

▼ 1. Véletlennel összefüggő kísérletek kimeneteleinek leírása. Esemény algebra.

Valószínűesszámitás és statisztika számítógép algebrai támogatással	Készült a PTE PMMIK és a TÁMOP -4.1.2.A/1-11/1-2011-0098 támogatásával
Klincsik Mihály	

▼ 1.1. Bevezetés

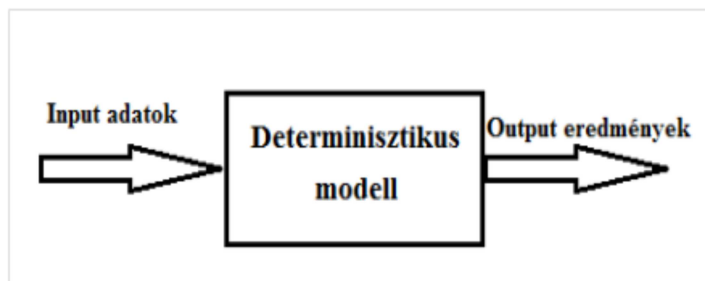
A mérnöki és a természettudományos gyakorlatban előforduló **folyamatok, jelenségek** egyrésze **determinisztikus**. Ez alatt azt értjük, hogy a jelenség a megadott feltételek mellett **mindíg ugyan törvényszerűségnek engedelmeskedik** és ezért **eredménye kiszámítható**. Ezzel ellentétben vannak olyan folyamatok és jelenségek, amelyek **leírásához** szükségesek **sztochasztikus** vagy **valószínűségi modellek**, mert a jelenség **eredménye véletlenszerűen változik** és előre **nem számítható ki**. Az ilyen jelenségek tanulmányozásához "nagyszámú" **kísérletet** kell elvégezni, hogy az egyes **kimenetek** gyakoriságainak **megfigyelésével** valószínűségi modellt tudjunk felállítani. A kísérlet összes lehetséges kimenetelét összegyűjtve egy halmazba kapjuk az **eseményteret**. Az eseménytér **részalmazait** nevezzük **eseményeknek**. Az eseményekkel ugyanolyan **műveleteket** végezhetünk, mint a halmazokkal. Így beszélhetünk események **tagadásáról, uniójáról, metszetről és különbségéről**. Az események között végzett műveletekkel újabb eseményeket kapunk. Ha elegendően sok esemény áll rendelkezésünkre, akkor az események olyan rendszerét kapjuk, amely **zárt** a tagadás, az **unió** és a **metszet** műveletére nézve. Az események ilyen rendszere külön nevet kapott és ez a **σ -algebra**. Másik nevezetes eseményrendszer a **teljes eseményrendszer**, amelyben az események egymást páronként kizárják és uniójuk a teljes eseménytér. Az ilyen események az eseménytér egy osztályozását adják és a teljes valószínűség-tételben valamint a Bayes-tételben fontos szerepet kapnak.

Célunk az alábbi fogalmak, összefüggések és eljárások megismerése, megértése	
A véletlen és a determinisztikus jelenségek közötti különbségek és matematikai modelljeik	Halmazok Descartes-szorzata
Kísérletek , amelyek kimenetele függ a véletlentől	De Morgan - azonosságok halmazra
Játékok , amelyekben a nyerés a véletlenre épül	Hatványhalmaz
Eseménytér választás: diszkrét és folytonos esetek megkülönböztetése	Események σ-algebrája és a legszűkebb σ -algebra
Esemény fogalma. Ábrázolás Venn-diagrammmal.	Teljes eseményrendszer
Speciális események : lehetetlen esemény, biztos esemény, elemi esemény, összetett esemény	Sorosan és párhuzamosan kapcsolt rendszerek működésének leírása eseményekkel
Műveletek eseményekkel : tagadás, összeg, szorzat, különbség. Műveleti azonosságok.	Véletlen kísérletek Maple modellezése
Részesemény és egymást kizáró események	Maple <i>randomize</i> , <i>rand</i> , <i>randperm</i> , <i>randcomb</i> , <i>powerset</i> , <i>convert</i> , <i>seq</i> , <i>intersect</i> , <i>inequal</i> eljárásai

▼ 1.2. Véletlennel összefüggő kísérletek és kimenetek

1.2.1. DEFINÍCIÓ. Determinisztikus jelenségek

Az olyan jelenségeket nevezzük **determinisztikus jelenségeknek**, amelyek eredménye **kiszámolható**, ha ismertek a **bemenő adatok** és a körülményeket jellemző **paraméterek**.



1.2.1. Ábra. A determinisztikus jelenség modellje

1.2.2. PÉLDA. A szabadesés jelensége

Ha egy tárgyat (pl. pénzérmét) leejtünk kezdő sebesség nélkül a föld felszínétől mért

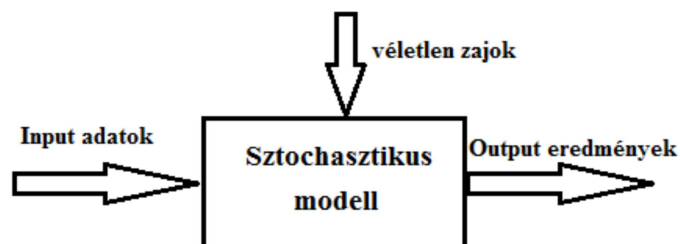
$h > 0$ magasságból, akkor $t > 0$ idő alatt a tárgy által megtett $s(t)$ utat az $s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$ képlettel

számolhatjuk ki (ahol $g \approx 9.81 \left[\frac{m}{\text{sec}^2} \right]$ a gravitációs állandó és eltekintünk a légellenállástól).

Annak igazolására, hogy a szabadon eső test sebessége és az általa megtett út is független a tárgy m tömegétől, ahhoz kísérleteket kellett végezni. Ezt a híres kísérletet végezte el Galileo Galilei és a matematikai modellt Newton vezette le a tömegvonzás törvényéből. A vizsgált szabadesés jelensége determinisztikusnak bizonyult és ezért az igazolására végzett kísérlet determinisztikus kísérlet.

1.2.3. DEFINÍCIÓ. Sztochasztikus vagy véletlen jelenségek

Az olyan jelenségeket nevezzük **sztochasztikus vagy véletlen jelenségeknek**, amelyek eredménye **nem számolható ki akkor sem**, ha ismertek a körülményeket jellemző **paraméterek és a bemenő adatok**.



1.2.2. Ábra. A véletlen jelenség modellje

1.2.4. PÉLDA. A pénzfeldobás jelensége

Ha egy pénzérmét megpörgetve feldobunk, akkor azt a kérdést eldönteni, hogy az érme **melyik oldalán fog megállni**, nem tudjuk **a feldobás előtt**. Olyan sok tényezőtől függ a jelenség végeredménye, hogy minden paramétert nem tudunk vagy nem akarunk figyelembe venni.

Nagyszámú kísérletet kell elvégezni ahhoz, hogy a pénzérme anyag eloszlásának szabályosságát vagy éppen szabálytalanságát mérni tudjuk.

Tehát a **jelenségek** törvényszerűségeire **kísérletek** útján derül fény. A **kísérletek** alkalmasok mind a determinisztikus és mind a sztochasztikus jelenségek esetén arra, hogy eldöntsük vele a **jelenségről**, hogy milyen természetű.

1.2.5. DEFINÍCIÓ. Véletlen kísérlet

Az olyan egyértelműen meghatározott **tevékenységet** vagy **tevékenységeket** sorozatát nevezzük **véletlen kísérletnek**, amelynek

(i) ismerjük a lehetséges **kimeneteleket**, de hogy azok közül

(ii) mikor - melyik **következik be**, azt **nem tudjuk megadni** a kísérlet végrehajtása előtt.

