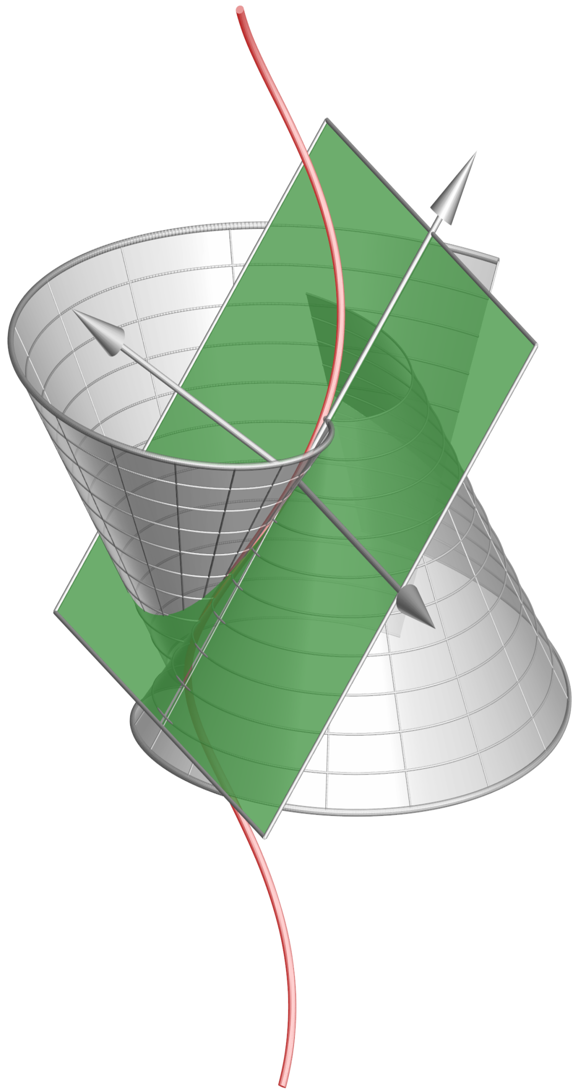
Feltétel nélküli szélsérték szükséges és elégséges feltétele. Érintsík.



Georg Glaeser: Tangent surface of a helix

Szélsérték

Fogalmak

Helyi szélsérték, lehet helyi minimum és helyi maximum
D. Az f (x, y) függvénynek az (a, b) helyen helyi minimuma van, ha (a, b) pontnak van olyan

környezete, ahol f(a, b) > f(x, y).
D. Az f (x, y) függvénynek az (a, b) helyen helyi maximuma van, ha (a, b) pontnak van olyan környezete, ahol f(a, b) <f(x, y).
Ha az f (x, y) kétváltozós függvénynek széls értéke van az (a, b) pontban, akkor helyi szélsértéke van az x = a helyen az f (x, b) egyváltozós függvénynek is, amelynek görbéje természetesen illeszkedik a felületre. Ezért az egyváltozós függvényeknél tanultak alapján a szélsérték létezésének szükséges feltétele $\frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = 0$. Hasonlóképpen helyi szélsértéke van az y = b helyen az f (a, y) egyváltozós függvénynek is. Ezért a szélsérték létezésének $\frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = 0$ is szükséges feltétele.

Szükséges feltétel

Tétel: Az f kétváltozós függvény (a, b) helyhez tartozó szélsértéke létezésének szükséges feltétele:

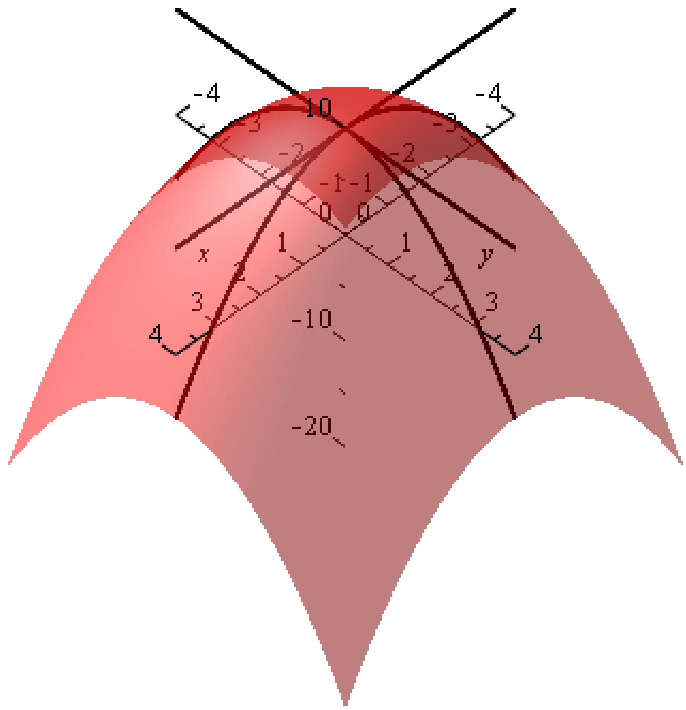
$\frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = 0$ és $\frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = 0$

Ezt a következképpen láthatjuk be. Ha f (x, y)-nak szélsértéke van (a, b)-ben, akkor g(x) = f (x, b)-nek is szélsértéke van x = a-ban, ezért g'(a) = 0 az egyváltozós függvényeknél tanultak alapján és mivel g'(a) = $\frac{\partial}{\partial x} f(a, b)$, így $\frac{\partial}{\partial x} f(a, b) = 0$. Hasonlóan h(y) = f (a, y)-nak is szélsértéke van b-ben, ezért $\frac{\partial}{\partial y} f(a, b) = 0$ adódik.

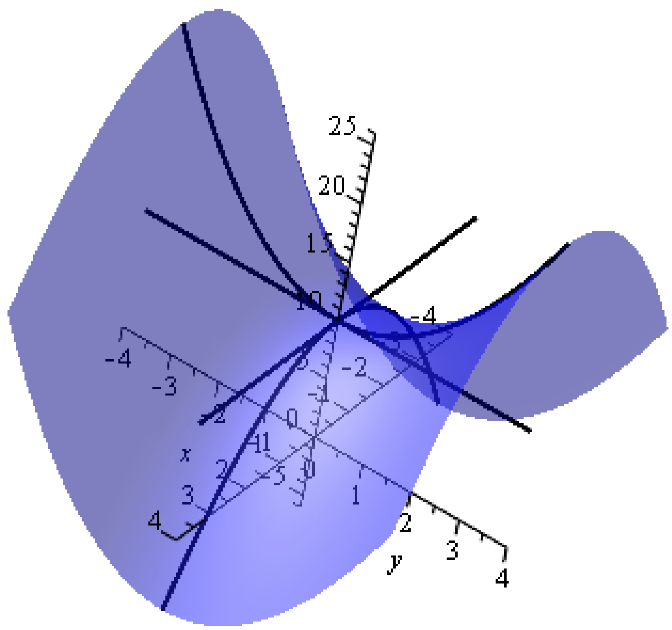
Tehát a függvénynek csak ott lehet szélsértéke, ahol az elsrend parciális deriváltjai zérussal egyenlk. A szüséges feltétel általában egy egyenletrendszer. Ha az egyenletrendszernek van megoldása, a kapott pont, vagy pontok még nem biztosan szélsértékek, ahhoz az elégséges feltételnek is teljesülnie kell. De abban biztosak lehetünk, hogy a kapott pontokon kívül más pontban helyi (lokális) szélsérték nem lehet.

