Kétváltozós függvények és azok differenciálása. Parciális és iránymenti derivált.

Javier Barrallo: Sliceform

Bevezetés

A minket körülvev világot tanulmányozva észrevehetjük, hogy a mennyiségek általában több más mennyiségtl függnek. Ezeket a kapcsolatokat többváltozós függvényekkel írhatjuk le. A többváltozós függvények tanulmányozása, analízise fontos a közgazdasági alkalmazásokban is.
Erre nézzünk két konkrét példást:
„R. Frisch és T. Haavelmo a tej keresletére vonatkozó tanulmányukban az alábbi összefüggést adták:

$$x = \frac{A \cdot r^{2.08}}{p^{1.5}}$$

(A pozitív állandó)
A képletben x a tej fogyasztása, p a tej relatív ára és r egy család jövedelme. Ez az egyenlség x-et p és r függvényeként adja meg. Vegyük észre, hogy a tej fogyasztása n, ha az r jövedelem n, és csökken, ha a tej ára növekszik – mindez elfogadhatónak tűnik."
Knut Sydsaeter Peter I. Hammond Matematika közgazdászoknak 462. oldal

Kettnél több változós függvényekkel is találkozhatunk a közgazdasági gyakorlatban:
„R. Stone az alábbi becslést adta az angliai sörkeresletre:

$$x = 1.058 \cdot x_1^{0.136} \cdot x_2^{(-0.727)} \cdot x_3^{0.914} \cdot x_4^{0.816}$$

Itt a sörkereslet (x) négy változó függvénye: x_1 (a fogyasztó jövedelme), x_2 (a sör ára), x_3 (egy a többi jószágra vonatkozó általános árindex), és x_4 (a sör alkoholtartalma)."

Knut Sydsaeter Peter I. Hammond Matematika közgazdászoknak 463. oldal

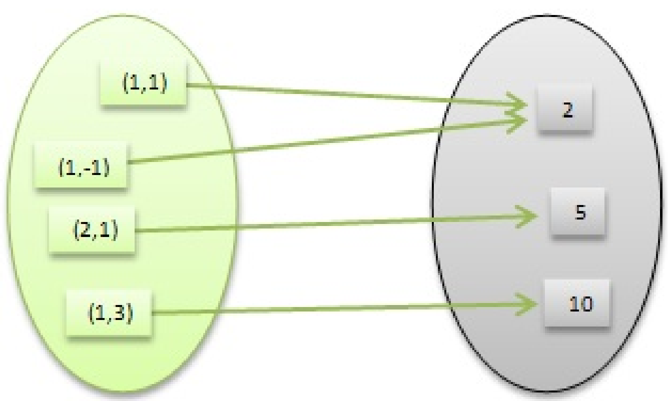
További gazdasági alkalmazásokat találhatunk az alábbi könyvekben:

Simonovits András Mikroökonómia,
Sydsaeter Hammond Matematika közgazdászoknak

Kétváltozós függvények definíciója, szemléltetése

A függvény leképezés két halamaz elemei között. Az eddig vizsgált, egyváltozós függvények a valós számok részhalmazai között létesítettek leképezést. Az értelmezési tartomány és az értékkészlet is a valós számok részhalmaza volt.
A két és többváltozós függvényeket az egyváltozós függvényekhez hasonlóan definiáljuk. A többváltozós függvények értelmezési tartománya most rendezett valós számpárok, számhármasok, szám n-esek halmaza, értékkészlete pedig ugyanúgy, mint az egyváltozós esetban a valós számok egy részhalmaza.
A továbbiakban a kétváltozós függvényekkel foglalkozunk részletesen, esetleg utalást teszünk a többváltozós esetekre.

D. Az f függvény kétváltozós, ha értelmezési tartománya D(f) része a kétdimenziós Euklideszi térnek □ $\mathbb{R}^2$-nek és a függvény D(f) minden eleméhez egyetlen valós számot rendel, vagyis $\mathbb{R}^2$- b1 $\mathbb{R}$-be képez. A függvény értékkészlete R(f) az egydimenziós Euklideszi tér részhalmaza.



Tehát a kétváltozós függvényeknek két független változója van, ezeket x és y jelöli, az értelmezési tartomány az xy-sík egy részhalmaza. A kétváltozós függvény jelölése: f (x, y). A kétváltozós függvényeket térbeli Descartes koordináta-rendszerben ábrázolva a függvény azon térbeli P (x, y, z)

pontok halmazával szemléltethet, amelyek koordinátáira fennáll a
z = f (x, y) összefüggés.

Egy és kétváltozós függvények jelölésének összehasonlítása:

Kétváltozós	Egyváltozós
$(x, y) \rightarrow x^2 + y^2$	$x \rightarrow x^2$
$z = x^2 + y^2$	$y = x^2$
$f(x, y) = x^2 + y^2$	$f(x) = x^2$

Felület Descartes - koordinátás ábrázolása a háromdimenziós koordináta-rendszerben:

```
> restart
> with(plots) :
> B := textplot3d([2, 3, 1, "P0 (x, y)", 'font'= ["times", "roman", 12]], axes = normal, 'view'= [
    -5 ..6, -5 ..6, -4 ..7]);
```

$$B := PLOT3D(\ldots) \quad \textbf{(2.1)}$$

```
> C := textplot3d([2, 3, 5, "P (x, y, z)", 'font'= ["times", "roman", 12]], axes = normal, 'view'= [
    -5 ..6, -5 ..6, -4 ..7]);
```

$$C := PLOT3D(\ldots) \quad \textbf{(2.2)}$$

```
> E := pointplot3d([2, 3, 4], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 20);
```

$$E := PLOT3D(\ldots) \quad \textbf{(2.3)}$$

```
> F := pointplot3d([2, 3, 0], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 15);
```

$$F := PLOT3D(\ldots) \quad \textbf{(2.4)}$$

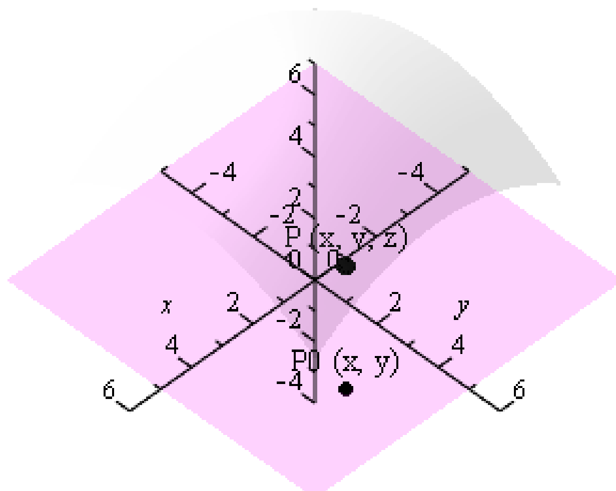
```
> H := implicitplot3d(z = 0, x = -5 ..5, y = -5 ..5, z = 0 ..7, transparency = 0.9, color = magenta,
    style = patchnogrid)
```

$$H := PLOT3D(\ldots) \quad \textbf{(2.5)}$$

```
> A := plot3d(-0.1 · x^2 - 0.1 · y^2 + 6.3, x = -4 ..4, y = -4 ..4, transparency = 0.9, color = grey,
    style = patchnogrid)
```

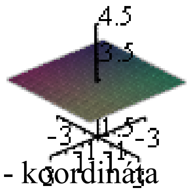
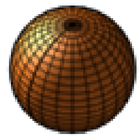
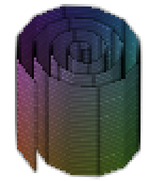
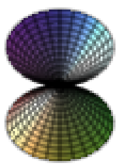
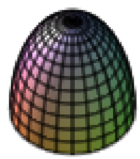
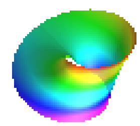
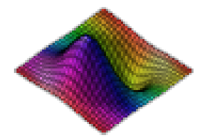
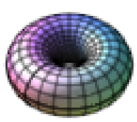
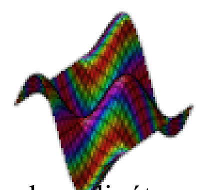
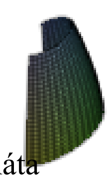
$$A := PLOT3D(\ldots) \quad \textbf{(2.6)}$$

```
> display({A, B, C, E, F, H});
```