1.2.6. DEFINÍCIÓ. Kimenetel

A véletlen kísérlet egy eredményét **kimenetelnek** nevezzük, amely további részekre már nem bontható.

Tehát a véletlen kísérlet úgy változtatja a kimeneteleket, hogy előre nem tudjuk megadni, mikor-melyik fog bekövetkezni. Sokszori megfigyeléssel azonban fényt deríthetünk az egyes kimenetek gyakoriságaira.

1.2.7. DEFINÍCIÓ. Véletlen tömeg jelenség

Az olyan jelenségeket nevezzük **véletlen tömeg jelenségeknek**, amelyek **hasonló körülmények között** tetszőleges számszor megismételhetők és kimenetelük véletlenszerűen változik.

Egyszerű példa véletlen tömeg jelenségre a pénzérme vagy a kocka feldobása. Ezen jelenségek megfigyeléséhez a kísérleteket mi magunk tudjuk előidézni. Hasonló kísérlet lehet például egy laptop számítógép **akkumulátorának** a teljes feltöltöttségi állapotától a **lemerülés** állapotáig eltelt idő megfigyelése. A töltést mi tetszőleges számszor előidézhetjük. A működés időtartama pontosan nem mondható meg a kísérlet lefolytatása előtt. Meg lehet adni egy **eloszlást** sok megfigyelés alapján, hogy melyik időintervallumba milyen **gyakorisággal** esik majd az élettartam.

Viszont sok más esetben a véletlen jelenségeket nem tudjuk mi magunk előidézni, hanem csak **megfigyeljük** a kimeneteleket. Ilyen jelenség például a **földrengés**, amelyet nem tudunk előidézni vagy még csak előre jelezni sem. Egy adott területre feljegyezve a rengések erősségének gyakoriságait készíthetünk eloszlás térképeket.

Vagy a **villámok keletkezéseit** illetve **becsapódási helyét** nem tudjuk irányítani egy vihar alkalmával. Hogy hol és mikor lesz a következő villám becsapódás, azt nem tudjuk pontosan. Viszont sok megfigyelés alapján adhatunk egy **eloszlás térképet** a lehetséges becsapódások helyének valószínűségével a vizsgált területre.

Az **öröklődés folyamatában** is közrejátszik a véletlen. Előre nem tudjuk pontosan megmondani, hogy az utódok a szülők mely **tulajdonságait**, hogyan fogják örökölni. Lehet azonban egy gén térképet adni, amennyiben hosszú megfigyelést folytatunk az öröklődések sorozatában. Mendel volt az első, aki tudományos kísérleteket és megfigyeléseket folytatott a borsók örökítési folyamatában.

▼ 1.3. Játék a véletlennel

A véletlenek hódító útja a **szerencse játékokkal** kezdődött. Nézzünk néhány klasszikus példát.

1.3.1. PÉLDA. Pénz feldobás

Ha egy pénz érmét jól megpörgetve **feldobunk**, akkor nem lehet előre **megjósolni**, hogy melyik felére esik. Annyi bizonyos, hogy az érme vagy a **fej** vagy az **írás** oldalán landol. Ha sokszor **megpördül** az érme a levegőben, majd többször **pattogva is gurul** a földön, akkor általában a végeredményt előre nem lehet kitalálni.

Ha mégis előre pontosan meg tudjuk mondani, hogy melyik oldalára esik az érme, akkor az az érme nem alkalmas a véletlen kísérletek bemutatására.



1.3.1. ábra. Pénzérme feldobása és pörgetése

Egy pénzérme feldobásának **kísérlete** során a lehetséges **kimenetek** a "fej" és az "írás" értékek.

1.3.2. PÉLDA. Kocka dobás

Hasonló módon egy **dobókocka** feldobása és megpörgetése után, általában nem tudjuk előre megmondani, hogy a **hat oldala** közül melyiken fog megállni. A dobás értéke az a szám lesz, amelyet felülről látunk, miután egyik lapján megállt.



1.3.2. ábra. Dobó kocka feldobása és gurítása

A kocka dobás **kísérlete** során a lehetséges **kimenetek** az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 értékek.

1.3.3. PÉLDA. Szabályos testek feldobása

Nemcsak a dobókocka az egyetlen olyan **szabályos test**, amely alkalmas véletlen kísérletek bemutatására. Vannak olyan szabályos egybevágó sokszög lapokkal határolt testek röviden **poliéderek**, amelyeket ha elkészítünk fémből, fából vagy műanyagból és **eldobunk**, akkor egyik lapján **stabilan** megáll. Így definiálhatjuk, hogy mi legyen a dobás eredménye.

A Maple "geom3d" csomagjával felrajzoltunk néhány szabályos poliédert és alatta képeket mutatunk ezek **megvalósított** "dobókockás" változatára is.

```
> restart : with(geom3d) :  
> testek := matrix(1, 5, [ draw(tetrahedron(T4, point(o, 0, 0, 0), 1)), draw(hexahedron(T6,  
point(o, 0, 0, 0), 1)), draw(octahedron(T8, point(o, 0, 0, 0), 1)), draw(dodecahedron(T12,
```

```
point(o, 0, 0, 0), 1)), draw(icosahedron(T20, point(o, 0, 0, 0), 1))) :  
> plots[display](testek) :
```



1.3.3. ábra. Szabályos egybevágó sokszöglapokkal határolt testek
A fenti szabályos testek neveit, lapjainak számát és az egy lapot alkotó szabályos sokszög oldalainak számát mutatja az alábbi táblázat.

A test neve	Oldallapok száma	Egy oldalt alkotó szabályos sokszög oldalainak száma
tetraéder	4	3
kocka (hexaéder)	6	4
oktaéder	8	3
dodekaéder	12	5
ikozaéder	20	3

1.3.4. PÉLDA. Félig szabályos testek feldobása

A szabályos testekhez hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek a "félig" szabályos testek. Például az alábbi "cuboktaéder" nevű testet 8 szabályos háromszög és 6 négyzet határol (Forgassuk meg a rajzot!). Tehát összesen 14 oldala van, de nem egyforma eséllyel esik mindegyik oldalára. A négyzetek területe nagyobb, ezért gyakrabban áll meg ezeken az oldalain.

```
> draw(cuboctahedron(T, point(o, 0, 0, 0), 1))
```



1.3.5. PÉLDA. Konkáv szabályos testek feldobása

Vannak olyan egybevágó sokszög lapokkal határolt testek is, amelyek klasszikus értelemben **nem alkalmasak** a véletlen jelenségek bemutatására. Tekintsük az alábbi háromszög lapokkal határolt **konkáv testet**, amely nem a lapjain áll meg, hanem valamelyik 3 csúcsán.

> `draw(SmallStellatedDodecahedron(p, point(o, 0, 0, 0), 1))`



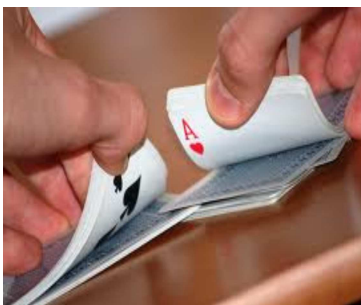
Erre a testre azt is nehéz lenne meghatározni, hogy a stabil helyzete után mi lesz a dobás eredménye.

1.3.6. PÉLDA. Francia kártya alapú játékok

A **francia kártya** lapjainak két ismertető tulajdonsága van, az egyik a **színe (4-féle)** és a másik a **magassága (13-féle)**. Ezek alapján egy pakliban levő különböző lapok száma 52 ($=4 \times 13$).