A felület forgatásával szemléletesen az ábrán is látható, hogy mindkét parciális derivált 0, mert a parciális deriváltak az xy síkkal párhuzamosak a g(x) = f (x, b) és h(y) = f (a, y) görbék érinti.

```
> restart
> with(plots) :
> F := plot3d(-x^2-y^2 + 10, x=-4..4, y=-4..4, axes=normal, transparency=0.5, style
      =patchnogrid, color=red) :
  B := plot3d(10, x=-4..4, y=0..0) :
  C := plot3d(10, x=0..0, y=-4..4) :
  G := plot3d(-x^2-y^2 + 10, x=-4..4, y=0..0, color=blue) :
  H := plot3d(-x^2-y^2 + 10, x=0..0, y=-4..4, color=green) :
  display({F, B, C, G, H});
```



> $F := plot3d(-x^2 + y^2 + 10, x = -4..4, y = -4..4, axes = normal, transparency = 0.5, style = patchnogrid, color = blue)$:
$B := plot3d(10, x = -4..4, y = 0..0)$:
$C := plot3d(10, x = 0..0, y = -4..4)$:
$G := plot3d(-x^2 + y^2 + 10, x = -4..4, y = 0..0, color = blue)$:
$H := plot3d(-x^2 + y^2 + 10, x = 0..0, y = -4..4, color = green)$:
$display(\{F, B, C, G, H\})$;



A kék felület arra példa, hogy nem csak a helyi szélsérték esetén fordulhat el, hogy egy pontban mindkét parciális derivált 0 (a megfelel metszetgörbék érinti párhuzamosak az xy síkkal), hanem más esetben, úgynevezett nyeregpontoknál is. Ezért a szélsérték létezésének bizonyításához, a szükséges feltételen kívül elégséges feltételt is meg kell a késbbiekben fogalmaznunk.

A következ példák egyelre csak a szükséges feltételt vizsgálják, és a kapott eredményeket ábrázolva, szemléletünk alapján mondunk döntést a szélsérték létezésére.

Példa: Határozzuk meg, hogy a következ függvénynek hol lehet helyi szélsértéke!

$$f(x, y) = x^2 + x \cdot y + y^2 + 3 \cdot x - 3 \cdot y + 4$$

Elször határozzuk meg a két parciális deriváltat:

$$\frac{\partial}{\partial x} f = 2 \cdot x + y + 3 \qquad \frac{\partial}{\partial y} f = x + 2 \cdot y - 3$$

Oldjuk meg a következ egyenletrendszert:

$$(1) \quad 2 \cdot x + y + 3 = 0$$

$$(2) \quad x + 2 \cdot y - 3 = 0$$

Fejezzük ki x-et a (2) egyenletbl, majd helyettesítsük be az (1)-be.

$x=3-2\cdot y \rightarrow \quad 2\cdot(3-2\cdot y)+y+3=0 \rightarrow \quad 6-4\cdot y+y+3=0 \rightarrow \quad 9-3\cdot y=0 \quad \rightarrow$
$3\cdot y=9 \quad \rightarrow \quad y=3$

A kapott y értéket helyettesítsük be a (2) egyenlet azon alakjába, ahol kifejeztük y-t:
$x=3-2\cdot 3=-3$

Tehát a kapott pont a $(-3, 3)$ csak ebben a pontban lehet szélsértéke a függvénynek.

Ha van itt szélsérték, akkor ebben a pontban a függvény értéke:
$f(-3,3)=(-3)^2+(-3)\cdot 3+3^2+3\cdot(-3)-3\cdot 3+4=9-9+9-9-9+4=-5$

Most nézzük meg ugyanezt Maple-ben:

> $f(x,y) := x^2+x\cdot y+y^2+3\cdot x-3\cdot y+4$

$$f := (x,y) \rightarrow x^2+xy+y^2+3x-3y+4 \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

> $fx := diff(f(x,y),x)$#*f x szerinti parciális deriváltjának meghatározása*

$$fx := 2x+y+3 \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

> $fy := diff(f(x,y),y)$#*f y szerinti parciális deriváltjának meghatározása*

$$fy := x+2y-3 \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

> $gyokok := solve(\{fx=0, fy=0\}, [x,y])$#*Az egyenletrendszer megoldása*

$$gyokok := [[x=-3, y=3]] \qquad \textbf{(1.2.4)}$$

> $gyokok[1,1]$
#*Külön felírjuk az egyenletrendszer x-re kapott megoldását, hogy később tudjunk hivatkozni rá.*

$$x=-3 \qquad \textbf{(1.2.5)}$$

> $gyokok[1,2]$
#*Külön felírjuk az egyenletrendszer y-ra kapott megoldását, hogy később tudjunk hivatkozni rá.*

$$y=3 \qquad \textbf{(1.2.6)}$$

> $szelsoertek := eval(f(x,y), [gyokok[1,1], gyokok[1,2]])$
#*Kiszámítjuk a szélsőérték helyen a függvény értékét.*

$$szelsoertek := -5 \qquad \textbf{(1.2.7)}$$

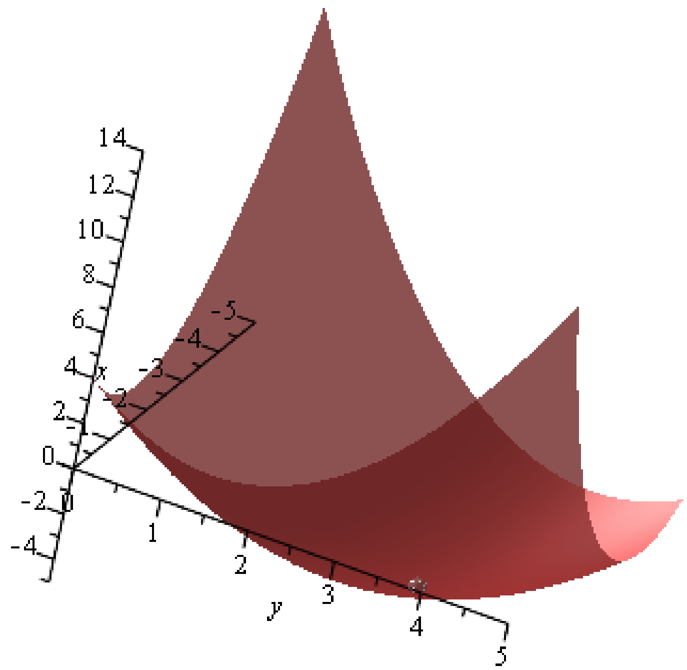
> *A := pointplot3d([−3, 3, −5], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = white);*