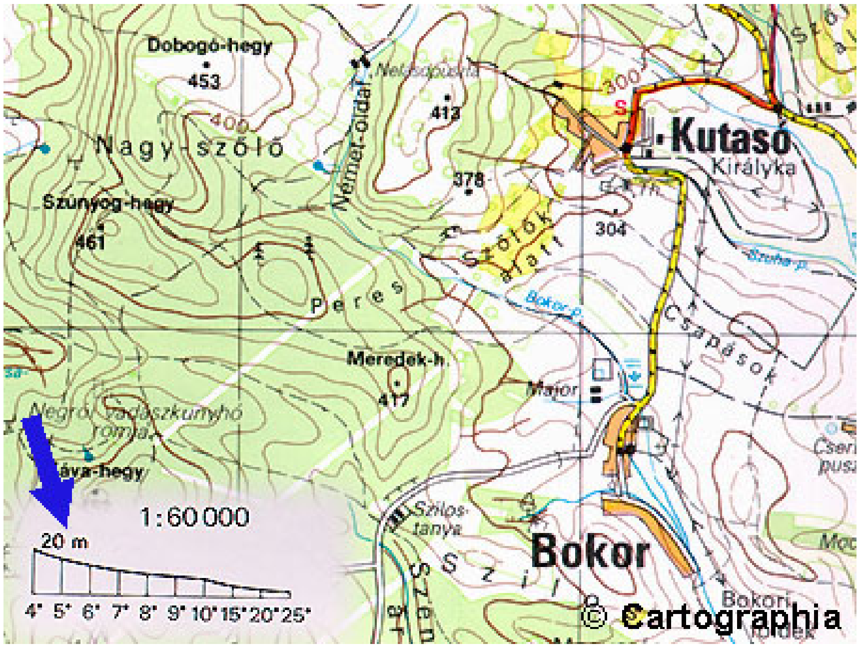


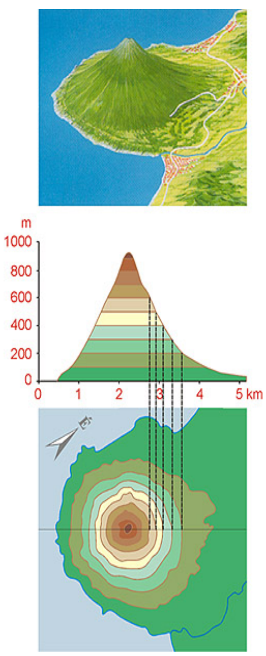
A felületeket különböz koordináta-rendszerekben szokás ábrázolni, mi minden felületet a térbeli derékszög Descartes koordináta-rendszerben ábrázolunk.
Érdekességképpen nézzünk meg néhány felületet a Mapleben, ezek ábrázolásakor használtunk gömbkoordinátákat, hengerkoordinátákat, paraméteres ábrázolást is.
A képekre kattintva a felületeket forgathatjuk, különböz irányból megszemlélhetjük. A megjelen ábrázolás menüsor lehetségei között szerepel többek között a különböz koordináta-rendszerek választása, az ábrázolás stílusának megváltoztatása, a felület közelítése, távolítása.
A táblázat legalsó sorában felületek animációját láthatjuk. Ha a kiválasztjuk az egyik felületet, megjelenik az animáció menü. A jelek magukért beszélnek. Az animáció sebességét (FPS: után megjelen szám) érdemes minél kisebbre, pl. 1-re választani, hogy jobban megszemlélhessük a változást.

Sík z = 3	Gömb		

			
Descartes - koordináta *Kúp*	Gömbkoordináta	Gömbkoordináta Möbiusz-szalag	Hengerkoordináta
			
Hengerkoordináta Tórusz	Felület paraméteres ábrázolása	Hengerkoordináta	Descartes - koordináta Animáció
			
Tóruszkoordináta Animáció	Gömbkoordináta Animáció	Descartes - koordináta Animáció	Descartes - koordináta Animáció
			
Gömbkoordináta	Gömbkoordináta	Hengerkoordináta	Gömbkoordináta

Hogyan tudjuk a felületeket még jobban szemléltetni? Elsként a földrajzból ismers, térképek ábrázolására is használatos szintvonalas ábrázolás siet segítségünkre.





Szintvonalas térkép és magyarázata
Forrás: http://nagysandor.eu/AsimovTeka/PhysHelp/fields.html

Az alábbi táblázatban két felületet ábrázoltunk. Az egyik a $f(x, y) = x^2 + y^2$ a másik a $g(x, y) = \sin(x) + 2 \cdot \sin(y)$. Az els cellában láthatjuk a felületeket, 10 párhuzamos síkkal

elmetszve. a síkok az xy síkkal párhuzamosak, z értéke mindegyik síkon állandó, más szóval egy-egy síkon a pontok z koordinátája megegyezik. (Az xy síkon lev pontok harmadik, z koordinátája mindig 0. Ezért az xy sík egyenlete z = 0.)
A táblázat második oszlopában elhagytuk a felület és a síkok ábrázolását és csak a metszésvonalak maradtak, de ez még mindig térbeli ábra. A harmadik oszlopban látszik az úgynevezett szintvonalas ábrázolás. Itt a második ábra metszésvonalait merlegesen levetítettük az xy síkra.

> $P := Array(1..2, 1..3):$

> $with(Student[MultivariateCalculus]):$

> $P_{1,1} := CrossSection(x\text{^}2 + y\text{^}2, z = 0..25, x = -4..4, y = -4..4, planes = 10)$

$$P_{1,1} := PLOT3D(...) \qquad \textbf{(2.7)}$$

> $P_{1,3} := contourplot\left(x^2 + y^2, x = -1..1, y = -1..1\right)$

$$P_{1,3} := PLOT(...) \qquad \textbf{(2.8)}$$

> $P_{1,2} := plot3d\left(x^2 + y^2, x = -1..1, y = -1..1, style = contour\right)$;#szintvonalak ábrázlása

$$P_{1,2} := PLOT3D(...) \qquad \textbf{(2.9)}$$

> $P_{2,3} := contourplot\left(\sin(x) + 2\cdot\sin(y), x = -4\cdot\pi..4\cdot\pi, y = -3..3\right);$

$$P_{2,3} := PLOT(...) \qquad \textbf{(2.10)}$$

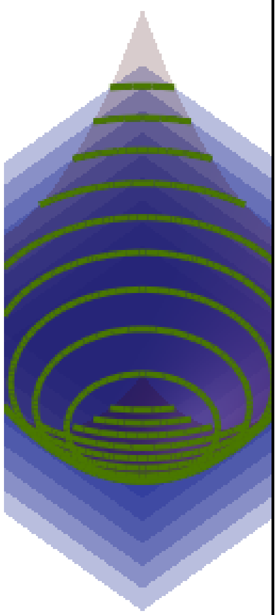
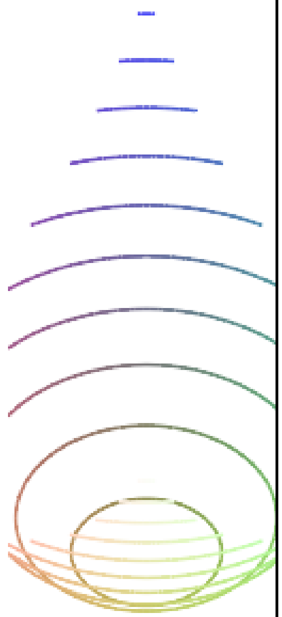
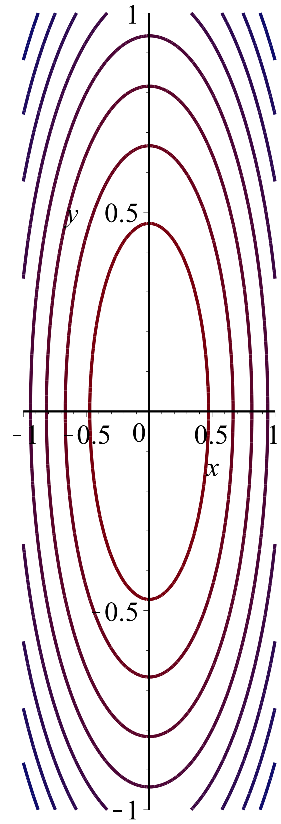
> $P_{2,2} := plot3d\left(\sin(x) + 2\cdot\sin(y), x = -4\cdot\pi..4\cdot\pi, y = -3..3, style = contour\right)$

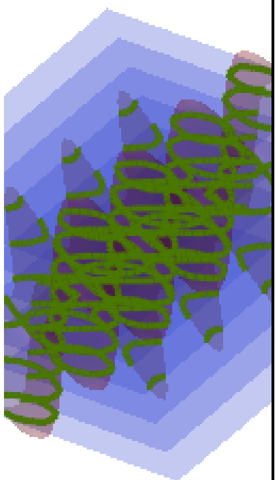
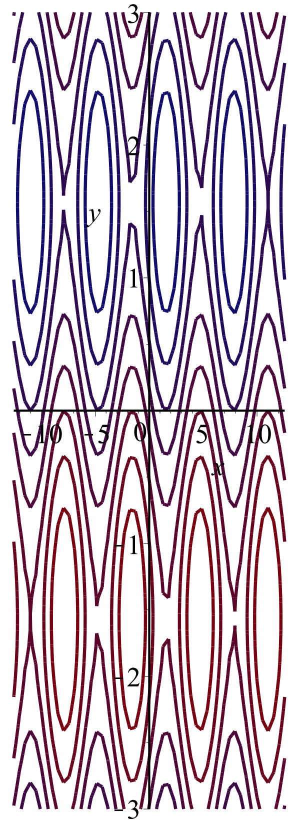
$$P_{2,2} := PLOT3D(...) \qquad \textbf{(2.11)}$$

> $P_{2,1} := CrossSection\left(\sin(x) + 2\cdot\sin(y), z = -3..3, x = -4\cdot\pi..4\cdot\pi, y = -3..3, planes = 10\right)$

$$P_{2,1} := PLOT3D(...) \qquad \textbf{(2.12)}$$

> $display(P)$

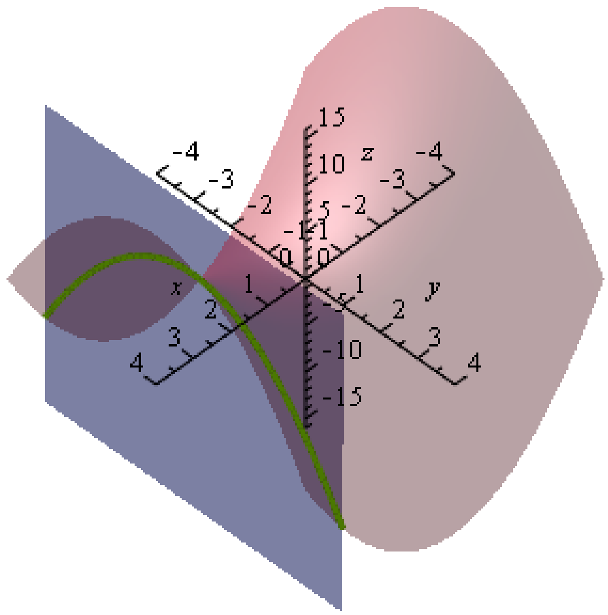
 The intersection of the surface $f(x, y) = x^2 + y^2$ and one or more planes of the form $z = constant$.		