A **négy szín** a treff ($\clubsuit$ = fekete háromlevelű lóhere), a káró ($\heartsuit$ = piros rombusz), a kőr ($\heartsuit$ = piros szív) és a pikk ($\spadesuit$ = fekete lándzsahegy). Tehát ezek nem valódi színek, hanem a lapok sarkában található jelek. Bizonyos játékok esetén a színek erősrendje is számít, amely megfelel az előbbi felsorolásnak: a treff a leggyengébb és a pikk a legerősebb. A színek rövidítésénél célszerű az angol kezdőbetűket használni a magyar betűk helyett, mert azok különböznek a figurák kezdő betűitől: clubs ($\clubsuit$ =c), diamonds ($\heartsuit$ =d), hearts ($\heartsuit$ =h), spades ($\spadesuit$ =s).

A lapoknak **13 féle magassági értéke** lehet: ezek a számok 2-től 10-ig, őket követik a figurás lapok: bubi vagy jumbó (jele **J**), dáma (jele **Q** – queen), király (jele **K** – king) és az ász (jele **A**).



A francia kártyára alapozott néhány játék az alábbi

- blackjack vagy huszonegy
- bridzs
- póker
- römi
- kanasza

1.3.7. PÉLDA. A rulett játék

A rulett az egyik legnépszerűbb kaszinó játékok egyike. Több változata ismert, ezek közül a legnépszerűbbek a francia, az amerikai (duplanullás) és az európai rulett.

A rulettkerék egy nagyméretű fatányér, amelyben fogantyúval ellátott korong forog szabadon. A korong szélén kis rekeszek sorakoznak, mellettük az 1-36 számok (fekete vagy piros színű alapon), valamint a 0 (az amerikai rulettben a dupla nullás 00 is) van feltüntetve.



Az asztalon egy tábla található és rajta 36 szám, a megfelelő szinkekkel, valamint egy nulla 0 vagy dupla nulla 00. A számmezők közül az 1-től 36-ig számozott mezők három oszlopban sorakoznak: az első sorban 1, 2, 3, a második sorban 4, 5, 6 stb. Ezek a számok szint is viselnek, minden szám vagy piros, vagy fekete.

A játékosok célja a rendelkezésükre álló pénzüsszeggel minél tovább játékban maradni és nyerni. A bank célja a játékosok pénzének elnyerése. A játékosok lépés gyanánt zsetonokat helyeznek el a tábla tetszőleges mezőire, tetszőleges számban.

Ha mindenki tett, a krupié megpörgeti a rulettkereket, majd **beledobja a rulettgolyót**, ami rekeszről rekeszre ugrálva végül is kiköt valamelyik rekeszben: ennek száma a nyerőszám.

A krupié az összes tétről megállapítja, hogy nyert-e. Ha egy tét olyan mezőn van, ami megfelel a nyerőszámnak, a tét tulajdonosának visszaadja a tétet és a nyereményt is, amit a bankból fizet ki. A vesztes téteket a krupié besöpri a bankba.

1.3.8. PÉLDA. Lottó játékok

Az ötöslottó Magyarország egyik legrégebbi számsorsjátéka, játékszabályai rendkívül egyszerűek: 90 számból 5-öt kell megjelölni.

A játékos akkor nyer, ha a kisorsolt 5 szám közül legalább 2-t sikerül eltalálnia egy játékmezőn. Akkor ér el telitalálatot, ha az általa megjelölt mind az 5 szám egyezik a kisorsolt nyerőszámokkal.



1.3.9. PÉLDA. Magyar kártya játékok

A magyar kártya 32 lapját előállíthatjuk az alábbi 4-féle szín



és a számok = {ász, király, felső, alsó, X, IX, VIII, VII} halmazaiból képezett rendezett párok halmaza.



A magyar kártyára alapozott néhány játék

- alsós
- huszonegyes
- lórum
- snapszer
- ulti, rablóulti

- zsírozás

1.3.10. PÉLDA. Urna modellek, visszatevése és visszatevés nélküli mintavételek

Az urna modellekkel számos esetben helyettesíthetünk más közismert modelleket.

1.3.10.1. Egy **szabályos pénzérme** feldobásának véletlen kísérlete helyett tekinthetünk egy urnát, melyben két egyforma golyó van megszámozva "0" és "1" számokkal. Természetesen kívülről a golyók száma nem látható, csak ha szétcsavarjuk! Megkeverjük a két golyót és véletlenszerűen kihúzzunk közülük egyet. Feljegyezzük a kihúzott golyó számát. Újabb kísérlet előtt a kihúzott golyót **visszatesszük**, biztosítva ezzel azt, hogy a $\{0, 1\}$ számok közül tudjunk ismét egyforma eséllyel választani. A "0"="Fej" és az "1"="Írás" megfeleltetéssel ez az urna modell helyettesíti a pénzfeldobás kísérletét.

1.3.10.2. A **francia kártya** 52 lapját sorba állítva az "1"="♣2" kártyától az "52"="♠A" kártyáig készíthetünk egy urnát 52 egyforma golyóval, amelyeket megszámozunk belülről "1"-től "52"-ig. Ekkor az 52 golyó megkeverése megfelel az 52 kártyalap egy keverésének. A pókerben az 5 lap kiosztása egy játékosnak úgy modellezhető urnával, hogy 5 golyót húzzunk ki az urnából **visszatevés nélkül**.

1.4. Játékok Maple modellezése

Az 1.3. pontban leírt játékok közül néhánynak megmutatjuk a lehetséges Maple modellezését. Minden esetben meg kell adni, hogy milyen lehetséges kimenetek közül választhatunk véletlenszerűen.

1.4.1. PÉLDA. Szabályos érme feldobásának Maple modellje

Pénzérme feldobásakor két kimenetel lehetséges. Az egyszerűség kedvéért legyenek ezek 0 és 1.

Az $\text{érme} := \text{rand}(0..1)$ utasítás eredménye egy eljárás, melynek paraméter listája üres és értéke 0 vagy 1 véletlenszerűen generált szám. Használjuk a $\text{randomize}()$ eljárást a véletlenszerű kezdő érték beállítása érdekében, mielőtt a rand eljárást meghívjuk.

```
> restart
> randomize( )
1379849161 (1.4.1)
```

```
> érme := rand(0..1)
érme := proc( ) (1.4.2)
```

```
    proc( ) option builtin = RandNumberInterface; end proc(6, 2, 1)
end proc
> egydobás := érme( )
egydobás := 1 (1.4.3)
```

Véletlen dobás sorozatot a seq eljárással tudunk generálni.

```
> dobás_sorozat := [seq(érme( ), k = 1..20)]
dobás_sorozat := [1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0] (1.4.4)
```

1.4.2. PÉLDA. A szabályos kocka feldobás Maple modellje

Mivel a kockadobás lehetséges kimenetelei az 1, 2, 3, 4, 5, 6 értékek, ezért a $\text{rand}(1..6)$ eljárás alkalmas ezen számok véletlenszerű generálására. Több dobásból álló dobás sorozatot a seq eljárással képezhetünk.

```
> kocka := rand(1..6)
kocka := proc( )
```

(1.4.5)

```
    proc( ) option builtin = RandNumberInterface; end proc(6, 6, 3) + 1
end proc
```

```
> egydobás := kocka( )
                                egydobás := 5
```

(1.4.6)

```
> dobás_sorozat := seq(kocka( ), k = 1..20)
                                dobás_sorozat := 2, 5, 6, 2, 3, 4, 4, 6, 5, 3, 1, 5, 2, 3, 2, 2, 4, 3, 3, 1
```

(1.4.7)

1.4.3. PÉLDA. LOTTÓ számok véletlenszerű húzásának Maple modellje

Tekintsük a 90 szám közül 5 szám véletlenszerű kihúzásának LOTTÓ kísérletét. Egy véletlenszerű húzást a **combinat** csomagban található **randcomb(90, 5)** hívással kaphatunk. A **randcomb** eljárás garantálja, hogy mind az 5 kiválasztott szám különböző lesz és a sorrend nem számít, ugyanis halmaz adatstruktúrát kapunk vissza.

```
> with(combinat) :
> egy_lottó_húzás := randcomb(90, 5)
                                egy_lottó_húzás := {21, 33, 34, 43, 69}
```

(1.4.8)

```
> Lottó_húzások := seq(randcomb(90, 5), k = 1..7)
Lottó_húzások := {11, 66, 70, 72, 73}, {6, 13, 26, 52, 80}, {2, 14, 26, 35, 47}, {5, 37, 61, 62, 77}, {25, 30, 53, 67, 81}, {1, 4, 48, 49, 55}, {7, 11, 30, 33, 70}
```

(1.4.9)

A fenti sorozat egyszerre 7 LOTTÓ sorsolás eredményét is mutatja.