$$A := PLOT3D(...) \qquad \textbf{(1.2.8)}$$

> *B := plot3d(f(x, y), x = −5 ..0, y = 0 ..5, axes = normal, style = patchnogrid, color = orange, transparency = 0.5)*
#*Ábrázoljuk a felületet, a felület forgatásával szemléletesen ellenőrizzük megoldásunk helyességét.*

$$B := PLOT3D(...) \qquad \textbf{(1.2.9)}$$

> *display({A, B});*



> $g(x, y) := x^3 - y^3 - 2 \cdot x \cdot y + 6$

$$g := (x, y) \rightarrow x^3 - y^3 - 2\,x\,y + 6 \quad \textbf{(1.2.10)}$$

> $gx := diff(g(x, y), x)$

$$gx := 3\,x^2 - 2\,y \quad \textbf{(1.2.11)}$$

> $gy := diff(g(x, y), y);$

$$gy := -3\,y^2 - 2\,x \quad \textbf{(1.2.12)}$$

> $solve(\{gx = 0, gy = 0\}, [x, y])$

$$\left[[x = 0, y = 0], \left[x = -\frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}\right], \left[x = \frac{2}{3}\,RootOf(\_Z^2 - \_Z + 1), y = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\,RootOf(\_Z^2 - \_Z + 1)\right]\right] \quad \textbf{(1.2.13)}$$

> $A := pointplot3d([0, 0, 6], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = red);$

$$A := PLOT3D(\ldots) \quad \textbf{(1.2.14)}$$

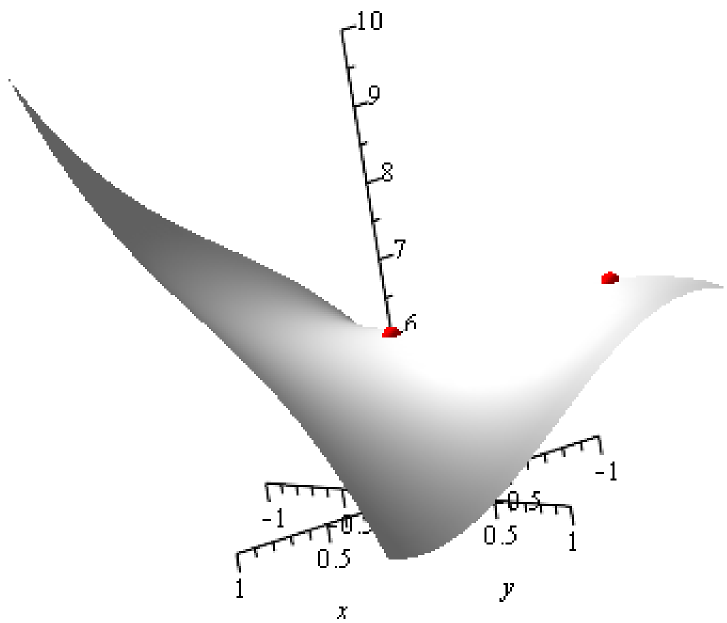
> $B := pointplot3d\left(\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{170}{27}\right], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = red\right);$

$$B := PLOT3D(\ldots) \quad \textbf{(1.2.15)}$$

> $C := plot3d(g(x, y), x = -1..1, y = -1..1, axes = normal, style = patchnogrid, color = grey)$

$$C := PLOT3D(\ldots) \qquad \textbf{(1.2.16)}$$

> $display(\{A, B, C\});$



Elégséges feltétel

Tétel: A helyi szélsérték létezésének elégséges feltétele, hogy a másodrend deriváltakból képezett $D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \right)^2 > 0$ kifejezés pozitív legyen, ha $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) > 0$ a függvénynek minimuma, ha $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) < 0$ a függvénynek maximuma van.
Ha D < 0 nincs szélsértéke a függvénynek, D = 0 esetén csak további vizsgálattal dönthet el a szélsérték létezése.

Határozzuk meg a következ függvények lokális szélsértékeit!

> $restart$

> $with(plots):$

```
> f(x, y) := 2·x·y − 5·x^2 − 2·y^2 + 4·x + 4·y − 4
```
$$f := (x, y) \rightarrow 2\,x\,y - 5\,x^2 - 2\,y^2 + 4\,x + 4\,y - 4 \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

```
> fx := diff(f(x, y), x)
```
$$fx := 2\,y - 10\,x + 4 \qquad \textbf{(1.3.2)}$$

```
> fy := diff(f(x, y), y)
```
$$fy := 2\,x - 4\,y + 4 \qquad \textbf{(1.3.3)}$$

```
> gyokok := solve({fx = 0, fy = 0}, [x, y])
```
$$gyokok := \left[\left[x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{3}\right]\right] \qquad \textbf{(1.3.4)}$$

```
> n := numelems(gyokok)
```
$$n := 1 \qquad \textbf{(1.3.5)}$$

```
> gyokok[1, 1]
```
$$x = \frac{2}{3} \qquad \textbf{(1.3.6)}$$

```
> gyokok[1, 2]
```
$$y = \frac{4}{3} \qquad \textbf{(1.3.7)}$$

```
> fxx := diff(fx, x)
```
$$fxx := -10 \qquad \textbf{(1.3.8)}$$

```
> fyy := diff(fy, y)
```
$$fyy := -4 \qquad \textbf{(1.3.9)}$$

```
> fxy := diff(fx, y)
```
$$fxy := 2 \qquad \textbf{(1.3.10)}$$

```
> d := fxx·fyy − (fxy)^2
```
$$d := 36 \qquad \textbf{(1.3.11)}$$

```
> if d > 0 then print(van szélsőérték, ); elif d < 0 then print(nincs szélsőérték); elif d = 0
      then print(más módszerrel kell eldönteni, hogy van − e szélsőérték); end if;
```
van szélsőérték **(1.3.12)**

