Analízis lépésrl - lépésre

"Én nem csak azért szeretem a matematikát, mert alkalmazni lehet a technikában, hanem fleg azért, mert szép. Mert játékos kedvét is belevitte az ember, és a legnagyobb játékra is képes: megfoghatóvá tudja tenni a végtelent. Végtelenségrl, ideákról hiteles mondanivalói vannak. És mégis annyira emberi, korántsem az a bizonyos kétszerkett: magán viseli az emberi alkotások soha le nem zárt jellegét."
Péter Rózsa (1905—1977)

Tapasztalatunk szerint a felsoktatásban tanuló hallgatók számára a matematikai tanulmányaik során az els féléves analízis a legnehezebben legyzhet akadály. Ennek oka véleményünk szerint az új oktatási szinthez való alkalmazkodáson kívül az, hogy a végtelen fogalma oly sokszor és különböz formában felbukkan a tananyagban. Az "Analízis lépésrl - lépésre" cím tananyag fleg a több éve - sokszor több évtizede - érettségizett levelez hallgatóknak szól, akiknek szükséges apró lépésekre bontani a matematikai gondolatmeneteket és fel kell idézni a rég elfeledett matematikai fogalmakat is. Reméljük, hogy ez a tananyag sok hallgató életét teszi könnyebbé, és ahogy Péter Rózsa matematikus szép bevezet idézetében olvashatjuk, sikerül megfoghatóvá tenni a végtelent.

Forrás: http://www.arch2o.com/infinity/

1. Sorozatok

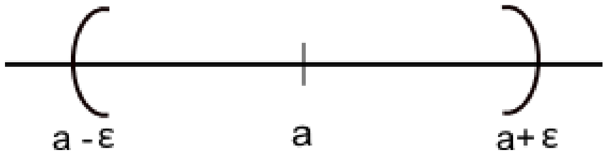
> restart :
> with(plots) :

Definíció, alapfogalmak

Konvergens, divergens sorozatok

A konvergencia és a divergencia a sorozatokkal kapcsolatos legfontosabb fogalmak.
Egyes sorozatok szép nagy, egyenletes léptekkel gyalogolnak a +, vagy a - végtelen felé, míg mások egy, vagy több pontba "srsödnek".
Vizsgáljuk elször ezeket a néhány pont köré besrsöd sorozatokat.
Hogy tudjuk ezt a szemléletes képet matematikailag pontosan megfogni?
Elször meghatározzuk a környezet fogalmát:

Környezet
Az „a” pont ε > 0 sugarú környezete az] a - ε, a + ε [nyílt intervallum, ahol ε tetszőleges pozitív, valós szám.

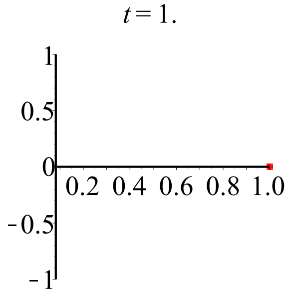
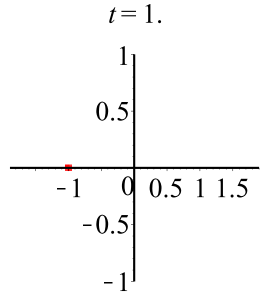
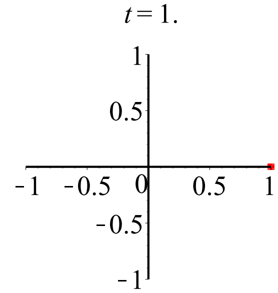


Torlódási pont

Az a_n sorozat torlódási pontja "a", ha a tetszőleges $\varepsilon > 0$ környezetén belül a sorozatnak végtelen (∞) sok eleme van.

Nagyon fontos kihangsúlyozni, hogy a definíció ***bármilyen kis ε sugarú környezet*** esetében igaz, és a kérdés ekkor érdekes igazán.

A következ táblázatban három sorozatot szemléltetünk, amelyeknek rendre 1, 2 illetve 3 torlódási pontjuk van. A szemléltetés nem egy egyszer ábra, hanem animáció. A képre kattintva megjelenik az animáció menü, ahol, ha az FPS: utáni számot kicsire 1, vagy 2 értékre állítjuk az animáció lassabb lesz, és jobban meg tudjuk figyelni a sorozatok viselkedését. A harmadik sorozat esetében úgy tnik, hogy csak három elemet ábrázolunk, ez azért látszik így, mert ez a három elem (-1, 0, 1) ismétldik, mindegyik végtelen sokszor.

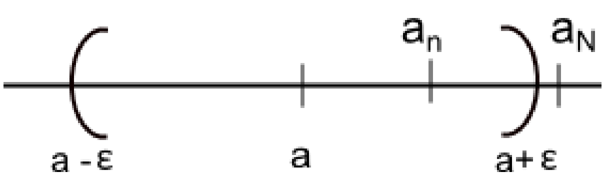
$a_n = \frac{1}{n}$ A sorozatnak egy torlódási pontja van és az a 0.  	$b_n = (-1)^n \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right)$ A sorozatnak két torlódási pontja van a 2 és a - 2.  	$c_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ A sorozatnak három torlódási pontja van a - 1, 0, és az 1. 

Konvergencia

Konvergens csak az a sorozat lehet, ami egyetlen pontba "srsödik", nem lehet több torlódási pontja.
Ekkor a torlódási pontot a sorozat határértékének nevezzük.

Ha a ***határérték*** bármilyen kicsi ε > 0 sugarú környezetét vesszük, a sorozatelemek egyszercsak beugranak ebbe a környezetbe és utána mindig benn is maradnak. Legyen a sorozatnak N db eleme a környezeten kívül. Ekkor az utolsó elem, ami még nincs a megadott környezetben az a_N.

Pontosabb ezt így fogalmazhatjuk meg: *a sorozat konvergens és határértéke "a", ha bármely pozitív ε - hoz található egy N (ε - tól függ)* ***küszöbindex****, hogy ha a sorozat N-nél nagyobb sorszámú elemeit tekintjük, akkor azok a határértékhez, "a"-hoz ε-nál közelebb lesznek.* (A konvergencia 1. definíciója)



Matematikai jelekkel így írható fel a definíció:
Az a_n *sorozat konvergens és határértéke „a”, ha*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)\ |a_n - a| < \varepsilon,\ ha\ n > N(\varepsilon)$$

(A jelek magyarázata: ∀, az ún. univerzális kvantor, jelentése minden, bármely
∃, egzisztenciális kvantor, jelentése van olyan, létezik)

A fenit megfogalmazással ekvivalens definíció a következ:
Az a_n *sorozat konvergens és határértéke „a”, ha „a” bármilyen „kis” ε > 0 sugarú,] a - ε, a + ε [környezetén kívül a sorozatnak véges sok eleme van.* (A konvergencia 2. definíciója)

Jelölések: $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, vagy $a_n \to a, ha\ n \to \infty$

Tekintsük újra az $a_n = \dfrac{n+2}{2n+3}$ sorozatot. Mi lehet a sorozat határértéke? A monotonitás vizsgálatnál kiszámoltuk a sorozat 1000. elemét, ami elég közel van az 1/2-hez. Nézzük meg, hogy az 1/2 jó lesz-e határértéknek? Legyen elször ε = 0,05. Számítsuk ki, hogy a sorozat hány eleme lesz az 1/2 ε = 0,05 sugarú környezetén kívül, illetve hányadik elemtl lesznek a sorozatelemek a megadott környezetben?

$$\left|\frac{n+2}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| < 0,05$$

$$\left|\frac{2\cdot(n+2)-(2\cdot n+3)}{2\cdot(2n+3)}\right| < 0,05$$

$$\left|\frac{2\cdot n+4-2\cdot n-3}{2\cdot(2n+3)}\right| < 0,05$$

$\left|\dfrac{1}{2\cdot(2n+3)}\right| < 0,05$ Az abszolútérték "elhagyható", mert pozitív számot tartalmaz.

$\dfrac{1}{2\cdot(2n+3)} < 0,05$ Vegyük mindkét oldal reciprokát, ekkor az egyenltlenség iránya megfordul.

$$2\cdot(2n+3) > 20$$

$$4n+6 > 20$$

$$4n > 14$$

$$n > 3,5$$

Tehát $n = 4, 5, ...$ adódott, vagyis a sorozatelemek a 4. elemtl kezdve vannak az 1/2 ε = 0,05 sugarú környezetében.
Ezért a küszöbindex N = 3, a sorozatnak csak az els három eleme van a megadott intervallumon kívül.
Általában N, a küszöbszám az egyenltlenség megoldása során kapott eredmény egész része.
Ugyanezt az egyenlőtlenséget ε = 0,01, ε = 0,001 esetében is oldjuk meg.
A kapott küszöbszámok rendre N = 23, N = 248.
Az alábbiakban a Maple utasításokkal történ számolást, majd a kapott eredmények szemléltetését láthatjuk.