1.4.4. PÉLDA. Magyar kártya keverése és kiosztása Maple szimulációval

A magyar kártya 32 lapját előállíthatjuk úgy, mint a 4-féle **szín**={piros, tök, zöld, makk} és a **számok** = {ász, király, felső, alsó, X, IX, VIII, VII} halmazaiból képezett rendezett párok listája.

```
> szinek := [piros, tök, zöld, makk];
számok := [ász, király, felső, alsó, X, IX, VIII, VII]
                                szinek := [piros, tök, zöld, makk]
                                számok := [ász, király, felső, alsó, X, IX, VIII, VII]
```

(1.4.10)

A lehetséges párokat egy 4×8-as mátrixba könnyű képezni.

```
> M := Matrix(4, 8, (i, j) → [szinek[i], számok[j]])
M:=
```

(1.4.11)

```
[[ [piros, ász], [piros, király], [piros, felső], [piros, alsó], [piros, X], [piros, IX], [piros,
VIII], [piros, VII] ],
[ [tök, ász], [tök, király], [tök, felső], [tök, alsó], [tök, X], [tök, IX], [tök, VIII], [tök, VII] ],
[ [zöld, ász], [zöld, király], [zöld, felső], [zöld, alsó], [zöld, X], [zöld, IX], [zöld, VIII], [zöld, VII] ],
[ [makk, ász], [makk, király], [makk, felső], [makk, alsó], [makk, X], [makk, IX], [makk, VIII], [makk, VII] ]]
```

A mátrix elemeit **listába** konvertálva megkapjuk a magyar kártya 32 lehetséges lapját egy lista

adatstruktúrában.

```
> mkártya := convert(M, list)
mkártya := [ [piros, ász], [tök, ász], [zöld, ász], [makk, ász], [piros, király], [tök, király], [zöld, király], [makk, király], [piros, felső], [tök, felső], [zöld, felső], [makk, felső], [piros, alsó], [tök, alsó], [zöld, alsó], [makk, alsó], [piros, X], [tök, X], [zöld, X], [makk, X], [piros, IX], [tök, IX], [zöld, IX], [makk, IX], [piros, VIII], [tök, VIII], [zöld, VIII], [makk, VIII], [piros, VII], [tök, VII], [zöld, VII], [makk, VII]]
```

 (1.4.12)

A 32 lap egy **keverése** annyit jelent, hogy képezünk egy véletlenszerű sorrendet. Véletlen sorrendet a **combinat** csomag **randperm** eljárásával tudunk megadni.

```
> keverés := randperm(mkártya)
keverés := [ [makk, VII], [piros, IX], [zöld, VIII], [piros, VIII], [tök, király], [tök, IX], [tök, VII], [tök, VIII], [makk, király], [tök, alsó], [zöld, IX], [zöld, felső], [makk, alsó], [tök, felső], [tök, ász], [makk, ász], [tök, X], [zöld, alsó], [piros, VII], [zöld, X], [makk, IX], [makk, felső], [piros, alsó], [piros, ász], [zöld, VII], [makk, VIII], [piros, felső], [piros, X], [makk, X], [zöld, király], [zöld, ász], [piros, király]]
```

 (1.4.13)

A lapok **kiosztása** annyit jelent, hogy néhány lapot (ismétlés nélkül) kiválasztunk a 32 lap közül. Osszunk ki például 5 lapot a 32 lap közül véletlenszerűen. Ezt a **combinat** csomagban található **randcomb**(**mkártya**, 5) eljárással is megadhatunk.

```
> osztás := randcomb(mkártya, 5)
osztás := [ [makk, ász], [piros, király], [zöld, X], [piros, IX], [tök, VII]]
```

 (1.4.14)

Egy másik lehetséges **lapkiosztást** úgy is képezhetünk, ha 5 kártyát leemelünk a megkevert pakli tetejéről. Ezt program szinten megtehetjük a **keverés** lista első 5 elemének kiválasztásával.

```
> egyosztás := keverés[1..5]
egyosztás := [ [makk, VII], [piros, IX], [zöld, VIII], [piros, VIII], [tök, király]]
```

 (1.4.15)

1.5. Eseménytér megadása és szemléltetése

1.5.1. DEFINÍCIÓ. Eseménytér

Egy véletlen kísérlet **összes lehetséges kimenetelét** összegyűjtve egy halmazba, kapjuk a kísérlet **eseményterét**. Az eseménytér jele a görög Ω (nagy omega) betű.

Az eseménytér megadásakor a halmazok egyértelmű megadási szabályait kell betartanunk. Tehát vagy **felsoroljuk az elemeit** (ha tudjuk) vagy leírjuk az elemeket **egyértelmű utasításokkal**.

1.5.2. DEFINÍCIÓ. Véges vagy végtelen eseménytér

Az eseménytér lehet **véges** vagy **végtelen** aszerint, hogy Ω elemeinek száma véges vagy végtelen

1.5.3. DEFINÍCIÓ. Diszkrét vagy folytonos eseménytér

Az eseménytér **diszkrét**, ha elemeinek száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Az eseménytér **folytonos**, ha elemeinek száma kontinuum számosságú, azaz nagyobb, mint a megszámlálhatóan végtelen.

1.5.4. PÉLDA. A pénz feldobás eseménytere

Pénzfeldobás esetén az eseménytér az $\Omega = \{ \text{fej}, \text{írás} \}$ halmaz, amelyet helyettesíthetünk az $\Omega = \{0, 1\}$ halmazzal.

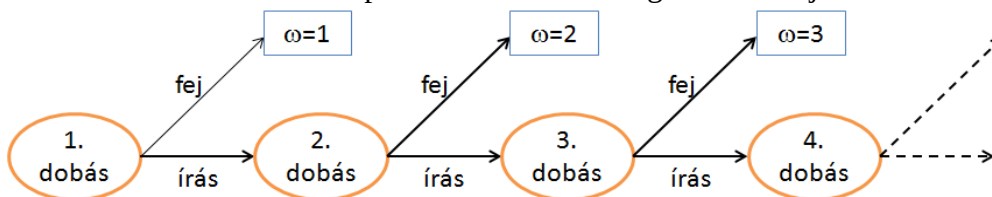
1.5.5. PÉLDA. Végtelen eseménytér a pénz feldobás kísérletére

A pénzfeldobás jelensége alkalmas arra is, hogy vele olyan **kísérletet végezzünk**, amelynek eseménytere végtelen halmaz. Ehhez dobjuk fel a pénzérmét addig, **amíg `fej` értéket nem kapunk**.

