8. Newton-Leibniz formula. Területszámítás. Forgástestek térfogata. Függvény átlaga, súlypont.

Az integrálás alkalmazásai

Határozott inegrál

Newton-Leibniz-formula

Newton-Leibniz formula tétele:

Ha az $f(x)$ függvény korlátos és folytonos az]a;b[nyitott intervallumon, a $\Phi(x)$ függvény az $f(x)$ függvénynek ezen az intervallumon primitív függvénye, továbbá $\Phi(x)$ a zárt [a;b] intervallumon folytonos, akkor $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Példa:

Határozza meg a kifejezés értékét! $\int_{-1}^{4} (6 - x^3)\,dx = ?$

Megoldás:

$$\int_{-1}^{4} (6 - x^3)\,dx = \left[6x - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{4} = \left(6 \cdot 4 - \frac{4^4}{4}\right) - \left(6 \cdot (-1) - \frac{(-1)^4}{4}\right) = -40 - (-6,25) = -33,75$$

Definíció:

Az [a;b] intervallumon értelmezett, nemnegatív, integrálható $f(x)$ függvény görbéje alatti területet (pontosabban az x –tengely, az x=a és x=b egyenesek, valamint az y=f(x) görbe által közrezárt területet) az $f(x)$ függvénynek ezen az intervallumon vett integráljával definiáljuk.

$$T = \int_a^b f(x)\,dx$$

Függvénygörbék által közrezárt területet, a görbék alatti területek különbségeként tudjuk meghatározni.

Példa:

Mennyi az a paraméter értéke, ha

$$\int_a^8 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \frac{45}{4}\,\mathbf{?}$$

Megoldás:

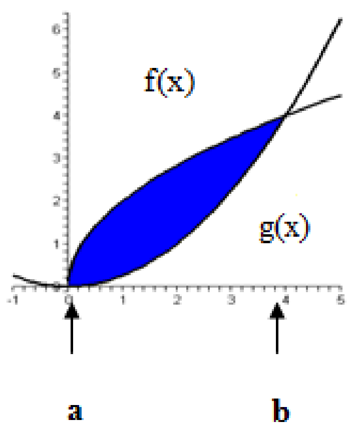
$$\int_a^8 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \int_a^8 x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right]_a^8 = \left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_a^8 = \frac{8^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{\left(2^3\right)^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{2^4 - a^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{16 - a^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Rightarrow$$

$$\frac{16 - a^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{45}{4} \Rightarrow \frac{3\cdot\left(16 - a^{\frac{4}{3}}\right)}{4} = \frac{45}{4} \Rightarrow 16 - a^{\frac{4}{3}} = 15 \Rightarrow a^{\frac{4}{3}} = 1 \Rightarrow a = 1$$

Függvénygörbék közti terület

Függvénygörbék által közrezárt területet, a görbék alatti területek különbségeként tudjuk meghatározni.



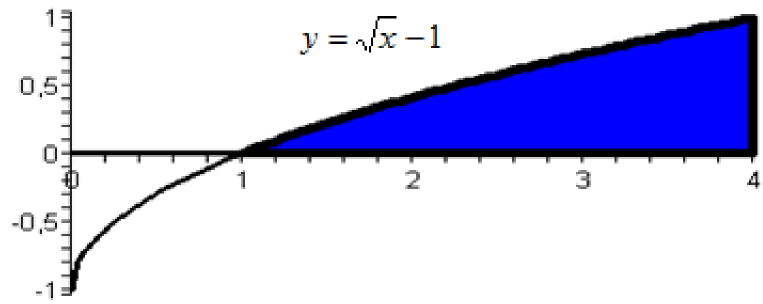
Lépései:

- metszéspontok meghatározása-ezek lesznek az integrálási tartomány végpontjai
- a függvények ábrázolásával vagy más módon megállapítjuk, hogy melyik függvény van a másik felett
- a két függvény különbségét a meghatározott tartományon integráljuk

$$T=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$ ("felsbl az alsó")

Példa:

Határozza meg az ábrán színessel jelölt terület nagyságát!