> $e := |a(n) - 0.5|$# *Az egyenlőtlenség bal oldalának felírása*

$$e := \left| \frac{n+2}{2\,n+3} - 0.5 \right| \quad \mathbf{(1.2.1)}$$

> $f := simplify(e)$# *Az egyenlőtlenség bal oldalának leegyszerűsítése*

$$f := \frac{0.5000000000}{|2.\,n + 3.|} \quad \mathbf{(1.2.2)}$$

> $solve(\{\ e < 0.05\ \mathbf{and}\ n > 0\ \}, n)$;# *a megoldás 0,05-re*

$$\{3.500000000 < n\} \quad \mathbf{(1.2.3)}$$

> $solve(\{\ e < 0.01\ \mathbf{and}\ n > 0\ \}, n)$; *a megoldás* $0,\ 01 - re$

$$\{23.50000000 < n\} \quad \mathbf{(1.2.4)}$$

> $solve(\{\ e < 0.001\ \mathbf{and}\ n > 0\ \}, n)$; *a megoldás* $0,\ 001 - re$

$$\{248.5000000 < n\} \quad \mathbf{(1.2.5)}$$

> $küszöb := solve\left(\frac{0.5}{2 \cdot n + 3} - \epsilon\ , n \right)$;
Az egyenlőtlenség általános megoldása

$$küszöb := -\frac{0.2500000000\,(-1. + 6.\,\epsilon)}{\epsilon} \quad \mathbf{(1.2.6)}$$

> $érték := eval(küszöb, [\epsilon = 0.05])$

$$érték := 3.500000000 \quad \mathbf{(1.2.7)}$$

> $N := \mathrm{floor}(érték)$
a küszöbszám megadása 0,05 sugarú környezet esetén

$$N := 3 \quad \mathbf{(1.2.8)}$$

> $érték := eval(küszöb, [\epsilon = 0.01])$

$$érték := 23.50000000 \quad \mathbf{(1.2.9)}$$

> $N := \text{floor}(érték)$
#a küszöbszám megadása 0,01 sugarú környezet esetén

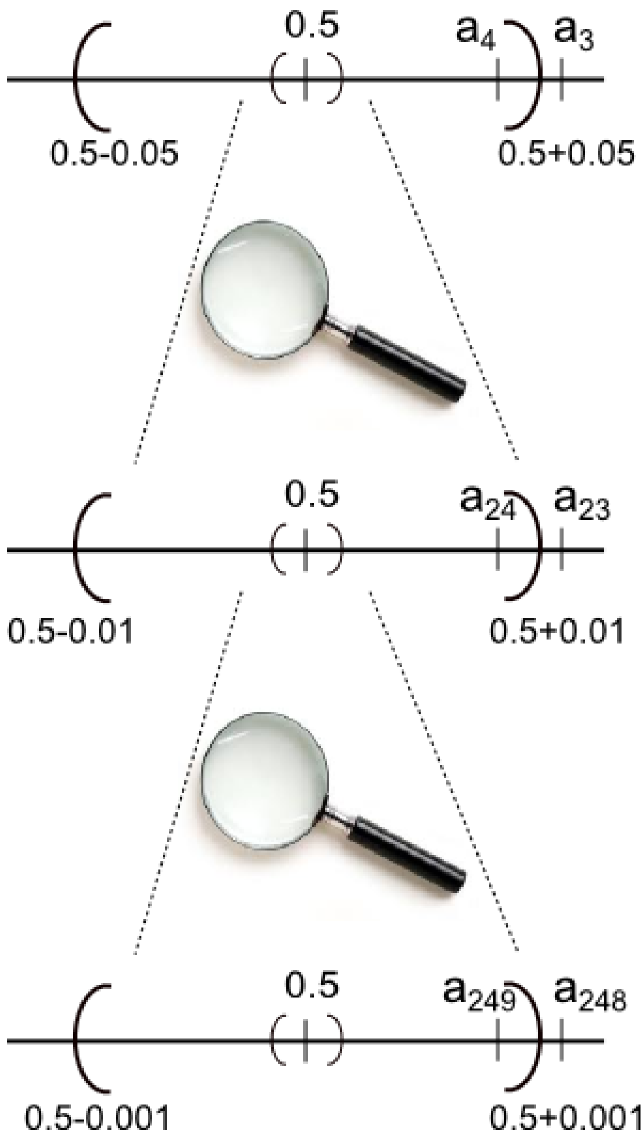
$$N := 23 \tag{1.2.10}$$

> $érték := eval(küszöb, [\epsilon = 0.001])$

$$érték := 248.5000000 \tag{1.2.11}$$

> $N := \text{floor}(érték)$
#a küszöbszám megadása 0,01 sugarú környezet esetén

$$N := 248 \tag{1.2.12}$$



A Maple limit utasítása megadja a sorozat határértékét:

> $limit\left(\dfrac{n+2}{2\cdot n+3}, n = infinity\right);$

$$\frac{1}{2} \tag{1.2.13}$$

Divergencia

A nem konvergens sorozatokat divergens sorozatoknak nevezzük.

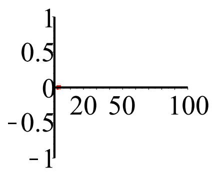
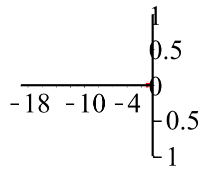
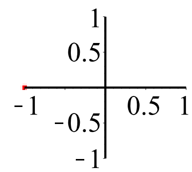
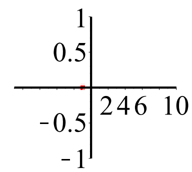
A divergens sorozatok is többfélék lehetnek.

A divergens sorozatok típusai:
- + végtelenhez tartó sorozatok (→ + ∞)
- - végtelenhez tartó sorozatok (→ - ∞)
- oszcillálva ("ide-oda ugrálva") divergens sorozatok

Akkor tart a +∞-hez egy sorozat, ha bármilyen (nagy) M számot adunk meg, mindig található egy sorozatelem, ami ennél a számnál nagyobb lesz és onnantól kezdve az összes sorozatelem nagyobb lesz M-nél. Az utolsó elem, ami még nem nagyobb M-nél az N. elem.
Matematikai jelekkel leírva:
$a_n \rightarrow \infty$, ha $\forall\ M-hez\ \exists\ N$ úgy, hogy $a_n > M$, ha $n > N$

Akkor tart a -∞-hez egy sorozat, ha bármilyen M számot adunk meg, mindig található egy sorozatelem, ami ennél a számnál kisebb lesz és onnantól kezdve az összes sorozatelem kisebb lesz M-nél. Az utolsó elem, ami még nem kisebb M-nél az N. elem.
Matematikai jelekkel leírva:
$a_n \rightarrow \infty$, ha $\forall\ M-hez\ \exists\ N$ úgy, hogy $a_n > M$, ha $n > N$

Jelölés: $\lim_{n\rightarrow\infty} a_n = +\infty$ $\lim_{n\rightarrow\infty} a_n = -\infty$

$a_n = n^2$ $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ $t = 1.$ 	$b_n = -2 \cdot n + 1$ $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$ $t = 1.$ 	$c_n = (-1)^n$ oszcillálva divergens, korlátos sorozat $t = 1.$ 	$d_n = (-1)^n \cdot n$ oszcillálva divergens, nem korlátos sorozat $t = 1.$ 

Mit mond a Maple limit utasítása divergens sorozatok esetén?