 The intersection of the surface $f(x, y) = \sin(x) + 2\sin(y)$ and one or more planes of the form $z = constant$.		

A felületnek nemcsak az xy síkkal párhuzamos metszeteit kell vizsgálnunk ahhoz, hogy a felületet minél jobban el tudjuk képzelni, hanem a zy és a zx síkokkal párhuzamos metszeteket is érdemes megnéznünk.
Az alábbi ábrán az $f(x, y) = x^2 - y^2$ egyenlet nyeregfelület látható. Egy zy síkkal párhuzamos síkkal elmetszettük, a sík egyenlete x = 3. A metszetgörbe egy maximumos parabola. Ha további zy-nal párhuzamos síkkal metsszük a felületet szintén maximumos parabolákat kapunk, egymáshoz képest eltolva.

> $CrossSection(x^\wedge 2 - y^\wedge 2, x = 3, x = -4..4, y = -4..4, planes = 10, axes = normal);$

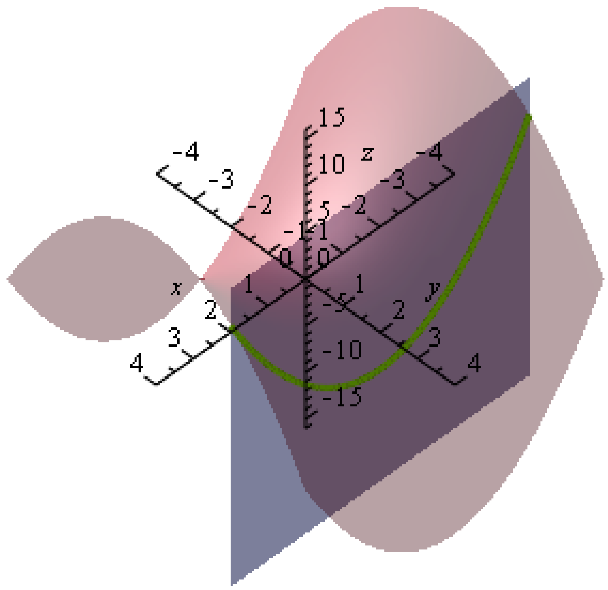
Nézzük meg ugyanennek a felületnek egy xz síkkal párhuzamos metszetét, most y-t rögzítjük, legyen y = 2:



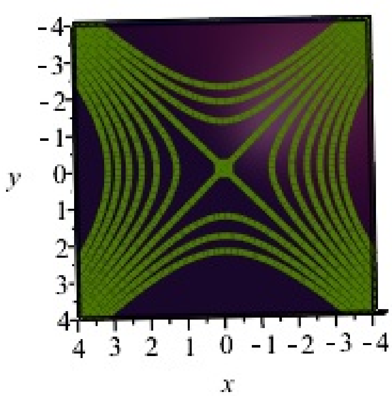
The intersection of the surface $f(x, y) = x^2 - y^2$ and one or more planes of the form $x = constant$.

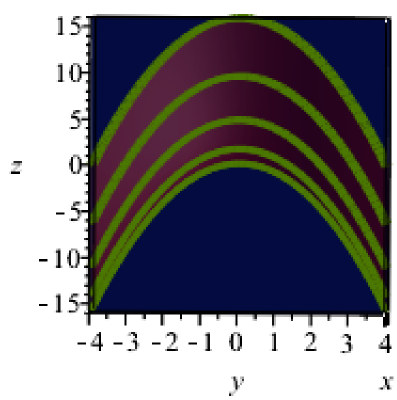
> $CrossSection(x\text{^}2 - y\text{^}2, y = 2, x = -4 ..4, y = -4 ..4, planes = 10, axes = normal);$

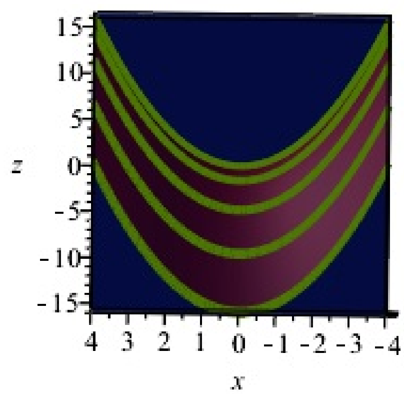
Most minimumos parabolát kapunk.
A következ ábrák mutatják a nyeregfelület xy, yz, xz síkokkal párhuzamos síkmetszeteinek sorozatát (több párhuzamos síkkal történ metszetét), az els három ábrán a síkra merleges, harmadik tengely irányából nézve, mintegy egyetlen síkra vetítve a metszeteket, a második sor ábrái ugyanezt mutatják, de itt látható, hogy térbeli ábrákról van szó.



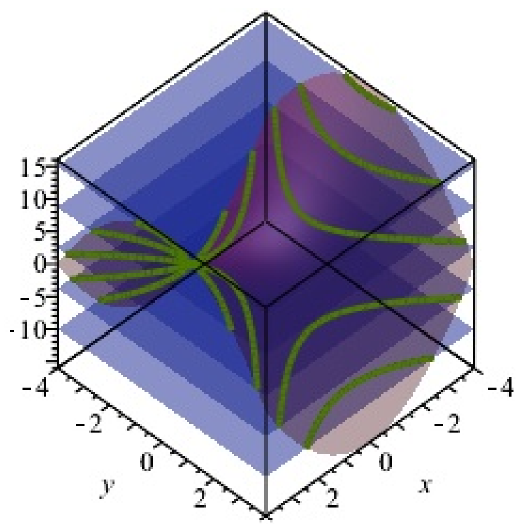
The intersection of the surface $f(x, y) = x^2 - y^2$ and one or more planes of the form $y = constant$.



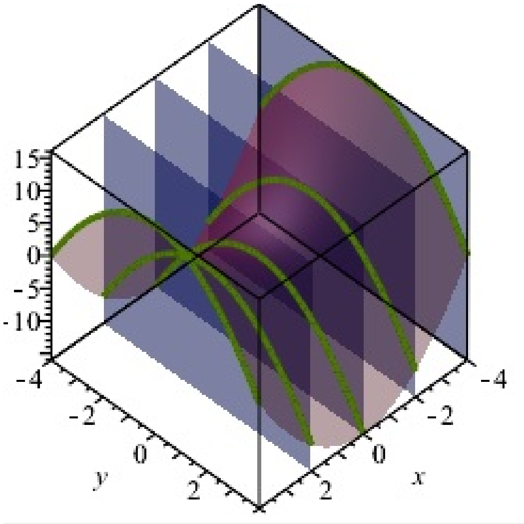


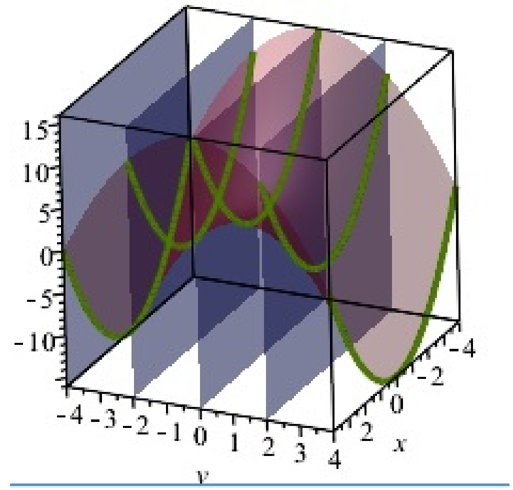


15
10
5
z
0
-5
-10
-15
4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4
x



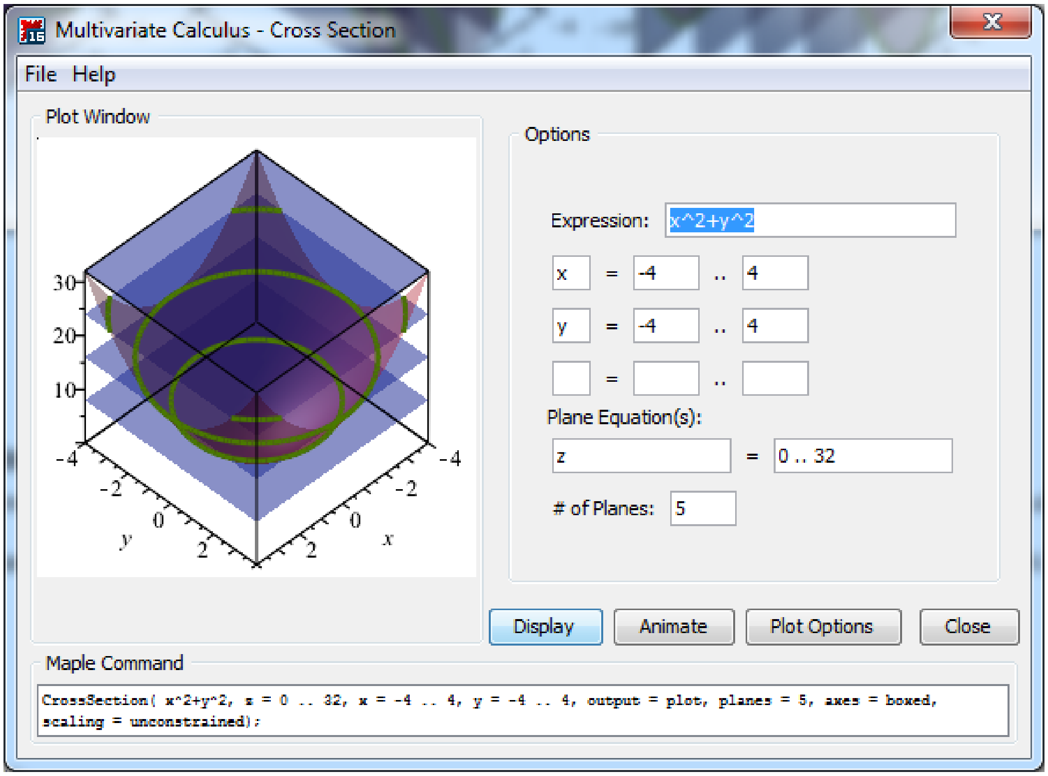
15
10
5
0
-5
-10
-4
-2
0
y
2
-4
-2
0
x
2