Ekkor az eseménytér elemei - vagyis a kísérlet kimenetelei - lehetnek azok a számok, ahányadik dobásra `fej` értéket kapunk. Az $1 \in \Omega$ kimenetel azt jelenti, hogy első dobásra `fej` értéket kaptunk. Ha első dobásra `írás` értéket kapunk, akkor még egyszer kell dobni. Mivel a második dobás független az elsőtől, ezért függetlenül attól, hogy az első dobás értéke milyen lett, kaphatunk másodikkra `fej` vagy `írás` értéket. Ha a második dobás értéke `fej`, akkor a kísérlet kimenetele 2 lesz. Hasonlóan $n \in \Omega$ azt jelenti, hogy az első $(n - 1)$ pénzdobás eredménye `írás` lett és az n -ik dobásra kaptunk először fej értéket. Tehát az eseménytér ehhez a kísérlethez

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

A kísérlet kimenetelének képzését az alábbi fa diagrammal tudjuk szemléltetni



1.5.1. ábra. Addig dobunk pénzt, amíg fej értéket nem kapunk eseményterének képzése
A természetes számok helyett megadhatjuk azokat a sorozatokat, amelyek az egyes kimeneteket. Ezért az eseménytér lehet a következő

$$\Omega = \{F, IF, IIF, IIIF, \dots\}.$$

Az eseménytér elemei jelzik, hogy ha első dobásra fej jött ki, akkor ez egy lehetséges kimenetel. Ha elsőre `írás` jött ki és a második dobás fej lett, akkor az IF kimenetelt kapjuk és így tovább.

1.5.6. PÉLDA. Kockadobás eseménytere

Kockadobás esetén az eseménytér az $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz.

1.5.7. PÉLDA. Ötös LOTTÓ sorsolásának eseménytere

Adjuk meg az $A = \{1, 2, 3, \dots, 90\}$ alaphalmazból kiválasztható összes 5 elemű részhalmazok halmazát, mely a LOTTÓ húzás eseménytere.

Felsorolni az összes esetet nem tudjuk, ezek nagyon nagy száma miatt. Ezért matematikai szempontból halmazokkal egyértelműen leírjuk

$$\Omega = \left\{ \left\{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5 \right\} \mid \omega_k \in A, \omega_k \neq \omega_m, k \neq m, k, m \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \right\}.$$

1.5.8. PÉLDA. Magyar kártya keverésének eseménytere

Ha az $A = \{1, 2, 3, \dots, 32\}$ számok jelölik a 32 különböző magyar kártya lapot, akkor egy keverés megfelel a számok egy lehetséges sorrendjének. A keverések után kialakult sorrend az eseménytér egy eleme. Tehát megadjuk a keverés kísérletének eseményterét, ha a 32 szám összes lehetséges sorrendjét leírjuk

$$\Omega = \left\{ \left(\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \dots, \omega_{k_{32}} \right) \mid \omega_{k_i} \in A, \omega_{k_i} \neq \omega_{k_j}, i \neq j, i, j \in A \right\}.$$

1.5.9. PÉLDA. Egy érmét dobunk fel kétszer vagy két érmét dobunk fel egyszerre kísérletek eseménytere

A címben jelzett probléma két **különböző kísérletet** jelent. Vajon különbözik-e a két kísérlet **eseménytere** vagy célszerű ugyanazt a halmazt választani?

Jelölje ehhez

K_1 az **egy érmével dobunk kétszer egymásután** kísérletet, míg

K_2 a **két egyforma érmét dobunk fel egyszerre** kísérletet.

A probléma lényege abban áll, hogy amíg a K_1 kísérletnél meg tudjuk különböztetni a *fej – írás* illetve *írás – fej* dobások sorrendjét, addig a K_2 kísérletnél nincs sorrend a két egyforma pénzérme között. Ezért a fenti két kimenetelt ugyanannak tekinthetjük.

Tehát a K_1 -kísérlet eseménytere $\Omega_1 = \{[F, F], [F, I], [I, F], [I, I]\}$ négy elemű halmaz, míg

a K_2 -kísérlet eseménytere $\Omega_2 = \{\{F, F\}, \{F, I\}, \{I, I\}\}$ három elemű halmaz. (rövidítés $F = \text{fej}$ és $I = \text{írás}$)

Nem szabad azonban elhallgatni azt a **fontos** tény, hogy az eseménytér elemi eseményeihez valószínűségeket fogunk rendelni (ld. 2. fejezet). Ezért célszerű vizsgálni, hogy az egyes kimenetek milyen gyakran következnek be.

A K_1 kísérlet Ω_1 eseményterének mind a 4 eleme **egyformán valószínű**, ha az érme szabályos.

Vagyis a hozzá rendelt valószínűség mindegyike $\frac{1}{4}$ lesz

$$P(\{[F, F]\}) = P(\{[F, I]\}) = P(\{[I, F]\}) = P(\{[I, I]\}) = \frac{1}{4}.$$

A K_2 kísérlet Ω_2 eseményterének 3 eleme viszont nem egyformán valószínű, akkor sem, ha mindkét érme szabályos. Ugyanis kétszer olyan gyakran következik be az $\{F, I\}$ kimenetel, mint az $\{F, F\}$ vagy $\{I, I\}$ kimenetek valamelyike. Hiszen az $\{F, I\}$ kimenetel kétféleképpen is bekövetkezik. Vagy úgy, hogy az egyik fej és a másik írás vagy fordítva, hiába egyforma a két érme. Ezért Ω_2 esetén a valószínűségek két esetben $\frac{1}{4}$ és egy esetben $\frac{1}{2}$ lesz

$$P(\{F, F\}) = P(\{I, I\}) = \frac{1}{4} \text{ és } P(\{F, I\}) = \frac{1}{2}.$$

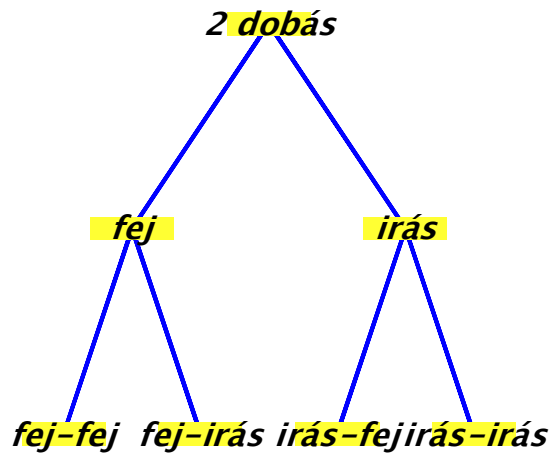
FIGYELMEZTETÉS

Annak érdekében, hogy elkerüljük a fenti asszimmetrikus valószínűségi mező esetét, használjuk a K_1 és K_2 **kísérletek mindegyikénél** az $\Omega_1 = \{[F, F], [F, I], [I, F], [I, I]\}$ négy elemű eseményteret, amelyben a *(fej,írás)* és *(írás,fej)* sorrendeket **megkülönböztetjük**.

Szempléltessük a két pénzérme lehetséges kimeneteleit **fa gráf** segítségével.

```
> restart :
csúcs1 := `fej`, írás :
csúcs2 := `fej-fej`, fej-írás, írás-fej, írás-írás :
csúcsok := [2 dobás, csúcs1, csúcs2] :
élek1 := [2 dobás, `fej`], [2 dobás, írás] :
élek2 := [ `fej`, `fej-fej`], [ `fej`, fej-írás], [ írás, írás-fej], [ írás, írás-írás] :
élek := { élek1, élek2} :

> with(GraphTheory) :
> G := Graph(undirected, csúcsok, élek) :
> Graf_Rajz := DrawGraph(G, showlabels = true) :
plots[display]([Graf_Rajz], scaling = unconstrained);
```



1.5.2. ábra. Eseménytér szemléltetése fa gráffal két érme dobási kísérletéhez

Az 1.5.2. ábra gráfja a két **dobás összes lehetséges variációit** szemlélteti. Az első dobás lehet *fej* vagy *írás*. Ha az első dobás *fej*, akkor kétfelé ágazik a fa, mert a második dobás értéke is lehet *fej* vagy *írás*. Ha az első dobás *írás*, akkor is kétfelé ágazik a fa, mert a második dobás értéke ekkor is lehet *fej* vagy *írás*.

