7. Primitív függvény fogalma. Az integrálás és deriválás kapcsolata. Integrálási típusok. Az integrálfüggvény.

A primitív függvény

Definíció:

Egy $F(x)$ függvényt az $f(x)$ függvény primitív függvényének nevezünk valamely véges, vagy végtelen intervallumon, ha ennek az intervallumnak minden x pontjában $F'(x) = f(x)$.

Az $f(x)$ függvény $y = F(x)$ primitív függvényének görbéjét az $f(x)$ függvény integrálgörbéjének nevezzük.

Tétel:

Egy függvény primitív függvényei csak konstansban különbözhetnek, tehát ha van primitív függvény, akkor végtelenül sok van. A primitív függvény konstans erejéig egyértelmen meghatározott.

Elemi függvények primitív függvényei:

$f(x)$	$\int f(x)dx = F(x) + C$
1	$x + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ha $n \neq -1$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$ (ez az n=-1 eset)
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	tgx+C
$\frac{1}{\sin^2 x}$	-ctgx+C
$\frac{1}{1+x^2}$	arctgx+C
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	arcsinx+C
shx	chx+C
chx	shx+C

Integrálási szabályok:

Az integrálási szabályok következnek a deriválási szabályokból.

$$\int c \cdot f \, dx = c \cdot \int f \, dx$$

$$\int f \pm g \, dx = \int f dx \pm \int g \, dx$$

$$\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx$$

Összeget és különbséget tagonként integrálunk, a konstans az integrál elé kiemelhet.
Az utolsó szabály a parciális integrálás, amely a szorzat deriválási szabályából levezethet.

Példa:

Végezze el a következ integrálást! $\int (1 + sh(2x - 1)) \, dx = ?$

Megoldás:

$$\int (1+sh(2x-1))\,dx = \int 1\,dx + \int sh(2x-1)\,dx = x + \frac{ch(2x-1)}{2} + C$$

Példa:

Végezze el a következ integrálást! $\int \left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 dx = ?$

Megoldás:

$$\int \left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 dx = \int \frac{4x^2-4x+1}{9}\,dx = \int \frac{1}{9}\cdot(4x^2-4x+1)\,dx = \frac{1}{9}\cdot\left(4\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + x\right) + C$$

Példa:

Határozza meg a következ integrált! $\int \frac{(1-x)^2}{x}\,dx = ?$

Megoldás:

$$\int \frac{(1-x)^2}{x}\,dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{x^2}{x}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x} - 2 + x\right) dx = \ln|x| - 2x + \frac{x^2}{2} + C$$

Példa:

Határozza meg a következ integrált! $\int \left(3x - \sqrt{x+1}\right) dx = ?$

Megoldás:

$$\int \left(3x - \sqrt{x+1}\right) dx = \int \left(3x - (x+1)^{\frac{1}{2}}\right) dx = 3\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Példa:

Határozza meg az $f(x) = \sqrt[3]{8x} - \frac{4}{x^2}$ függvény primitív függvényét!

Megoldás:

$$\int \left(\sqrt[3]{8x} - \frac{4}{x^2}\right) dx = \int \left(\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{x} - 4\cdot\frac{1}{x^2}\right) dx = \int \left(2\cdot x^{\frac{1}{3}} - 4\cdot x^{-2}\right) dx = 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - 4\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}$$

$$+ C = 2\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 4\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{6}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + 4x^{-1} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x} + C$$

Példa:

Végezze el a következ integrálást! $\int \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{2} \right)^2 \mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

$$\int \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{2} \right)^2 \mathrm{d}x = \int \frac{1 - 2\sqrt{x} + x}{4} \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} x \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{4} x - \frac{2}{4} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^2}{8} + C$$

Példa:

Integrálja a következ függvényeket! $\int \frac{6x - 3 + 5x^2}{x^3} \mathrm{d}x = ?$ $\int \frac{4e^x}{\sqrt{8e^x + 3}} \mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

$$\int \frac{6x - 3 + 5x^2}{x^3} \mathrm{d}x =$$

$$\int \left(\frac{6x}{x^3} - \frac{3}{x^3} + \frac{5x^2}{x^3} \right) \mathrm{d}x = \int \left(6 \cdot x^{-2} - 3 \cdot x^{-3} + 5 \cdot \frac{1}{x} \right) \mathrm{d}x = 6 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - 3 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + 5 \ln|x| + C$$

$$\int \frac{4e^x}{\sqrt{8e^x + 3}} \mathrm{d}x = \int 4e^x \cdot \left(8e^x + 3 \right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(8e^x + 3 \right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \qquad \text{(alfás típus)}$$