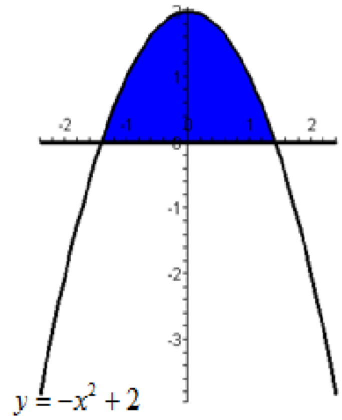


Megoldás:
Megkeressük az alsó integrálási határt, ami jelen esetben a függvény zérushelye.
$\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$
A meghatározandó terület nagyságát (a függvénygörbe alatti területet) integrálással határozzuk meg.

$$T=\int_1^4 (\sqrt{x}-1)\,\mathrm{d}x=\int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-x\right]_1^4=\left[\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}-x\right]_1^4=\left(\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}-4\right)$$
$$-\left(\frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}}-1\right)=$$
$$=\left(\frac{2}{3}\cdot(2^2)^{\frac{3}{2}}-4\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)=\left(\frac{2}{3}\cdot 8-4\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{3}-\frac{12}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

Példa:

Határozza meg az ábrán színezett terület nagyságát!



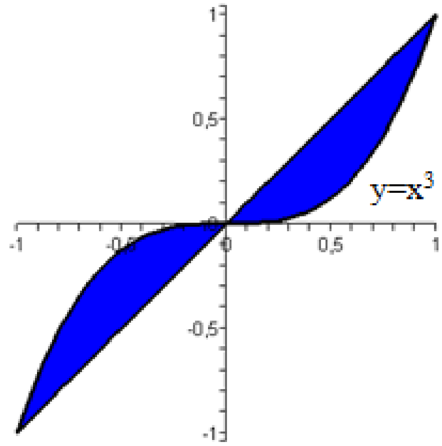
Megoldás:
A kérdéses területet a függvénygörbe alatti terület határozza meg, amely a tanultak szerint a függvény határozott integráljával egyezik meg az adott intervallumon. Meghatározzuk az integrálási határokat, melyek éppen a függvény zérus helyeivel egyenlk a feladatban. A zérus helyek: $-x^2+2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$. Ezek után a terület meghatározása:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-x^2+2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \left(-\frac{\sqrt{2}^3}{3}+2\sqrt{2}\right)-\left(-\frac{(-\sqrt{2})^3}{3}+2\cdot(-\sqrt{2})\right) =$$

$$= \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}\right)-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-2\sqrt{2}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}+4\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

Példa:

Számítsa ki az ábrán színessel jelölt terület nagyságát!



Megoldás:

Az els negyed beli területet határozzuk meg, majd kétszerezzük, mert a III. negyed beli terület ugyanakkora.

Az y=x egyenes az I. negyedben az x tengellyel háromszöget zár be, melynek területe:

$$T_\Delta = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

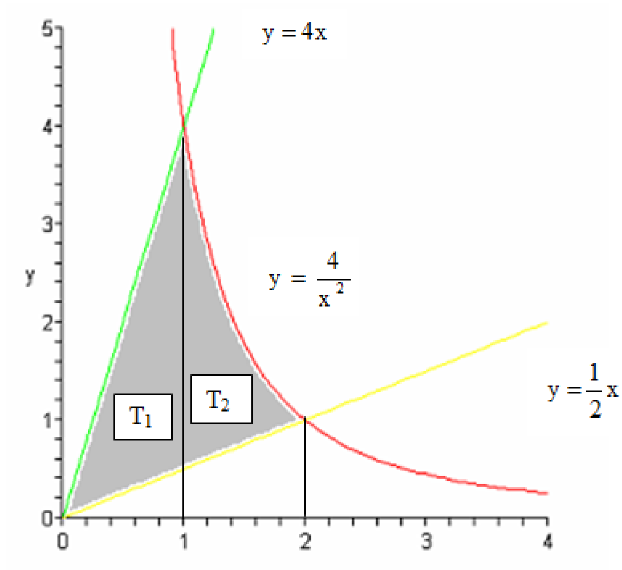
$$\int_0^1 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$T = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

Tehát a kérdezett terület nagysága fél terület egység.

