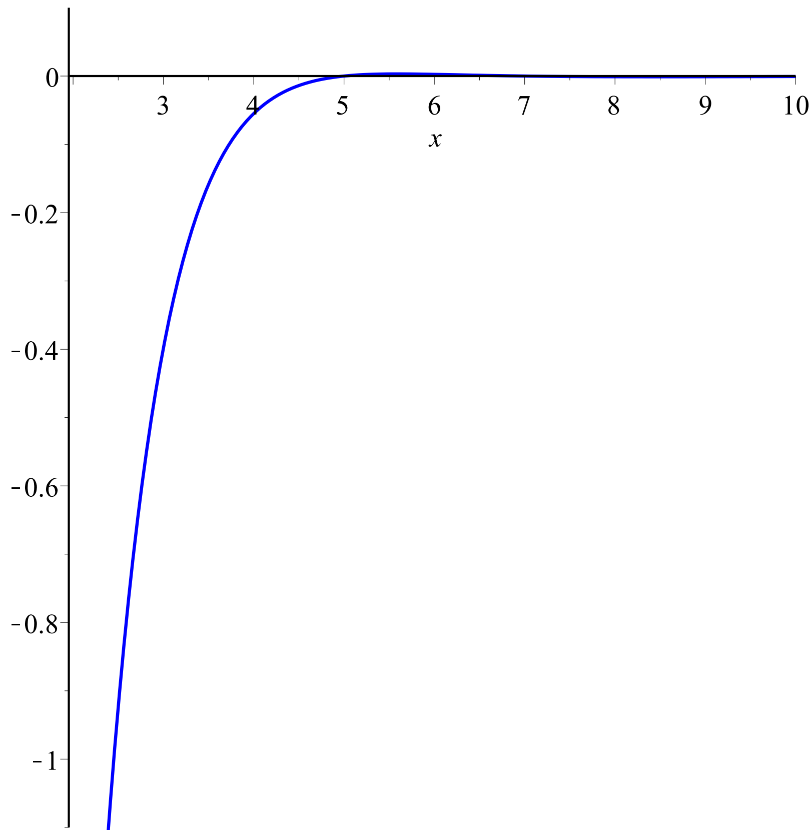
> $simplify(derivaltf)$

$$-e^{-x}\left(-12\,x+35+x^2\right) \tag{1.5.4}$$

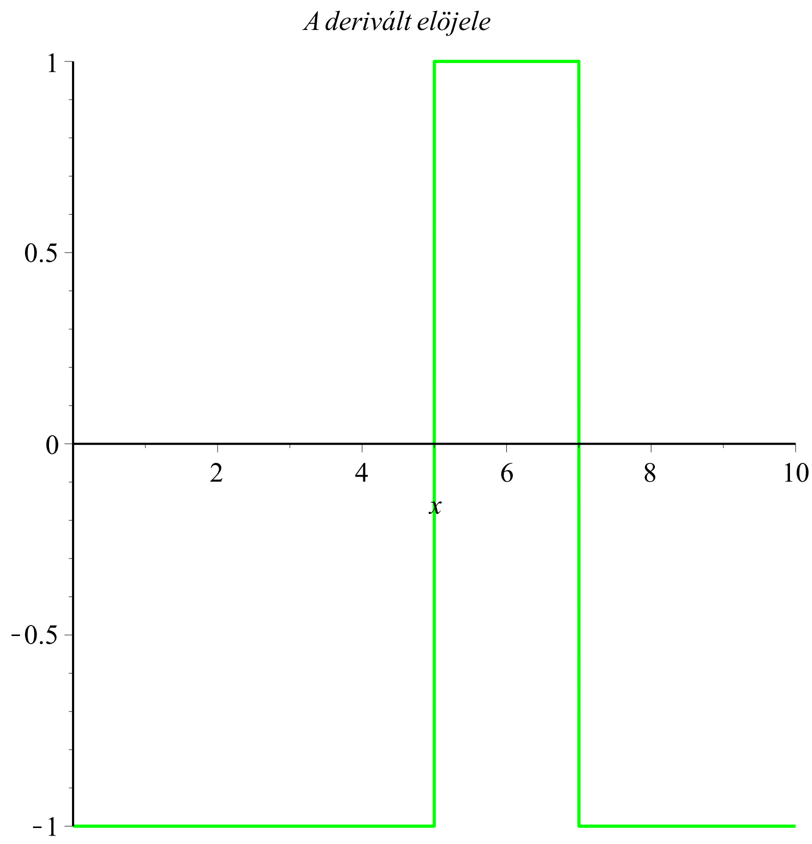
> $derivaltf\_zérushelye := solve(derivaltf(x)=0, x);$

$$derivaltf\_zérushelye := x \rightarrow 5, x \rightarrow 7 \tag{1.5.5}$$

> $rajzderivaltf := plot(derivaltf(x), x = 0..10, color = blue) : rajzderivaltf$



> $plot(\mathrm{signum}(derivaltf(x)), x = 0..10, title = A\ derivált\ elöjele, color = green)$



A derivált függvény az x=5-nél negatívról pozitívra váltja az eljelét, így lokális minimuma van, míg x=7-nél pozitívról, negatívra vát, tehát lokális maximuma van.
A széls értékek nagysága:

> $m := f(5)$

$$m := 0 \tag{1.5.6}$$

> $M := f(7)$

$$M := \frac{4}{e^7} \tag{1.5.7}$$

>

> $derivalt2 := \frac{d}{dx}\, derivaltf$

$$derivalt2 := \frac{2}{e^x} - \frac{2\,(2\,x - 10)}{e^x} + \frac{x^2 - 10\,x + 25}{e^x} \tag{1.5.8}$$

> $simplify(derivalt2)$

$$e^{-x}\,(47 - 14\,x + x^2) \tag{1.5.9}$$

> $md := x \rightarrow derivalt2(x)$

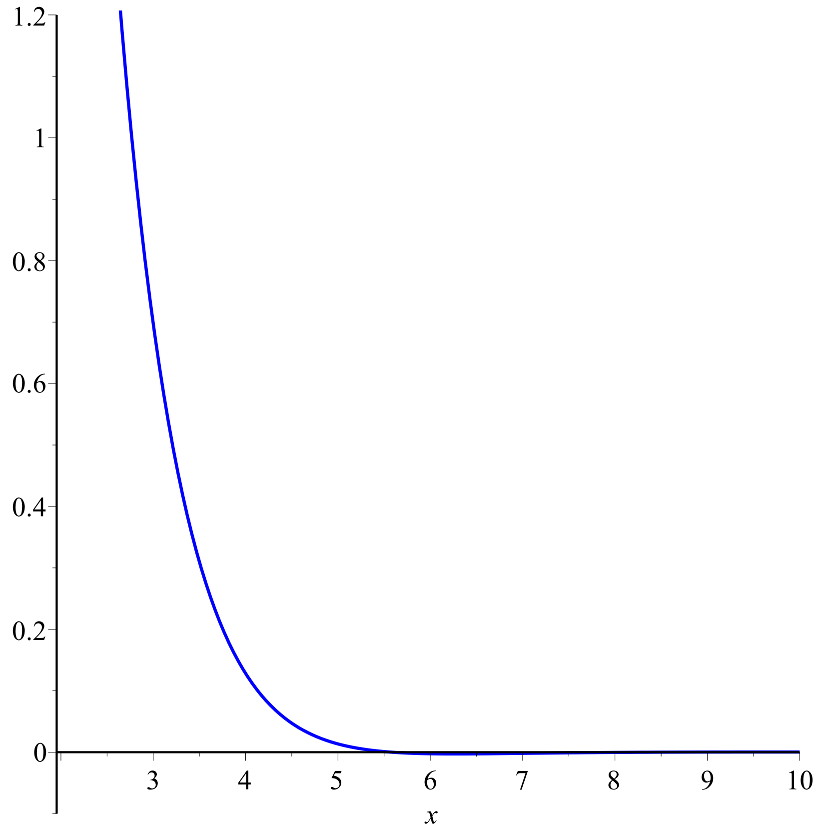
(1.5.10)

$$md := x \rightarrow derivalt2(x) \qquad \textbf{(1.5.10)}$$

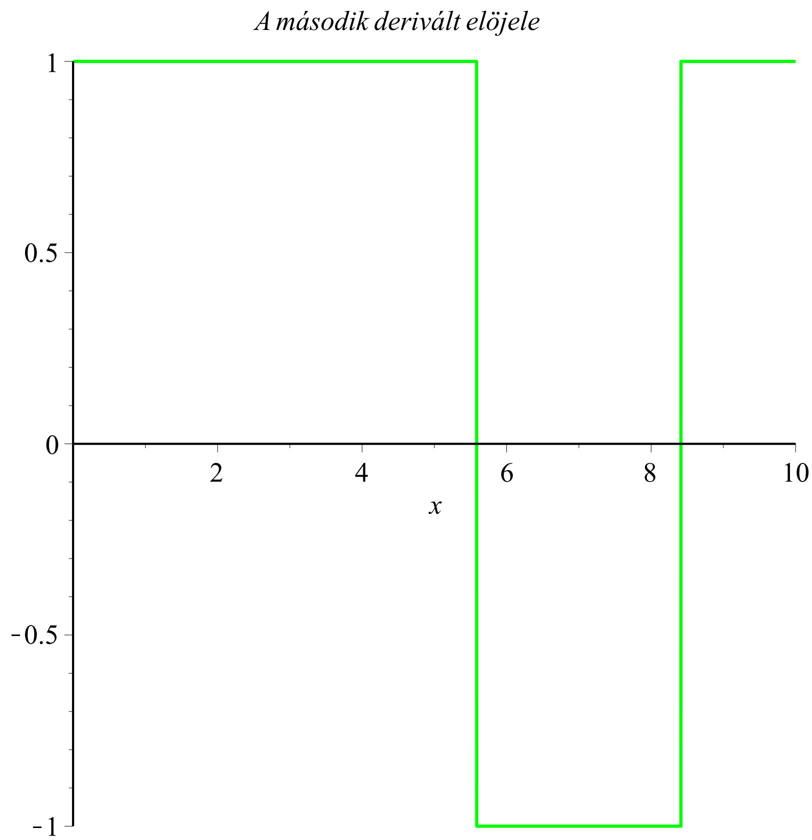
> $derivalt2\_zérushelye := solve(md(x) = 0, x);$

$$derivalt2\_zérushelye := x \rightarrow 7 - \sqrt{2}, x \rightarrow 7 + \sqrt{2} \qquad \textbf{(1.5.11)}$$

> $rajzderivalt2 := plot(derivalt2(x), x = 0 ..10, color = blue) : rajzderivalt2$



> $plot(\mathrm{signum}(derivalt2(x)), x = 0 ..10, title = A\ második\ derivált\ elöjele, color = green)$



>

A második derivált a zérushelyeknél eljelet vált, a $]-\infty; 7-\sqrt{2}[$-on pozitív eljel, így ott a függvény konvex, a $]7-\sqrt{2}; 7+\sqrt{2}[$-on negatív eljel, így ott konkáv, a $]7+\sqrt{2};\infty[$-on pedig ismét konvex a függvény.