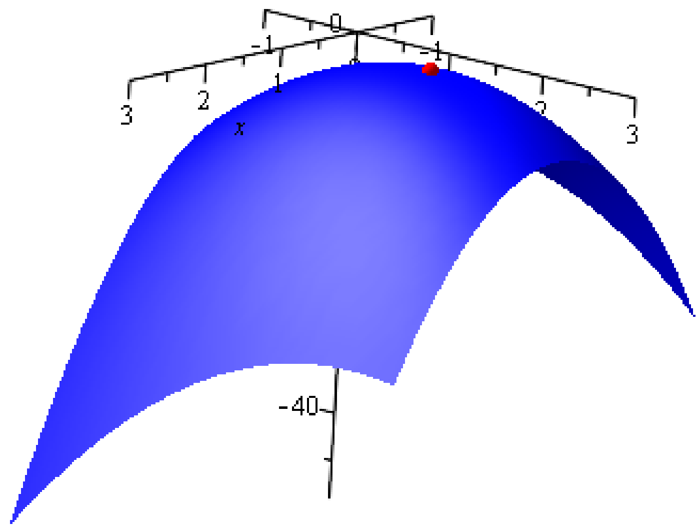
```
> szelsoertek := eval(f(x, y), [gyokok[1, 1], gyokok[1, 2]])
```
$$szelsoertek := 0 \qquad \textbf{(1.3.13)}$$

```
> if fxx > 0 then print(minimum) else print(maximum) end if;
```
maximum **(1.3.14)**

```
> A := plot3d(f(x, y), x = -1 ..3, y = -1 ..3, axes = normal, style = patchnogrid, color = blue)
```
A := PLOT3D(...) **(1.3.15)**

```
> B := pointplot3d([2/3, 4/3, 0], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = red);
```
B := PLOT3D(...) **(1.3.16)**

```
> display({A, B});
```



> $f(x, y) := x^3 + 3 \cdot x \cdot y + y^3$

$$f := (x, y) \rightarrow x^3 + 3\,x\,y + y^3 \qquad \textbf{(1.3.17)}$$

> $fx := diff(f(x, y), x)$

$$fx := 3\,x^2 + 3\,y \qquad \textbf{(1.3.18)}$$

> $fy := diff(f(x, y), y)$

$$fy := 3\,x + 3\,y^2 \qquad \textbf{(1.3.19)}$$

> $gyokok := solve(\{fx = 0, fy = 0\}, [x, y])$

$$gyokok := [[x = 0, y = 0], [x = -1, y = -1], [x = 1 - RootOf(\_Z^2 - \_Z + 1), y = RootOf(\_Z^2 - \_Z + 1)]] \qquad \textbf{(1.3.20)}$$

> $n := numelems(gyokok)$

$$n := 3 \qquad \textbf{(1.3.21)}$$

> $gyokok[1, 1]$

$$x = 0 \qquad \textbf{(1.3.22)}$$

> $gyokok[1, 2]$

$$y = 0 \qquad \textbf{(1.3.23)}$$

> $ertek1 := eval(f(x, y), [gyokok[1, 1], gyokok[1, 2]])$

$$ertek1 := 0 \qquad \textbf{(1.3.24)}$$

> $gyokok[2, 1]$

$$x = -1 \tag{1.3.25}$$

> $gyokok[2, 2]$

$$y = -1 \tag{1.3.26}$$

> $ertek2 := eval(f(x, y), [gyokok[2, 1], gyokok[2, 2]])$

$$ertek2 := 1 \tag{1.3.27}$$

> $fxx := diff(fx, x)$

$$fxx := 6x \tag{1.3.28}$$

> $fyy := diff(fy, y)$

$$fyy := 6y \tag{1.3.29}$$

> $fxy := diff(fx, y)$

$$fxy := 3 \tag{1.3.30}$$

> $d := fxx \cdot fyy - (fxy)^2$

$$d := 36xy - 9 \tag{1.3.31}$$

> $d1 := eval(d, [gyokok[1, 1], gyokok[1, 2]])$

$$d1 := -9 \tag{1.3.32}$$

> **if** *d1* > 0 **then** *print*(*van szélsőérték,*); **elif** *d1* < 0 **then** *print*(*nincs szélsőérték*); **elif** *d1* = 0 **then** *print*(*más módszerrel kell eldönteni, hogy van − e szélsőérték*); **end if**;

nincs szélsőérték **(1.3.33)**

> $d2 := eval(d, [gyokok[2, 1], gyokok[2, 2]])$

$$d2 := 27 \tag{1.3.34}$$

> **if** *d2* > 0 **then** *print*(*van szélsőérték,*); **elif** *d2* < 0 **then** *print*(*nincs szélsőérték*); **elif** *d2* = 0 **then** *print*(*más módszerrel kell eldönteni, hogy van − e szélsőérték*); **end if**;

van szélsőérték **(1.3.35)**

> $szelsoertek := eval(f(x, y), [gyokok[2, 1], gyokok[2, 2]])$

$$szelsoertek := 1 \tag{1.3.36}$$

> **if** *eval*(*fxx*, *gyokok*[2, 1]) > 0 **then** *print*(*minimum*);**else** *print*(*maximum*) **end if**;

maximum **(1.3.37)**

> $C := plot3d(f(x, y), x = -3..2, y = -3..2, axes = normal, style = patchnogrid, color = blue)$

$$C := PLOT3D(...) \tag{1.3.38}$$

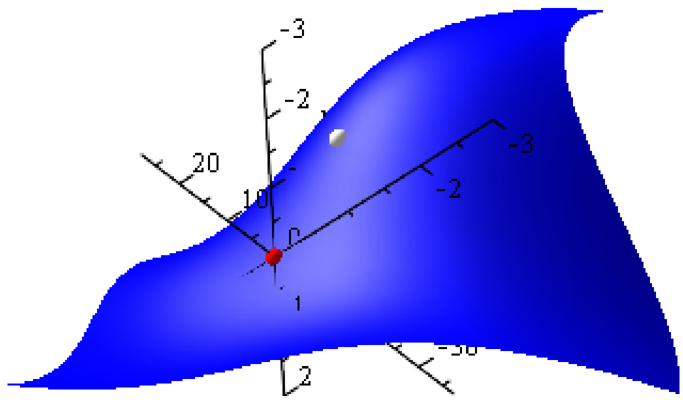
> $A := pointplot3d([0, 0, 0], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = red);$

$$A := PLOT3D(...) \tag{1.3.39}$$

> $B := pointplot3d([-1, -1, 1], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = white);$

$$B := PLOT3D(...) \tag{1.3.40}$$

> $display(\{A, B, C\});$



> $f(x,y) := \dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

$$f := (x,y) \rightarrow \frac{1}{x^2+y^2-1} \tag{1.3.41}$$

> $fx := diff(f(x,y), x)$

$$fx := -\frac{2x}{\left(x^2+y^2-1\right)^2} \tag{1.3.42}$$

> $fy := diff(f(x,y), y)$

$$fy := -\frac{2y}{\left(x^2+y^2-1\right)^2} \tag{1.3.43}$$

> $gyokok := solve(\{fx=0, fy=0\}, [x,y])$

$$gyokok := [[x=0, y=0]] \tag{1.3.44}$$

> $n := numelems(gyokok)$

$$n := 1 \tag{1.3.45}$$

> $gyokok[1,1]$

$$x=0 \tag{1.3.46}$$

> $gyokok[1,2]$

(1.3.47)

$$y = 0 \quad \mathbf{(1.3.47)}$$

> $fxx := diff(fx, x)$

$$fxx := \frac{8x^2}{(x^2+y^2-1)^3} - \frac{2}{(x^2+y^2-1)^2} \quad \mathbf{(1.3.48)}$$