A különböz felületek síkmetszeteinek elállításával magunk is kísérletezhetünk a "Kétváltozós szemléltetés" elnevezés gombra kattintva. A gomb alatt látható ablakba tetszleges kétváltozós függvény képletét írva tudjuk a mindhárom koordináta síkkal párhuzamos síkmetszeteket elállítani és tanulmányozni.

Kétváltozós szemléltetés



Értelmezési tartomány

A kétváltozós függvények esetén is, ha a feladat nem adja meg ,
meg kell határoznunk az értelmezési tartományt, egyszerűbben a kikötést.

Ha a feladat megadja az értelmezési tartonányt, könnyebb dolgunk van.
Először nézzünk erre egy példát. Ábrázoljuk a $f(x, y) = (4 \cdot x - x^2) \cdot \cos(y)$ függvényt az adott $x = 1\,..3,\ y = -\frac{\pi}{4}\,..\frac{\pi}{4}$ tartományon.

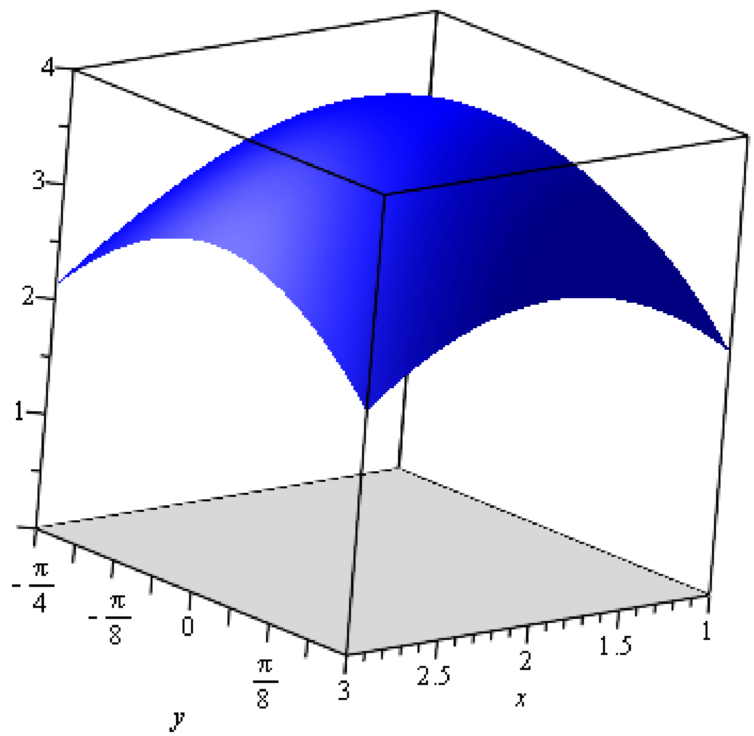
> $A := plot3d\left((4 \cdot x - x^2) \cdot \cos(y), x = 1\,..3, y = -\frac{\pi}{4}\,..\frac{\pi}{4}, style = patchnogrid, color = blue, axes = boxed\right)$

$$A := PLOT3D(\ldots) \tag{3.1}$$

> $B := plot3d\left(0, x = 1\,..3, y = -\frac{\pi}{4}\,..\frac{\pi}{4}, style = patchnogrid, color = grey\right)$

$$B := PLOT3D(\ldots) \tag{3.2}$$

> $display(\{A, B\});$



>

A következ példák, azokat a leggyakoribb eseteket veszik sorra, amikor nekünk kell kikötést tenni.
1. A függvény hányadost tartalmaz. A nevez nem lehet 0. Ábrázoljuk a kikötést, az $x^2+y^2-9=0$-t, mint egyváltozós függvényt. A kapott görbén nincs értelmezve a függvény.

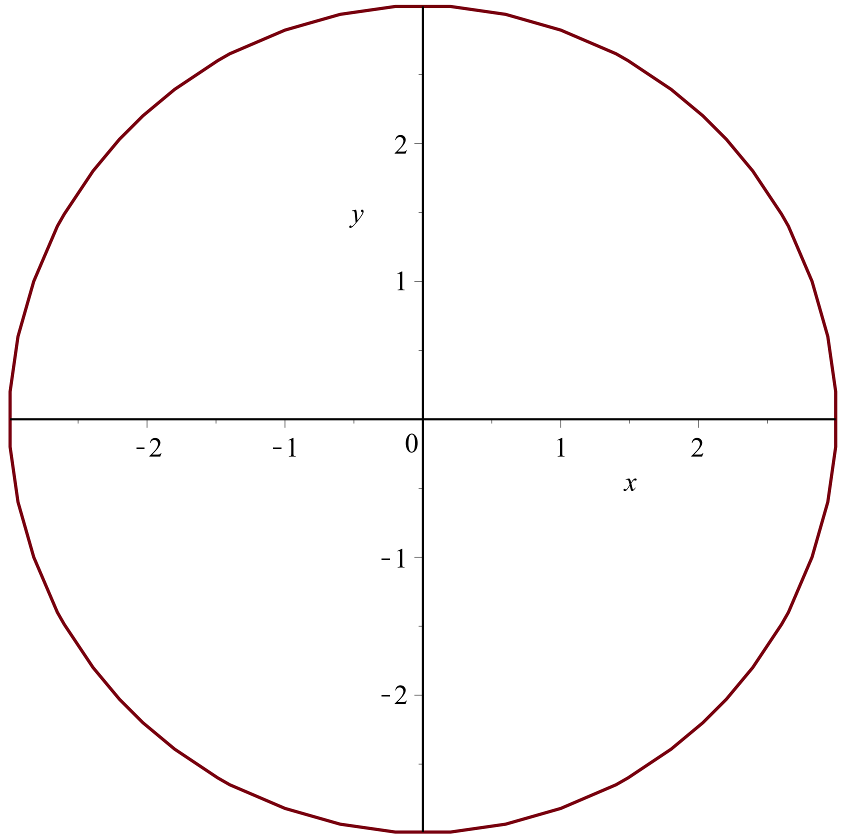
> $\frac{x \cdot y}{x^2+y^2-9}$

$$\frac{x\,y}{x^2+y^2-9} \quad \textbf{(3.3)}$$

> *with*(*plots*, *implicitplot*);

[*implicitplot*] **(3.4)**

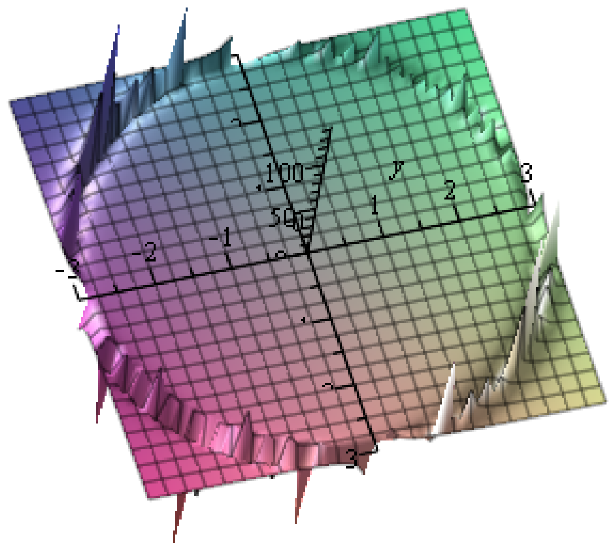
> *implicitplot*$(x^2+y^2-9=0, x=-5..5, y=-5..5)$



Tehát a fenti függvény mindenütt értelmezve van kivéve az ábrán látható kör pontjai felett.
Most ábrázoljuk a felületet. Hogyan látszik az ábrán az értelmezési tartomány? Ha jobb gombbal az ábrára kattintva a tengelyek címnél a z értékét -2tl, 2-ig engedjük futni, nagyon szép szemléletes ábrát kapunk. Így jól láthatóvá válik, hogy hogyan szakad a függvény? (Hogy lehet úgy beállítani, hogy így maradjon állandóra?)

