

1. Hiba, hibakorlát

Használt Maple parancsok: evalf, identify, limit, plot

Ebben a fejezetben rövid összefoglalást adunk a numerikus módszerek, illetve a számítógép algebrai rendszer használatából eredő hibák lehetséges forrásairól.

A numerikus módszereknél alapvető fontosságú annak becslése, hogy közelítő számításunk eredménye mekkora hibával tér el (a többnyire ismeretlen) pontos értéktől.

A megoldás során fellépő hibák lehetséges okai:

- A probléma matematikai megfogalmazása nem pontos. (**Modellhiba**)
- A kezdeti adatok pontatlanok. (**Mérési** vagy öröklött **hiba**)
- A megoldási módszer pontatlan, végtelen sok lépéssel kapnánk pontos értéket. (**Képlethiba**)
- A gépi számolásnál kerekítési hibák lépnek fel. (**Műveleti**, vagy kerekítési **hiba**.)
- A numerikus eljárás programozása során elkövetett hiba. (**Programhiba**)

Az algoritmus készítésének szempontjai:

- Legyen **meghatározott**, vagyis a lépések mindegyike egyértelmű legyen.
- Legyen **általános**, működjön tetszőleges bemenő adatokkal.

1. 1. Definíció

Ha x a pontos érték, a pedig a közelítő érték, akkor az $|x - a| = \Delta a \leq \delta a$ kifejezésben a Δa az **abszolút hiba**, δa az **abszolút hibakorlát**. □

Használják az $x = a \pm \delta a$ megfogalmazást is, ami az jelenti, hogy $x \in [a - \delta a, a + \delta a]$.

1. 2. Definíció

Az x szám valamely a közelítő értékének **relatív hibája** $\frac{\delta a}{x}$. □

Ha x -et nem ismerjük, helyette a $\frac{\delta a}{a}$ kifejezést használjuk.

Fontos annak ismerete, hogy a mérési adatok hibája hogyan befolyásolja a számításokban fellépő hibát, függvényértékek hibája hogyan függ a független változók hibájától. Ha az $x \rightarrow f(x)$ függvénykapcsolatot vizsgáljuk, a függvényértékek relatív hibájának és a független változók relatív hibájának aránya differenciálható $f(x)$ függvény esetén:

$$\frac{|f(a + \Delta a) - f(a)|}{|f(a)|} \cdot \frac{|\Delta a|}{|a|} \approx \frac{|f'(a)| \cdot |\Delta a|}{|f(a)|} \cdot \frac{|a|}{|\Delta a|} = \frac{|f'(a)| \cdot |a|}{|f(a)|}.$$

1. 3. Definíció

Az $\frac{|f'(a)| \cdot |a|}{|f(a)|}$ mennyiséget az $f(x)$ függvény a pontbeli **kondíciószámának** nevezzük. □

Egy függvényt rosszul kondicionált, ha nagy a kondíciószáma.

1. Példa Az alábbi két kifejezés határértéke a ∞ -ben π . A függvények ábrázolásával viszont kiderül,

hogy az egyik rosszul, a másik jól kondicionált.

<pre>> restart; f := x sqrt(2 - sqrt(4 - (2 pi / x)^2)) : > lim_{x -> inf} f = lim_{x -> inf} f > plot(f, x = 10000 .. 10^5) ></pre>	<pre>> g := (2 pi) / sqrt(2 + sqrt(4 - (2 pi / x)^2)) : > lim_{x -> inf} g = lim_{x -> inf} g > plot(g, x = 1000 .. 10^5) ></pre>
--	---

▼ 1. 4. Definíció

Csonkítási hibáról beszélünk, ha az egzakt matematikai kifejezés helyett annak közelítését alkalmazzuk a numerikus számítások során. □

Ez akkor lép fel, ha egy függvénynek ismerjük az értékét x_0 helyen, és valamilyen numerikus eljárással következtetünk az x_0+h helyen vett függvényértékre. A csonkítási hiba az elhagyott tagoktól (a maradéktól) függ. Kifejezési formája $O(h^n)$ (ordo: rend), ami azt fejezi ki, hogy a hiba arányos h n -edik hatványával. Ez azt jelenti, hogy ha a hiba $O(h)$ akkor a h felezése a hiba felezését eredményezi. A hiba becslése általában bonyolult matematikai apparátust kíván, ezért jelen jegyzetben általában nem tárgyaljuk.