> $fyy := diff(fy, y)$

$$fyy := \frac{8y^2}{(x^2+y^2-1)^3} - \frac{2}{(x^2+y^2-1)^2} \quad \mathbf{(1.3.49)}$$

> $fxy := diff(fx, y)$

$$fxy := \frac{8xy}{(x^2+y^2-1)^3} \quad \mathbf{(1.3.50)}$$

> $d := fxx \cdot fyy - (fxy)^2$

$$d := \left(\frac{8x^2}{(x^2+y^2-1)^3} - \frac{2}{(x^2+y^2-1)^2}\right)\left(\frac{8y^2}{(x^2+y^2-1)^3} - \frac{2}{(x^2+y^2-1)^2}\right) - \frac{64x^2y^2}{(x^2+y^2-1)^6} \quad \mathbf{(1.3.51)}$$

> $simplify(d)$

$$-\frac{4(3x^2+1+3y^2)}{(x^2+y^2-1)^5} \quad \mathbf{(1.3.52)}$$

> $d1 := eval(d, [gyokok[1, 1], gyokok[1, 2]])$

$$d1 := 4 \quad \mathbf{(1.3.53)}$$

> **if** *d1* > 0 **then** *print*(*van szélsőérték,*); **elif** *d1* < 0 **then** *print*(*nincs szélsőérték*); **elif** *d1* = 0 **then** *print*(*más módszerrel kell eldönteni, hogy van − e szélsőérték*); **end if**;

van szélsőérték **(1.3.54)**

> **if** *eval*(*fxx*, [*gyokok*[1, 1], *gyokok*[1, 2]]) > 0 **then** *print*(*minimum*);
> **else** *print*(*maximum*) **end if**;

maximum **(1.3.55)**

> $szelsoertek := eval(f(x, y), [gyokok[1, 1], gyokok[1, 2]])$

$$szelsoertek := -1 \quad \mathbf{(1.3.56)}$$

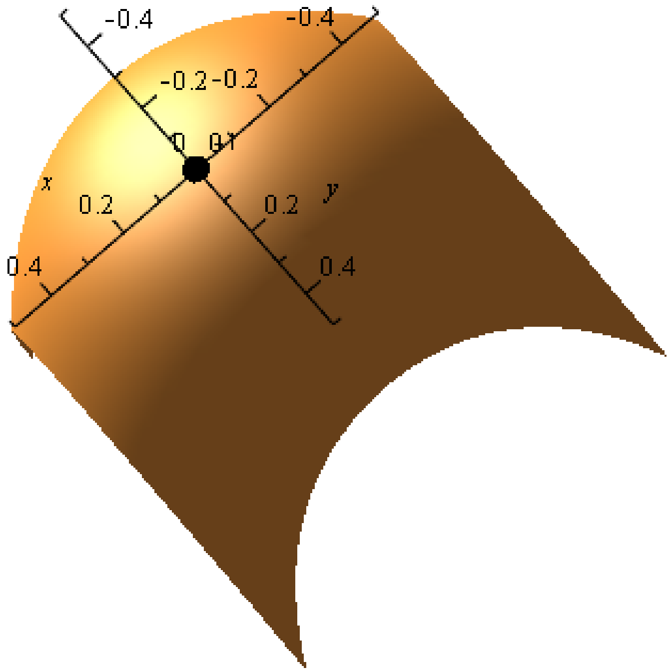
> $A := plot3d(f(x, y), x = -0.5..0.5, y = -0.5..0.5, axes = normal, style = patchnogrid, color = gold)$

$$A := PLOT3D(...) \quad \mathbf{(1.3.57)}$$

> $B := pointplot3d([0, 0, -1], symbol = solidcircle, symbolsize = 30, color = black);$

$$B := PLOT3D(...) \quad \mathbf{(1.3.58)}$$

> $display(\{A, B\});$



> $f(x, y) := 4 \cdot x \cdot y - x^4 - y^4$

$$f := (x, y) \rightarrow 4\,x\,y - x^4 - y^4 \qquad \textbf{(1.3.59)}$$

> $fx := diff(f(x, y), x)$

$$fx := 4\,y - 4\,x^3 \qquad \textbf{(1.3.60)}$$

> $fy := diff(f(x, y), y)$

$$fy := 4\,x - 4\,y^3 \qquad \textbf{(1.3.61)}$$

> $gyokok := solve(\{fx = 0, fy = 0\}, [x, y])$

$$gyokok := [[x = 0, y = 0], [x = 1, y = 1], [x = -1, y = -1], [x = -RootOf(\_Z^2 + 1), y = RootOf(\_Z^2 + 1)], [x = RootOf(-RootOf(\_Z^2 + 1) + \_Z^2)\,RootOf(\_Z^2 + 1), y = RootOf(-RootOf(\_Z^2 + 1) + \_Z^2)]] \qquad \textbf{(1.3.62)}$$

> $n := numelems(gyokok)$

$$n := 5 \qquad \textbf{(1.3.63)}$$

> $gyokok[1, 1]$

$$x = 0 \qquad \textbf{(1.3.64)}$$

> $gyokok[1, 2]$

$$y = 0 \qquad \textbf{(1.3.65)}$$

> $gyokok[2, 1]$

$$x = 1 \quad (1.3.66)$$

> $gyokok[2, 2]$

$$y = 1 \quad (1.3.67)$$

> $gyokok[3, 1]$

$$x = -1 \quad (1.3.68)$$

> $gyokok[3, 2]$

$$y = -1 \quad (1.3.69)$$

> $fxx := diff(fx, x)$

$$fxx := -12x^2 \quad (1.3.70)$$

> $fyy := diff(fy, y)$

$$fyy := -12y^2 \quad (1.3.71)$$

> $fxy := diff(fx, y)$

$$fxy := 4 \quad (1.3.72)$$

> $d := fxx \cdot fyy - (fxy)^2$

$$d := 144x^2y^2 - 16 \quad (1.3.73)$$

> $d1 := eval(d, [gyokok[1, 1], gyokok[1, 2]])$

$$d1 := -16 \quad (1.3.74)$$

> **if** *d1* > 0 **then** *print*(*van szélsőérték,*); **elif** *d1* < 0 **then** *print*(*nincs szélsőérték*); **elif** *d1* = 0 **then** *print*(*más módszerrel kell eldönteni, hogy van − e szélsőérték*); **end if**;

nincs szélsőérték (1.3.75)