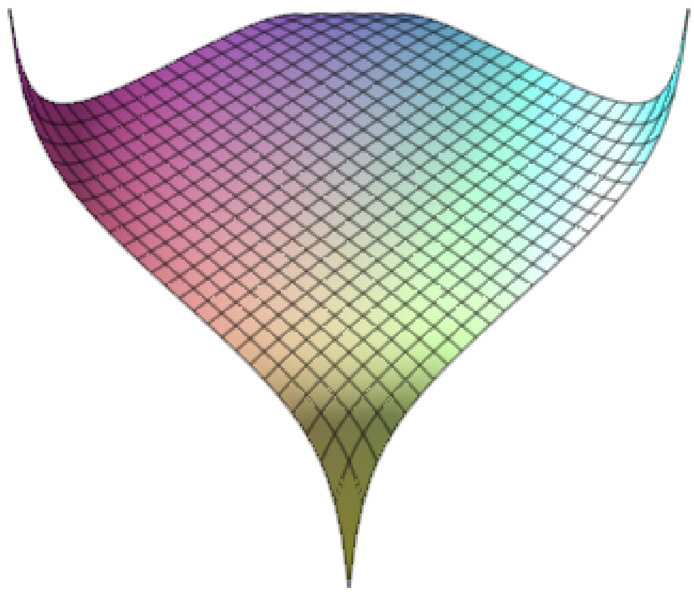
> $plot3d\left(\dfrac{x \cdot y}{x^2+y^2-9}, x=-3..3, y=-3..3, axes=normal\right)$

Ha x és y értéket is csak -2 és 2 között futtatjuk, a szakadás nem látszik, hiszen teljesen a kör belsejében maradunk, de a függvény menete jól szemléltethet az adott tartományon.

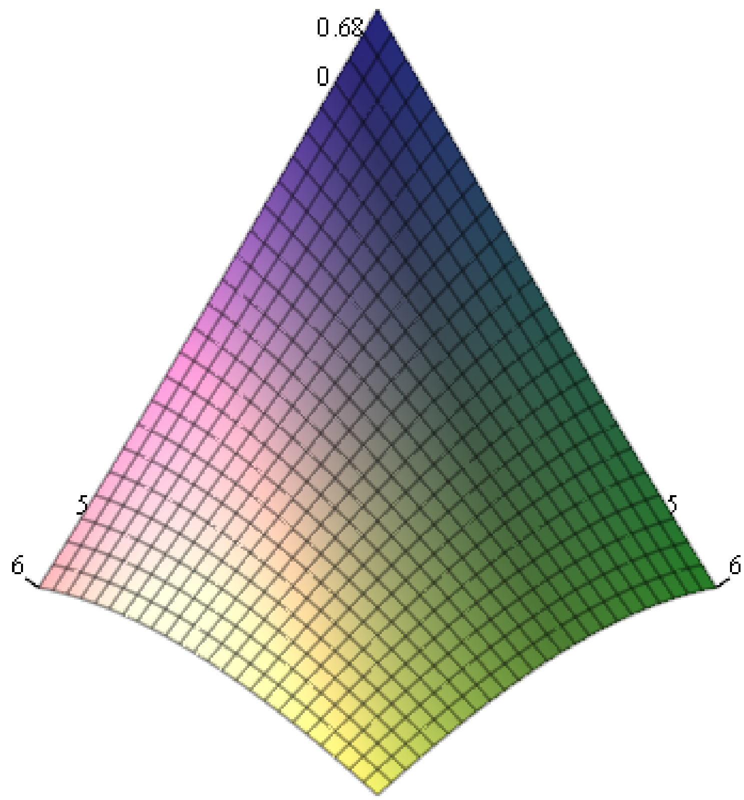


> $plot3d\left(\frac{x \cdot y}{x^2+y^2-9}, x=-2..2, y=-2..2\right)$

A szakadási körön kívül is megszemlélhetjük a függvényt:



> $plot3d\left(\frac{x\cdot y}{x^2+y^2-9}, x=4..6, y=4..6, axes=normal\right)$



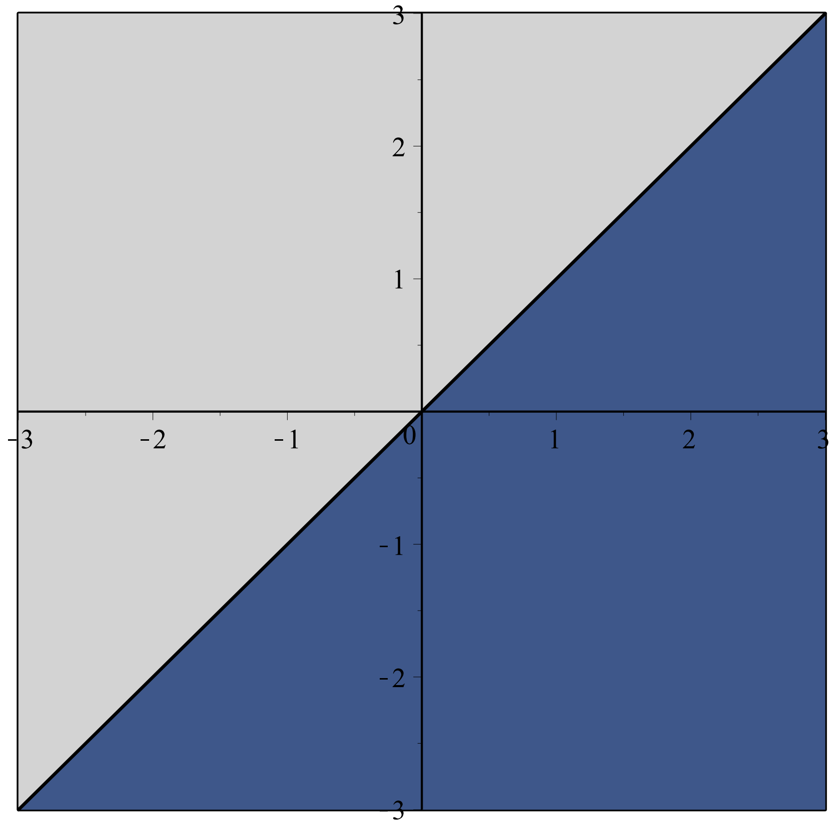
2. Kikötés gyökös függvény esetén: ekkor a gyök alatt csak nemnegatív szám állhat. A Maple megoldja az egyenltlenséget, és ábrázolja 2 dimenzióban, a sötétkék tartomány felett van értelmezve a függvény.

> $f(x, y) := \sqrt{x - y}$

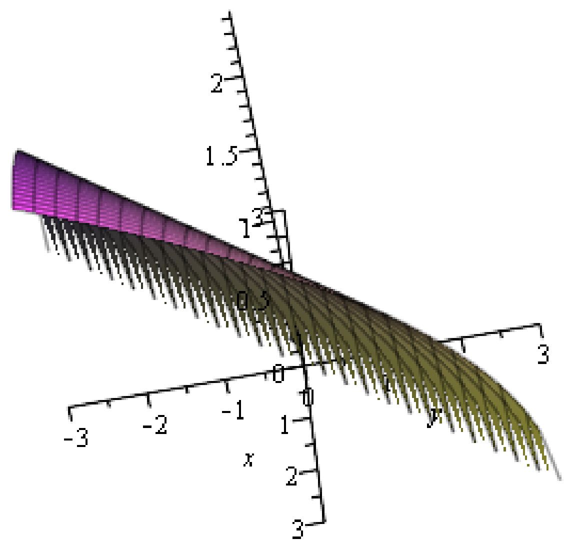
$$f := (x, y) \rightarrow \sqrt{x - y} \quad \textbf{(3.5)}$$

> $inequal(\{x - y \geq 0\}, x = -3 ..3, y = -3 ..3);$

Ezután a függvényt három dimenzióban ábrázoljuk, a z tengelyre merleges irányból nézve itt is látjuk az értelmezési tartományt.



> $plot3d\left(\sqrt{x-y}, x=-3..3, y=-3..3, axes=normal\right)$



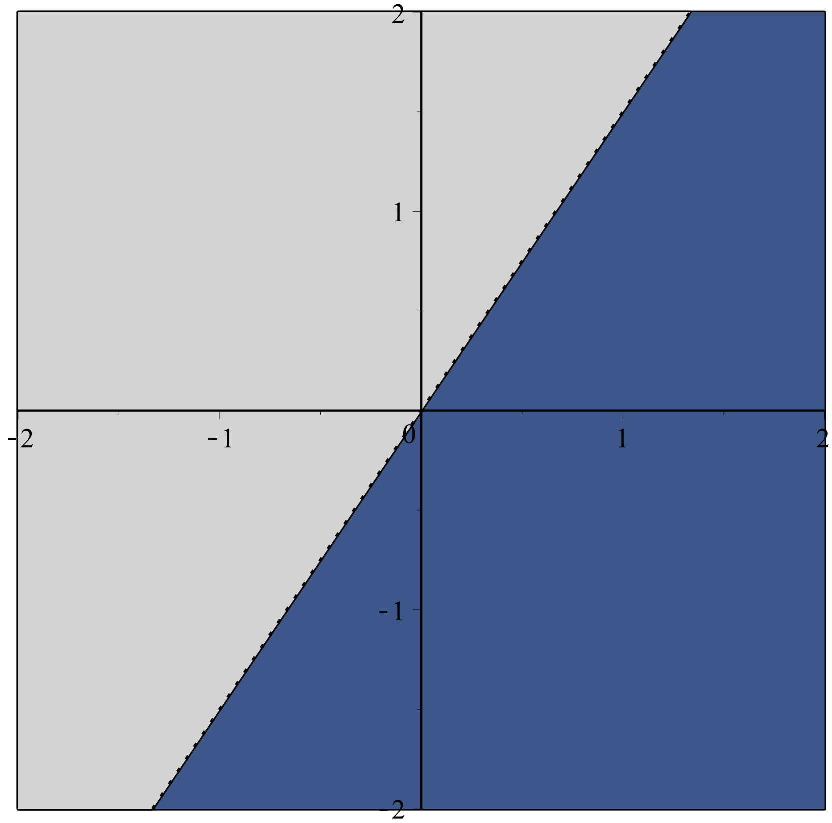
Az értelmezési tartomány ábrájával jól összevethet a 3 dimenziós ábra, ha a szokásos 3D Descartes koordináta - rendszert állítjuk be és jobb gombbal a z tengely irányú tájolást.