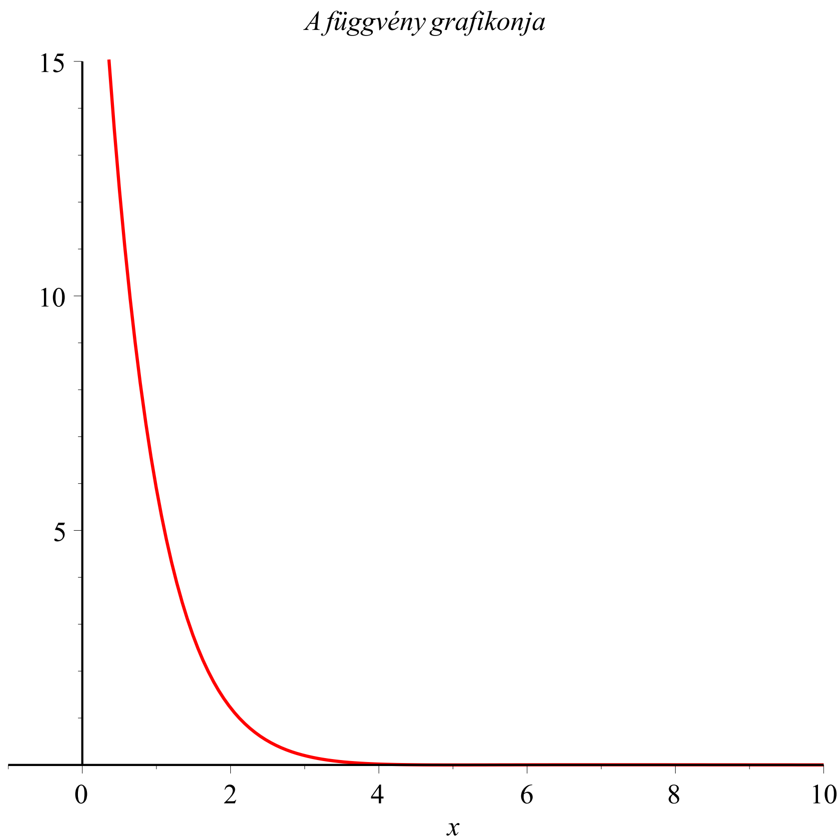
> $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 10x + 25}{e^x}$

$$0 \tag{1.5.12}$$

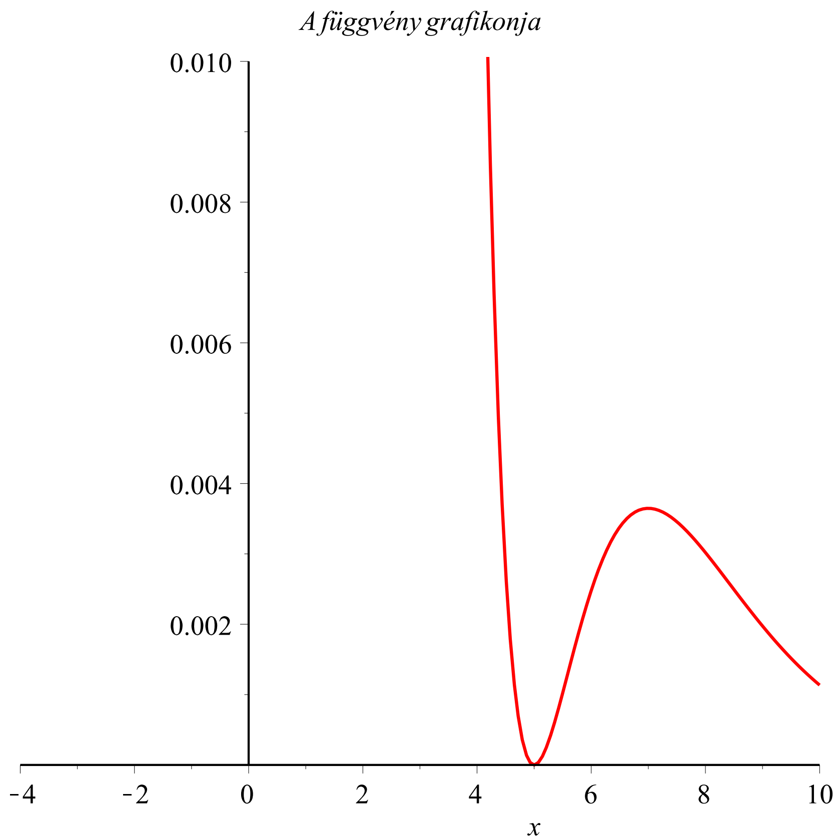
> $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 10x + 25}{e^x}$

$$\infty \tag{1.5.13}$$

> *plot*(*f*(*x*), *x* =-4 ..10, *title* = *A függvény grafikonja*, *color* = *red*);



> $plot(f(x), x=-4..10, 0..0.01, title = A\ függvény\ grafikonja, color = red);$



Érték készlet meghatározása:
$R_f: f(x) \geq 0$, $azaz\, f(x) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

HAGYOMÁNYOS MEGOLDÁS:

Végezze el az $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ **függvény teljes vizsgálatát!**

Megoldás:

Értelmezési tartomány: x≠0 $\Rightarrow D_f: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Nem periodikus, azaz nincs olyan p valós szám, amelyre $f(x) = f(x+p)$ lenne.
Paritás: $f(-x) = -x \cdot e^{-\frac{1}{-x}} \neq \begin{cases} f(x) \Rightarrow \text{se nem páros} \\ -f(x) \Rightarrow \text{se nem páratlan} \end{cases}$
Zérushely: $f(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0$, mivel $e^{\frac{1}{x}} \neq 0 \Rightarrow x = 0$, *de* $0 \notin D_f \Rightarrow$ nincs zérushelye

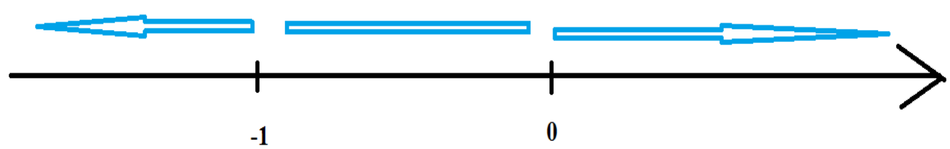
Szélsérték és monotonitás:
A függvénynek ott lehet széls értéke, ahol $f'(x) = 0$ (szükséges feltétel!)
A függvény egy szorzatfüggvény, amelynek az egyik tényezje összetett függvény:

$$\left(x\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)' = (x)'\cdot\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) + x\cdot\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' = 1\cdot e^{-\frac{1}{x}} + x\cdot e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)' = 1\cdot e^{-\frac{1}{x}} + x\cdot e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-(-1)\cdot x^{-2}\right) = 1\cdot e^{-\frac{1}{x}} + x\cdot e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2} =$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} + x\cdot e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x} = e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow 1+\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = -1$$

Elegend a feltétel, ha a derivált e helyen eljelet vált:



	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
f	+	0	-	nincs értelmez\ ve!	+
$f(x)$	↗	lok. max.	↘	nincs értelmez\ ve!	↗

Konvexitás és inflexiós pont:

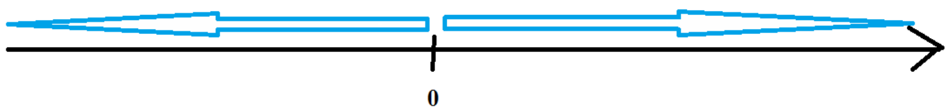
A függvénynek ott lehet inflexiós pontja, ahol $f''(x) = 0$
Az els deriváltat tovább deriválva (szorzat, egyik tényez összetett függvény):

$$\left(e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)' = \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)' = e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-(-1)\cdot x^{-2}\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)+e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-1\cdot x^{-2}\right)=$$

$$=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)-e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^{2}}=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{x}-1\right)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^{3}}$$

Látjuk, hogy a második derivált sehol sem lesz 0, tehát nincs inflexiós pontja! Eljel vizsgálatot azonban végezni kell:



	$x<0$	$x=0$	$0<x$
$f''(x)$	-	nincs értelmezve!	$+$
$f(x)$	$\cap$	nincs értelmezve!	$\cup$

Tehát a negatív számok halmazán konkáv, a pozitív számok halmazán konvex a függvény.

Határértékek:

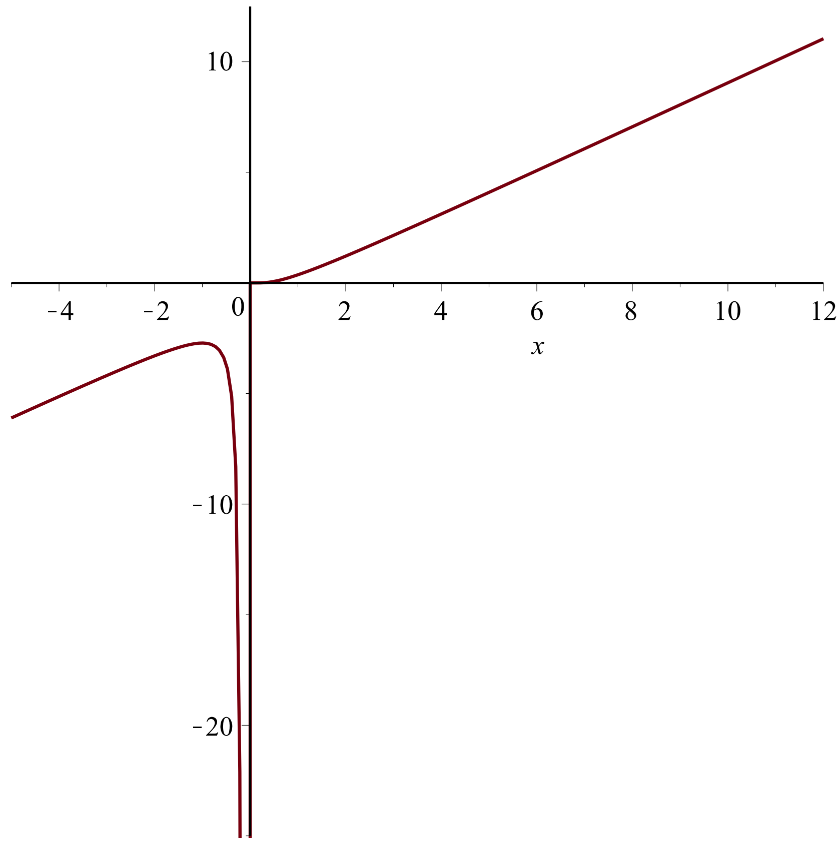
$\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot e^{-\frac{1}{x}}=-\infty\cdot 1=-\infty$ (dominál az x fgv)

A +∞-ben hasonlóan $+\infty\cdot 1=\infty$. Kihasználtuk, hogy $e^{-\frac{1}{\infty}}\to e^{0}=1$
Mi a helyzet a 0 környékén? (zrös hely)

$$\lim_{x\to 0-} x\cdot e^{-\frac{1}{x}}=0\cdot\infty=\text{L'Hospital}-\text{szabállyal}=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-\left(-1\cdot x^{-2}\right)\right)}{-1\cdot x^{-2}}=\lim_{x\to 0-}-e^{-\frac{1}{x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0+} x\cdot e^{-\frac{1}{x}}=0\cdot 0=0 \qquad \left(-\frac{1}{+0}=-\infty \text{ és } e^{-\infty}=0\right)$$

Grafikon megrajzolása:



Aszimptota : y=x egyenes

Érték készlet: $R_f :]-\infty; -e[\cup]0; \infty[$

MEGOLDÁS MAPLE PARANCSOK HASZNÁLATÁVAL:

> $restart : with(plots) :$

> $f := x \rightarrow x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

$$f := x \rightarrow x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \quad \textbf{(1.5.14)}$$

>

> $fgv\_zérushelye := solve(f(x) = 0, x);$

$$fgv\_zérushelye := \quad \textbf{(1.5.15)}$$

> $derivaltf := \frac{d}{dx} f(x)$

$$derivaltf := e^{-\frac{1}{x}} + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \quad \textbf{(1.5.16)}$$

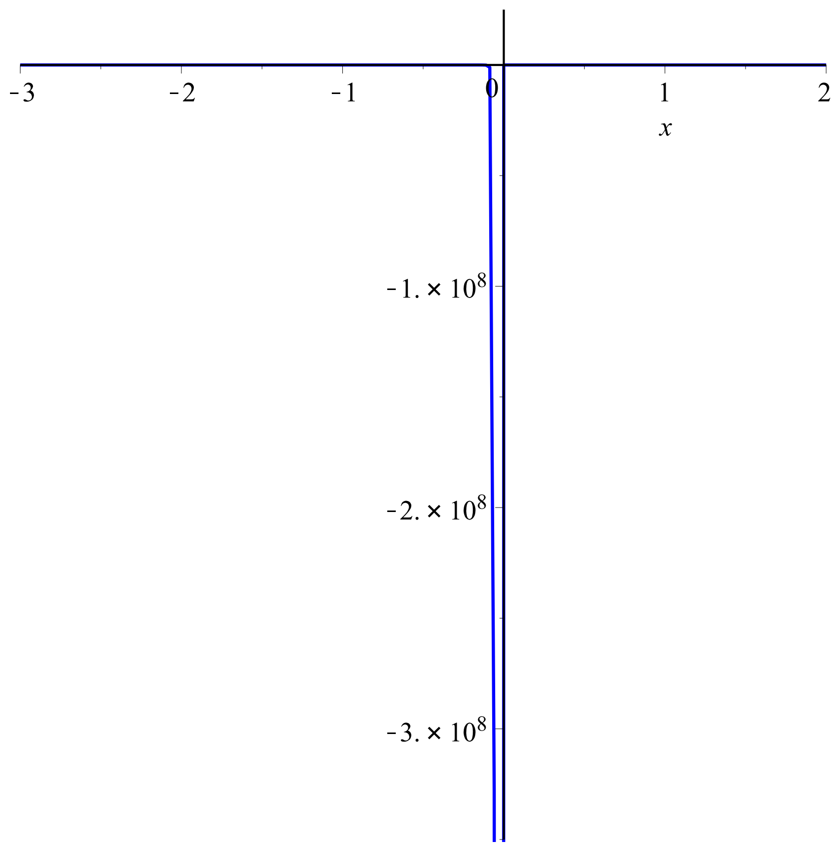
> $simplify(derivaltf)$

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}\,(x+1)}{x} \quad \textbf{(1.5.17)}$$