> $d2 := eval(d, [gyokok[2, 1], gyokok[2, 2]])$

$$d2 := 128 \quad (1.3.76)$$

> **if** *d2* > 0 **then** *print*(*van szélsőérték,*); **elif** *d2* < 0 **then** *print*(*nincs szélsőérték*); **elif** *d2* = 0 **then** *print*(*más módszerrel kell eldönteni, hogy van − e szélsőérték*); **end if**;

van szélsőérték (1.3.77)

> $szelsoertek1 := eval(f(x, y), [gyokok[2, 1], gyokok[2, 2]])$

$$szelsoertek1 := 2 \quad (1.3.78)$$

> **if** *eval*(*fxx*, [*gyokok*[2, 1], *gyokok*[2, 2]]) > 0 **then** *print*(*minimum*); **else** *print*(*maximum*) **end if**;

maximum (1.3.79)

> $d3 := eval(d, [gyokok[3, 1], gyokok[3, 2]])$

$$d3 := 128 \quad (1.3.80)$$

> **if** *d3* > 0 **then** *print*(*van szélsőérték,*); **elif** *d3* < 0 **then** *print*(*nincs szélsőérték*); **elif** *d3* = 0 **then** *print*(*más módszerrel kell eldönteni, hogy van − e szélsőérték*); **end if**;

van szélsőérték (1.3.81)

> $szelsoertek2 := eval(f(x, y), [gyokok[3, 1], gyokok[3, 2]])$

$$szelsoertek2 := 2 \quad (1.3.82)$$

> **if** *eval*(*fxx*, [*gyokok*[3, 1], *gyokok*[3, 2]]) > 0 **then** *print*(*minimum*); **else** *print*(*maximum*) **end if**;

maximum (1.3.83)

> *C* := *plot3d*(*f*(*x*, *y*), *x* = −2 ..2, *y* = −2 ..2, *axes* = *normal*, *style* = *patchnogrid*, *color* = *blue*)

C := *PLOT3D*(...) (1.3.84)

> *A* := *pointplot3d*([0, 0, 0], *symbol* = *solidcircle*, *symbolsize* = 20, *color* = *red*);

$$A := PLOT3D(...) \tag{1.3.85}$$

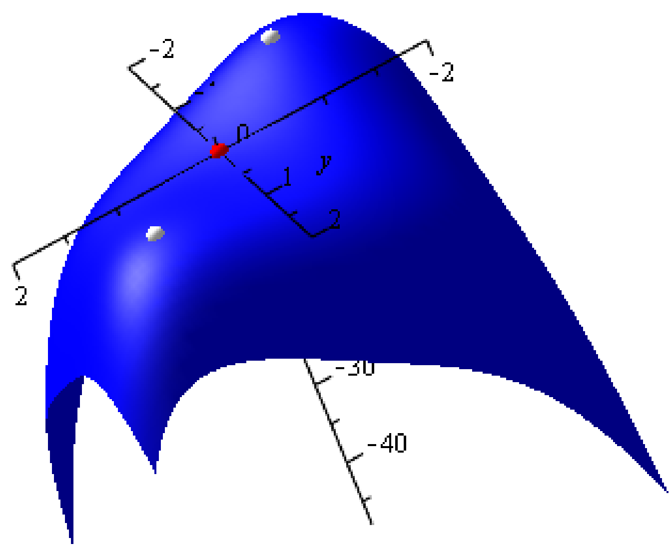
> $B := pointplot3d([1, 1, 2], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = white);$

$$B := PLOT3D(...) \tag{1.3.86}$$

> $E := pointplot3d([-1, -1, 2], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = white)$

$$E := PLOT3D(...) \tag{1.3.87}$$

> $display(\{A, B, C, E\});$



Érintsík

Tekintsük a $P_0(x_0, y_0)$ pontban és környezetében differenciálható f (x, y) függvényt. A P_0 ponton átmen xy síkra merleges síkok az f (x, y) függvény képét (ami felület), különböz síkgörbékben metszik. Bizonyítható, hogy ezeknek a síkgörbéknek az érinti egy síkban vannak és ezek összességét a felület P_0 ponthoz tartozó érintsíkjának nevezzük.

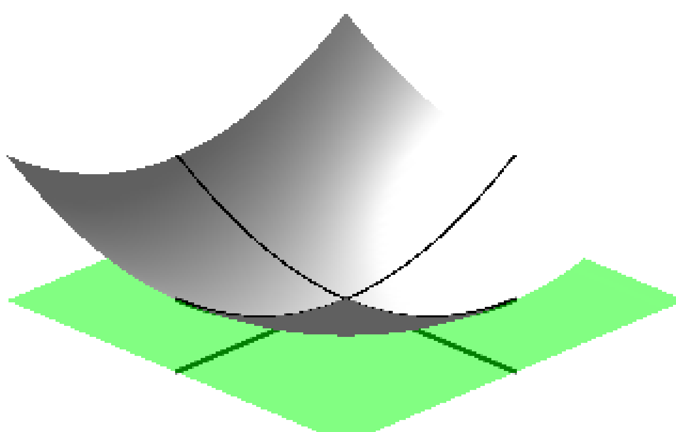
Egy sík két egymást metsz egyenessel egyértelmen megadható. Az xz, ill. yz síkokkal párhuzamos síkmetszete a felületnek egy-egy görbe, melynek érint egyenesei a felület parciális deriváltjai segítségével meghatározhatók, így az érintsíkot is megadhatjuk.
A sík egyenlete általában $z = A \cdot x + B \cdot y + C$ alakú. Az érintési pontban a felület és az érintsík

parciális deriváltjai megegyeznek, ezért $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} z = A$ és $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} z = B$, C értéke pedig abból a feltételből számolható ki, hogy az érintési pont és a felület közös pontja P_0.

> $restart$

> $with(plots):$

> $F := plot3d(x^2 + y^2, x = -2..4, y = -2..4, style = patchnogrid, color = grey):$
$G := plot3d(x^2 + y^2, x = 1..1, y = -2..4):$
$A := plot3d(x^2 + y^2, x = -2..4, y = 1..1):$
$B := plot3d(2 \cdot x, x = -2..4, y = 1..1):$
$C := plot3d(2 \cdot y, x = 1..1, y = -2..4):$
$E := plot3d(2 \cdot x + 2 \cdot y - 2, x = -2..4, y = -2..4, transparency = 0.5, color = green, style = patchnogrid):$
$display(\{F, G, A, B, C, E\});$



Tehát egy adott f (x, y) függvény

P_0 pontbeli érintjének felírásakor a következképpen járunk el:

1. Először kiszámoljuk az adott pont harmadik koordinátáját $z_0 = f(x_0, y_0)$
2. Majd parciálisan deriváljuk x és y szerint a függvényt, majd a kapott parciális deriváltakba x_0, y_0 értékének behelyettesítésével nyerjük az A és a B együtthatókat.
3. Végül C értékének meghatározása következik, abból a feltételbl, hogy a felület és az érintsík közös pontja az adott pont: C = $z_0 - A \cdot x_0 - B \cdot y_0$

Nézzünk meg néhány konkrét példát, elször hagyományos módon, utána Maple-ben:

Határozzuk meg az $f(x, y) := x^2 + 2 \cdot y^2 + x \cdot y$ függvény érintsíkját a $P_0(1, 1)$ pontban!