> *limit*$(n^2, n = infinity)$;*#* $+\infty$*-hez tartó sorozat*

$$\infty \tag{1.2.14}$$

> *limit*$(-2 \cdot n + 1, n = infinity)$;*#-* ∞*-hez tartó sorozat*

$$-\infty \tag{1.2.15}$$

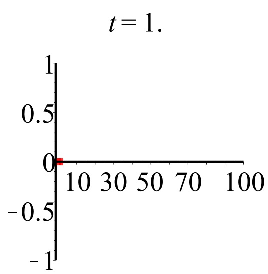
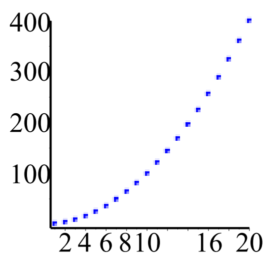
> *limit*$((-1)^n \cdot n, n = infinity)$;*#oszcillálva divergens sorozat*

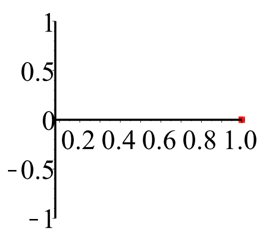
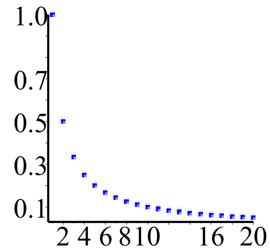
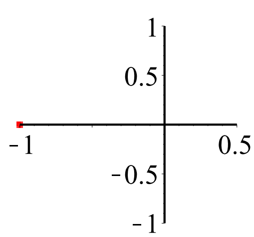
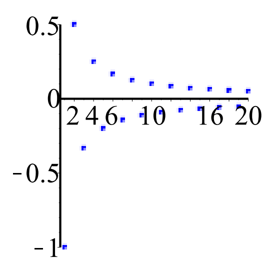
$$undefined \tag{1.2.16}$$

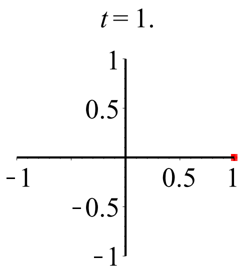
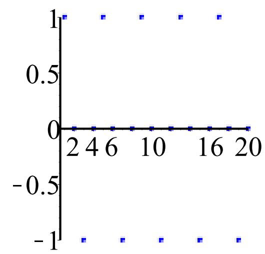
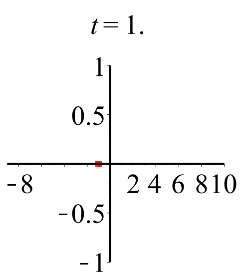
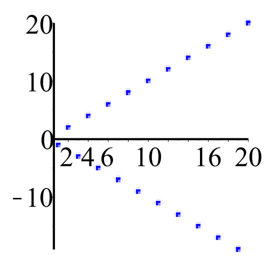
Néhány példa különböz tulajdonságú sorozatokra:

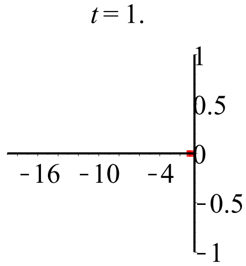
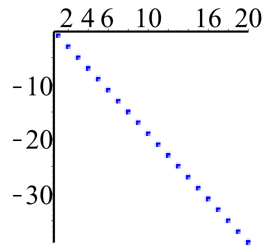
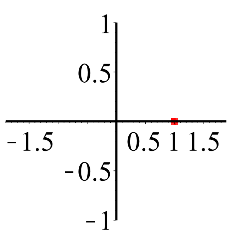
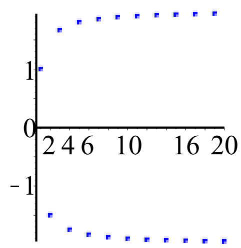
Sorozat	Első 5 elem	Korlátosság	Monotonitás	Torlódási pontok száma	Torlódási pontok	Konvergencia - Divergencia
$a_n = n^2$	1,4,9,16,25,…	alulról korlátos: k =1	monoton növekvő	0	--	divergens $a_n \to +\infty$
$b_n = \frac{1}{n}$	1,1/2,1/3,1/4,1/5, …	korlátos: K = 1, k = 0	monoton csökkenő	1	0	konvergens
$c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$	-1,1/2,-1/3,1/4,-1/5,…	korlátos: K=1/2, k = -1	--	1	0	konvergens
$d_n = \sin n \cdot \frac{\pi}{2}$	1,0,-1,0,1,…	korlátos: K=1, k = -1	--	3	-1, 0, 1	oszcillálva divergens
$e_n = (-1)^n \cdot n$	-1,2,-3,4,-5,…	nem korlátos	--	0	--	oszcillálva divergens
$f_n = -2n + 1$	-1,-3,-5, -7,-9,…	felülről korlátos: K = -1	monoton csökkenő	0	--	divergens $f_n \to -\infty$
$g_n = (-1)^{n+1} \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right)$	1,-3/2,5/3,-7/4,9/5,…	korlátos: K = 2, k = -2	--	2	-2, 2	oszcillálva divergens
$h_n = (-1)^n$	-1,1,-1,1,-1,…	korlátos: K = 1, k = -1	--	2	-1, 1	oszcillálva divergens

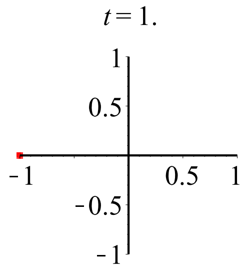
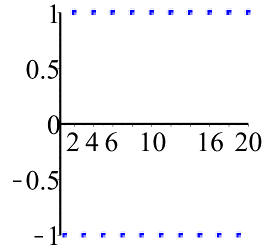
A fenti példákat nézzük meg Maple-ben szemléltetve is. Az els oszlopban számegyenesen ábrázoltuk a sorozatokat animálva, a második oszlopban koordináta - rendszerben ábrázoltunk, a harmadik oszlopban összefoglaltuk a legfontosabb tulajdonságokat:

$a_n = n^2$ 	$a_n = n^2$ 	$a_n = n^2$ Alulról korlátos k = 1 Monoton növekv Nincs torlódási pontja

		Divergens, $a_n \to +\infty$
$b_n = \frac{1}{n}$ 	$b_n = \frac{1}{n}$ 	$b_n = \frac{1}{n}$ Korlátos k = 0, K = 1 Monoton csökken Torlódási pontja 0 Konvergens Határértéke 0 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$
$c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ 	$c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ 	$c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ Korlátos k = -1, K = 1/2 Nem monoton Torlódási pontja 0 Konvergens Határértéke 0

		$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$
$d_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ 	$d_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ 	$d_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ Korlátos k = -1, K = 1 Nem monoton Torlódási pontjai:-1, 0, 1 Oszcillálva divergens
$e_n = (-1)^n \cdot n$ 	$e_n = (-1)^n \cdot n$ 	$e_n = (-1)^n \cdot n$ Nem korlátos Nem monoton Nincs torlódási pontja Oszcillálva divergens
$f_n = -2 \cdot n + 1$	$f_n = -2 \cdot n + 1$	$f_n = -2 \cdot n + 1$

		Felülrl korlátos K = -1 Monoton csökken Torlódási pontja nincs Divergens $f_n \to -\infty$
$g_n = (-1)^{n+1}\left(2 - \frac{1}{n}\right)$ 	$g_n = (-1)^{n+1}\left(2 - \frac{1}{n}\right)$ 	$g_n = (-1)^{n+1}\left(2 - \frac{1}{n}\right)$ Korlátos k = -2, K = 2 Nem monoton Torlódási pontjai: -2, 2 Oszcillálva divergens
$h_n = (-1)^n$	$h_n = (-1)^n$	$h_n = (-1)^n$

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>Korlátos
k = -1, K = 1
Nem monoton
Torlódási pontjai: -1, 1
Oszcillálva divergens</td>
</tr>
</table>

Észrevehetjük, hogy a példaként szerepl sorozatokban többször elfordul a $(-1)^n$ és a $(-1)^{n+1}$ kifejezés. n értékétl függen ezeknek a kifejezéseknek a számértéke, - 1, és +1 felváltva. Ezért szerepük a váltakozó eljel biztosítása. Ha $(-1)^n$-nel szorozzuk meg a képletet, akkor a sorozat els eleme negatív lesz, a második pozitív és így tovább, minden páratlan sorszámú elem negatív és minden páros sorszámú pozitív. Ha $(-1)^{n+1}$-nel szorozzuk meg a sorozat képletét, akkor a páratlan sorszámú elemek lesznek pozitív eljelek és a páros sorszámú elemek negatívok.

A divergens sorozatok határértékét az elbb már megnéztük a Maple limit utasításával. Most nézzük meg a táblázatban szerepl konvergens sorozatok határértékét:

> $b := limit\left(\frac{1}{n}, n = infinity\right);$

$$b := 0 \qquad \textbf{(1.2.17)}$$

> $b := limit\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n}, n = infinity\right);$

$$b := 0 \qquad \textbf{(1.2.18)}$$

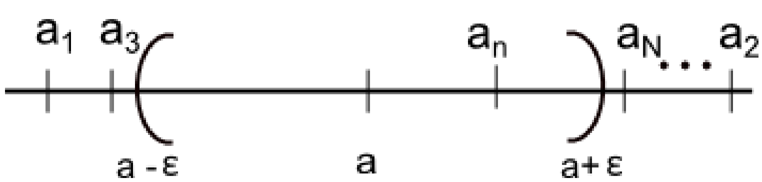
A fenti táblázatban szerepelnek monoton és nem monoton, korlátos és nem korlátos, konvergens és divergens sorozatok. Tegyünk rendet, vizsgáljuk meg, hogy ezek a sorozat tulajdonságok milyen kapcsolatban vannak egymással.