Integrálási típusok

Integrálási típusok:

Az összetett függvény deriválási szabályai alapján megfogalmazhatunk néhány gyakran elforduló integrálási típust.

$$\int \frac{f'}{f} = \int f' \cdot f = \ln|f| + C, \text{ ez az } \alpha = -1 \text{ eset}$$

$$\int f' \cdot f^{\alpha} = \frac{f^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'}{1 + f^2} = \mathrm{arctgf} + \mathrm{C}$$

$$\int f(ax+b) = \frac{Fax+b}{a} + C$$

Helyettesítéssel való primitív függvény meghatározás:
Ha az $f(x)$ függvénynek $F(x)$ függvény a primitív függvénye, akkor bármely olyan differenciálható $\varphi(t)$ függvény esetén, amelyre $f(\varphi(t))$ értelmezve van egy intervallumon, az $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ függvénynek $F(\varphi(t))$ primitív függvénye, azaz

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = F(\varphi(t)).$$

Ez a tétel az alapja a fenti integrálási típusoknak is.

Példa:

Határozza meg a következ integrált! $\int \left(\frac{2x-1}{3}\right)^5 dx = ?$

Megoldás:

Vezessük be az $u = \frac{2x-1}{3}$ helyettesítést. Ekkor $du = \frac{2}{3} dx$, azaz $dx = \frac{3}{2} du$. Így az alábbiakra jutunk:

$$\int \left(\frac{2x-1}{3}\right)^5 dx = \int u^5 \cdot \frac{3}{2} du = \frac{3}{2} \cdot \frac{u^6}{6} + C = \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(\frac{2x-1}{3}\right)^6}{6} + C$$

Példa:

Végezze el a következ integrálást! $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = ?$

Megoldás:

Vezessük be az $u = e^x$ helyettesítést. Ekkor $x = lnu \Rightarrow dx = \frac{1}{u} du$. Így az alábbiakra jutunk:

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{u}{1+u^2} \cdot \frac{1}{u} du = \mathrm{arctg} u + C = \mathrm{arctg} e^x + C$$

Példa:

Alkalmas helyettesítéssel határozza meg az integrál kifejezés értékét! $\int x \cdot \sqrt{3+2x}\, dx = ?$

Megoldás:

Vezessük be az $u = \sqrt{2x+3}$ helyettesítést. Ekkor

$u^2 = 2x+3 \Rightarrow x = \frac{u^2-3}{2} \Rightarrow dx = \frac{2u}{2} du = u \cdot du$ Átalakítva az integrandust:

$$\int x \cdot \sqrt{3+2x}\, dx = \int \frac{u^2-3}{2} \cdot u \cdot u \cdot du = \frac{1}{2} \int (u^4 - 3u^2)\, du = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{u^5}{5} - u^3\right) + C = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\left(\sqrt{2x+3}\right)^5}{5} - \left(\sqrt{2x+3}\right)^3\right) + C$$

Példa:

Alkalmas helyettesítéssel határozza meg az integrál kifejezés értékét! $\int \frac{3\, lnx}{x\sqrt{2+lnx}}\, dx = ?$

Megoldás:

Legyen $u = lnx$ helyettesítés. Ekkor $x = e^u \Rightarrow dx = e^u du$, átalakítva az integrandusban álló kifejezést:

$\int \frac{3\, lnx}{x\sqrt{2+lnx}}\, dx = \int \frac{3\, u}{e^u\sqrt{2+u}} e^u du = \int 3\, u\cdot(2+u)^{-\frac{1}{2}}\, du =*$ Parciális integrálással folytatva:

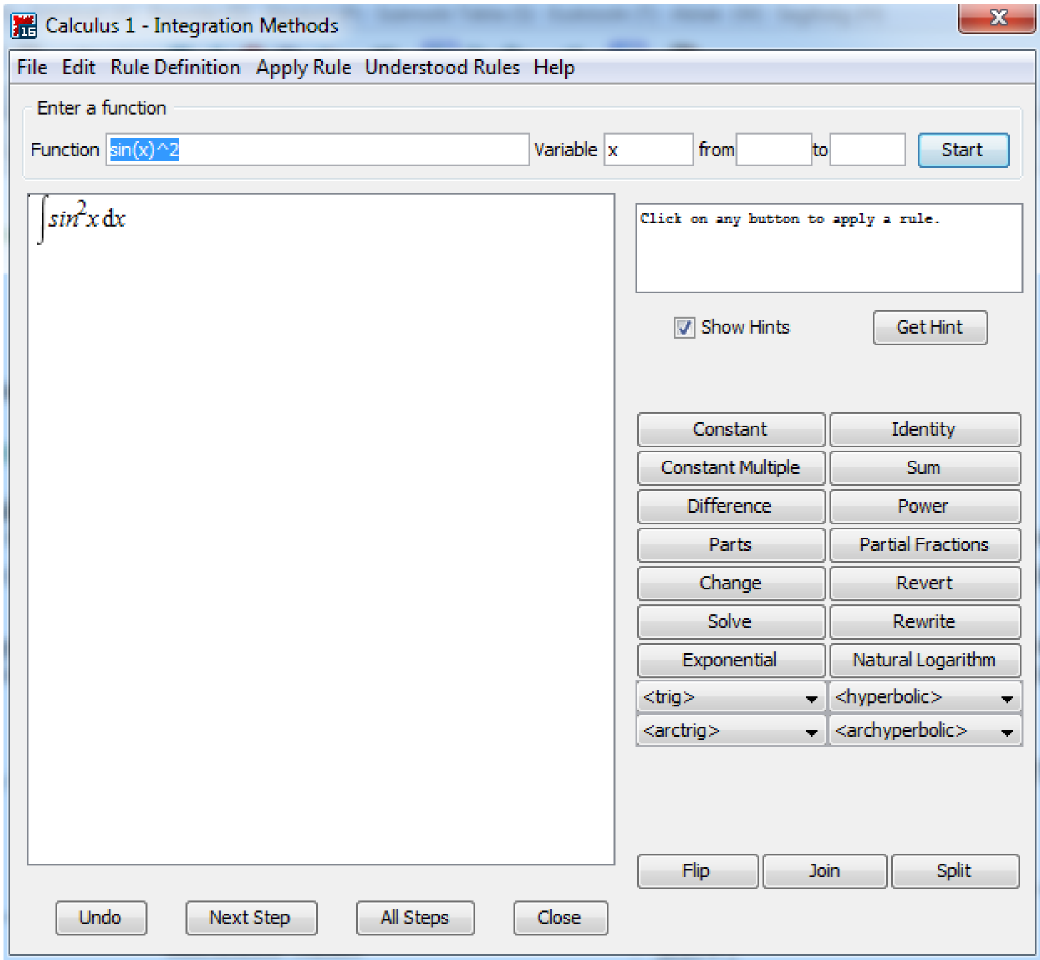
$g = 3\, u \quad f' = (2+u)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g' = 3 \;\; f = \frac{(2+u)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2(2+u)^{\frac{1}{2}}$ választással:

$$*= 3\, u\cdot 2(2+u)^{-\frac{1}{2}} - \int 2(2+u)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3\, du = 6\, u\cdot(2+u)^{-\frac{1}{2}} - 6\cdot\frac{(2+u)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 6\, u\cdot(2+u)^{-\frac{1}{2}}$$

$$-4\cdot(2+u)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= 6\, lnx\cdot(2+lnx)^{-\frac{1}{2}} - 4\cdot(2+lnx)^{\frac{3}{2}} + C =$$

Maple gyakorló-ellenrz panel az integráláshoz:



Integrálás gyakorló

Határozott integrál

A határozott integrál:

Alapfogalmak:

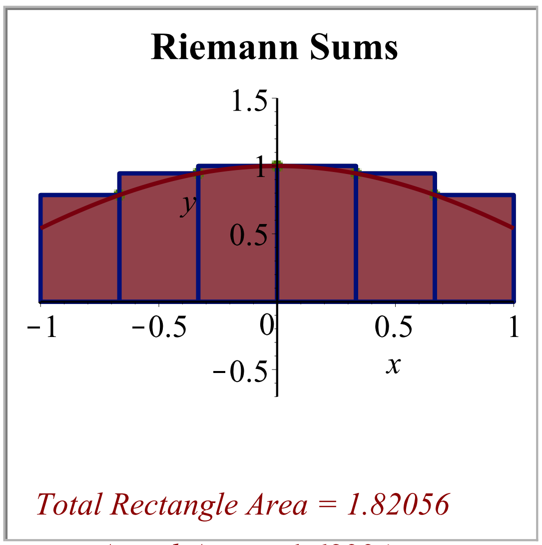
Az $\mathcal{I}$=[a;b] intervallum n-részes beosztásán egy olyan n+1 elem $\mathcal{B}_n = (x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$ pontrendszert értünk, amelyre $x_0 = a$, $x_n = b$, és $x_{i-1} < x_i$ (i=1,2,…,n) teljesül. Az x_i pontokat osztáspontoknak, az $\mathcal{I}_i = [x_{i-1}, x_i]$ intervallumot i-edik részintervallumnak nevezzük.