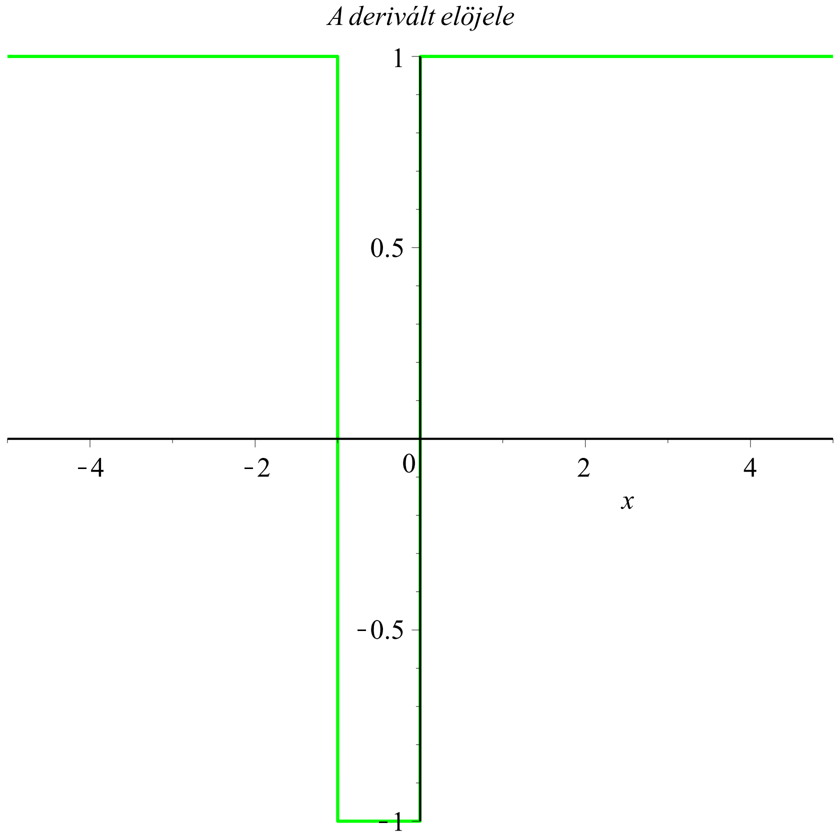
> $derivaltf\_zérushelye := solve(derivaltf(x) = 0, x);$

$$derivaltf\_zérushelye := x \rightarrow -1 \quad \textbf{(1.5.18)}$$

> $rajzderivaltf := plot(derivaltf(x), x = -3..2, color = blue) : rajzderivaltf$



> $plot(\mathrm{signum}(derivaltf(x)), x = -5..5, title = A\ derivált\ elöjele, color = green)$



A derivált függvény az x=-1-nél pozitívról negatívra váltja az eljelét, így lokális maximuma van, míg x=0-nél negatívról, pozitívra vált, de itt nincs szélsérték, mert sem a függvény, sem a derivált nincs értelmezve.
A széls értékek nagysága:

>

> $M := f(-1)$

$$M := -\mathrm{e} \tag{1.5.19}$$

>

> $derivalt2 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, derivaltf$

$$derivalt2 := \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^3} \tag{1.5.20}$$

> $simplify(derivalt2)$

$$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^3} \tag{1.5.21}$$

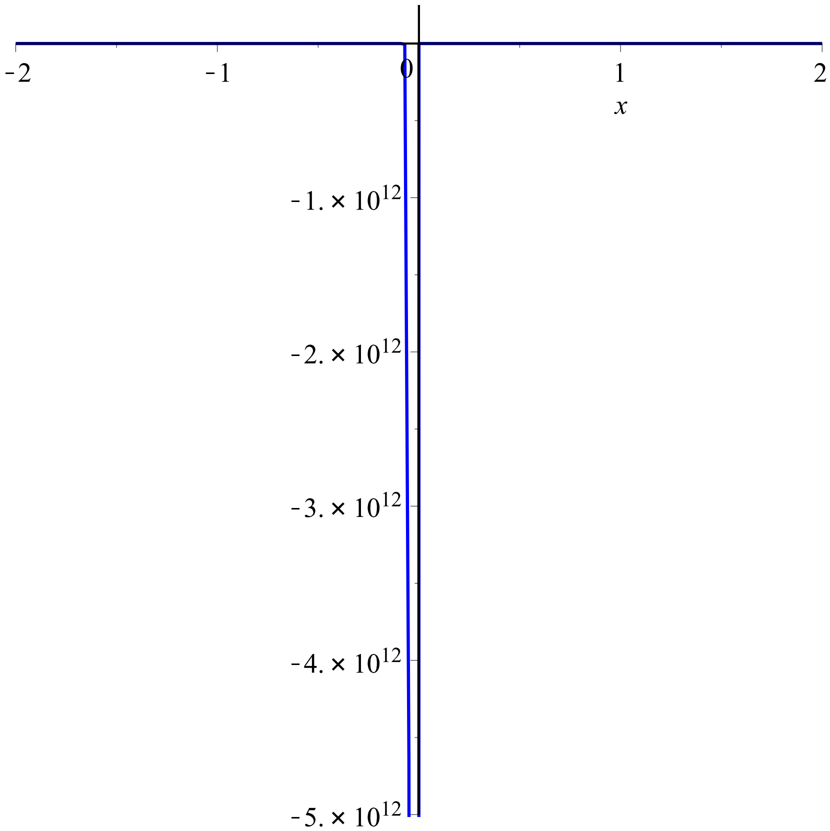
> $md := x \rightarrow derivalt2(x)$

$$md := x \rightarrow derivalt2(x) \quad \textbf{(1.5.22)}$$

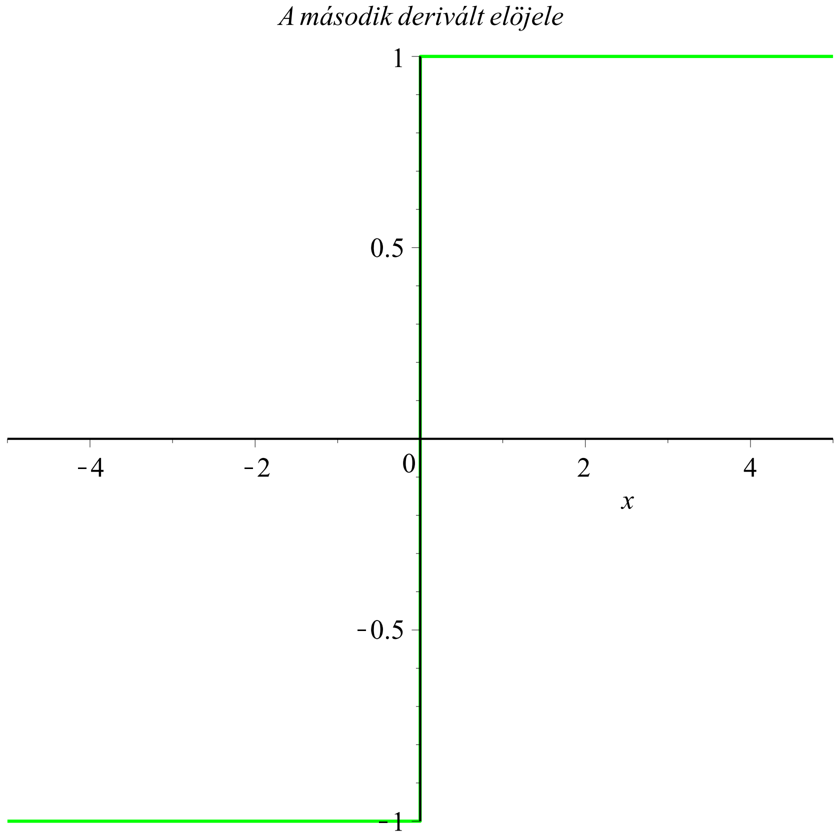
> $derivalt2\_zérushelye := solve(md(x) = 0, x);$

$$derivalt2\_zérushelye := \quad \textbf{(1.5.23)}$$

> $rajzderivalt2 := plot(derivalt2(x), x = -2..2, color = blue) : rajzderivalt2$



> $plot(\mathrm{signum}(derivalt2(x)), x = -5..5, title = A\ második\ derivált\ elöjele, color = green)$



>

A második derivált a 0-nál előjelet vált: a]-∞;0[-on konkáv a]0;∞[-on konvex a függvény.

> $\lim_{x \to \infty} x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

$$\infty \tag{1.5.24}$$

> $\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

$$-\infty \tag{1.5.25}$$

> $limit(f(x), x = 0, right);$

$$0 \tag{1.5.26}$$

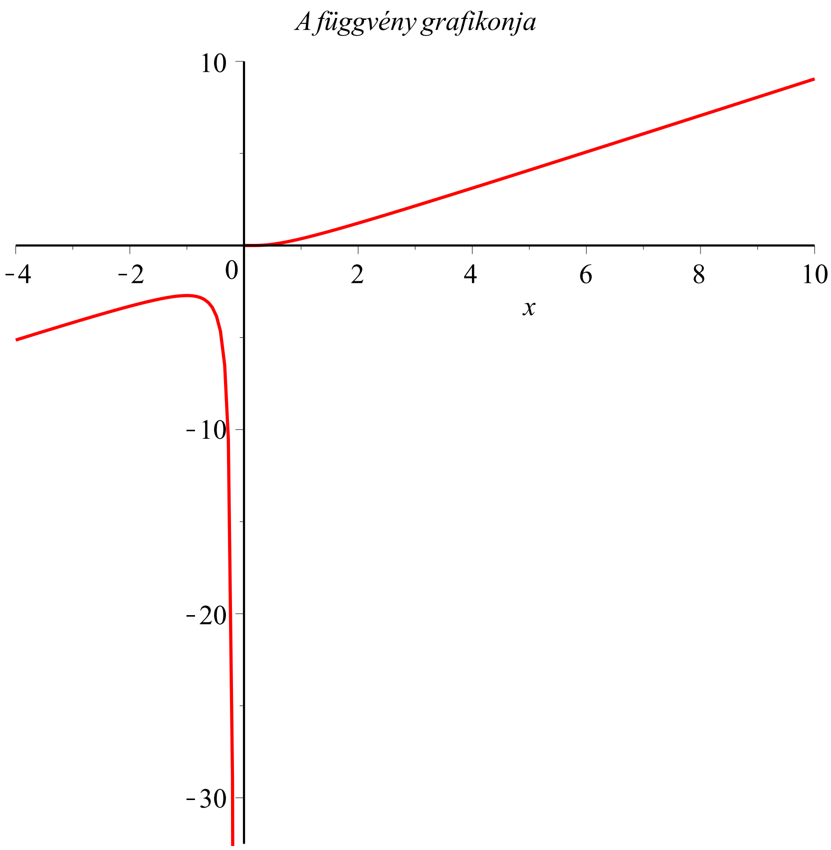
> $limit(f(x), x = 0, left);$

$$-\infty \tag{1.5.27}$$

>

A féloldali határértékeket más szintaxisban kell beírni!!!

> $plot(f(x), x = -4..10, title = A\ függvény\ grafikonja, color = red);$



>

>

Érték készlet meghatározása:
$R_f : f(x) \geq 0$, $azaz\, f(x) \in \mathbb{R} \cup \{0\}$

HAGYOMÁNYOS MEGOLDÁS:

Végezze el a következ függvény vizsgálatát!