A konvergencia, a monotonitás és a korlátosság kapcsolata

Tétel: Ha az a_n sorozat konvergens, akkor korlátos.

A bizonyítás vázlatosan a következképpen szól. Ha egy sorozat konvergens, akkor a konvergencia 2. definíciója értelmében a határérték tetszőleges ε sugarú környezetén kívül a sorozatnak véges sok eleme van. Az 1. definíció azt mondja, hogy pontosan N db elem van az ε sugarú környezeten kívül. De a véges sok elem között mindig van legnagyobb és legkisebb, ami alkalmas fels ill. alsó korlátnak. Elfordulhat az is , hogy a sorozatnak a környezeten kívül egyáltalán nincs eleme, vagy csak a + ε - nál nagyobb, vagy a - ε -nál kisebb eleme nincs. Ezért a fels korlát K = maximum$\{a_1, a_2, ...a_N, a + \varepsilon\}$, az alsó korlát k = minimum$\{a_1, a_2, ...a_N, a + \varepsilon\}$.

Az ábra egy olyan esetet mutat, ahol a sorozatnak a N db ε sugarú környezeten kívüli elemei között van a + ε -nál nagyobb, és a - ε -nál kisebb eleme is.



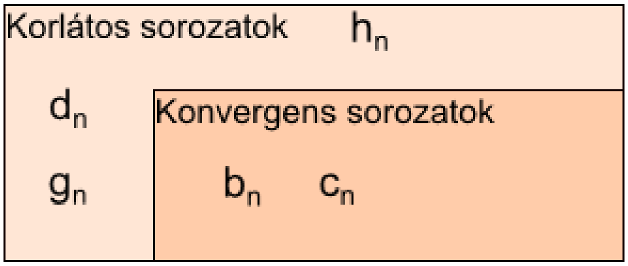
Ha az a_n sorozat korlátos, akkor nem szükségképpen konvergens. Ilyen sorozatok például a táblázat d_n, g_n, h_n sorozatai.

Ezt úgy is szoktuk fogalmazni, hogy ***a korlátosság a konvergencia szükséges, de nem elégséges feltétele***.

a_n konvergens $\Rightarrow a_n$ korlátos

a_n korlátos $\not\Rightarrow$ a_n konvergens

Halmaz ábrával:



Tudunk-e a konvergenciára elégséges feltételt megfogalmazni? Igen, ez a következ tétel, amit bizonyítás nélkül közlünk:

Tétel: Ha az a_n sorozat korlátos és monoton, akkor konvergens.

DE!

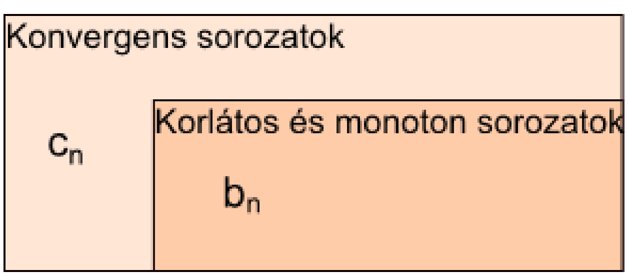
Ha az a_n sorozat konvergens, akkor nem szükségképpen korlátos és monoton. Ilyen például a c_n sorozat, ami konvergens, de nem monoton.

Ezért: ***A korlátosság és monotonitás a konvergencia elégséges, de nem szükséges feltétele.***

a_n konvergens $\not\Rightarrow$ a_n korlátos és monoton

a_n korlátos és monoton $\Rightarrow$ a_n konvergens

Halmaz ábrával:

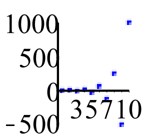
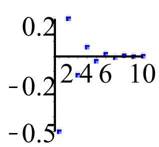
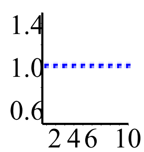
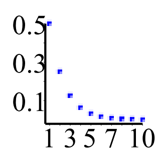
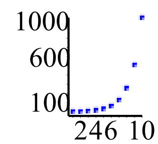


Nevezetes sorozatok határértékei

A következkben néhány nevezetes sorozat határértékét vizsgáljuk meg.
Az $\frac{1}{n}$ sorozat már többször elfordult, tudjuk, hogy határértéke 0.

1. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

A második nevezetes sorozat a q^n sorozat. Ez különböz alapok esetében másképpen viselkedik. Az alábbi táblázatban láthatjuk a lényegesen különböz eseteket.

$a_n = (-2)^n$	$b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$	$c_n = 1^n = 1$	$d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$e_n = 2^n$
				
> limit((−2)^n, n = infin undefined (1.3.1)	> limit((−1/2)^n 0 (1.3.2)	> limit(1, n = infi 1 (1.3.3)	> limit((1/2)^n, 0 (1.3.4)	> limit((2)^n, n = infin ∞ (1.3.5)

Összefoglalva:

2. $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$, $ha\ |q| < 1$

$\lim_{n \to \infty} q^n = 1$, $ha\ q = 1$

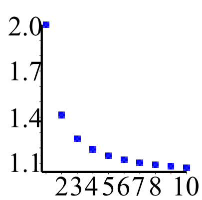
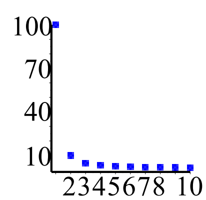
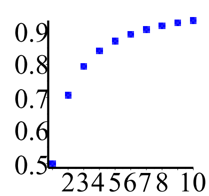
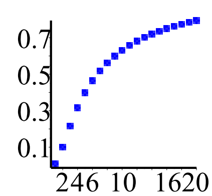
$$\lim_{n \to \infty} q^n = +\infty \text{ , ha } q > 1$$

Különben osszillálva divergens a sorozat

Ezután tekintsük az $\sqrt[n]{a}$ sorozatot, mivel n értéke páros és páratlan szám is lehet fontos az $a > 0$ kikötés (páros gyök alatt negatív szám nem állhat!).

(A sorozat határértékét különböz a értékekre úgy is megsejthetjük, hogy a számológépünkbe beírunk egy tetszleges pozitív számot, és elkezdjük "nyomogatni" a gyök billentyt. Ha sokszor megismételjük a gyökvonás mveletet, akármilyen nagy, vagy akármilyen kicsi számból is indultunk ki egyszer 1 érték adódik, ami azt jelenti, hogy a sorozat elemek a számológép pontosságánál már jobban megközelítik az 1-et.)

Szemléltessük ezt a sorozatot is néhány a érték esetében.

$a_n = \sqrt[n]{2}$	$b_n = \sqrt[n]{100}$	$c_n = \sqrt[n]{0.5}$	$d_n = \sqrt[n]{0.01}$
			
> $limit\left(\sqrt[n]{2}, n = infinity\right)$	> $limit\left(\sqrt[n]{100}, n = infinity\right)$	> $limit\left(\sqrt[n]{0.5}, n = infinity\right)$	> $limit\left(0.01^{1/n}, n =\right.$
1 **(1.3.6)**	1 **(1.3.7)**	$1.$ **(1.3.8)**	$1.$ **(1.3.9)**

Láthatjuk és bebizonyítható, hogy az $\sqrt[n]{a}$ sorozat határértéke minden pozitív n-re 1. Ha $n > 1$, akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenve tart 1-hez, ha $n < 1$, akkor szigorúan monoton növekedve, $n = 1$ esetén a sorozat természetesen a konstans 1 sorozat lesz.

3. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ **, *ahol*** $a > 0$

A következ nevezetes sorozat az $\sqrt[n]{n}$, láthatjuk, hogy itt a gyökkitevn kívül a gyök alatti mennyiség sem állandó, hanem a változó n érték. Mivel n mindig pozitív a gyök alatti mennyiségre nem kell kikötést tennünk, csak a gyökkitev miatt kell $n > 1$-re vizsgálnunk a sorozatot, mivel a legkisebb gyökkitev a 2, más szóval a négyzetgyök.