Kikötés logaritmus függvény esetén: ekkor a logaritmus után csak pozitív szám állhat.

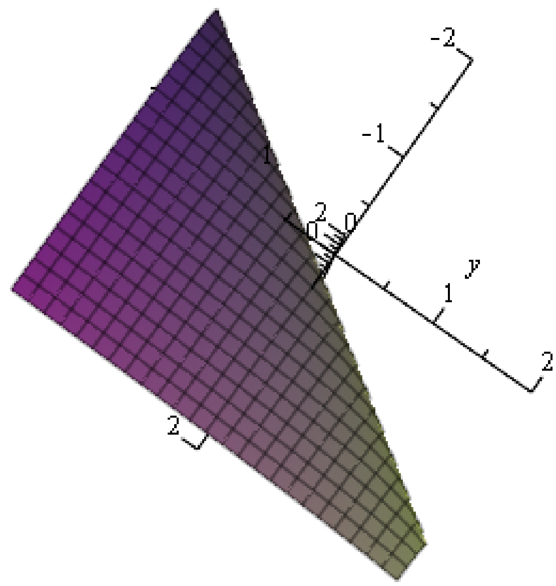
> $g(x, y) := \ln(3\cdot x - 2\cdot y)$

$$g := (x, y) \rightarrow \ln(3\,x - 2\,y) \tag{3.6}$$

> $inequal(\{3\cdot x - 2\cdot y > 0\}, x = -2..2, y = -2..2);$



> $plot3d(\ln(3\cdot x - 2\cdot y), x=-2..2, y=-2..2, axes=normal)$



Határérték

A kétváltozós függvények esetében is definiálhatjuk a határértéket és a folytonosságot. Egy pont környezete az egyváltozós függvények esetében nyílt intervallun volt, most a környezet egy nyílt körlap.

Egy $P_0(a, b)$ középpontú δ sugarú nyílt körlap a $(x-a)^2+(y-b)^2<\delta$ egyenltlenséget kielégít $P(x, y)$ pontok halmaza.

Az f kétváltozós függvényrl akkor mondjuk, hogy a $P_0(a, b)$ helyhez tartozó határértéke az A szám, ha tetszőleges kis $\varepsilon > 0$ esetén mindig létezik a P_0 pontnak olyan δ sugarú környezete (ahol a környezet egy P_0 középpontú δ sugarú nyílt körlap), hogy az ebből a környezetből választott x,y számpárhoz tartozó $f(x, y)$ függvényértékek A-tól való eltérése kisebb, mint ε.

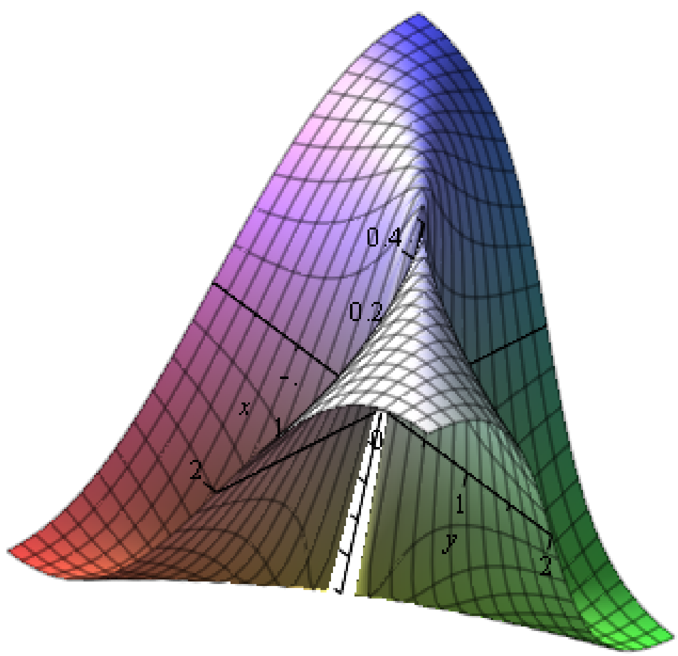
Matematikai jelölésekkel: Ha $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$, akkor $|f(x, y)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to a,\, y \to b} f(x, y)=A$ (nincs valami jobb jelölés?)

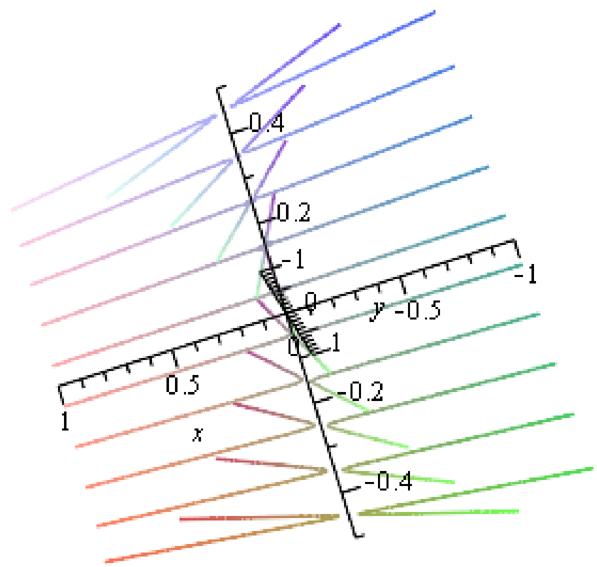
A legtöbb kétváltozós függvény is "jól viselkedik" van határértéke minden pontban. Most nézzük meg, hogy milyen az, ha egy kétváltozós függvénynek nincs határértéke egy pontban.

Tekintsük az $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ függvényt, belátjuk, hogy a (0,0) ban a függvénynek nincs határértéke.
A tengelyeken a függvény értéke 0, mert a tört számlálója 0 és a nevezje nem 0, ezért a (0,0) pont minden környezetében van olyan pont, ahol a függvényérték 0. De, ha a függvényt az y = x egyenes pontjaiban nézzük, akkor itt a függvényértéke 1/2 (helyettesítsük be a függvény képletébe y = x -et), ezért a (0,0) minden (bármilyen kicsi) környezetében van olyan pont, ahol a függvény 1/2-et vesz fel. Így világosan látszi, hogy bármilyen határértéket is adunk meg, pl. ε=1/4-hez nem lehet jó δ-t találni.
Ha az origón átmen $y = m \cdot x$ egyenest tekintjük, a függvény képletébe behelyettesítve $\frac{m}{1 + m^2}$ adódik.
Nézzük meg, hogy néz ki ez a függvény az origó körül:

> $plot3d\left(\frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}, x = -2..2, y = -2..2\right)$



> $plot3d\left(\frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}, x = -1..1, y = -1..1, style = contour\right)$



Az (a,b) pontban folytonosnak nevezzük az f(x,y) függvényt, ha az (a,b) pontban értelmezve van, létezik ott véges határértéke és az megegyezik a függvény helyettesítési értékével. (A definíció pontosan ugyanaz, mint az egyváltozós függvények esetében, csak ott természetesen más a határérték fogalma.)

Parciális deriváltak

Kétváltozós, $f(x, y)$ függvények differenciálása.

1. x szerinti parciális derivált:

Legyen az f függvény értelmezve a $P_0(x_0, y_0)$ pontban és annak egy környezetében, az $f(x, y)$ függvény x szerinti parciális deriváltjának nevezzük a következ határértéket:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \right),$$

Az x szerinti parciális deriválásnál, y rögzített, x változó.

Szemléletesen: Metsszük el a felületet egy y tengelyre merleges síkkal, ez a felületbl egy görbét metsz ki, a görbe érintjének a meredeksége, más szóval iránytangense a felület x szerinti parciális deriváltja.