$f(x) = 12\,x^3 - x^4$

Megoldás:
$D_f : x \in \mathbb{R}$

paritás: $f(-x) = 12 \cdot (-x)^3 - (-x)^4 = -12\,x^3 - x^4 \begin{cases} \neq f(x) & \text{se nem páros} \\ \neq -f(x) & \text{se nem páratlan} \end{cases}$

nem periodikus

zérushely:

$$12x^3 - x^4 = 0 \Rightarrow x^3 \cdot (12 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 12 - x = 0 \Rightarrow x = 12 \end{cases}$$

szélsérték, monotonitás:

$f('x) = \left(12x^3 - x^4\right)' = 12 \cdot 3x^2 - 4x^3 = 36x^2 - 4x^3$

A széls érték létezésének szükséges feltétele, hogy az els derivált eltnjön; elegend is, ha azon a helyen a derivált eljelet vált:

$$36x^2 - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x^2 \cdot (9 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 9 - x = 0 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 9$	$x = 9$	$9 < x$
f'	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗	nincs szélső érték	↗	lokális maximum	↘

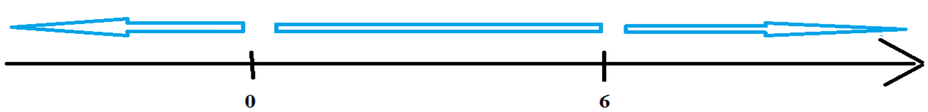
inflexiós pont, konvexitás:

$f''(x) = \left(36x^2 - 4x^3\right)' = 36 \cdot 2x - 4 \cdot 3x^2 = 72x - 12x^2$

Az inflexiós pont létezésének szükséges feltétele, hogy a második derivált eltnjön, elegend is, ha az adott helyen a második derivált eljelet is vált.

$$72x - 12x^2 = 0 \Rightarrow 12x \cdot (6 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 12x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 6 - x = 0 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$

eljel táblázat:

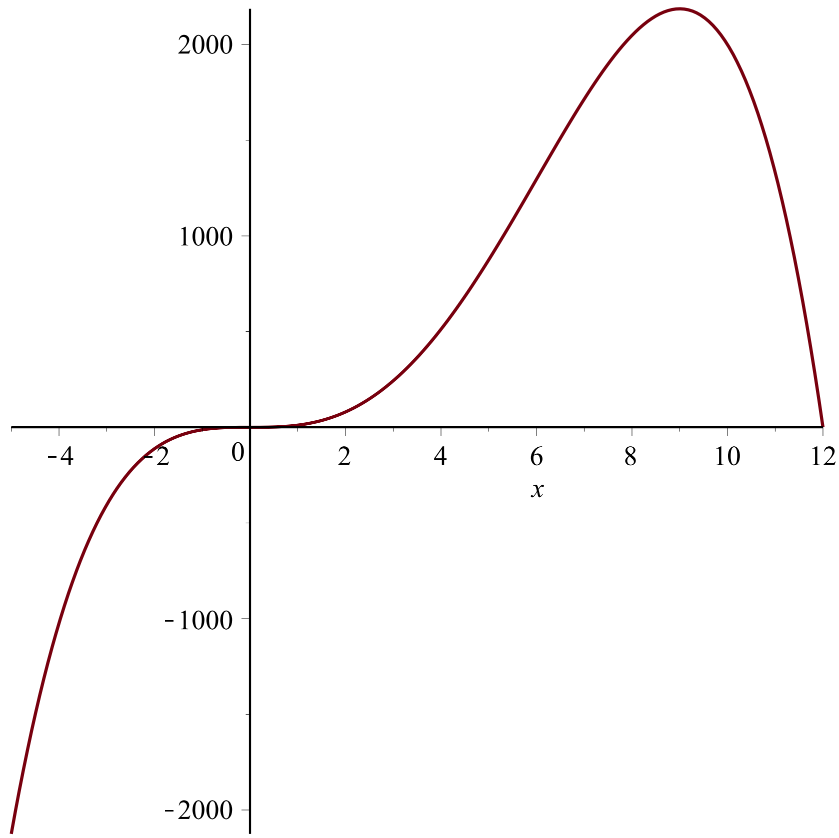


	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 6$	$x = 6$	$6 < x$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	∩	inflexiós pont	∪	inflexiós pont	∩

határértékek vizsgálata:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(12\,x^3 - x^4\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\cdot\left(\frac{12}{x} - 1\right) = \infty\cdot(0-1) = -\infty$$

grafikon megrajzolása:



érték készlet : $R_f : x \in \left]-\infty; 2187\right]$

MEGOLDÁS MAPLE PARANCSOKKAL:

> $restart : with(plots) :$

> $f := x \rightarrow 12\cdot x^3 - x^4$

$$f := x \rightarrow 12\,x^3 - x^4 \qquad \textbf{(1.5.28)}$$

>

> $fgv\_zérushelye := solve(f(x) = 0, x);$

$$fgv\_zérushelye := 0, 0, 0, 12 \qquad \textbf{(1.5.29)}$$

> $derivaltf := \frac{d}{dx} f(x)$

$$derivaltf := 36\,x^2 - 4\,x^3 \tag{1.5.30}$$

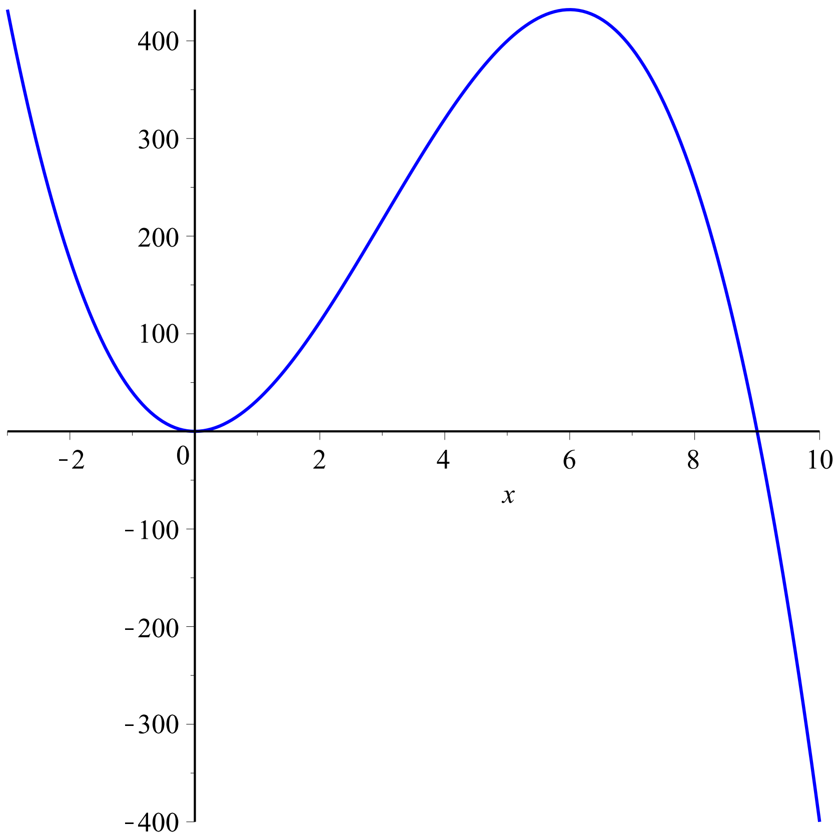
> $simplify(derivaltf)$

$$36\,x^2 - 4\,x^3 \tag{1.5.31}$$

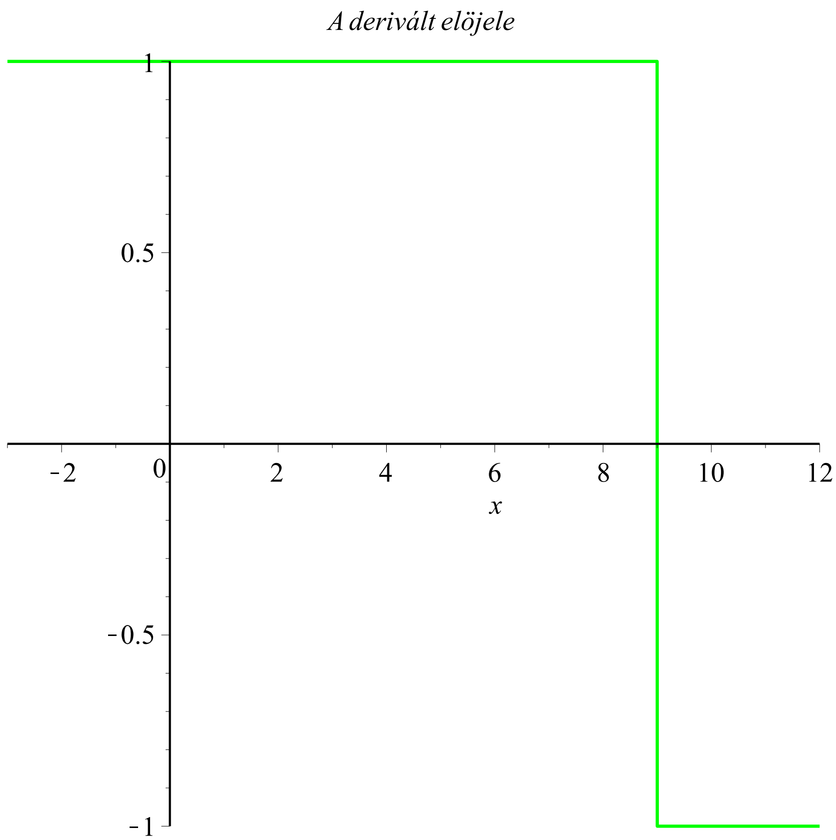
> $derivaltf\_z\acute{e}rushelye := solve(derivaltf(x) = 0, x);$

$$derivaltf\_z\acute{e}rushelye := x \to 0, x \to 9 \tag{1.5.32}$$

> $rajzderivaltf := plot(derivaltf(x), x = -3 ..10, color = blue) : rajzderivaltf$



> $plot(\mathrm{signum}(derivaltf(x)), x = -3 ..12, title = A\ deriv\acute{a}lt\ el\ddot{o}jele, color = green)$



A derivált függvény az x=0-nál nem vált eljelet, így itt nincs széls értéke. Az x=9 helyen pozitíról negatíra vált, így ott a függvénynek maximuma van.
A széls érték nagysága:

>

> $M := f(9)$

$$M := 2187 \tag{1.5.33}$$

>

> $derivalt2 := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, derivaltf$

$$derivalt2 := 72\,x - 12\,x^2 \tag{1.5.34}$$

> $simplify(derivalt2)$

$$72\,x - 12\,x^2 \tag{1.5.35}$$

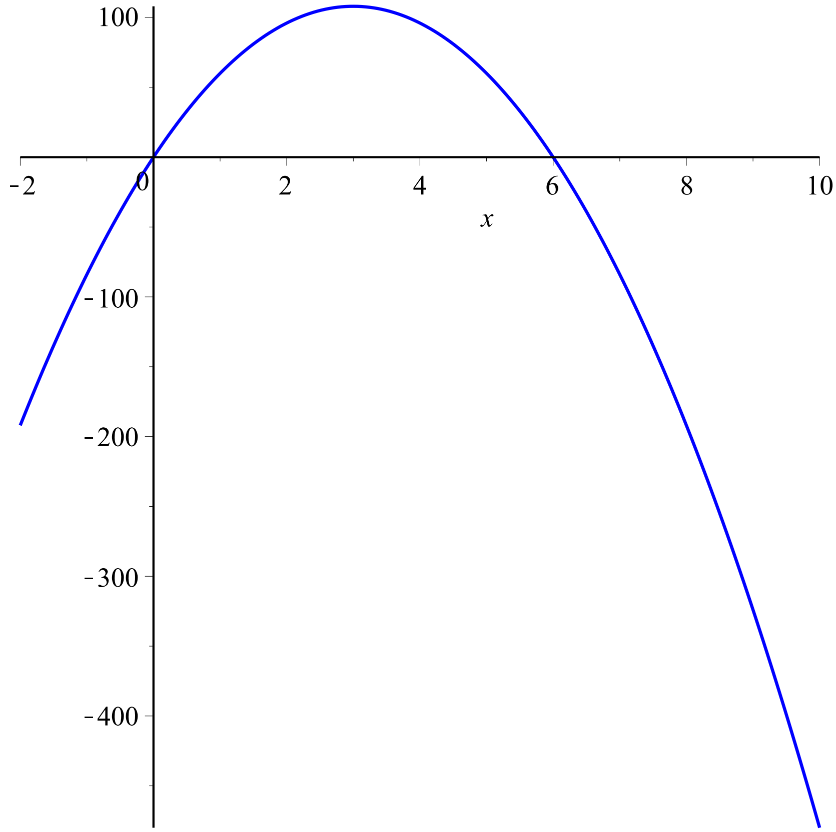
> $md := x \rightarrow derivalt2(x)$

$$md := x \rightarrow derivalt2(x) \tag{1.5.36}$$

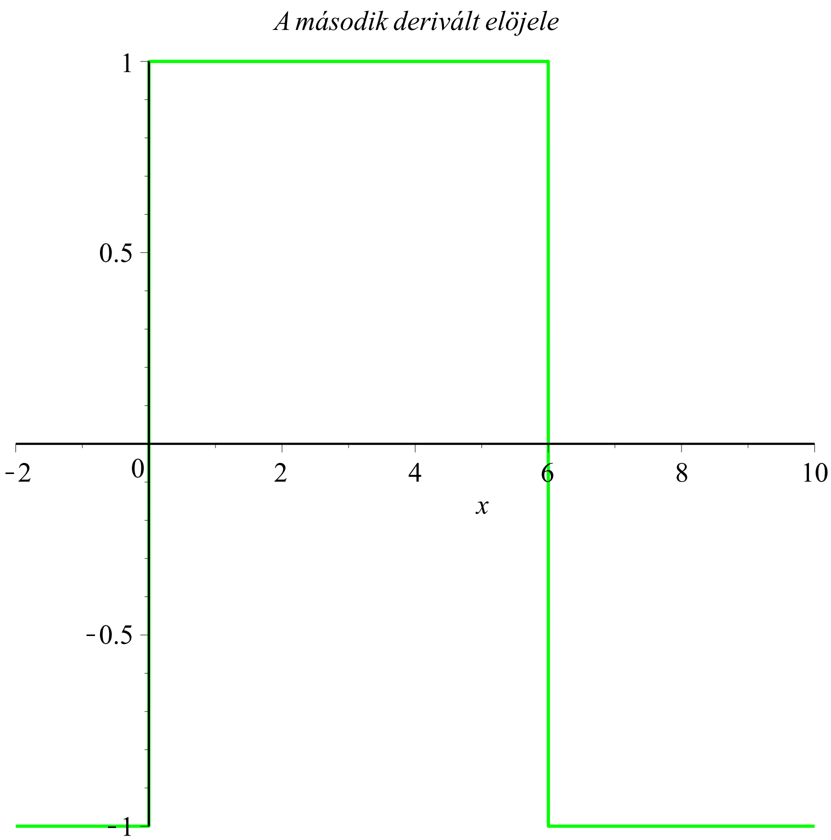
> $derivalt2\_zérushelye := solve(md(x) = 0, x);$

$$derivalt2\_zérushelye := x \rightarrow 0,\, x \rightarrow 6 \tag{1.5.37}$$

> $rajzderivalt2 := plot(derivalt2(x), x = -2..10, color = blue) : rajzderivalt2$



> $plot(\mathrm{signum}(derivalt2(x)), x = -2..10, title = A\ második\ derivált\ elöjele, color = green)$



>

A második derivált a zérushelyeknél eljelet vált, a $]-\infty; 0[$-on negatív eljel, így ott a függvény konkáv, a $]0; 6[$-on pozitív eljel, így ott konvex, a $]6; \infty[$-on pedig ismét konkáv a függvény.

> $\lim_{x \to \infty} (12 \cdot x^3 - x^4)$

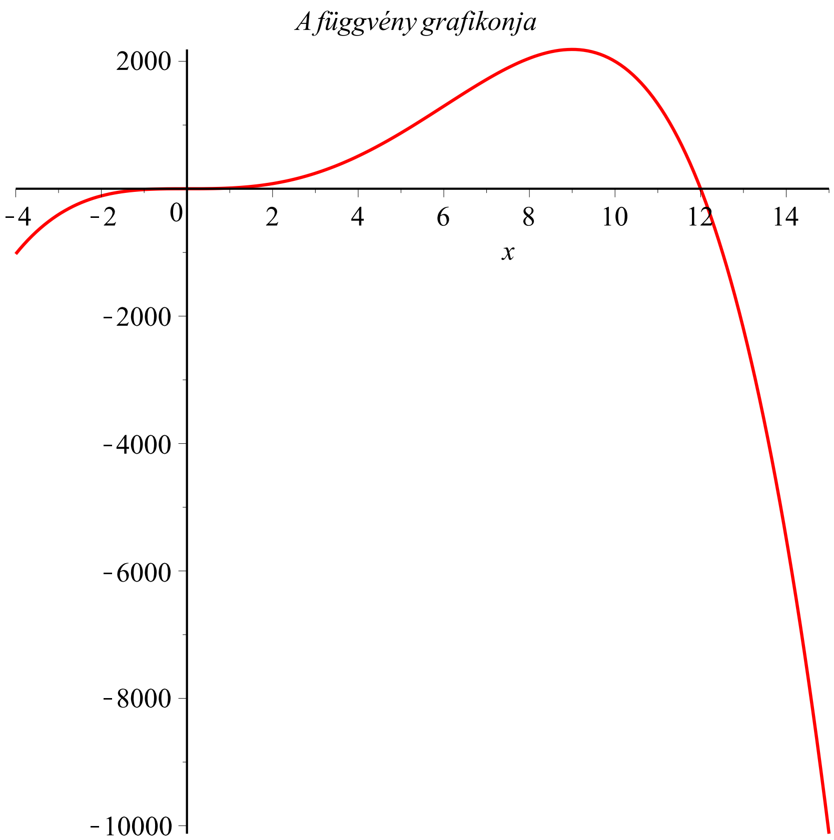
$$-\infty \tag{1.5.38}$$

>

> $\lim_{x \to -\infty} (12 \cdot x^3 - x^4)$

$$-\infty \tag{1.5.39}$$

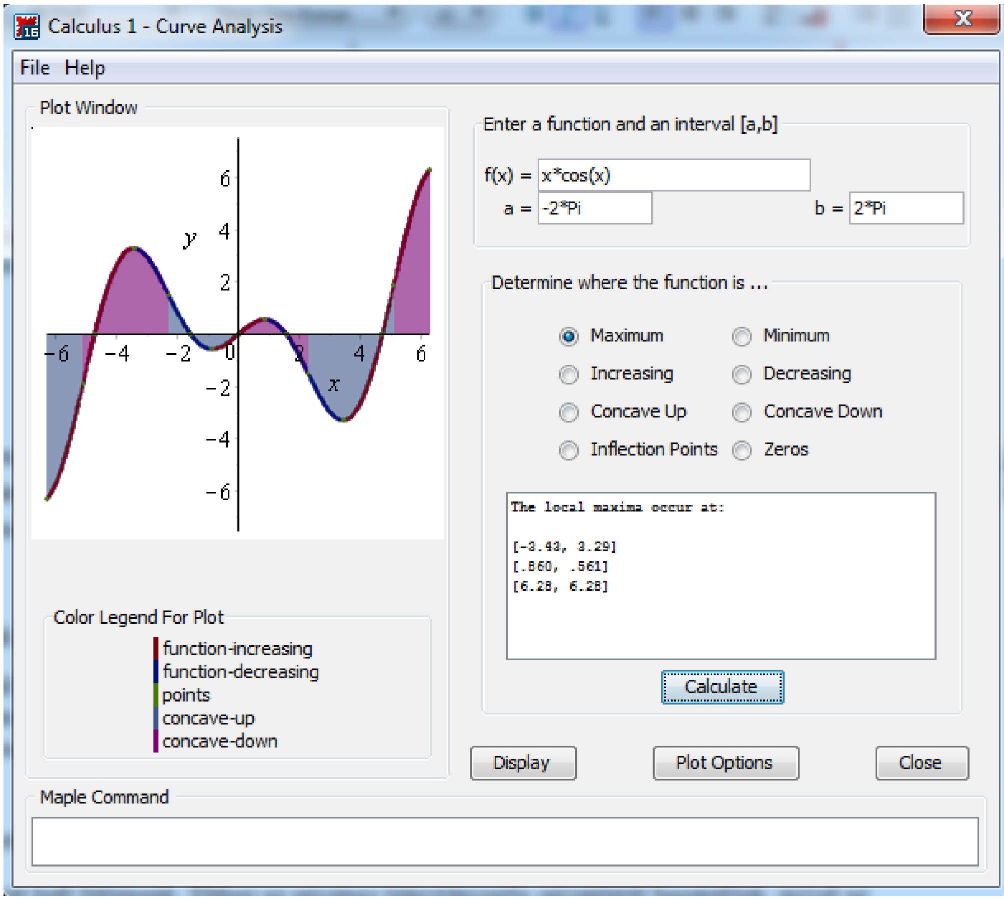
> *plot*$(f(x), x = -4..15, \textit{title} = \textit{A függvény grafikonja}, \textit{color} = \textit{red})$;



>

>

A helyi maximum abszolút maximum is.
Érték készlet meghatározása: $R_f : x \in \left]-\infty; 2187\right]$



Függvényvizsgálat gyakorló

Érint

Az érint egyenes egyenletét az $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ iránytényezs egyenlet felhasználásával írjuk fel, ahol (x_0, y_0) jelöli azt a pontot, amelyben kíváncsiak vagyunk az érint egyenletére, az m meredekség a differenciálhányados értéke az x_0 pontban. Így az érint általános egyenlete átrendezés után: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Példa:

Írja fel az $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ függvény grafikonjához húzható érint egyenletét az y tengellyel való metszéspontjában!

Megoldás:
Először meghatározzuk, hogy hol metszi a függvény az y tengelyt. Ez ott van, ahol x=0.
Behelyettesítés után kapjuk, hogy $y=\frac{1}{2}$. Tehát a $P_0(\,)0;-\frac{1}{2}$ ponton átmen érint egyenesét kell felírnunk. Ehhez az egyenes iránytényezs egyenletét használjuk, mivel az iránytényezt vagy meredekséget a függvény differenciálhányadosának értéke adja meg az adott pontban. A meredekség meghatározása:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x-2}\right)'=\left((x-2)^{-1}\right)'=(-1)\cdot(x-2)^{-2}=-\frac{1}{(x-2)^2}\Rightarrow m=f'(0)=-\frac{1}{(0-2)^2}$$
$$=-\frac{1}{4}$$

Az egyenes iránytényezs alakja: $y-y_0=m\cdot\left(x-x_0\right)$. Behelyettesítés után az érint egyenlete:
$$y-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}\cdot(x-0)\Rightarrow y=-\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\ .$$

Példa:

Mekkora szögben metszi az $f(x)=\frac{1}{x}-2$ függvény grafikonja az x tengelyt?
Megoldás:
Az x tengelyt a függvény zérushelyén metszi, ennek meghatározása:
$\frac{1}{x}-2=0\Rightarrow\frac{1}{x}=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}$. A metszés szögét a differenciálhányados adja meg az adott helyen. Meghatározása:
$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}-2\right)'=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-4\Rightarrow tg\alpha=-4\Rightarrow\alpha\approx-76°\Rightarrow 104°$$

Közelítés

Taylor-polinomos közelítés:

Definíció:

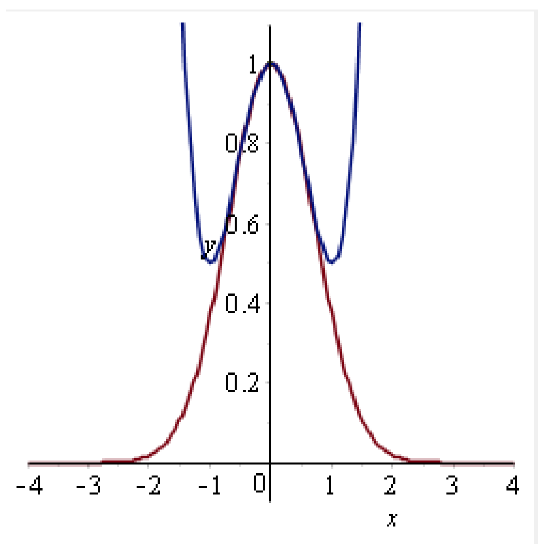
Ha az *f(x)* függvény az *a* pont valamely környezetében n-szer differenciálható, akkor minden ebbe a környezetbe eső *x* helyen érvényes az az állítas, nogy az *f(x)* függvény n-ed fokú Taylor –polinomját az *a* hely környékén a következő kifejezés adja meg:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \frac{f^{(5)}(a)}{5!}(x-a)^5 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