Elször kiszámítjuk a sorozat határértékét, majd megnézzük a századik elem közelít értékét 20 tizedes jegyig, végül ábrázoljuk a sorozat néhány elemét:

> $b := limit\left(\sqrt[n]{n}, n = infinity\right);$

$$b := 1 \tag{1.3.10}$$

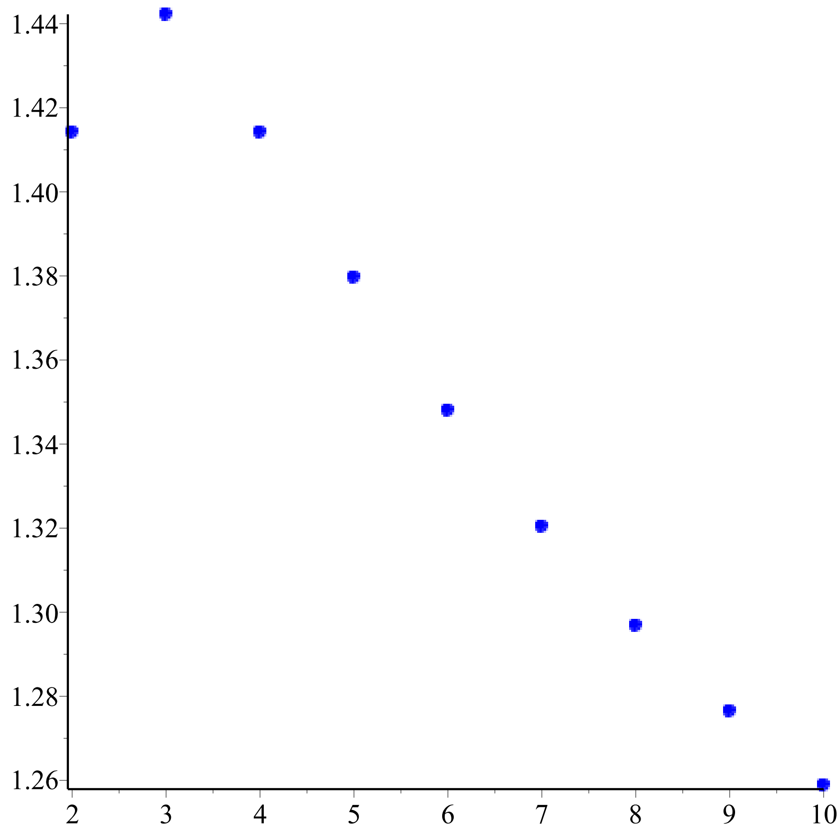
> $c := \sqrt[100]{100}$

$$c := 100^{\frac{1}{100}} \tag{1.3.11}$$

> $Közelítés := evalf(c, 20)$

$$Közelítés := 1.0471285480508995335 \tag{1.3.12}$$

> $\mathrm{pointplot}\left(\left\{\mathrm{seq}\left(\left[\mathrm{n}, \sqrt[n]{n}\right], \mathrm{n} = 2..10\right)\right\}, color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 12\right);$



A sorozat szigorúan monoton csökken az els két elemet kivéve, határértéke 1.

Tehát a 4. nevezetes sorozat határértéke:

4. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, *ahol* $n > 1$

A következ nevezetes sorozat egy olyan hatvány, ahol az alap és a kitev is változik. A pénzügyi számításokban is elfordul, ahogy egy további fejezetben látni fogjuk.

A sorozat: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Számoljuk ki a sorozat néhány elemét:

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2, \; a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25,$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2,37 \; \ldots \; a_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2,59$$

Ezután kiszámítjuk a Maple program segítségével a határértéket, a határérték közelít értékét 20 tizedes jegyig, majd ábrázoljuk a sorozat néhány elemét:

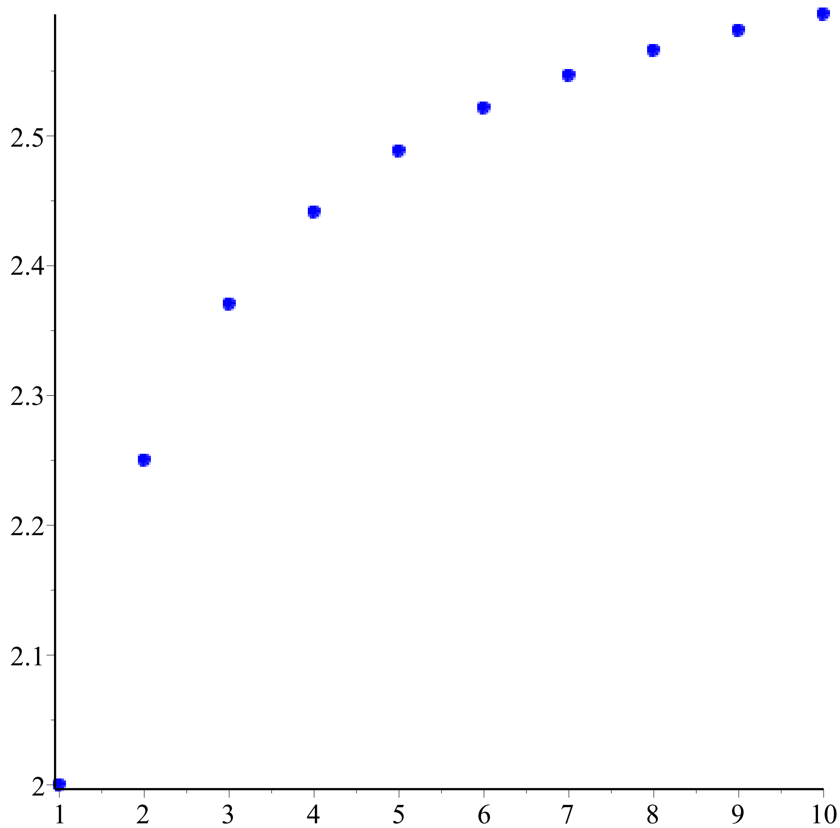
$$> b := limit\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n = infinity\right);$$

$$b := \mathrm{e} \qquad \textbf{(1.3.13)}$$

$$> közelítés := evalf(b, 20);$$

$$közelítés := 2.7182818284590452354 \qquad \textbf{(1.3.14)}$$

$$> \mathrm{pointplot}\left(\left\{\mathrm{seq}\left(\left[\mathrm{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right], \mathrm{n} = 1..10\right)\right\}, color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 12\right);$$



A határértékre most "nem szám" adódott, hanem azt írta ki a program, hogy e. Mi az e szám és mennyi az értéke? Az e egy irracionális szám (végtelen nem szakaszos tizedestört), ezért csak közelít értékét tudjuk megadni, ezt számolta ki a program 20 tizedesig. Milyen irracionális számokat ismerünk még? A π, a $\sqrt{2}$ biztosan mindenkinek eszébe jut.

5. $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Ha egy kicsit megváltoztatjuk a sorozatot és a zárójelben szerepl tört számlálója tetszleges való szám lesz a határérték így változik:

5. a) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$, ahol $k \in \mathbb{R}$

Mveletek konvergens sorozatokkal

Az elbbi részben öt nevezetes sorozat határértékével ismerkedtünk meg, de nyilvánvaló, hogy nem csak ennek az öt sorozatnak a határértékére vagyunk kíváncsiak. Hogyan tudjuk más sorozatok határértékeit meghatározni ezekre a nevezetes sorozatokra építve?
Erre ad választ a mveletek konvergens sorozatokkal fejezet.

Ha adott két konvergens sorozat a_n és b_n és ismerjük mindkett határértékét, vagyis tudjuk, hogy

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = b$,

akkor $a_n \pm b_n$, $c\cdot a_n$, $a_n \cdot b_n$, $\frac{a_n}{b_n}$, a_n^c, $\sqrt{a_n}$

sorozatok is konvergensek és

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

2. $\lim_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot a$

3. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a\cdot b$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, ahol $b \neq 0$ és $a \neq 0$

5. $\lim_{n\to\infty} a_n^c = a^c$, ahol c konstans és $a > 0$

5/a. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$, ahol $a > 0$

Mit jelent ez? Nézzünk meg néhány példát.

$\lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} = \lim_{n \to \infty} 3 \cdot \frac{1}{n} = 3 \cdot 0 = 0$ Mit alkalmaztunk? A 2. mveleti azonosságot: $c = 3, \quad a_n = \frac{1}{n}, \; a = 0$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$ Mit alkalmaztunk? A 3. mveleti azonosságot: $a_n = \frac{1}{n}, \; b_n = \frac{1}{n}, \; a = 0, b = 0$

A fenti két mvelet egy más utáni alkalmazásával azt kapjuk, hogy ha egy számot n tetszleges pozitív egész kitevs hatványával elosztjuk, akkor 0-hoz taró sorozatot kapunk, képletben: $\lim_{n \to \infty} \frac{c}{n^k} = 0$, ahol $c \in \mathbb{R}$, és $k \in \mathbb{N}, k > 0$
További részletesen kidolgozott feladatok a tananyag 2. fejezetében találhatók.

Kritikus határértékek, rendr-elv

Ez elz pontban megismert mveleti szabályok mindig alkalmazhatók sorozatok határértékének kiszámítására?
Sajnos nem, vannak ún. kritikus határértékek, ekkor mindig valami "trükköt " kell alkalmazni a határérték kiszámítására a mveleti szabályok egyszer alkalmazásával nem érünk célba.
Melyek ezek a kritikus határértékek? És mit értünk azalatt pontosan, hogy kritikus határérték?