> $F := plot3d\left(x^2 - y^2, x=-5..5, y=-5..5, style=patchnogrid, color=grey, transparency=0.6, axes=normal\right)$

$$F := PLOT3D(...) \tag{5.1}$$

> $H := implicitplot3d(y=1, x=-5..5, y=-5..5, z=-25..25, transparency=0.7, color=magenta, style=patchnogrid)$

$$H := PLOT3D(...) \tag{5.2}$$

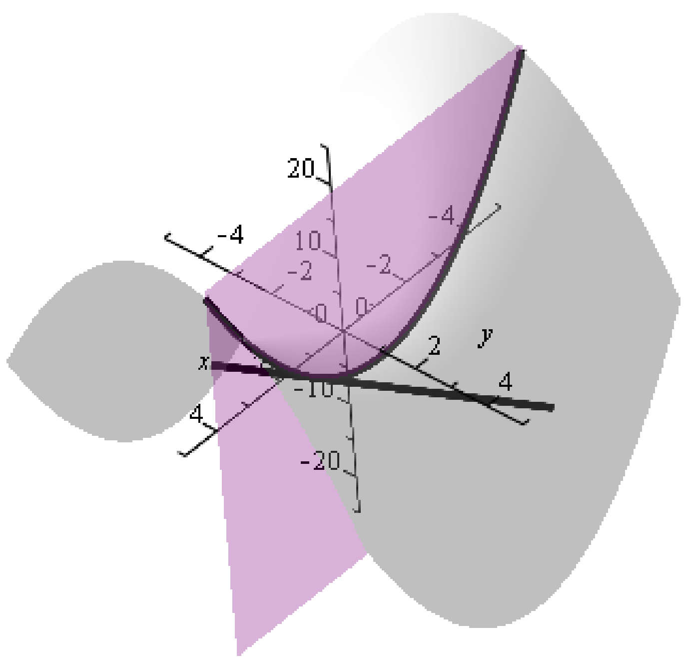
> $G := plot3d\left(x^2 - y^2, x=-5..5, y=1..1, thickness=3, color=red\right)$

$$G := PLOT3D(...) \tag{5.3}$$

> $C := plot3d(4 \cdot x - 5, x=-5..5, y=1..1, thickness=3)$

$$C := PLOT3D(...) \tag{5.4}$$

> $display(\{F, G, C, H\})$



2. y szerinti parciális derivált:

Legyen az f függvény értelmezve a $P_0(x_0, y_0)$ pontban és annak egy környezetében, az $f(x, y)$ függvény y szerinti parciális deriváltjának nevezzük a következ határértéket:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \right),$$

Az y szerinti parciális deriválásnál, x rögzített, y változó.

Szemléletesen: Metsszük el a felületet egy x tengelyre merleges síkkal, ez a felületbl egy görbét metsz ki, a görbe érintjének a meredeksége, más szóval iránytangense a felület y szerinti parciális deriváltja.

> $F := plot3d\left(x^2 - y^2, x = -5\,..5, y = -5\,..5, style = patchnogrid, color = grey, transparency = 0.6, axes = normal\right)$

$$F := PLOT3D(\ldots) \tag{5.5}$$

> $H := implicitplot3d(x = 2, x = -5\,..5, y = -5\,..5, z = -25\,..15, transparency = 0.7, color = magenta, style = patchnogrid)$

$$H := PLOT3D(\ldots) \tag{5.6}$$

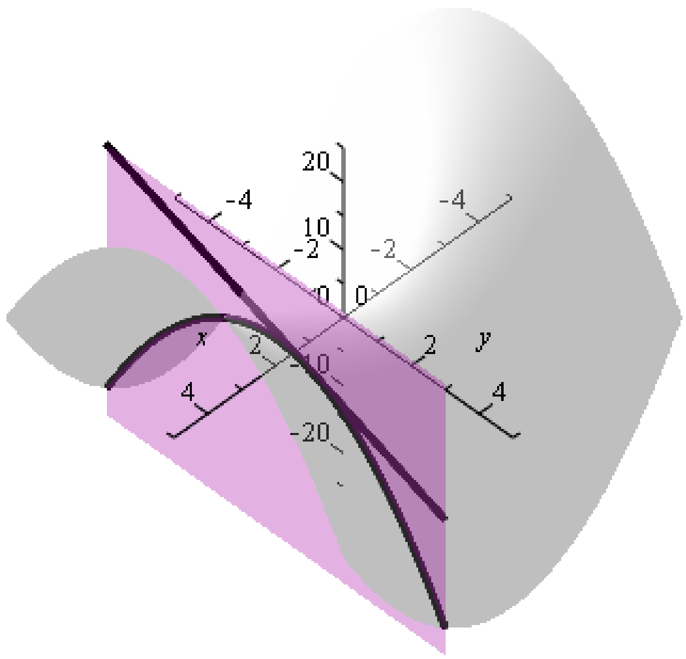
> $G := plot3d\left(x^2 - y^2, x = 2\,..2, y = -5\,..5, thickness = 3, color = red\right)$

$$G := PLOT3D(\ldots) \tag{5.7}$$

> $C := plot3d(-2 \cdot y + 5, x = 2\,..2, y = -5\,..5, thickness = 3)$

$$C := PLOT3D(\ldots) \tag{5.8}$$

> $display(\{F, G, C, H\})$



Hogyan derviválunk parciálisan kétváltozós függvényt ? Tanuljuk meg a parciális deriválás technikáját!

$f(x, y) = 2 \cdot x^2 - x \cdot y^3$,

$$f(x, y) = 2 \cdot x^2 - x \cdot y^3 \qquad \frac{\partial}{\partial x} f = 4 \cdot x - y^3$$

A konstansnak tekinthet tényez van a kék karikában.

Az x szerinti parciális derivált kiszámításakor az els tagot az egyváltozós függvényeknél megszokott módon deriváljuk, mert csak x-et tartalmaz, y-t nem, ezért lesz a $2 \cdot x^2$ deriváltja $4 \cdot x$. A második tagnál már bonyolultabb a helyzet. A definíció azt mondja, hogy az x szerinti parciális derivált esetében y rögzített, nem változik, ezért a deriválás során konstansként kezeljük, x deriváltja 1, ezért $x \cdot y^3$ deriváltja y^3 lesz.

$f(x,y) = 2\cdot x^2 - x\cdot y^3$ $\qquad \frac{\partial}{\partial y} f = -3\cdot x\cdot y^2$ A konstansnak tekinthet tényezk van a kék karikában.

Az y szerinti parciális deriválásnál az els tagban nincs y, ezért a $2\cdot x^2$ állandónak tekinthet, ezért deriváltja 0, a második tagban, most x lesz állandó és y^3-t kell deriválnunk, ez $3\cdot y^2$ és az x konstanssal szorozva lesz $3\cdot x\cdot y^2$ a kivonás miatt - eljelet kap.

Az egyváltozós esethez hasonlóan itt is definiálhatunk magasabbrend deriváltakat. Elvileg itt négy másodrend derivált lenne.
Amit elször x szerint deriváltunk, másodszor is x szerint deriváljuk: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$
Amit elször x szerint deriváltunk, most y szerint deriváljuk: $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x,y)$

Amit elször y szerint, másodszor x szerint: $\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} f(x,y)$

És végül, kétszer egymás után y szerint deriválunk: $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$

Magasabb rend deriváltak az elz példában:
$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 4,\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = -6\cdot x\cdot y,\quad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} f(x,y) = -3\cdot y^2$

Általánosan is igaz, hogy $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} f(x,y)$

Számoljunk parciális deriváltakat Maple-ben:

```
> f(x, y) := x^3 - y^3 + 8·x·y
```
$$f := (x,y) \to x^3 - y^3 + 8\,x\,y \tag{5.9}$$
```
> e := diff(f(x, y), x);
```
$$e := 3\,x^2 + 8\,y \tag{5.10}$$
```
> g := diff(f(x, y), y);
```
$$g := -3\,y^2 + 8\,x \tag{5.11}$$
```
> a := diff(f(x, y), x$2);
```
$$a := 6\,x \tag{5.12}$$
```
> b := diff(f(x, y), y$2);
```
$$b := -6\,y \tag{5.13}$$
```
> c := diff(f(x, y), x, y);
```

$$c := 8 \tag{5.14}$$

Iránymenti derivált

A parciális deriváltakon kívül gyakran számolunk még iránymenti deriváltat is. A felületet itt is egy xy síkra merleges síkkal metsszük el, de most a sík nem merleges sem az x, sem az y tengelyre, hanem egy xy síkban fekv vektorral párhuzamos. Ez a sík is egy görbét metsz ki a felületbl, ennek a görbének az iránytangense az iránymenti derivált.
Az iránymenti derivált számításánál tehát nemcsak egy pontot kell megadnunk, mint a parciális derváltak kiszámításánál, hanem egy irányt is. A Maple-ben beépített utasítások számolják az iránymenti deriváltat és szemléltetik is azt.

> $with(VectorCalculus):$

> $DirectionalDiff\left(x^2+3\cdot y^2, point=[-2,1], \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, cartesian[x,y]\right);$

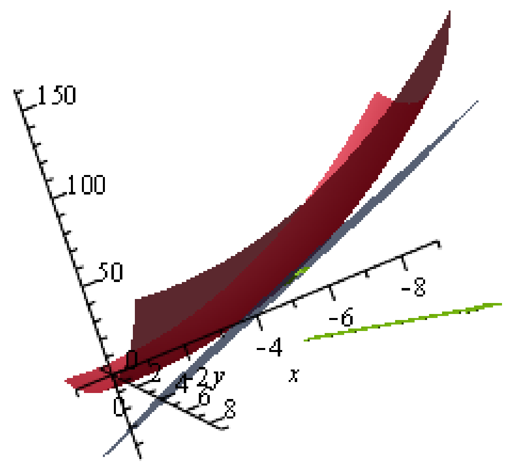
$$3-2\sqrt{3} \tag{6.1}$$

> $with(Student[MultivariateCalculus]):$

> $DirectionalDerivative(x^2+y^2, [x,y]=[1,2], [3,4]);$

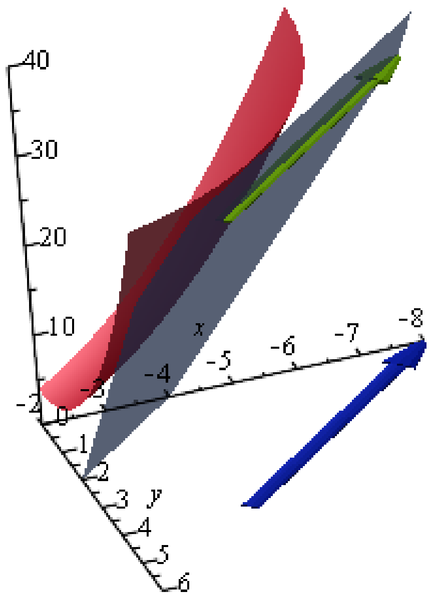
$$\frac{22}{5} \tag{6.2}$$

> $DirectionalDerivative(x^2+y^2, [x,y]=[-4,4], [-4,4], output=animation, frames=7);$



At $(x, y) = (-4, 4)$, the directional derivative of $f(x, y) = x^2 + y^2$, computed in the initial direction $-4\,i + 4\,j$. Each direction vector is projected onto the tangent plane at the evaluation point.