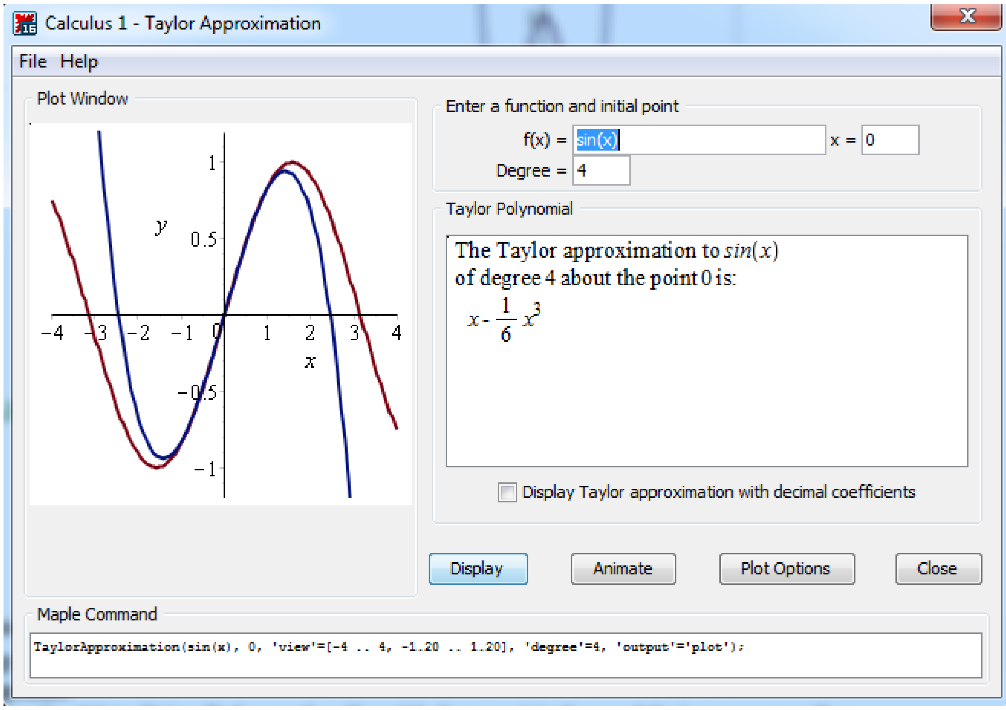
Legyen $f(x) = e^{-x^2}$! Írjuk fel a harmad, negyed és ötöd rendű Taylor-polinomját a 0 hely környékén!

függvény	függvény algebrai alakja	helyettesítés	helyettesítés értéke
$f(x)$	e^{-x^2}	$f(0)$	1
$f'(x)$	$-2xe^{-x^2}$	$f'(0)$	0
$f''(x)$	$e^{-x^2}(4x^2-2)$	$f''(0)$	-2
$f'''(x)$	$e^{-x^2}(-8x^2+12x)$	$f'''(0)$	0
$f^{(4)}(x)$	$e^{-x^2}(16x^4-48x^2+12)$	$f^{(4)}(0)$	12
$f^{(5)}(x)$	$e^{-x^2}(-32x^5+100x^3-120x)$	$f^{(5)}(0)$	0

Definíció alapján: $T_5(x) = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{4!}x^4$



TAYLOR-POLINOM GYAKORLÓ PANEL ANIMÁCIÓVAL:



Taylor-polinom gyakorló animációval

Számítsa ki $\sqrt{3{,}8}$ *és* $\sqrt{4{,}2}$ közelítő értékét célszerű helyen felvett érintő egyenletének felhasználásával!

Megoldás:

A következő közelítést alkalmazzuk: célszerű helyen az érintő meredeksége megegyezik a szelő meredekségével, azaz $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\Rightarrow f(x_0+\Delta x)=f'(x_0)\Delta x+f(x_0)$

A függvény jelen esetben a négyzetgyök függvény lesz, a célszerű hely pedig a 4. Így:

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \text{és} \quad x_0=4 \qquad f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

a) $\sqrt{3{,}8}\approx\dfrac{1}{2\sqrt{4}}\cdot(-0{,}2)+\sqrt{4}=-0{,}05+2=1{,}95$

$$\sqrt{4{,}2}\approx\frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot 0{,}2+\sqrt{4}=0{,}05+2=2{,}05$$

Típusfeladatok

Mekkora szögben metszi az $f(x)=\frac{1}{x}-2$ függvény grafikonja az x tengelyt?

Megoldás: Az x tengelyt a zérushelyén metszi, ennek meghatározása:
$\frac{1}{x}-2=0 \Rightarrow \frac{1}{x}=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$. A metszés szögét a differenciálhányados adja meg az adott

$$f(x)=\frac{1}{x}-2 \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

helyen. Meghatározása: $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-4 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-4 \Rightarrow \alpha=$

Hol van szélsőértéke az $f(x)=x^3-12x$ függvénynek?

Megoldás: A szélsőértéket az első differenciálhányadosból tudjuk meghatározni, annak zérushelyén lehet szélsőértéke. Azt, hogy van a második differenciálhányadosból döntjük el.

$f'(x)=3x^2-12 \Rightarrow 3x^2-12=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$f''(x)=6x \Rightarrow f''(2)=6\cdot 2=12\rangle 0 \Rightarrow \min imum$

$f''(-2)=6\cdot(-2)=-12\langle 0 \Rightarrow \max imum$

Hol van szélsőértéke az $f(x)=x^3-3x^2+3x+10$ függvénynek? Minimum vagy maximum van?

Megoldás: Szélsőértéke ott lehet, ahol $f'(x)=0$, van is szélsőérték, ha ott az első derivált előjelet vált vagy a második derivált értéke nem 0. Ha még innen nem tudjuk eldönteni, akkor tovább deriválunk, amíg a kérdéses derivált az adott helyen a 0-tól különböző értéket vesz fel. Ilyenkor megnézzük a derivált rendjét, ha az páros, akkor szélsőérték van; ha páratlan, akkor nincs szélsőérték.

$f'(x)=\left(x^3-3x^2+3x+10\right)'=3x^2-6x+3$

$3x^2-6x+3=0 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$

$f''(x)=\left(x^2-2x+1\right)'=2x-2 \Rightarrow f''(1)=0 \Rightarrow \text{nem tudjuk eldönteni}$

$f'''(x)=2\neq 0 \Rightarrow \text{a rend páratlan } (3)$

$\Rightarrow$ nincs szélsőérték

vagy: $f'(x)=(x-1)^2\geq 0 \Rightarrow$ a derivált nem vált előjelet, nincs szélsőérték

Keressük meg az $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x$ függvény értelmezési tartományának azon részét, ahol a függvény szigorúan monoton növekvő!

Megoldás:

A monotonitási szakaszt a függvény első deriváltjából határozzuk meg, ahol az pozitív ott a függvény növekvő, ahol negatív az első derivált előjele, ott a függvény csökkenve halad.

$f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)'=\frac{3x^2}{3}-4=x^2-4 \Rightarrow x^2-4\geq 0$ esetén

$|x|\geq 2 \Leftrightarrow x<-2$ vagy $x>2$

$\text{Összegezve}: x\in\{(-\infty,-2)\cup(2,\infty)\}$

Van-e inflexiós helye a következő függvénynek, $f(x)=\frac{x^4}{12}+2x^2+\frac{4}{5}$?

Megoldás:

Inflexiós hely ott lehet, ahol a függvény második deriváltja eltűnik (azaz értéke 0), vagy az első el nem tűnő deriváltja az adott helyen páratlan rendű.

$$f'(x)=\left(\frac{x^4}{12}+2x^2+\frac{4}{5}\right)'=\frac{4x^3}{12}+2\cdot 2x+0=\frac{x^3}{3}+4x$$

$$f''(x)=\left(\frac{x^3}{3}+4x\right)'=\frac{3x^2}{3}+4=x^2+4$$

$x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow$ nincs ilyen valós szám

Tehát a fenti függvénynek nincs inflexiós pontja.

Gazdasági feladatok megoldása

1

Ismeretes, hogy egy cég valamely termékének B(x) árbevételi, illetve K(x) költség függvénye, a következő: B(x) =200x – 0,1x^2, illetve K(x) = 10x + 6000, ahol x (> 0) a termék darabszámban kifejezett mennyisége.

a) Írja fel a határköltség függvényt, a profit függvényt és a határprofit függvényt!

b) Határozza meg a termék azon darabszámát, amelynek értékesítése esetén a cég nyeresége maximális lesz. Számítsa ki a maximális profit értékét is!

c) A fedezeti pont a nulla veszteséghez és profithoz tartozik. Határozza meg, hogy fedezeti pont milyen termelési mennyiséghez tartozik!

> $restart : with(plots) :$

> $K := x \rightarrow 10 \cdot x + 6000$

$$K := x \rightarrow 10\,x + 6000 \qquad \textbf{(1.9.1)}$$

> $határköltség := x \rightarrow \frac{d}{dx} K(x)$

$$határköltség := x \rightarrow \frac{d}{dx} K(x) \qquad \textbf{(1.9.2)}$$

> $határköltség(x)$

$$10 \qquad \textbf{(1.9.3)}$$

> $B := x \rightarrow 200 \cdot x - 0.1 \cdot x^2$

$$B := x \rightarrow 200\,x + (-1)\cdot 0.1\,x^2 \qquad \textbf{(1.9.4)}$$

> $profit := x \rightarrow B(x) - K(x)$

$$profit := x \rightarrow B(x) - K(x) \qquad \textbf{(1.9.5)}$$

> $profit(x)$

$$190\,x - 0.1\,x^2 - 6000 \qquad \textbf{(1.9.6)}$$

> $határprofit := x \rightarrow \frac{d}{dx} profit(x)$

(1.9.7)

$$határprofit := x \rightarrow \frac{d}{dx}\, profit(x) \quad \textbf{(1.9.7)}$$

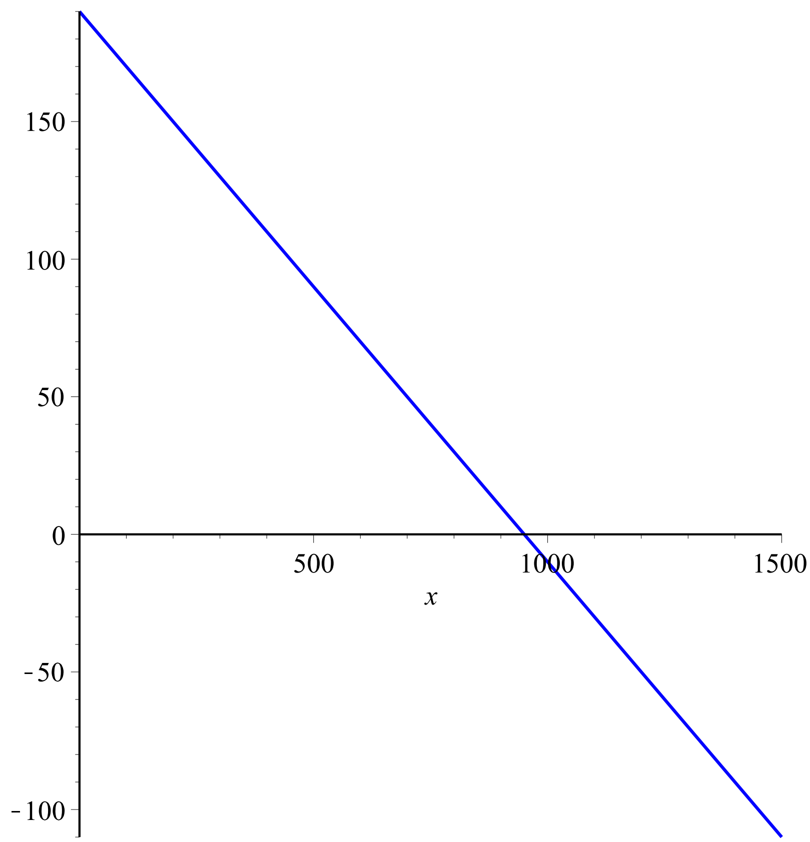
> *határprofit*(x)