Példa:

Mennyi az ábrán satírozott terület?



Megoldás:
Célszer az integrálási tartományt több részre bontanunk, így az egyes részeken tudjuk alkalmazni a megoldási útmutatót.

$$T_1=\int_0^1\left(4\,x-\frac{1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{7}{2}x\right)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{7}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}-0=\frac{7}{4}$$

$$T_2=\int_1^2\left(\frac{4}{x^2}-\frac{1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left(4\,x^2-\frac{1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x=\left[4\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\left[-\frac{4}{x}-\frac{x^2}{4}\right]_1^2=\left(-\frac{4}{2}\right.$$

$$\left.-\frac{2^2}{4}\right)-\left(-\frac{4}{1}-\frac{1^2}{4}\right)=$$

$$=-3-\left(-\frac{17}{4}\right)=\frac{5}{4}$$

$$T=T_1+T_2=\frac{7}{4}+\frac{5}{4}=\frac{12}{4}=3$$

Tehát a kérdéses terület 3 területegység.

Függvény átlaga

Definíció: Függvény átlaga vagy integrálközép: $\overline{f}(x)=\dfrac{\int_a^b f(x)\;dx}{b-a}$

Példa:
Mennyi az $f(x)=\sqrt{x+1}$ függvény átlaga az $3\le x\le 8$ intervallumban?

Megoldás:

$$\overline{f}(x)=\frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b-a}=\frac{\int_3^8\sqrt{x+1}\ \mathrm{d}x}{8-3}=\frac{1}{5}\cdot\int_3^8(x+1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_3^8=\frac{2}{15}\cdot\left(9^{\frac{3}{2}}\right.$$

$$\left.-4^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{15}\cdot(27-8)=\frac{38}{15}$$

Példa:
Melyik kifejezés számértéke a nagyobb?
$\int_{-1}^{2}\left(6-x^3\right)\,dx$ vagy a $f(x)=2x+3$ függvény átlaga az [1;4] intervallumon?

Megoldás:

$$\int_{-1}^{2}\left(6-x^3\right)\,dx=\left[6x-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2}=\left(6\cdot2-\frac{2^4}{4}\right)-\left(6\cdot(-1)-\frac{(-1)^4}{4}\right)=8-(-6,25)$$

$$=14,25$$

A kérdéses függvény átlagának kiszámítása:

$$\overline{f}(x)=\frac{\int_a^b f(x)\ dx}{b-a}=\frac{\int_1^4(2x+3)\ dx}{4-1}=\frac{1}{3}\cdot\left[x^2+3x\right]_1^4=\frac{1}{3}\cdot\left[\left(4^2+3\cdot4\right)-\left(1^2+3\cdot1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(28-4)=8$$

Tehát az els kifejezés értéke a nagyobb.

Görbe ívhossza

Definíció: $I:=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\ \mathrm{d}x$

Példa:

Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ grafikonjának ívhosszát az $0\le x\le2$ intervallumban.

Megoldás:

$$f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}\cdot(-1)}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\ \Rightarrow\ (f'(x))^2=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$$

$$(1+f'(x))^2=1+$$

$$\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}=\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}{4}$$

$$I:=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}{4}}\,dx=\int_0^2\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\,dx=\left[\frac{e^{x}+\frac{e^{-x}}{-1}}{2}\right]_0^2$$

$$=\left[\frac{e^{2}+\frac{e^{-2}}{-1}}{2}\right]-\left[\frac{e^{0}+\frac{e^{-0}}{-1}}{2}\right]=$$

$$=\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}$$

Példa:

Határozzuk meg az $f(x)=x^2$ grafikonjának ívhosszát az $0\le x\le 1$ intervallumban.