A párosításokat mátrix formában **is** szemléltethetjük.

```
> kimenetelek := { fej, írás};
Két pénzérme dobás lehetséges kimenetele = Matrix(2, 2, (i, j) → [kimenetelek[i],
kimenetelek[j]])
```

kimenetelek := { fej, írás}

$$\text{Két pénzérme dobás lehetséges kimenetele} = \begin{bmatrix} [fej, fej] & [fej, írás] \\ [írás, fej] & [írás, írás] \end{bmatrix} \quad (1.5.1)$$

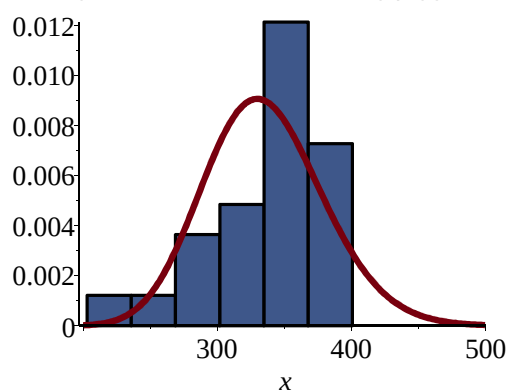
1.5.10. PÉLDA. Izzó lámpa élettartamának folytonos eseménytére



1.5.3. ábra. Izzólámpa működése és tönkremenetele

Villanyizzók élettartama a bekapcsolástól a tönkremenetelig előre nem jósolható meg. Ezért az a kísérlet, amely egy izzó élettartamát vizsgálja **véletlen kísérlet**. Az élettartam elméleti szempontból $T \geq 0$ tetszőleges nem-negatív szám lehet, vagyis az eseménytér $\Omega = [0, \infty)$ folytonos. Sok kísérletet végezve megadható a relatív gyakoriság hisztogram, amely megmutatja, milyen gyakorisággal esnek az izzók működési időtartamai az egyes időtartományokba. (lásd a 1.5.4. ábrát)

Hisztogram és az illesztett sűrűség függvény



1.5.4. ábra. Izzólámpa élettartamának relatív gyakoriság hisztogramja és az erre illesztett sűrűség függvény. A gyártó megadja azt az **átlagos** élettartamot pl. 350 órát, amennyi ideig **legnagyobb valószínűséggel** működik egy izzó. Ennél sokkal kevesebb ideig működő izzó csak kevés lehet, mert ellenkező esetben nem veszik meg a vevők és ezért tönkre mehet a cég. Az átlagosnál sokkal tovább működő izzók száma szintén kevés van, mert "sokáig" működő izzólámpa esetén ritkán vesznek a vevők izzót, ezért a cég ugyancsak tönkre mehet. Ez a kettős nyomás kényszeríti az élettartamra a fenti szimmetrikus harang görbét!

1.5.11. PÉLDA. Emberek súlyának és magasságának folytonos eseménytere

Emberek egy csoportjából kiválasztva valakit és megmérve a súlyát kg-ban és a magasságát cm-ben véletlenszerű értékeket kapunk. Ezek a mennyiségek folytonosan változnak és nem lehetnek negatívak. Ezért az eseménytér az $\Omega = [0, \infty) = \mathbb{R}_+$ nem-negatív valós számok halmaza. Látható, hogy az eseménytér elemei nemcsak maguk a számok, hanem a számokhoz tartozó fizikai mértékegységek is, mint pl. a kg vagy a cm.

1.5.12. PÉLDA. Időjárással kapcsolatos folytonos eseményterek

Méréseket végezhetünk a földfelszín **időjárási jelenségének** jellemző paramétereire, így a

- levegő hőmérsékletének napi alakulása (maximális, minimális vagy átlag érték) °C-ban: $\Omega = [-273, \infty)$.

- csapadék mennyisége egy nap (vagy egy év) alatt mm-ben: $\Omega = [0, \infty) = \mathbb{R}_+$.

- széllokések napi sebességének maximuma $\frac{m}{sec}$ -ban: $\Omega = [0, \infty) = \mathbb{R}_+$.

- légnyomás értéke kPa-ban: $\Omega = [0, \infty) = \mathbb{R}_+$.

- a talaj nedvesség tartalom %-os értéke: $\Omega = [0 \%, 100 \%]$.

Mindezek **folytonosan változó** mennyiségek, amelyekre vannak fizikai **korlátok**. A mérőeszközök bizonyos **pontossággal** mutatják a mennyiségeket, ezért ezeket az eszközöktől függően **diszkrét értékeknek** is tekinthetnénk. Viszont ha **nem szeretnénk matematikai modellt váltani** akkor, amikor pontosabb mérőeszközt készítünk, akkor **célszerű a matematikai modellt folytonosnak tekinteni**.

1.5.13. PÉLDA. Optikai alapú kommunikációs rendszerek végtelen diszkrét eseménytere

Az optikai kommunikációs rendszerek alapvető eszköze a **fotodetektor**, amely a felületén elnyelt **fénysugár kvantumok energiáját** átalakítja **elektromos jelek** (áram és feszültség) **sorozatává**. Ilyen módon alkalmas eszköz optikai alapú rendszerekben a fény impulzusok elektromos impulzusokká alakítására. A kapott elektromos impulzusok felhasználhatók a telefonokban vagy a számítógépekben. Ilyen optikai eszközöket használnak a **füst érzékelés**, tűzérzékelés esetén a **riasztó berendezésekben**, mozgás érzékelőkben, utcai lámpák reléinek **alkony kapcsolóiban**, atomi méreteket érzékelő ún. **erő mikroszkópokban**.

Mivel a fotodetektor a kvantumok véletlenszerű becsapódásait érzékeli és továbbítja az információt elektromos impulzusok formájában, ezért az **érzékelések száma** lesz a megfigyelésünk vagy kísérletünk **kimenetele**. Az összes kimenetek halmaza egy adott időintervallum alatt az $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$ természetes számok halmaza. A kimenetel értéke akkor 0, ha az adott időtartományban nem érkezett egy kvantum se és n , ha az adott időintervallumban összesen $n \in \mathbb{N}$ kvantum érkezett.



1.5.5. ábra. Fotodetektor

1.6. Események és műveletek eseményekkel

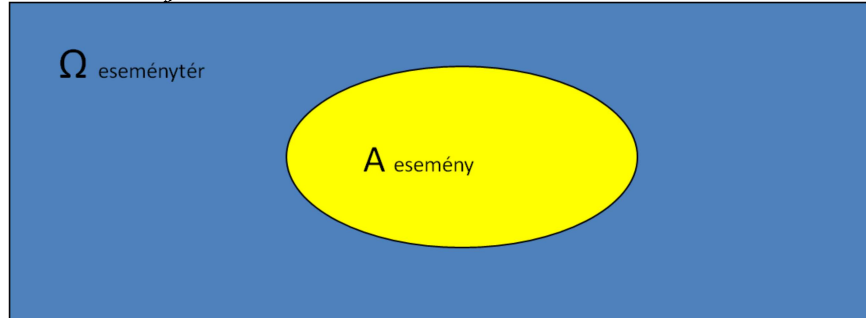
Egy véletlen kísérlet lehetséges kimenetelei közül néhányat kiválasztva egy halmazba eseményt kapunk. Az eseményekkel ugyanolyan műveleteket végezhetünk, mint a halmazokkal.

1.6.1. DEFINÍCIÓ. Esemény, elemi esemény, összetett esemény

Az Ω eseménytér valamely A **részhalmazát** ($A \subseteq \Omega$) **eseménynek** nevezzük, mely az adott

véletlen jelenség néhány kimenetelét tartalmazza. Ha a halmaz egy elemű $A = \{\omega\}$, akkor a neve **elemi esemény**. Az olyan eseményt, amely nemcsak egy kimenetelt tartalmaz **összetett eseménynek** nevezzük.