Ha egy tört számlálója és nevezje is 0-hoz tart, hova tart a tört? Ez az egyik leggyakrabban elforduló kritikus határérték. A mveleti szabály azért sem alkalmazható, mert az említett hányadost nem tudjuk értelmezni, de ha megnézünk néhány ilyen példát láthatjuk, hogy a hányados sorozat határértéke bármi lehet.
Az els példában a számláló $\frac{1}{n}$, a nevez

$\frac{1}{n^2}$, mindkett (a számláló és a nevező is) 0-hoz tart, ha n tart ∞-hez. Ha felhasználjuk a törtek osztásának szabályát (a számlálót az osztó reciprokával szorozzuk), akkor n adódik, tehát a határérték ∞.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

A következ példában cseréljük meg a tört számlálóját és nevezjét. Ekkor is igaz, hogy a tört számlálója és nevezje is a 0-hoz tart, de az eredmény most $\frac{1}{n}$, aminek a határértéke 0.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

Végül nézzünk egy olyan példát, ahol a számláló és a nevez is 0-hoz tart, a hányados pedig egy véges számhoz, mondjuk 2-höz.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cdot\frac{n}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$

Láthatjuk, hogy mi is a probléma ezzel a határérték típussal, nem tudjuk megmondani, hogy mi lesz a hányados határértéke, mert a konkrét sorozatoktól függen bármi lehet. A többi kritikus határérték esetében is ez okozza a gondot, az eredmény lehet akármi, 0, ∞, tetszőleges valós szám.

Összefoglalva a kritikus határértékek:

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, akkor $\frac{a_n}{b_n}$ sorozat határértékérl nem tudunk semmit sem mondani.

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, akkor $\frac{a_n}{b_n}$ sorozat határértékérl nem tudunk semmit sem mondani.

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, akkor $a_n \cdot b_n$ sorozat határértékérl nem tudunk semmit sem mondani.

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, akkor $a_n - b_n$ sorozat határértékérl nem tudunk semmit sem mondani.

Ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ és $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, akkor $a_n^{b_n}$ sorozat határértékérl nem tudunk semmit sem mondani.

A következben még egy módszert ismertetünk egy sorozat határértékének kiszámítására, ez a

Rendr-elv

Adott három sorozat a_n, b_n *és* c_n, és tudjuk, hogy b_1 a_1 és c_1 között helyezkedik el a számegyenesen, vagyis $a_1 \leq b_1 \leq c_1$, hasonlóan $a_2 \leq b_2 \leq c_2$, és így tovább minden n-re. Továbbá a b_n-et közrefogó két sorozat a_n *és* c_n határértéke megegyezik, és ez a közös határérték *A*, akkor b_n sorozatnak "sincs más választása, kénytelen lesz" *A*-hoz konvergálni.

Matematikai jellésekkel:
Adott három sorozat a_n, b_n *és* c_n
Ha
$a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^+$ *−ra, ezenkívül* a_n *és* c_n *konvergensek, és*
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$*, akkor* b_n *is konvergens és* $\lim_{n\to\infty} b_n = A$

Egy sorozat határértékét rendr-elvvel meghatározni azért nem könny, mert kell keresnünk egy, a sorozatunknál elemenként nagyobb és egy, elemenként kisebb sorozatot és még annak is teljesülnie kell, hogy a két sorozatnak ugyanaz legyen a határértéke.

Nézzünk egy példát!

Számítsuk ki a $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}$ határértéket! A számláló és a nevező is ∞-hez tart, ez egy "kritikus" határérték.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1^n}{3^n}=\frac{1}{3^n}\le\frac{n}{3^n}<\frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Találtunk a sorozatunkhoz elemenként kisebb és nagyobb sorozatot. Most már csak azt kell megnézni, hogy mi a két közrefogó sorozat határértéke. Tudjuk a 2. nevezetes sorozat határértékét:

$\lim_{n\to\infty}q^n=0$, ha $|q|<1$, ezért

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$, így a keresett határérték $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$

Szemléltessük eredményünket, ábrázoljuk a három sorozat néhány elemét koordináta - rendszerben:

> $l:=\left[\left[n,\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]\$n=1..6\right];$

$$l:=\left[\left[1,\frac{1}{3}\right],\left[2,\frac{1}{9}\right],\left[3,\frac{1}{27}\right],\left[4,\frac{1}{81}\right],\left[5,\frac{1}{243}\right],\left[6,\frac{1}{729}\right]\right] \quad \textbf{(1.5.1)}$$

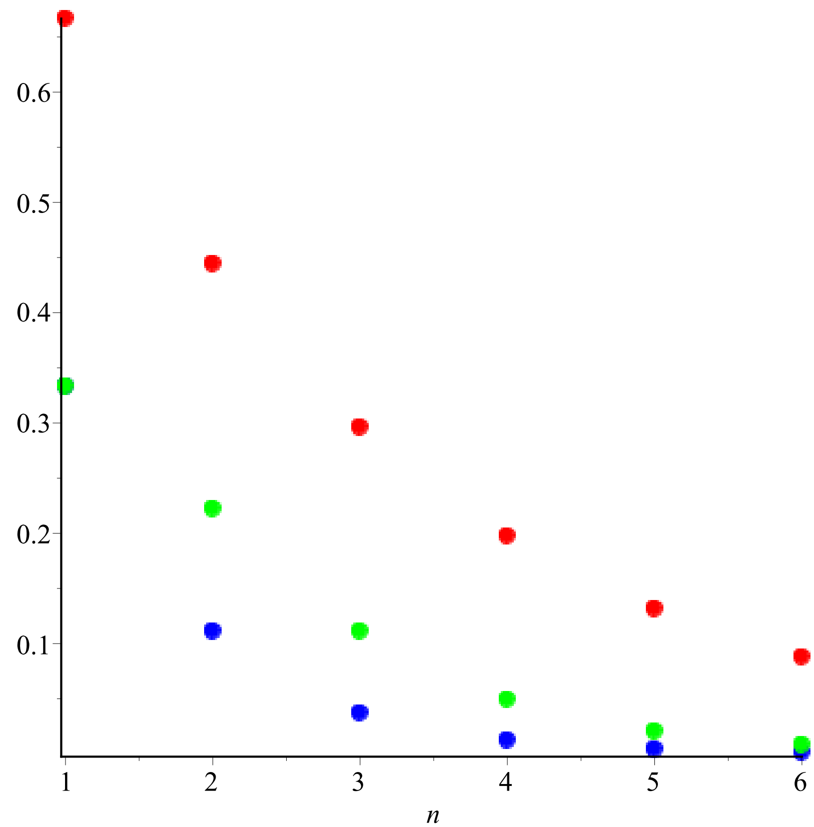
> $k:=\left[\left[n,\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\$n=1..6\right];$

$$k:=\left[\left[1,\frac{2}{3}\right],\left[2,\frac{4}{9}\right],\left[3,\frac{8}{27}\right],\left[4,\frac{16}{81}\right],\left[5,\frac{32}{243}\right],\left[6,\frac{64}{729}\right]\right] \quad \textbf{(1.5.2)}$$

> $m:=\left[\left[n,\frac{n}{3^n}\right]\$n=1..6\right];$

$$m:=\left[\left[1,\frac{1}{3}\right],\left[2,\frac{2}{9}\right],\left[3,\frac{1}{9}\right],\left[4,\frac{4}{81}\right],\left[5,\frac{5}{243}\right],\left[6,\frac{2}{243}\right]\right] \quad \textbf{(1.5.3)}$$

> $plot([l,k,m],n=1..6,style=point,symbol=solidcircle,color=[blue,red,green],symbolsize=16);$



Egy pénzügyi alkalmazás

Pénzügyi számítások során gyakran találkozunk sorozatokkal, de ez általában egy sorozat néhány értékének kiszámítása. Például a kamatoskamat számításnál, hitel törlesztrészletének, betét értékének meghatározásánál. Ezekben a feladatokban a sorozat néhány elemét, vagy néhány elemének összegét kell kiszámítanunk. Határértéket, a sorozat viselkedését a végtelenben általában nem vizsgáljuk, pedig a matematikai analízis szempontjából ez lenne az érdekes. Mégis találhatunk olyan pénzügyi példát, ahol a határérték számításra is szükségünk van.