Az $f(x)$ függvényrl tegyük fel, hogy korlátos az [a;b]-on, így bármely részintervallumán létezik a függvényértékeinek infimuma és suprémuma is. Ezeket így jelöljük: $m_i = \inf_{x \in \mathcal{I}_i} f(x)$ és $M_i = \sup_{x \in \mathcal{I}_i} f(x)$.

Ezek segítségével képezzük az függvénynek az $\mathcal{I}$=[a;b] intervallum $\mathcal{B}_n = (x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$

beosztásához tartozó alsó ill. fels integrálközelít összegét: $\underline{s} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$ ill.

$\overline{s} = M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$



Actual Area = 1.68294

Upper Lower Left Right Midpoint

$y(x) =$ cos(x)

domain = −1 1

range = −0.5 1.5

$n =$ 0 5 10 15 20

Example = Example1

Riemann-féle közelít összeg: $\sigma = \sigma(f, \mathcal{B}, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ alakú összeg, ahol $\xi_i \in \mathcal{I}_i$.

A beosztás finomításán azt értjük, hogy újabb osztáspontokat veszünk hozzá.

Tételek:

1. A beosztás finomításakor az alsó összegek nem csökkennek, a fels összegek nem növekednek.
2. Bármely beosztáshoz tartozó alsó összeg nem-nagyobb bármely másik beosztáshoz tartozó fels összegnél.

Darboux-féle alsó ill. fels integrálon értjük az alsó összegek fels határát ill. a fels összegek alsó határát.

Tétel:

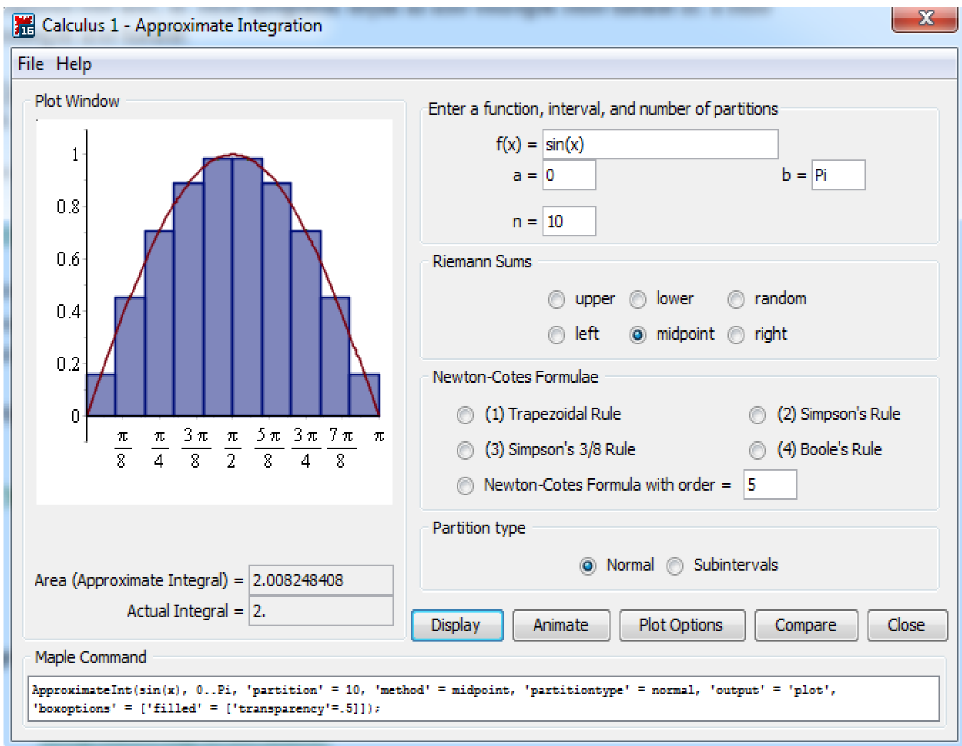
A Darboux-féle alsó integrál nem nagyobb a Darboux-féle fels integrálnál; és ha $m \le f(x) \le M$, akkor $m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M \cdot (b-a)$.