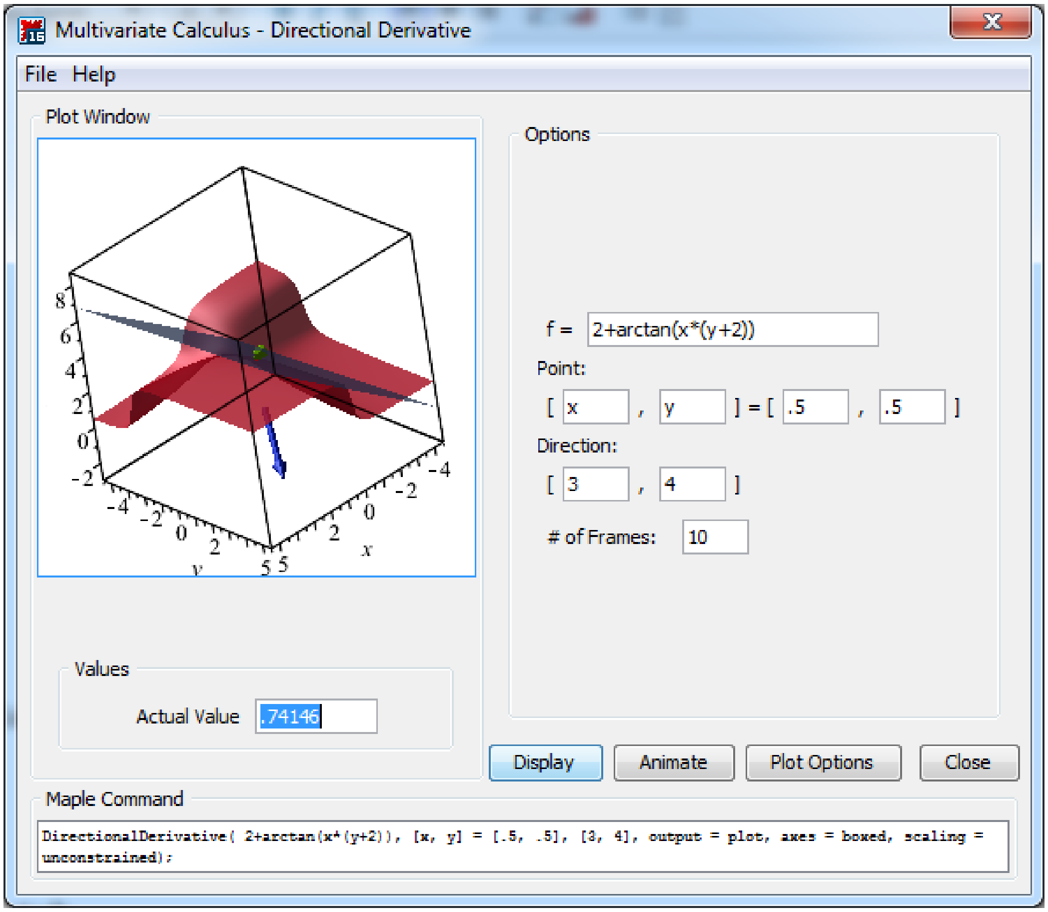
> $DirectionalDerivative(x\hat{}2 + y\hat{}2,\ [x, y] = [-4, 4],\ [-6, -6],\ x = -8\,..-2,\ y = 0\,..6,\ z = 0\,..40,$
> $output = plot);$



At $(x, y) = (-4, 4)$, the directional derivative of $f(x, y) = x^2 + y^2$, computed in the direction $-6\,i - 6\,j$. The direction vector is projected onto the tangent plane at the evaluation point.

> *Student*[*MultivariateCalculus*][*CrossSectionTutor*]();

Iránymenti derivált



Megoldott feladatok

1. Ábrázolja paraméteresen a $z = x + \dfrac{1}{y}$ függvényt az x= 0,1,2 értékekre. Jelölje meg az ábrán azt a P_1 pontot, amelyre x_1 =1, y_1 =2 és számítsa ki a z_1 értéket!

Megoldás:

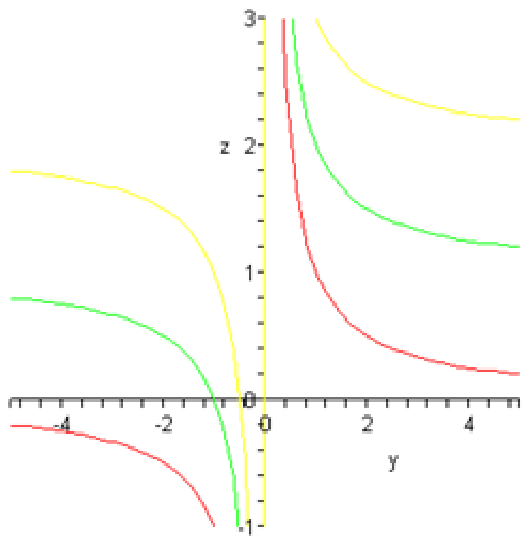
$$z = x + \frac{1}{y} \Rightarrow \text{ha} \quad x_1 = 1 \quad y_1 = 2 \Rightarrow z_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow P_1\left(1;1;\frac{3}{2}\right)$$

Három függvényt kell ábrázolnunk, ezek:

ha $\quad x = 0$, akkor $\quad z = \frac{1}{y}$

ha $\quad x = 1$, akkor $\quad z = 1 + \frac{1}{y}$

ha $\quad x = 2$, akkor $\quad z = 2 + \frac{1}{y}$



2. Határozza meg a $z'_x(1;1)$ és $z'_y(1;1)$ értékeket, ha $z = (x+y)e^{y-x}$!

Megoldás:

$$z'_x = \left[(x+y)\cdot e^{y-x}\right]'_x = (x+y)'_x \cdot e^{y-x} + (x+y)\cdot\left(e^{y-x}\right)'_x = 1\cdot e^{y-x} + (x+y)\cdot e^{y-x}\cdot(-1) = e^{y-x} - (x+y)e^{y-x} =$$
$$= e^{y-x}(1-x-y) \Rightarrow z'_x(1;1) = e^{1-1}(1-1-1) = -1$$
$$z'_y = \left[(x+y)\cdot e^{y-x}\right]'_y = (x+y)'_y \cdot e^{y-x} + (x+y)\cdot\left(e^{y-x}\right)'_y = 1\cdot e^{y-x} + (x+y)\cdot e^{y-x}\cdot 1 = e^{y-x} + (x+y)e^{y-x} =$$
$$= e^{y-x}(1+x+y) \Rightarrow z'_y(1;1) = e^{1-1}(1+1+1) = 3$$

Tehát a függvényértékek: $\quad z'_x(1;1) = -1$ és $z'_y(1;1) = 3$

Feladatok önálló megoldásra

1. Számítsa ki az

$$f(x, y)=\frac{y^2+x}{x^2}$$

függvény (1,1) helyhez tartozó másodrend deriváltjait.

2. Ábrázolja paraméteresen a $z=\frac{1}{y}$ függvényt az x=0,1,2 értékekre. Jelölje meg az ábrán azt a P_1 pontot, amelyre $x_1=1$, $y_1=2$ és számítsa ki a z_1 értéket!
3. Határozza meg a $z'_x(1,1)$ és $z'_y(1,1)$ értékeket, ha $z=(x+y)\cdot e^{y-x}$!
4. Határozzuk meg a következ függvények elsrend parciális deriváltjait:

$$f(x, y)=2\cdot x^2-3\cdot y-1$$

$$f(x, y)=\left(x^2++2\right)\cdot(y-1)$$

$$f(x, y)=3\cdot x^2+y^2-5\cdot x\cdot y+3\cdot x-4\cdot y+10$$

$$f(x, y)=\sqrt{2\cdot x+y^2}$$

$$f(x, y)=\frac{2\cdot x}{x-y}$$

$$f(x, y)=\ln\left(x+y^2\right)$$

5. Számítsa ki a következ fügvények minden másodrend deriváltját!

$$f(x, y)=3\cdot x^2+\ln(y)-\sin(x)$$

$$f(x, y)=x\cdot y+y\cdot e^x$$

$$f(x, y)=x\cdot y^3-y\cdot x^3+x\cdot y$$

6. A következ feladatokban mutassuk meg, hogy $f''_{xy}=f''_{yx}$!

$$f(x, y)=\frac{1}{x}+x$$

$$f(x, y)=x\cdot lnx\cdot y$$

$$f(x, y)=4\cdot x^2-2\cdot y^2\cdot x+\ln(x)$$

7. Határozzuk meg a következ függvények iránymenti deriváltját a P_0 pontban és a **v** irányban!

$f(x, y)=x\cdot y-y^2$ $\quad P_0(4,5)$ $\quad$ **v** (3,4)

$f(x, y)=y\cdot x^3+x^2$ $\quad P_0(3,-5)$ $\quad$ **v** (1,-2)