$$190 - 0.2\, x \quad \textbf{(1.9.8)}$$

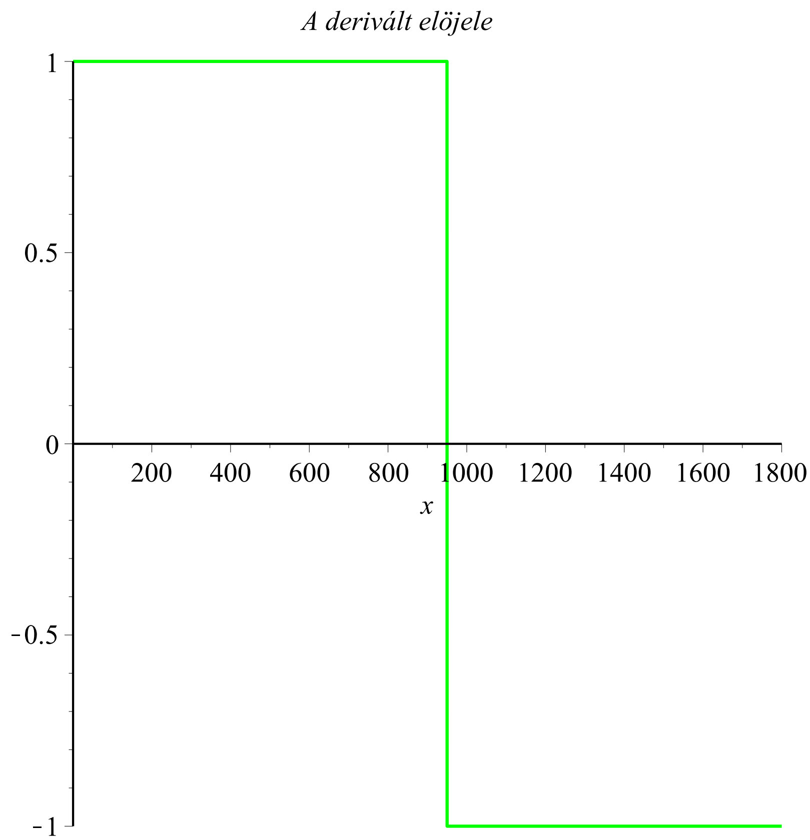
> *határprofit_zérushelye* := *solve*(*határprofit*$(x) = 0, x$);

$$határprofit\_zérushelye := 950. \quad \textbf{(1.9.9)}$$

> *rajzhatárprofit* := *plot*(*határprofit*(x), $x = 0\,..1500$, *color* = *blue*) : *rajzhatárprofit*



> *plot*(signum(*határprofit*(x)), $x = 0\,..1800$, *title* = *A derivált elöjele*, *color* = *green*)



>

A derivált az x=950-nél eljelet vált, pozitívról negatívra, tehát a profit függvénynek maximuma van.

```
> P:= profit(950)
Warning, inserted missing semicolon at end of statement
```

$$P := 84250.0 \qquad (1.9.10)$$

> $fedezetipont := solve(profit(x) = 0, x)$

$$fedezetipont := 32.12201247, 1867.877988 \qquad (1.9.11)$$

>

2

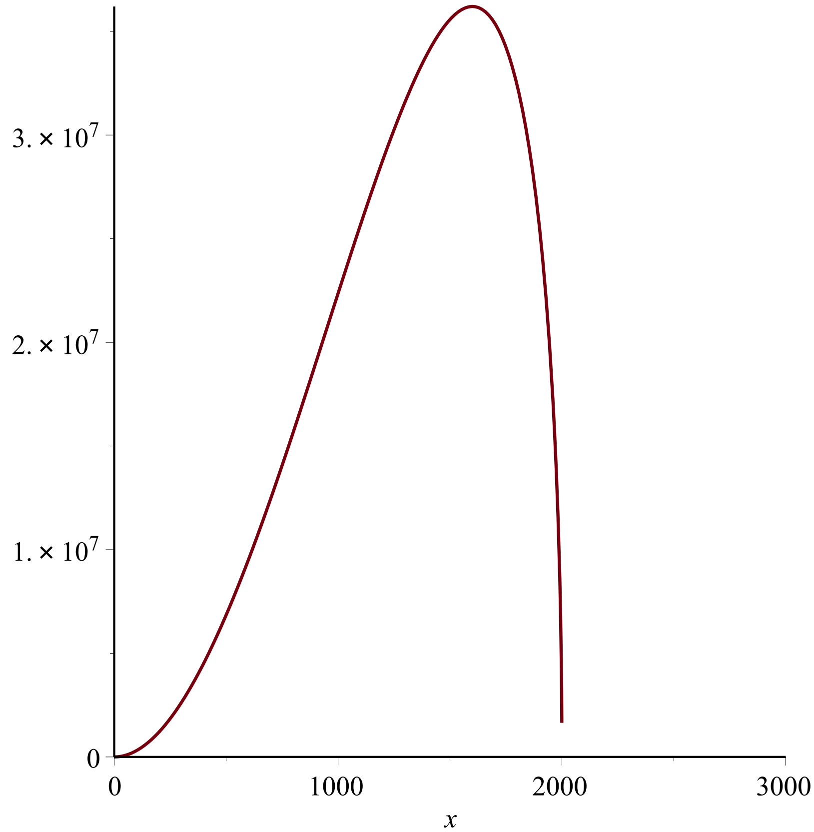
Egy termék árbevételének alakulását (ezer Ft-ban) a $B = x \rightarrow x^2 \cdot \sqrt{100 - \frac{x}{2}}$ **függvény adja meg, ahol x az eladott termékek darabszámát jelenti.**
a) Milyen értékeket vehet fel az eladott termék darabszáma?
b) Milyen x érték mellett lesz maximális az árbevétel?
c) Számítsa ki az árbevétel-függvény pontelaszticitását $x = 1000$**-ben, és a kapott eredményt értékelje!**

> $restart : with(plots) :$

> $B := x \rightarrow x^2 \cdot \sqrt{1000 - \frac{x}{2}}$

$$B := x \rightarrow x^2 \sqrt{1000 - \frac{1}{2}\,x} \tag{1.9.12}$$

> $grafikon := plot(B(x), x = 0 .. 3000) : grafikon$



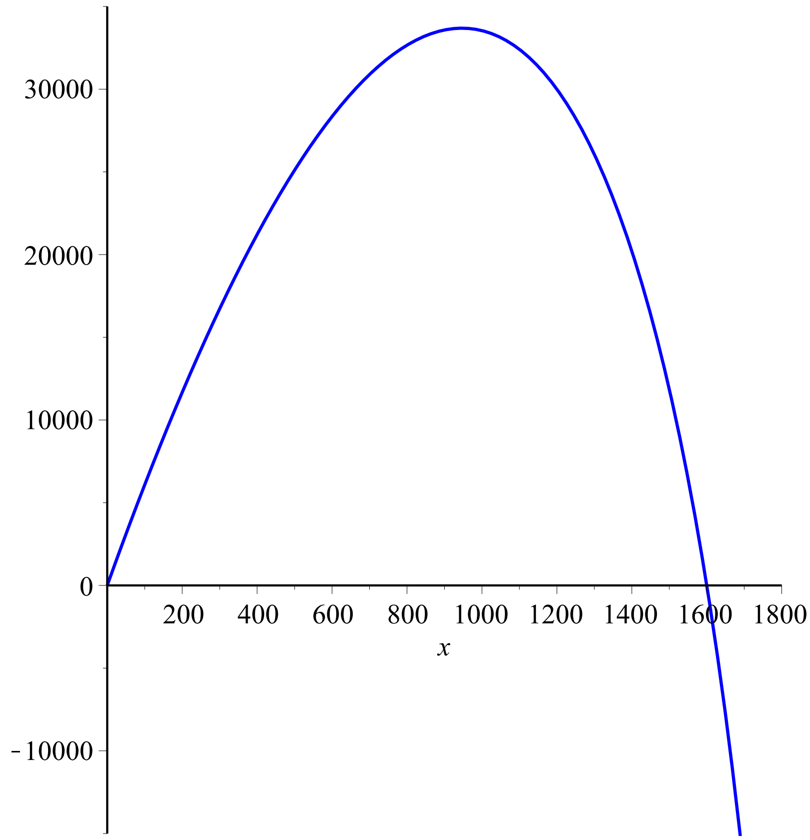
> $deriváltB := x \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\, B(x) : derivált = deriváltB(x)$

$$derivált = x\sqrt{4000 - 2\,x} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\sqrt{4000 - 2\,x}} \tag{1.9.13}$$

> $derivált\_zérushelyei := solve(deriváltB(x) = 0, x);$

$$derivált\_zérushelyei := 0, 1600 \tag{1.9.14}$$

> $rajzderivált := plot(deriváltB(x), x = 0 ..4000, color = blue) : rajzderivált$

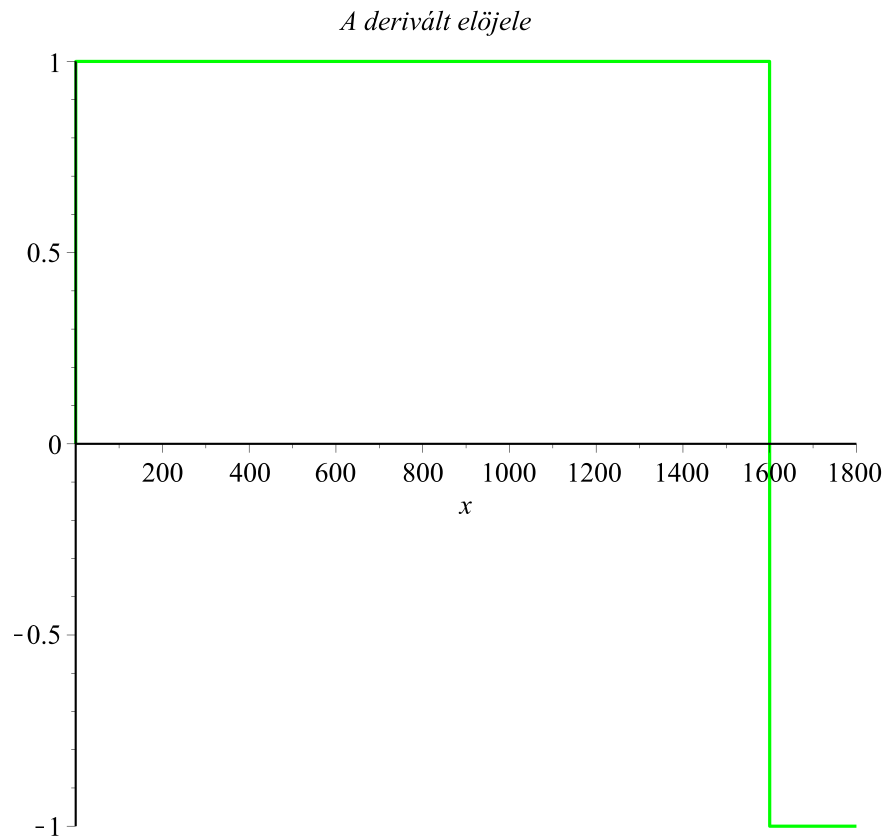


> $maximum\_hely := derivált\_zérushelyei[2]$

$$maximum\_hely := 1600 \tag{1.9.15}$$

A derivált eljelet vált 1600-nál, pozitívról negatívra, tehát B(x)-nek helyi maximuma van x= 1600-ban.