Az 5. és 5a. nevezetes sorozat „pénzügyes" háttere:

„Az e talán nem mindenkinek tűnik annyira „természetesnek". Nevét

onnan kapta, hogy többek között olyan alapvet életfolyamatok modellezésében is találkozhatunk vele, mint a növekedés és a fogyás. Nem is beszélve arról a szintén alapvet dologról, amely (Erdst leszámítva) gyakran foglalkoztatja az embereket – nevezetesen a pénzről. Az e központi szerepet játszik a kamatos kamat számításánál. Tegyük fel, hogy 1 dollárt teszünk egy olyan bankba, ami 100% tkésített kamatot ígér egy évre. Egy másik pénzintézet a tkésítést fél évre vállalja. Utóbbi esetben jobban járunk, mivel a hat hónap letelte után a befektetett összeg 50%-ának megfelel kamatot kapunk, azaz 50 centet. Év végére persze már a kamat is kamatozik, így tizenkét hónap elteltével a teljes összeg 2 dollár 25 centre n. Na és mi van akkor, ha az évi 100%-os kamat negyedéves bontásban értend? Egy év után ebben az esetben már 2 dollár 44 centünk lesz. Ha pedig évente nyolcszor számolunk kamatot, 2 dollár 57 centet tehetünk zsebre. Végül mi történik, ha a túlságosan is nagylelk Erds Bank folyamatosan kínálja az évi 100% kamatot? Vajon Erdős szavaival élve „végtelenül gazdagok" lennénk-e 12 hónap elteltével? Nem egészen. Az összeg, amelyre ily módon szert tehetünk, nem lenne több, mint e – vagyis 2,718… - dollár."
Paul Hoffman: A PRÍM ember
ERDS PÁL kalandjai a matematika végtelenjében

Számoljunk végig egy olyan példát, ahol a kamat hozzáadása a tkéhez (tkésítés) nem év végén történik, hanem félévente, negyedévente, stb.:

Számoljuk ki 1 Ft felnövekedett értékét, ha az éves kamatláb 12% és a tkésítés arányos kamatlábakkal félévente, negyedévente, havonta, illetve naponta történik.

Félévente: $\left(1+\frac{0,12}{2}\right)^2 = 1,1236$, vagyis a növekedés 12,36%

Negyedévente: $\left(1+\frac{0,12}{4}\right)^4 = 1,1255$, a növekedés 12,55%

Havonta: azaz $\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{12} = 1,1268$, a növekedés 12,68%

Naponta: az arányos kamatláb ekkor $\frac{12}{365}$ \011

$1{,}000328767^{365} = 1{,}1270 \hat{=} 12{,}70\%$ $\left(1 + \frac{0,12}{365}\right)^{365} = 1,1270$, a növekedés 12,70%

Folytonos kamatozás esetén: $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m} = e^{i}$, ahol m az évi tkésítések száma, i pedig a kamat, $e^{0,12} = 1,12749685$, ami közelítleg 12,75%-os növekedés.

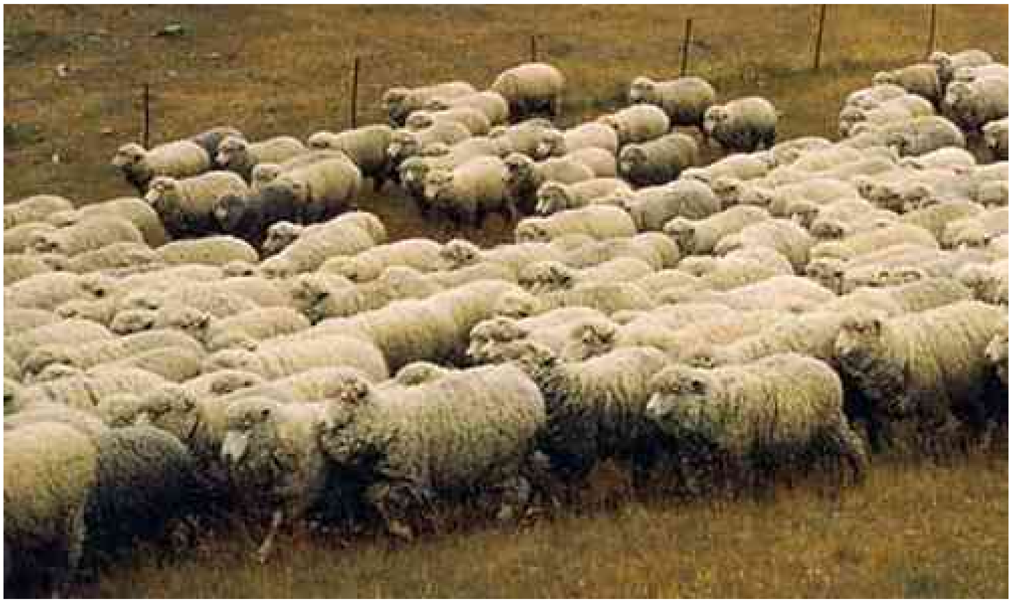
A folytonos kamatozásnál nyert érték a különböz kamatozási folyamatok fels határa.
Ha nem 1 Ft, hanem C_0; és nem egy év, hanem n szerepelt volna a példában, akkor az éves kamattényezt még egyszer n-dik hatványra kellene emelni és a C_0-lal szorozni.

$$\lim_{n \to \infty} C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n} = e^{i \cdot n}$$

Függelék -- Számhalmazok

A természetes számok halmaza

Az ember történelme során elször a természetes számok halmazával ismerkedett meg. Este beterelte az állatokat a karámba és közben megszámolta ket. Vajon ugyanannyi van, mit reggel?



Tehát a természetes számok halmaza 0, 1, 2, 3, 4, 5, …Jele: N, a naturalis latin szóból származik, ami természetest jelent, bár gondolhatunk a natur angol szóra is. Az N els, vagy középs szárát általában duplán szokták megrajzolni.
A 0 számra érdemes külön kitérni, mert ez a középkorban sok vitát szült, az emberek nagyon nehezen tudták elfogadni. „A nulla semmi, és mégis megtízszerezi az eltte álló számot. Ez volt az, ami sehogy sem fért az emberek fejébe." (Forrás: B.L. van der Waerden, Egy tudomány ébredése Egyiptomi, babiloni és görög matematika Gondolat Budapest 1977)
Ha a természetes számokat szemléltetni akarjuk, elhelyezhetjük ket egy félegyenesen, különálló, diszkrét pontok, egymástól 1 távolságra.

Ha alapmveleteket (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) kezdünk végezni a természetes számokkal, észrevehetjük, hogy bármely két természetes szám összege és szorzata is természetes szám lesz, de ez nem igaz a kivonásra (pl. 3-5 kivonás eredmény nem természetes szám). Ezt a matematikusok úgy mondják, hogy a természetes számok halmaza zárt az összeadásra és a szorzásra nézve, de nem zárt a kivonásra

Az egész számok halmaza

Ha bevezetjük azokat a számokat, amiket két természetes szám különbségeként kaphatunk, eljutunk az egész számokhoz …-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3… Az egész számok halmazának jele: Z, a német Zahl szó kezdbetje. Az egész számok halmaza tartalmazza a természetes számokat, annak kibvítése, halmaz jelöléssel: . Ha szemléltetni szeretnénk az egész számokat, egy egyenest kell rajzolnunk, és azon lesznek egymástól 1 távolságra az egész számokat jelképez diszkrét pontok. Ha megvizsgáljuk a mveleteket az egész számok körében, akkor azt tapasztaljuk, hogy a természetes számoknál fennálló zártságot nem rontottuk el (tehát az egész számok halmaza zárt az összeadásra, szorzásra és a kivonásra nézve) és sikerült a kivonásra is zárttá tennünk a halmazt. De itt a 4. alapmvelet, az osztás. Sajnos az osztásra nézve nem zárt az egész számok halmaza, pl 2:7 nem egész.

Quentin Massys A pénzváltó és felesége (1514)
Olaj, fa, 71 x 68 cm
Louvre, Párizs.

A racionális számok halmaza

Bvítsük a halmazt újra. Vezessük be a két egész szám hányadosaként kapott számokat is. Így eljutunk a racionális számokhoz. A pontos definíció így szól : Racionális számok a p/q alakú számok, ahol p. q ∈

Z és $q \neq 0$.

De miért nem lehet, a nevez, más szóval az osztó 0? Ritkán tudják megválaszolni ezt a kérdést. Gondoljunk bele, hogy mit jelent az osztás, például nézzük a következőt: 35:7 = 5 , az osztás „próbája" a szorzás, ezért $5 \cdot 7 = 35$ *. Most alkalmazzuk ugyanezt a gondolatmenetet a 0-val való osztásra. 3:0 = ? , elször mondjuk legyen a kérdjel helyén 0, ekkor a „próbát" elvégezve* $0 \cdot 0 = 3$ *adódik, ami nyilvánvalóan hamis állítás. Ha a kérdjel helyére más számot írunk, akkor ez a más szám szorozva 0-val 3-mat kellene hogy adjon, ugye ez sohasem teljesülhet? Tehát sikerült megértenünk, hogy a 0-val való osztást kizárni a mveletek közül nem a matematikusok szrszálhasogatása, hanem ésszer döntés.*

A racionális számok jele Q. A hányados quotient angol szóból, vagy a latin quotiens hányszor szóból származik. Most már elmondhatjuk, hogy sikerült egy olyan számhalmazt találni, ami a 4 alapmveletre nézve (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) zárt. A racionális számok halmaza tartalmazza az egész számokat, annak kibvítése, halmaz jelöléssel: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ (! keresni jobb jelölést). Vajon van-e olyan mvelet, ami kivezet a racionális számok halmazából is?
Bizony van. A középiskolából általában a következ mondatok tnnek ismersnek. A $\sqrt{2}$ nem racionális szám, ezt általában bizonyítani is szokták. Vannak olyan pozitív egész számok, amelyek gyöke nem racionális, ezeket irracionális számoknak nevezzük. A π is irracionális szám. Hogy is van ez pontosan? Ahhoz, hogy a racionális és irracionális számok fogalmát teljesen rendbe tegyük, vizsgáljuk meg a számok tizedes tört alakját.