$z_0 = 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 = 4$

A parciális deriváltak: $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2 \cdot x + y$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 4 \cdot y + x$

Helyettesítsük be a megadott pont koordinátáit a kapott parciális deriváltakba:

$\frac{\partial}{\partial x} f(1, 1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$

Tehát A = 3 és B = 5

$C = 4 - 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -4$

Az érint egyenlete: $z = 3\,x + 5\,y - 4$

Ugyanez Maple-ben:

> $f(x, y) := x^2 + 2 \cdot y^2 + x \cdot y$

$$f := (x, y) \rightarrow x^2 + 2\,y^2 + x\,y \tag{2.1}$$

> $x0 := 1; y0 := 1$

$$x0 := 1$$
$$y0 := 1 \tag{2.2}$$

> $z0 := subs(x = x0, y = y0, f(x, y))$

$$z0 := 4 \tag{2.3}$$

> $fx := diff(f(x, y), x)$

$$fx := 2\,x + y \tag{2.4}$$

> $A := subs(x = x0, y = y0, fx)$

$$A := 3 \tag{2.5}$$

> $fy := diff(f(x, y), y)$

$$fy := 4\,y + x \tag{2.6}$$

> $B := subs(x = x0, y = y0, fy)$

$$B := 5 \tag{2.7}$$

> $C := z0 - A \cdot x0 - B \cdot y0$

$$C := -4 \quad \textbf{(2.8)}$$

> $z := A \cdot x + B \cdot y + C$

$$z := 3\,x + 5\,y - 4 \quad \textbf{(2.9)}$$

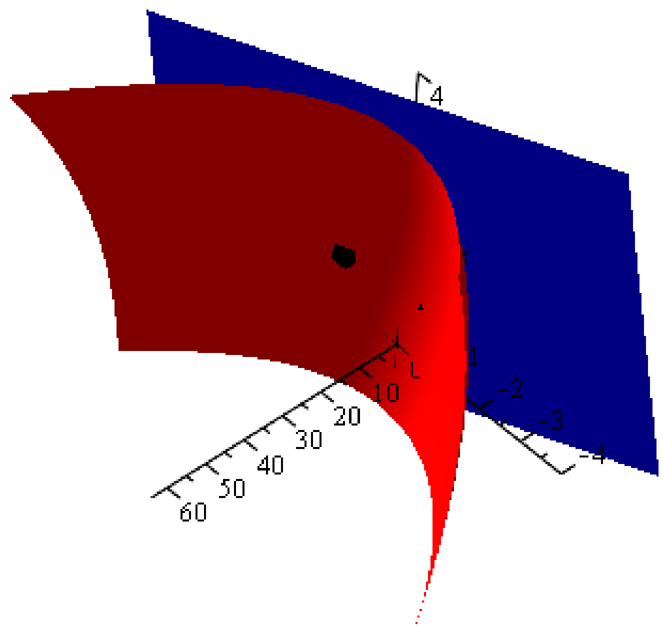
> $X := pointplot3d([1, 1, 4], symbol = solidbox, color = black, symbolsize = 20);$

$$X := PLOT3D(\ldots) \quad \textbf{(2.10)}$$

> $Y := plot3d(\{f(x, y), z\}, x = -1..4, y = -4..4, colour = [blue, red], axes = normal, style = patchnogrid,);$

$$Y := PLOT3D(\ldots) \quad \textbf{(2.11)}$$

> $display(\{X, Y\});$



És még egy példa Maple-ben:

> $f(x, y) := \sqrt{x^2 + 2 \cdot y^2}$

$$f := (x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + 2\,y^2} \quad \textbf{(2.12)}$$

> $x0 := 1; y0 := 2$

$$x0 := 1$$

$$y0 := 2 \quad \textbf{(2.13)}$$

> $z0 := simplify(subs(x = x0, y = y0, f(x, y)))$

$$z0 := 3 \tag{2.14}$$

> $fx := diff(f(x, y), x)$

$$fx := \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \tag{2.15}$$

> $A := simplify(subs(x = x0, y = y0, fx))$

$$A := \frac{1}{3} \tag{2.16}$$

> $fy := diff(f(x, y), y)$

$$fy := \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \tag{2.17}$$

> $B := simplify(subs(x = x0, y = y0, fy))$

$$B := \frac{4}{3} \tag{2.18}$$

> $C := z0 - A \cdot x0 - B \cdot y0$

$$C := 0 \tag{2.19}$$

> $z := A \cdot x + B \cdot y + C$

$$z := \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}y \tag{2.20}$$

> $X := plot3d(f(x, y), x = -1..3, y = 0..4, axes = normal, style = patchnogrid, color = blue, transparency = 0.6);$

$$X := PLOT3D(...) \tag{2.21}$$

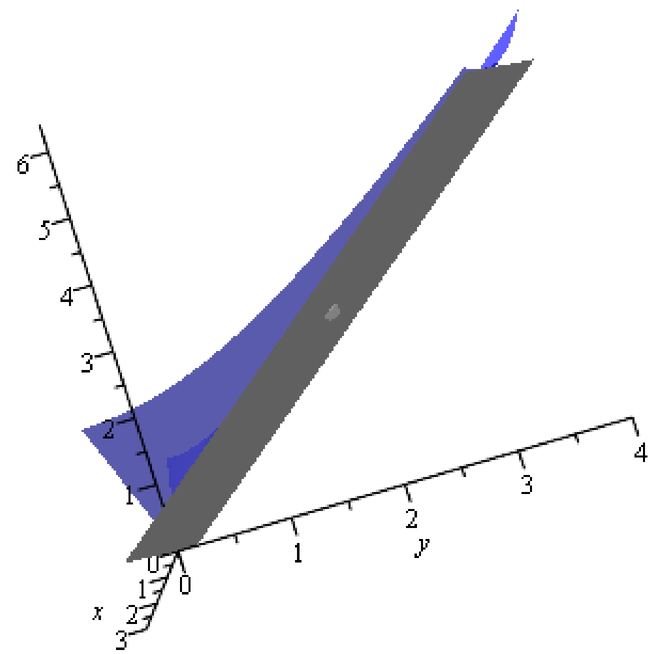
> $Y := plot3d(z, x = -1..3, y = 0..4, axes = normal, style = patchnogrid, color = grey)$

$$Y := PLOT3D(...) \tag{2.22}$$

> $E := pointplot3d([1, 2, 3], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = white)$

$$E := PLOT3D(...) \tag{2.23}$$

> $display(\{X, Y, E\});$



Megoldott feladatok

1. Írja fel az $f(x, y) = x \cdot y^2$ felület érintsíkja egyenletét az $x_0 = -1,\ y_0 = 1$ helyen!
Megoldás:
Az érintsík egyenlete z=Ax+By+C alakú, ahol $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,\ y_0) = A,\ \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,\ y_0) = B,$
$C = z_0 - A \cdot x_0 - B \cdot y_0$