Egy A esemény akkor **következik be**, ha a kísérlet kimenetele az A halmaz valamelyik **eleme**. Az események jelölésére nagy betűket és szemléltetésére a halmazelméletből kölcsönzött **Venn-diagramot** használjuk.



1.6.1. ábra. Az A esemény ábrázolása Venn-diagrammal

Az Ω **téglalap** belseje az eseményteret szemlélteti, míg ebben az A ellipszis vagy kör alakú tartomány az eseményt szimbolizálja.

1.6.2. DEFINÍCIÓ. Lehetetlen esemény, biztos esemény

Az üres halmaz (jele $\emptyset$) – amelynek nincs egyetlen eleme se – nem követhet be semmilyen módon. Ennélfogva $\emptyset$ neve a **lehetetlen esemény**.

Mivel az Ω eseménytér tartalmazza a kísérlet összes lehetséges kimenetelét, ezért Ω biztosan bekövetkezik. Ennélfogva Ω neve a **biztos esemény**.

1.6.3. PÉLDA. Pénzfeldobás eseményei

A pénzfeldobás $\Omega = \{Fej, Írás\}$ eseménytere 2 elemű, amelyekből összesen 4 különböző részhalmazt tudunk képezni és ezek az alábbiak!

$\emptyset = \{ \}$	a lehetetlen esemény
$\{Fej\}$	a fej dobás elemi eseménye
$\{Írás\}$	az írás dobás elemi eseménye
$\Omega = \{Fej, Írás\}$	a biztos esemény

1.6.4. DEFINÍCIÓ. Hatványhalmaz

Egy H halmaz **összes részhalmazainak halmazát** a H halmaz hatványhalmazának nevezzük, melynek jele 2^H . Tehát

$$2^H = \{A \mid A \subseteq H\}$$

A Maple *combinat* csomag *powerset(n)* eljárása a $H = \{1, 2, \dots, n\}$ számhalmaz hatványhalmazát adja meg. Nézzük rendre $n=2, 3, 4$ esetén a hívások eredményeit.

```
> with(combinat) :  
powerset(2); powerset(3); powerset(4)  
      {{ }, {1}, {2}, {1, 2}}  
      {{ }, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}
```

$$\{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\} \quad (1.6.1)$$

Azt láthatjuk, hogy $n = 2$ esetén a hatványhalmaz $2^2 = 4$ elemű, $n = 3$ esetén a hatványhalmaz $2^3 = 8$ elemű és $n = 4$ esetén a hatványhalmaz $2^4 = 16$ elemű. Nyilvánvalóan a felfedezett szabály nem véletlenszerű, amelyet rögzítünk az alábbi tétel formában.

1.6.5. TÉTEL. Hatványhalmaz elemeinek száma

Ha a H halmaz n elemű ($n \geq 1$ egész), vagyis $|H| = n$, akkor a 2^H hatványhalmaz elemeinek száma 2^n .

Megjegyzés. A 2^H hatvány jelölést és magát az elnevezést is a tétel magyarázza.

Bizonyítás.

Most egy teljes indukciós bizonyítást mutatunk. Később a kombinatorikai résznél adunk egy újabb bizonyítást.

Láttuk, hogy $n = 1, 2, 3$ és 4 elemű H halmazokra az állítás igaz. Tegyük fel, hogy az állítás igaz tetszőleges legfeljebb n (> 1) elemű halmazra. Legyen $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n, h_{n+1}\}$ egy $(n + 1)$

elemű halmaz. A 2^H hatványhalmaz elemeit osszuk két részre! **Egyik részbe** tartozzanak azok részhalmazok, amelyekben h_{n+1} nincs benne. Ide tartozik többek között az üres halmaz is. Az összes ilyen részhalmaz megegyezik a $G = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ n elemű halmaz hatványhalmazával.

Ezen részhalmazok száma az indukciós feltevés szerint 2^n . A **másik részbe** olyan részhalmazok tartoznak, amelyek mindegyikében benne van a h_{n+1} elem. Ezeket úgy is származtathatjuk, hogy a 2^G hatványhalmazban szereplő mindegyik részhalmazhoz hozzáteesszük a h_{n+1} elemet. Így ezek száma is az indukciós feltevés szerint 2^n . Tehát $|2^H| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

1.6.6. PÉLDA. Kockadobás néhány eseménye

A kockadobás $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ eseménytere 6 elemű és így 1.6.5 tétel alapján összesen $2^6 = 64$ részhalmaza van. Ezek mindegyikét nem soroljuk fel, csak megadunk néhány nevezetes eseményt.

$PT = \{1, 3, 5\}$ a páratlan dobások eseménye

$PS = \{2, 4, 6\}$ a páros dobások eseménye

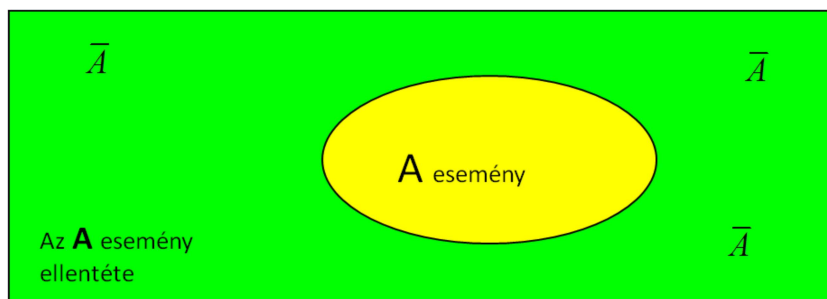
$H := \{6\}$ a hatos dobás elemi eseménye

1.6.7. DEFINÍCIÓ. Tagadás vagy ellentét (komplementer) esemény

Egy A esemény **tagadását** alkotják **mindazok** a kimenetek, amelyek nincsenek A -ban. A tagadás esemény jelölésre használjuk az $\overline{A}$ felülvonást vagy az A^c kitevőben c jelölést.

A tagadás esemény kifejezés mellett használatos az **ellentét** esemény vagy **komplementer** esemény kifejezések is. Az A tagadás eseményének jelölésére egyaránt használjuk az $\overline{A}$ felülvonást vagy az A^c komplementerre utaló c – kitevőt

$$\overline{A} = A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}.$$



1.6.2. ábra. Az eredeti A esemény és tagadásának Venn-diagrammja

Az A tagadás esemény nem más, mint az A eseménynek az Ω halmazra vett kiegészítő halmaza, vagyis

$$\bar{A} = A^c = \Omega \setminus A.$$

1.6.8. PÉLDA.

A kockadobás $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ eseményterében a $PT = \{1, 3, 5\}$ a páratlan dobás esemény tagadása a $PT = PS = \{2, 4, 6\}$ páros dobás eseménye.

1.6.9. TÉTEL. Azonosságok a tagadás műveletére

A tagadás eseményre érvényesek az alábbi azonosságok

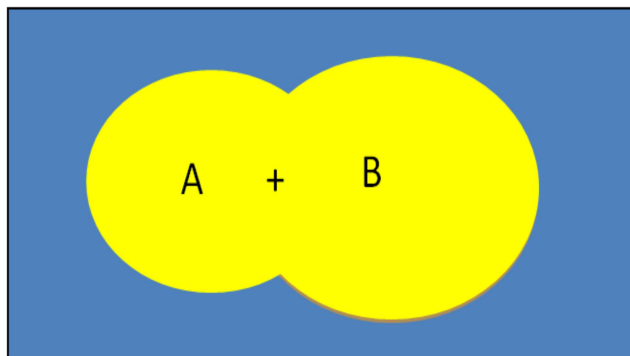
- (i) $\emptyset^c = \Omega$, vagyis a lehetetlen esemény tagadása a biztos esemény
- (ii) $\Omega^c = \emptyset$, vagyis a biztos esemény tagadása a lehetetlen esemény
- (iii) $(A^c)^c = A$, vagyis a tagadás esemény tagadása az eredeti esemény

1.6.10. DEFINÍCIÓ. Események uniója vagy összege

Egy véletlen jelenség A és B eseményeinek $A + B$ **összegét** alkotják **mindazon** kimenetek, amelyek vagy az A eseményhez vagy a B eseményhez tartoznak.