> $plot(\mathrm{signum}(deriváltB(x)), x = 0 ..1800, title = A\ derivált\ elöjele, color = green)$



> $maximum\_értéke := B(maximum\_hely);\ evalf(\%)$

$$maximum\_értéke := 25600000\sqrt{2}$$

$$3.620386719\ 10^{7} \tag{1.9.16}$$

A bevétel maximális értéke $25600000\sqrt{2}$

> $elaszticitás := unapply\left(\frac{x}{B(x)} \cdot deriváltB(x), x\right) :$

$Az\ árbevétel\ elaszticitása = elaszticitás(x)$

$$Az\ árbevétel\ elaszticitása = \frac{2\left(x\sqrt{4000-2x} - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\sqrt{4000-2x}}\right)}{x\sqrt{4000-2x}} \tag{1.9.17}$$

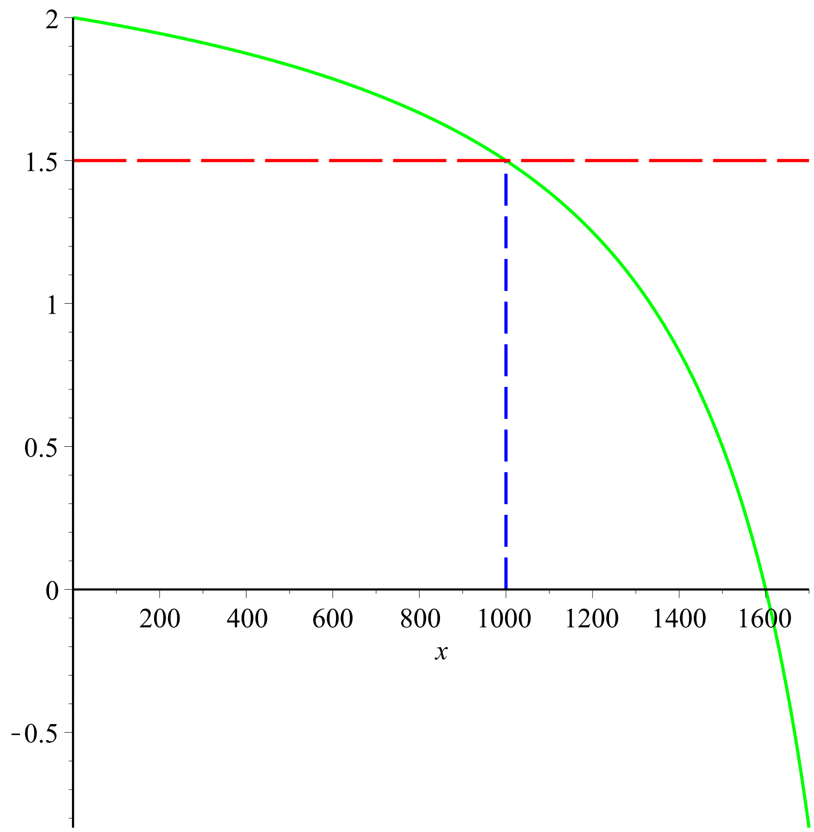
> $elaszticitás\_értéke := elaszticitás(1000)$

$$elaszticitás\_értéke := \frac{3}{2} \tag{1.9.18}$$

> $fuggoleges := plot([[1000, 0], [1000, 1.5]], linestyle = [dash], color = blue) :$

> $rajz\_elaszticitás := plot([elaszticitás(x), elaszticitás\_értéke], x = 0 ..1700, color = [green, red], linestyle = [solid, longdash]) :$

display([*fuggoleges*, *rajz_elaszticitás*])



>

3

Adott az $f(x) = e^{-0,01\,x+1}$ függvény, ahol x egy termék egységárát jelenti forintban, $f(x)$ pedig a termék iránti keresletet darabban.

a) Milyen egységár mellett lesz a bevétel maximális, és mekkora az ehhez a bevételhez tartozó kereslet és árbevétel?

b) Állapítsa meg az $f(x)$ *függvény* $x_0 = 50$ pontbeli elaszticitását! Fogalmazza meg, mit jelent a kapott eredmény!

A bevételi függvény a keresleti függvény és az ár szorzata :

> $f := x \rightarrow e^{-0.01\,x+1}$

$$f := x \rightarrow e^{(-1)\cdot 0.01\,x+1} \quad \textbf{(1.9.19)}$$

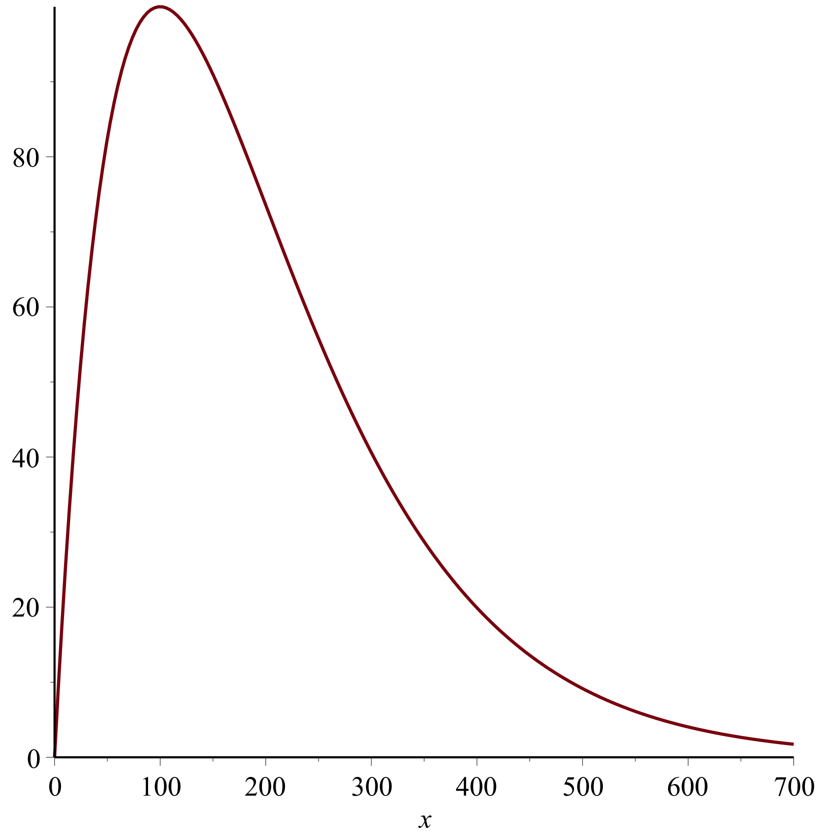
> $bevétel := x \rightarrow x \cdot f(x)$

$$bevétel := x \rightarrow x\,f(x) \quad \textbf{(1.9.20)}$$

> $bevétel(x)$

$$x\,\mathrm{e}^{-0.01\,x+1} \tag{1.9.21}$$

> $grafikon := plot(bevétel(x), x = 0 .. 700) : grafikon$



> $bevételderivált := x \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, bevétel(x)$

$$bevételderivált := x \rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, bevétel(x) \tag{1.9.22}$$

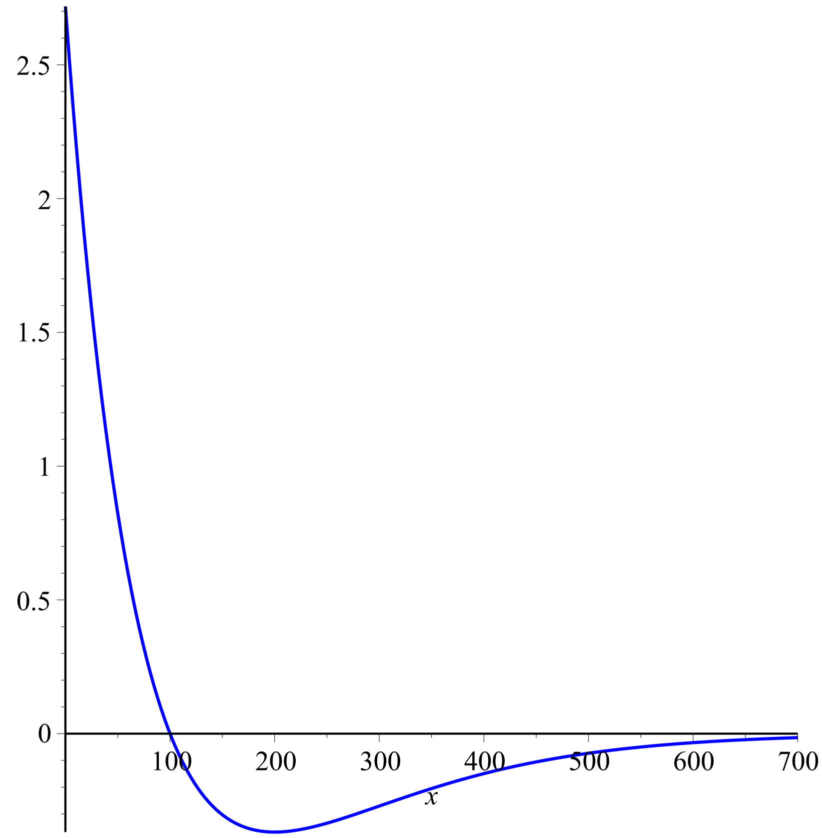
> $bevételderivált(x)$

$$\mathrm{e}^{-0.01\,x+1} - 0.01\,x\,\mathrm{e}^{-0.01\,x+1} \tag{1.9.23}$$

> $bevételderivált\_zérushelye := solve(bevételderivált(x) = 0, x);$

$$bevételderivált\_zérushelye := 100. \tag{1.9.24}$$

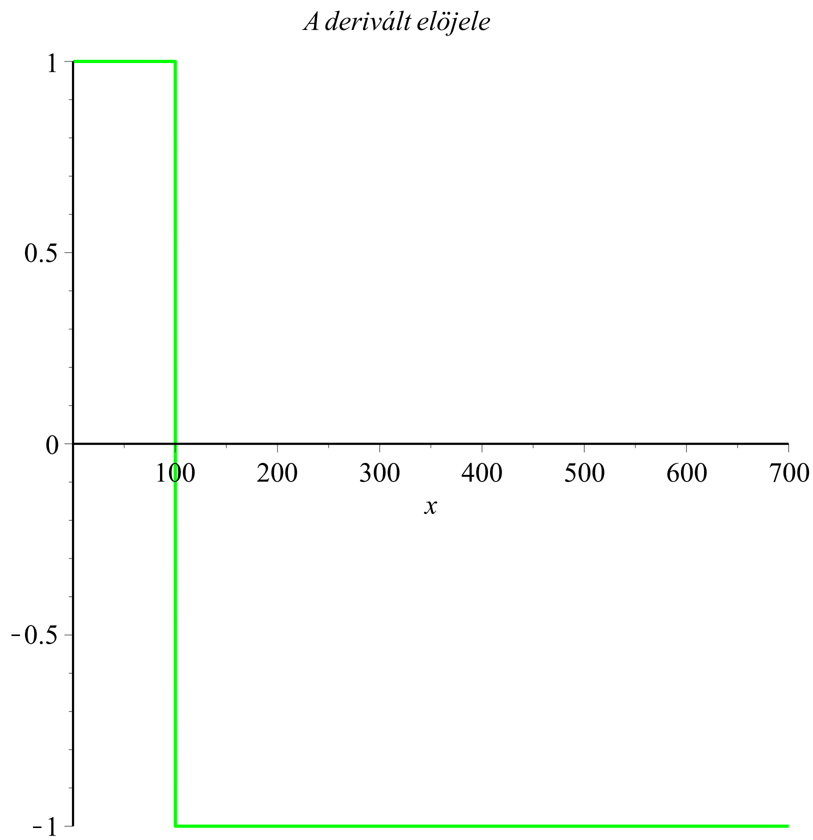
> $rajzderivált := plot(bevételderivált(x), x = 0 ..700, color = blue) : rajzderivált$



\>

A derivált eljelet vált 100-nál, pozitívról negatívra, tehát a bevételnek helyi maximuma van x= 100-ban.

\> *plot*(signum(*bevételderivált*(*x*)), *x* = 0 ..700, *title* = *A derivált elöjele*, *color* = *green*)



> $B := bevétel(100)$

$$B := 100. \tag{1.9.25}$$

> $db := f(100)$

$$db := 1. \tag{1.9.26}$$

> $elaszticitás := unapply\left(\frac{x}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x), x\right):$

$Az\ árbevétel\ elaszticitása = elaszticitás(x)$

$$Az\ árbevétel\ elaszticitása = -0.01\ x \tag{1.9.27}$$

> $elaszticitás\_értéke := elaszticitás(50)$

$$elaszticitás\_értéke := -0.50 \tag{1.9.28}$$

>