Megoldás:

$$f'(x)=2x \;\Rightarrow\; \left(f'(x)\right)^2=4x^2$$

$$I:=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=?$$

Mivel az integrandusban szerepl függvénynek nincs primitív függvénye, a helyettesítéses integrálás pedig nehéz, közelítleg határozzuk meg. Felírjuk a hatványsorát a 0 hely környezetében, és azzal helyettesítjük a függvényt.

	függvény	*behelyettesítés*
$f(x)$	$\sqrt{1+4x^2}$	$\sqrt{1+4\cdot 0^2}=1$
$f'(x)$	$\left(\sqrt{1+4x^2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left(1+4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 8x=4x\cdot\left(1+4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}\cdot\left(1+4\cdot 0^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 8\cdot 0=0$
$f''(x)$	$\left(4x\cdot\left(1+4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'=4\cdot\left(1+4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+8x\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+4x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)$	$4\cdot\left(1+4\cdot 0^2\right)^{-\frac{1}{2}}+8\cdot 0\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+4\cdot 0^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)=4$
$f'''(x)$	$\left(4\cdot\left(1+4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}+8x\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1+4x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\right)'=$	$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\left(1+4\cdot 0^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 8\cdot 0\cdot x+8\cdot\left(\left(\right.\right.$

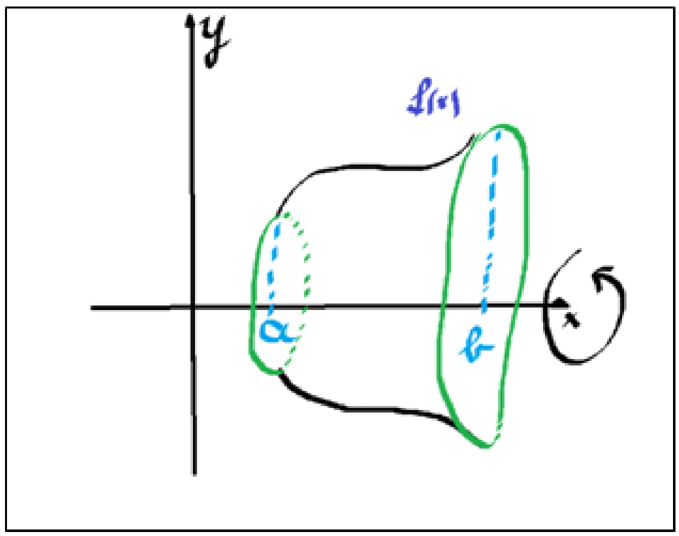
	$-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(1+4x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 8x+8\cdot\left(\left(-\frac{1}{2}\right)(1+4x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)+8x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(1+4x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 8x$	$-\frac{1}{2}\Big)(1+4\cdot 0^2)^{-\frac{3}{2}}\Big)+8\cdot 0\cdot\Big(-\frac{3}{2}\Big)(1+4\cdot 0^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 8\cdot 0=0$

$$T_3=1+\frac{0}{1!}\cdot x+\frac{4}{2!}\cdot x^2=1+2x^2$$

$$\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=\int_0^1 1+2x^2\,dx=\left[x+2\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^1=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

Forgástest térfogata, palástjának felszíne

Definíció:



Ha az $f(x)$ függvényt megforgatjuk az x-tengely körül az [a;b] intervallumon, akkor az így keletkez forgástest térfogatát így definiáljuk: $V=\int_a^b f^2(x)\,dx$.

Forgástest palástjának felszíne: $F=2\pi\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Példa:
Határozza meg a [4;9] intervallumon az *f(x)* függvény x tengely körüli megforgatással keletkez test térfogatát, ha $f(x)=\sqrt{2x+1}$!
Megoldás:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_4^9\left(\sqrt{2x+1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_4^9(2x+1)\,\mathrm{d}x=\pi[x^2+x]_4^9=\pi[(9^2+9)-(4^2+4)]=70\pi$$

Példa:

Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{x}$ grafikonja (parabola) x tengely körüli megforgatásával keletkező forgási paraboloid felszínét az $0\le x\le 2$ intervallumban.