Hogyan kapjuk meg egy $\frac{p}{q}$ alakú közönséges tört tizedes tört alakját?
Úgy, hogy p-t (a számlálót) elosztjuk q-val (a nevezvel).
Nézzünk erre néhány példát:

$$\frac{3}{7} = 3 \div 7 = 0{,}\dot{4}28571\dot{4}$$

30
20
60
40
50
10
30

$$\frac{3}{25} = 3 \div 25 = 0{,}12$$

30
50
0

$$\frac{5}{6} = 5 \div 6 = 0{,}8\dot{3}\dot{3}$$

50
20
20

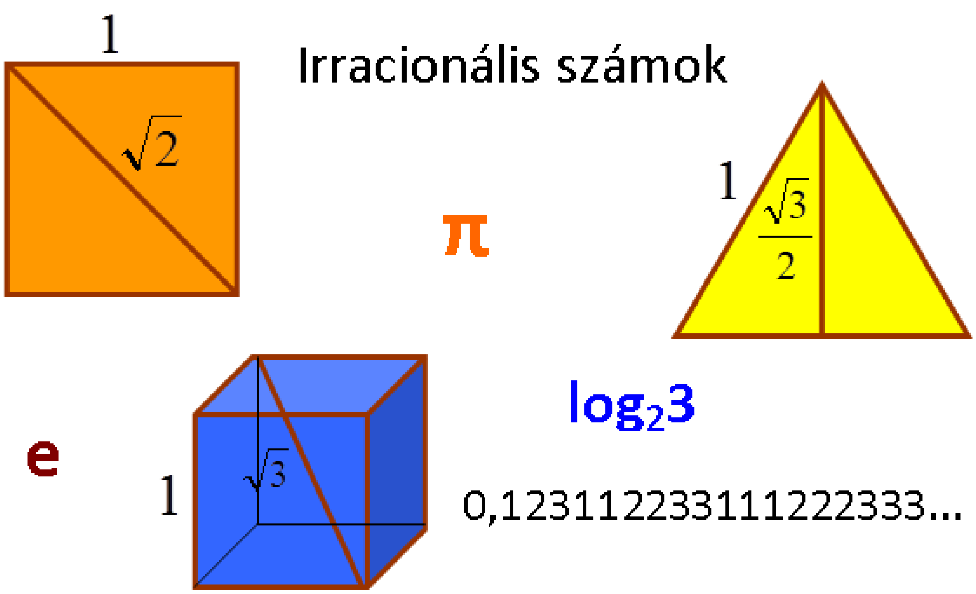
Mit mondhatunk a fenti példák alapján a racionális számok tizedes tört alakjáról? Ha az osztás során elfordul 0 maradék, a tizedes tört véges, ha nem fordul el 0 maradék, akkor végtelen. A második példában a 7-tel való osztásnál hány különböz maradék lehet? Legfeljebb 6 féle (1, 2, 3, 4, 5, 6), „legrosszabb" esetben a 6 maradék elő is fordul. Ezt látjuk a második osztásnál, ezért a kapott tizedes törtben a 6 hosszúságú szakasz (428571) ismétldik. A harmadik példánál a tizedes vessz után egy 8-as jön, majd az ismétld maradékok miatt csupa hármas következik, az ismétld szakasz itt 1 hosszúságú. Tehát a racionális számok tizedes tört alakja véges, vagy végtelen szakaszos tizedes tört. Azt is meg tudjuk mondani a nevez (osztó) ismeretében, hogy mikor lesz az osztás végeredmény véges, vagy végtelen szakaszos tizedes tört. Ha a nevez prímtényezs felbontásában csak 2-es és 5-ös számok szerepelnek, az osztás végeredmény véges, hiszen a tört bvítésével a nevezben 10 hatványt kaphatunk. Ha a nevez prímtényezs felbontásában csak 2-tl és 5-tl különböz számok vannak, akkor a tizedes tört végtelen, ún. tiszta szakaszos, ha a nevez felbontásában 2, vagy 5 valamelyike, vagy mindegyike elfordul, de más tényezk is vannak, akkor a tizedes tört

szintén végtelen, de ún. vegyes szakaszos. Azért vegyes szakaszos, mert nem csak az ismétld számok szerepelnek benne, hanem az elején ott van néhány más szám (kakukktojás) is. Ez látható a 3. példában.
Miért pont azok a számok lesznek véges tizedes törtek, amelyeket 2 és 5 hatványt tartalmazó nevezj törtekbl kapunk? Ennek az oka, hogy 10-es számrendszerben számolunk. A 3-as számrendszerben az $\frac{1}{3}$ és minden olyan szám, amelynek nevezjében csak 3 hatványok vannak, véges tizedes tört lesz.

Véges	$\frac{3}{25}=\frac{3}{5^2}=0{,}12$
Végtelen tiszta szakaszos	$\frac{3}{7}=0{,}\overline{428571}$
Végtelen vegyes szakaszos	$\frac{5}{6}=\frac{5}{2\cdot 3}=0{,}8\dot{3}$

Az irracionális számok
Tehát összefoglalva a racionális számok tizedes tört alakja véges, vagy végtelen szakaszos tizedes tört. El tudunk képzelni más tizedes törteket is? Igen, végtelen nem szakaszosakat, ezek lesznek az irracionális számok. Nézzünk egy példát: 0,1011001110001111000…..és így tovább. Mivel egyre hosszabb 0 és 1 sorozatot tartalmaz a tizedes tört, nem találunk benne ismétld szakaszt. A fenti példához nagyon sok hasonló tizedes törtet tudnánk alkotni, bár ezek szakaszt nem tartalmaznak, mégis valamilyen szabályosság szerint építettük fel ket. A $\sqrt{2}$, a π és a későbbiekben előforduló e szám is irracionális, de ezekben semmi szabályosság, mintázat nem fedezhet fel. Ezeket a számokat teljes egészében soha nem tudjuk megismerni, de az egyre gyorsabb számítógépek egyre több jegyüket tudják kiszámítani.
Az irracionális számok, különösképpen a π misztikája zeneszerzők, költk, írók fantáziáját is megmozgatta. Érdekes böngészés az Interneten, milyen műalkotások születtek a π-vel kapcsolatosan, hány jegye ismert?
Az irracionális számok jelölésére a Q*-ot vezették be. Az irracionális

számhalmaz a felsoroltak közül az egyetlen, ami nem fogható fel úgy, mint az elz számhalmazok bvítése. Az irracionális és a racionális számok halmazának nincs közös eleme, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^* = \emptyset$. Az ábrán néhány nevezetes geometriai példát is látunk, ahol a számolás eredményeként irracionális számok adódnak.



A valós számok halmaza
A racionális és irracionális számok összessége alkotja a valós számok halmazát. Matematikai jelölésekkel: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^* = \mathbb{R}\mathbb{Q}$. A valós számokat is felfoghatjuk úgy, mint számkör bvítést, nevezetesen a racionális számok halmazának kibvítését, hiszen tartalmazza azokat, halmaz jelöléssel: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. A valós számok halmazának jele $\mathbb{R}$ a latin realis valós, valóságos szóból. Tehát ha a valós számok halmazára gondolunk az összes létez tizedes törtet kell magunk elé képzelni.
Lehetne még folytatni a számkör bvítést? Tudnánk olyan mveletet mondani, ami a valós számok halmazában nem végezhet el? Igen, gondoljunk csak a másodfokú egyenletek megoldó képletére, ha a négyzetgyökjel alatt negatív szám állt nem tudtuk elvégezni a gyökvonást, azt mondtuk, hogy az egyenletnek nincs megoldása a valós

számok körében. A negatív számok négyzetgyökének valamiféle értelmezésével eljuthatunk a komplex számokhoz, ez a valós számok halmazának a bvítése, de ezzel most itt nem foglalkozunk.