Az ismertett közelítő eljárásokat addig ismétljük, míg az egymás után következő két közelítés eltérése egy előre megadott ε hibakorlátnál *kiseb*b.

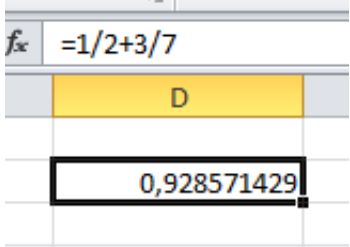
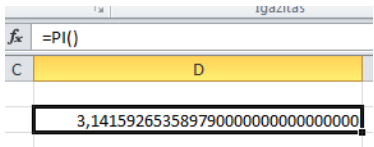
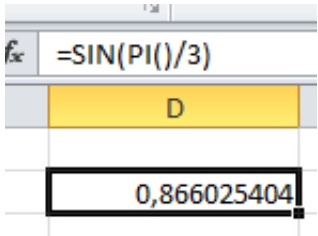
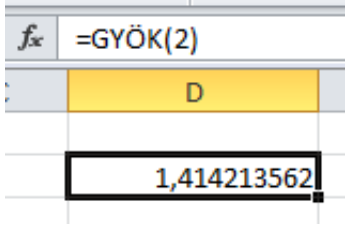
Jegyzetünk a **Maple számítógép algebrai rendszerre** épül, ezért említjük meg azon előnyöket, amelyek a számítógép algebrai rendszerek használatánál jelentkeznek, szemben bármilyen számológéppel vagy numerikusan számoló szoftverrel.

A számítógép algebrai rendszerek használatával a numerikus módszerek alkalmazása könnyebbé válik, illetve a műveletek sokkal kisebb hibával terheltek. A Maple rendszer ahol csak lehet, egzakt módon számol, illetve az *evalf* segítségével a lebegőpontos számra való kerekítés tetszőleges (a gép memóriájától függő) pontosságra beállítható. Az *identify* parancs segítségével többnyire megtalálja azt a számot, aminek a kerekített értékét adtuk meg.

2. Példa Hasonlítsuk össze, mit ad eredményül a Maple és az Excel a következő kifejezésekre: $\frac{1}{2}$

$$+ \frac{3}{7}, \sin\left(\frac{\pi}{3}\right), \sqrt{2}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}, 4.5558062159628882873$$

Maple	Excel
<pre>> 1/2 + 3/7 > evalf(%, 100) ></pre>	

> > >	 A kerekítés maximum 30 jegyre lehetséges.
> π; <i>evalf</i>(π, 200) > $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ > <i>evalf</i>(%, 9)	 
> $\sqrt{2}$ > <i>evalf</i>(%, 9)	
> $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ > <i>evalf</i>(%, 9) >	

> > >	$f_x = \text{=SZUM(D13:D25)}$	
	C	D
	i	1/i^2
	1	1
	2	0,25
	3	0,111111111
	4	0,0625
	5	0,04
	6	0,027777778
	7	0,020408163
	8	0,015625
	9	0,012345679
	10	0,01
	11	0,008264463
	12	0,006944444
		1,564976638
	Csak véges számú elem összeadása lehetséges	
> 4.5558062159628882873 : > <i>identify</i> (%) >	A numerikus kalkulátor nem képes az azonosításra.	

Az egyes számítási eljárások elméleti ismertetése után minden fejezet tartalmazza a számítási algoritmusok Maple implementációját. A számítások lépéseit általában blokkdiagrammal szemléltetik, jegyzetünkben sok esetben közvetlenül a Maple implementáció jelenik meg.