Megoldás:

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$F=2\pi\int_0^2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^2\sqrt{x\cdot\left(1+\frac{1}{4x}\right)}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^2\sqrt{x+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^2\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$\left[2\pi\frac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\left[2\pi\frac{\left(2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]-\left[2\pi\frac{\left(0+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]=\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{4\pi}{3}\cdot\left(\frac{27}{8}-\frac{1}{8}\right)=$$

$$=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{26}{8}=\frac{26\pi}{6}=\frac{13\pi}{3}$$

Súlypont

A súlypont meghatározása:

Homogén görbeív elsrend nyomatéka x- illetve az y-tengelyre: $M_x=\int_{x=a}^{b} y\,ds$,

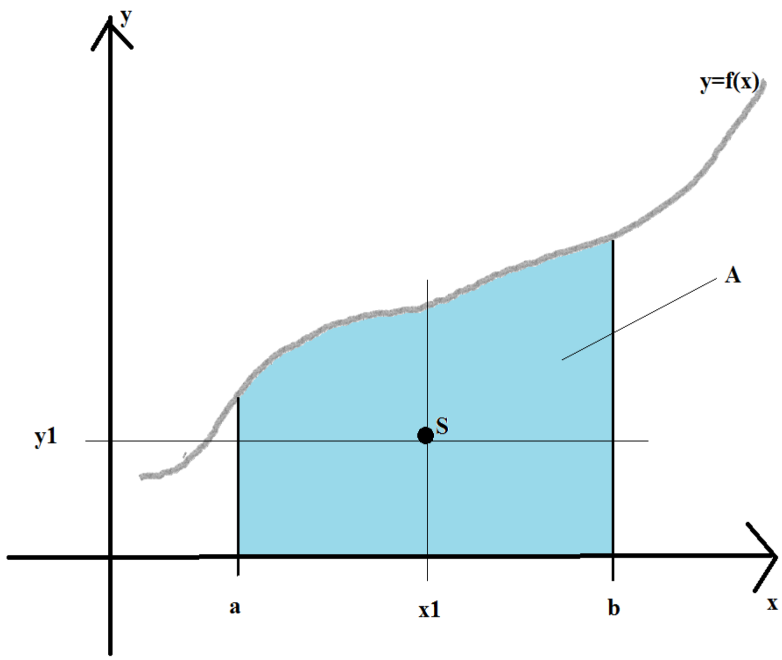
$$M_y=\int_{x=a}^{b} x\,ds$$

Súlypont: $x_s=\frac{M_y}{s}$; $y_s=\frac{M_x}{s}$, ahol

$$s = \int_{x=a}^{b} ds$$

Homogén síkrész elsrend nyomatéka az x- ill. y-tengelyre: $M_y = \int_a^b x \cdot f(x)\ dx$,

$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\ dx$

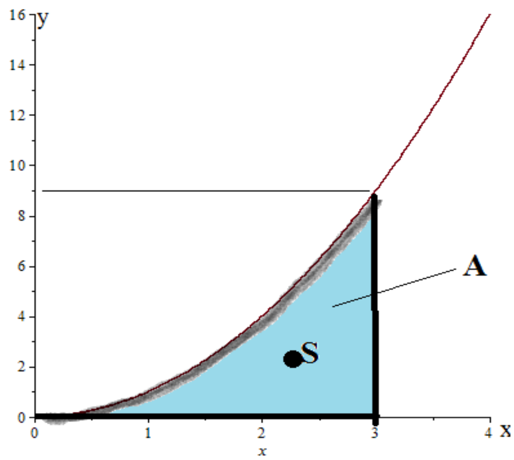


Súlypont: $x_s = \frac{M_y}{A}$, $y_s = \frac{M_x}{A}$

Példa:

Legyen $f(x) = x^2$; $0 \le x \le 3$, keressük az $\boldsymbol{A}$ terület síkidom súlypontjának koordinátáit!

Megoldás:



$$M_y = \int_0^3 x \cdot x^2 \, dx = \int_0^3 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^3 = \frac{3^4}{4} - 0 = \frac{81}{4}$$

$$M_x = \frac{1}{2} \cdot \int_0^3 (x^2)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int_0^3 (x^4) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^5}{5} - 0 = \frac{243}{10}$$

$$A = \int_0^3 x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - 0 = 9$$

$$x_s = \frac{M_y}{A} = \frac{\frac{81}{4}}{9} = \frac{9}{4} \qquad y_s = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{243}{10}}{9} = \frac{27}{10} \text{ , vagyis } S\left(\frac{9}{4}; \frac{27}{10} \right)$$