Riemann-integrál- definíciója:

A korlátos $f(x)$ függvényt az [a;b] véges intervallumon Riemann-szerint integrálhatónak nevezzük, ha a Darboux-féle alsóintegrálja egyenl a Darboux-féle fels integráljával, és ezt a közös értéket nevezzük az $f(x)$ függvény [a;b] véges intervallumon vett Riemann-integráljának. Jelölés:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

RIEMANN-KÖZELÍT ÖSSZEGEK ANIMÁCIÓVAL



Riemann-közelít összegek animációval

Integrálhatósági kritériumok

Integrálhatósági kritériumok:

Definíció: Egy $f(x)$ függvény $\mathcal{B}$ beosztáshoz tartozó oszcillációs összegén értjük a következ összeget: $o(f, \mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \overline{s}(f, \mathcal{B}) - \underline{s}(f, \mathcal{B})$. A definícióból következik, hogy bármely beosztás esetén az oszcillációs összeg nemnegatív.

Oszcillációs-kritérium:

Az [a;b] véges intervallumon korlátos $f(x)$ függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható, ha bármely pozitív ε-hoz megadható olyan $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\varepsilon)$, hogy $o(f, \mathcal{B}) < \varepsilon$.

Tételek:

1. Ha az $f(x)$ függvény korlátos és monoton az [a;b] véges intervallumon, akkor Riemann-szerint integrálható.
2. Ha az $f(x)$ függvény folytonos a véges [a;b] intervallumon, akkor integrálható.
3. Ha az $f(x)$ függvény korlátos az [a;b] véges intervallumon és annak bármely részintervallumán integrálható, akkor -on is integrálható.

Szükséges és elegend kritérium:

Ha az $f(x)$ függvény korlátos az [a;b] véges intervallumon, akkor ahhoz, hogy integrálható legyen, szükséges és elegend, hogy a Riemann-féle közelít összegek konvergáljanak a közbüls helyek bármely választása esetén, ha a beosztások finomsága tart nullához.

A határozott integrál tulajdonságai:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Ha az $f(x)$ függvény integrálható az [a;b] véges intervallumon, akkor ezen intervallum bármely részintervallumán is integrálható.
- Ha az $f(x)$ függvény integrálható az [a;b] véges intervallumon és $a < c < b$, akkor $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, azaz integrálási tartomány szerint additív.
- Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények integrálhatóak az [a;b] véges intervallumon, akkor összegük, különbségük, szorzatuk is integrálható, továbbá ha $m \leq g(x)$, $m \neq 0$ akkor $\frac{1}{g(x)}$ is integrálható.
- Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények integrálhatóak az [a;b] véges intervallumon és $g(x)$ jeltartó és $m \leq |g(x)|$, $m \neq 0$ akkor $\frac{f(x)}{g(x)}$ is integrálható [a;b] -on.
- Ha a korlátos $f(x)$ függvény integrálható az [a;b] véges intervallumon, akkor $|f(x)|$ is

integrálható és $\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$

Az integrálszámítás els középérték tétele:

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények integrálhatóak az [a;b] véges intervallumon és $g(x)$ jeltartó is ezen, akkor létezik olyan μ valós szám, amelyre $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\ \mathrm{d}x = \mu\cdot\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$ és $\inf_{x\in[a;b]} f(x) \le \mu \le \sup_{x\in[a;b]} f(x)$.

Következmény:

Ha az $f(x)$ folytonos az [a;b] véges intervallumon, akkor van olyan ξ az [a;b] -ban, amelyre $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a)$.

Az integrálfüggvény

Integrálfüggvény:

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény integrálható az [a;b] véges intervallumon. Mint láttuk, akkor ezen intervallum bármely részintervallumán is integrálható $f(x)$, és így bármely x∈[a;b] esetén létezik az $\int_a^x f(x)\ dx$ integrál is. Jelöljük az integrál értékét mint a fels határ függvényét $F(x)$-szel, azaz legyen $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$, és ezt a függvényt az $f(x)$ függvény integrálfüggvényének nevezzük.

Tétel:

Legyen az $f(x)$ korlátos függvény integrálható az [a;b] véges intervallumon és legyen $F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. Az $F(x)$ függvény az [a;b] minden bels pontjában folytonos (a végpontokban jobbról illetve balról), és minden olyan x pontjában, ahol $f(x)$ folytonos, az $F(x)$ függvény differenciálható és $F'(x) = f(x)$.