$z_0 = -1 \cdot 1^2 = -1$

$f_x' = (xy^2)'_x = 1 \cdot y^2 = y^2 \Rightarrow A = 1^2 = 1$

$f_y' = (xy^2)'_y = x \cdot 2y = 2xy \Rightarrow B = 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2$

$C = 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2$

Az érintsík egyenlete: z = x - 2y + 2

2. Írja fel a $z = x^2 + 2y^2 + xy$ függvény érintsíkja egyenletét a $P_1(1;1)$ helyen!

Megoldás:

$$z_1 = 1^2 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1 = 4$$
$$z'_x = \left(x^2 + 2y^2 + xy\right)'_x = 2x + 0 + 1 \cdot y = 2x + y \Rightarrow A = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$
$$z'_y = \left(x^2 + 2y^2 + xy\right)'_y = 0 + 2 \cdot 2y + x \cdot 1 = 4y + x \Rightarrow B = 4 \cdot 1 + 1 = 5$$
$$C = z_1 - Ax_1 - By_1 = 4 - 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -4$$

Az érintsík egyenlete tehát: z = 3x+5y-4

3. Fennáll-e annak a lehetsége, hogy a $z = x^4 - 2xy^2 + y$ függvénynek a $P\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{8}\right)$

helyen helyi (lokális) szélsértéke legyen? Igen, vagy nem? Válaszát indokolja!
Megoldás:
Képezzük az els parciális differenciálhányadosokat! Ha ezek eltnnek a kérdéses pontban, akkor lehet, hogy szélsértéke van az adott függvénynek.

$$z'_x = \left(x^4 - 2xy^2 + y\right)'_x = 4x^3 - 2y^2 \Rightarrow z'_x(P) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 = \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{2}{64} = 0$$

$$z'_y = \left(x^4 - 2xy^2 + y\right)'_y = -4xy + 1 \Rightarrow z'_y(P) = -4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} + 1 \neq 0$$

Tehát a függvénynek a P pontban nincs szélsértéke.

4. Írja fel a következ felület érintsíkjának egyenletét $x_0=2$, $y_0=1$ pontban!

$$z = x^2y^3 + 4y^2 - xy + y - 1$$

$z'_x = 2xy^3 - y \qquad z'_x\,[2;1] = 2 \cdot 2 \cdot 1^3 - 1 = 3 = A$

$z'_y = 3x^2y^2 + 8y - x + 1$

$z'_y[2;1] = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 2 + 1 = 19 = B$

$z_0 = 2^2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 - 1 = 6$

$C = Z_0 - A \cdot x_0 - B \cdot y_0 = 6 - 3 \cdot 2 - 19 \cdot 1 = -19 \qquad z = 3x + 19y - 19$

5. Írja fel a következ felület érintsíkjának egyenletét $x_0=1$, $y_0=2$ pontban!

$$z = x^3y^2 + 4x^2 - xy + x - 1$$

$z'_x = 3x^2y^2 + 8x - y + 1$

$z'_x[1;\ 2] = 3 \cdot 1^2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 1 - 2 + 1 = 19 \ = A$

$z'_y = 2yx^3 - x$ $\qquad z'_y[1;\ 2] = 2 \cdot 2 \cdot 1^3 - 1 = 3 = \ B$

$z_0 = 1^3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1^2 - 1 \cdot 2 + 1 - 1 = 6$

$C = 6 - 19 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -19$ $\qquad z = 19x + 3y - 19$

6. Állapítsa meg a következ függvény helyi szélsérték helyét és annak értékét:
$z = y^2 - xy + 2x^2 + 2x + 3y$

$z'_x = -y + 4x + 2$ $\qquad y = 4x + 2$

$z'_y = 2y - x + 3$ $\qquad 2(4x + 2) - x + 3 = 0$ $\qquad 8x + 4 - x + 3 = 0$

$7x = -7$ $\qquad y = -2$

$z''_{xx} = 4$ $\qquad z''_{yy} = 2$ $\qquad z''_{xy} = -1$ $\qquad D = 8 - (-1)^2 = 7 \ > 0$

van szélsérték! $z''_{xx} > 0$ $\longrightarrow$ minimuma van.

7. Állapítsa meg a következ függvény helyi szélsérték helyét és annak értékét:
$z = x^2 - 3xy + 2y^2 - y - x$

$z'_x = 2x - 3y - 1$ $\qquad 2x - 3y = 1 \ \ /\cdot 3$ $\qquad 6x - 9y = 3$

$z'_y = -3x + 4y - 1$ $\qquad -3x + 4y = 1 \ \ /\cdot 2$ $\qquad -6x + 8y = 2$

$-y = 5 \ \rightarrow y = -5$ $\qquad 2x + 15 = 1$ $\qquad 2x = -14$ $\qquad x = -7$

$z''_{xx} = 2$

$z''_{xy} = -3$

$z''_{yy} = 4$

$D = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2 = 2 \cdot 4 - (-3)^2 = -1 < 0$

Nincs szélsérték a kapott pontban.

Feladatok önálló megoldásra

1. Lehet-e szélsértéke a $z = x^5 + x^3 + y^3 + 4x - y$ függvénynek?

2. Írja fel a $z = x^2 + 2y^2 + xy$ függvény érintsíkja egyenletét a $P_1(1;1)$ helyen!

3. Fennáll-e annak a lehetsége, hogy a $z = x^4 - 2xy^2 + y$ függvénynek a $P\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$

   helyen helyi (lokális) szélsértéke legyen? Igen, vagy nem? Válaszát indokolja!

4. Állapítsa meg a következ függvény helyi szélsérték helyét és annak értékét:

$z = 12xy + yx^2 - 13y^2 + 12$

5. Írja fel az alábbi kétváltozós függvény érintsíkjának egyenletét a $P_0(2,-3)$ pontban:

$$z = 2x^2y + 2xy - 3y^2$$

6. Milyen típusú szélsértéke van a következ kétváltozós függvénynek?

$$z = 2x^2y + 2xy - 3y^2$$

7. Írja fel a következ felület érintsíkjának egyenletét x0=1, y0=2 pontban!

$$z = x^3y^2 + 4x^2 - xy + x - 1$$

8. Állapítsa meg a következ függvény helyi szélsérték helyét és annak értékét:

$$z = x^2 - 3xy + 2y^2 - y - x$$