Az **összeg** szó mellett használjuk az események **uniója** kifejezést is. Az $A + B$ összeg jelölésére az $A \cup B$ unió jelölés is használatos

$$A \cup B = A + B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

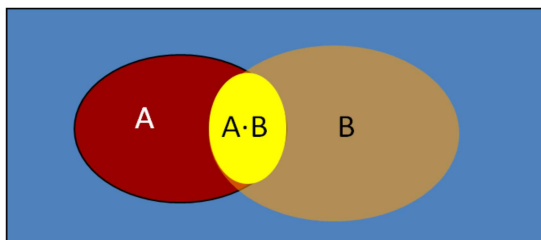


1.6.3. ábra. Az A és B események $A + B$ összegének Venn-diagrammja

1.6.11. DEFINÍCIÓ. Események metszete, szorzata vagy együttes bekövetkezése

Egy véletlen jelenség A és B eseményeinek $A \cdot B$ **szorzatát** alkotják **mindazon** kimenetek, amelyek az A eseményhez is és a B eseményhez is tartoznak. A **szorzat** szó mellett használatos az események **metszete** vagy **együttes bekövetkezése** kifejezések is. Az $A \cdot B$ szorzat jelölésére az $A \cap B$ metszet jelölést is használjuk

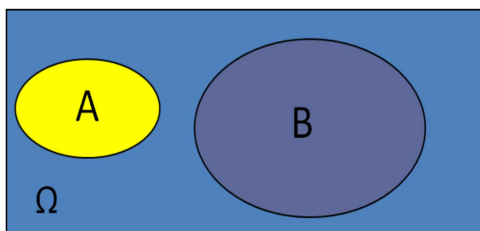
$$A \cap B = A \cdot B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$$



1.6.4. ábra. Az A és B események $A \cdot B$ szorzatának Venn-diagrammja

1.6.12. DEFINÍCIÓ. Egymást kizáró események

Ha az A és B események egyszerre nem következhetnek be, vagyis $A \cdot B = \emptyset$ a metszetük a lehetetlen esemény, akkor azt mondjuk, hogy az A és B események **egymást kizárók**.

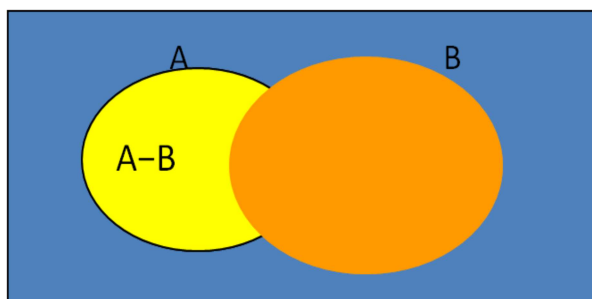


1.6.5. ábra. Az A és B egymást kizáró események Venn-diagrammja

1.6.13. DEFINÍCIÓ. Események különbsége

Egy véletlen jelenség A és B eseményeinek $A - B$ **különbségét** alkotják mindazon kimenetek, amelyek az A eseményhez tartoznak, de a B eseményhez nem

$$A - B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ és } x \notin B\} = A \setminus B$$



1.6.6. ábra. Az A és B események $A - B$ különbségének Venn-diagrammja

A különbség esemény már kifejezhető a tagadás és a metszet segítségével. Ezért valójában nem kellene rá bevezetni új jelölést.

1.6.14. TÉTEL. Különbség megadható a tagadás és a metszet segítségével

Tetszőleges A és B eseményre $A - B = A \cap B^c$ azonosság teljesül.

Bizonyítás

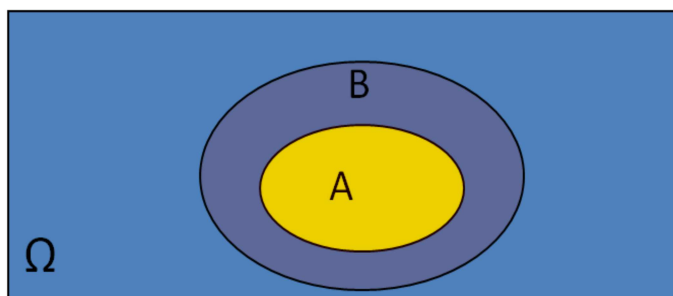
Venn-diagrammal és a matematikai logika eszközeivel.

1.6.15. DEFINÍCIÓ. Részesemény

Azt mondjuk, hogy az A esemény része a B eseménynek, ha az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, azaz

$$A \subseteq B.$$

Ez azt jelenti, hogy az A eseményhez tartozó minden kimenetel egyben a B eseményhez is tartozik. Ezért azt is mondhatjuk, hogy az A esemény bekövetkezése **maga után vonja** a B esemény bekövetkezését.



1.6.7. ábra. Az $A \subseteq B$ részesemény ábrázolása

Bármely A eseményre igazak a következő tartalmazási relációk: $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$ és $A \subseteq \Omega$.

1.6.16. Összehasonlító táblázat a halmazelmélet és valószínűségelmélet fogalmai között

Az eseményekkel kapcsolatos fogalmak és műveletek mindegyike megfeleltethető valamelyik halmazelméleti fogalomnak és műveletnek. **Át kell térnünk** a megszokott halmazelméleti fogalomrendszerrel egy új valószínűségelméleti fogalomrendszerre. Ebben a fogalomrendszerben a központi fogalom az esemény és annak bekövetkezése. Meg kell tanulnunk ennek az új rendszernek a **nyelvezetét**. Ehhez összegyűjtöttük a halmazelméleti fogalmakat és műveleteket, valamint az ezek valószínűségelméleti megfelelőit az alábbi 1.6.8. táblázatban.

Halmazelméleti fogalmak, műveletek	Valószínűségelméleti megfelelők
Ω univerzum	eseménytér, biztos esemény
$\emptyset$ üres halmaz	lehetetlen esemény
$a \in \Omega$ elem	a kísérlet egy kimenetele 'a'
$A \subseteq \Omega$ részhalmaz	A egy esemény
'A' halmaz	Az A esemény bekövetkezik

$\bar{A} = A^c$ az A komplementere	Az A ellentét eseménye, A nem következik be
$A + B = A \cup B$ unió	A és B közül legalább az egyik bekövetkezik
$A \cdot B = A \cap B$ metszet	Az A és B mindegyike bekövetkezik
$A - B = A \setminus B$ különbség	Az A esemény bekövetkezik, de B nem
$A \subseteq B$ részhalmaz	Ha A bekövetkezik, akkor B is bekövetkezik
$A \cdot B = A \cap B = \emptyset$ diszjunkt halmazok	A és B egymást kizáró események

1.6.8. táblázat. A halmazelméleti fogalmak és megfelelő valószínűségelméleti fogalmak

1.6.17. Boole-algebra

Az Ω eseménytér a fenti műveletekkel együtt olyan tulajdonságokkal rendelkezik, amelyet érdemes külön névvel illetni és ez lesz a Boole-algebra. Összegyűjtöttük az 1.6.9. táblázatban a műveletekre érvényes alap tulajdonságokat vagy szabályokat.

kommutativitás	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
asszociativitás	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
disztributivitás	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
DeMorgan	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
egyebek	$A \cup \bar{A} = \Omega$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
	$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$
	$\overline{\Omega} = \emptyset$	$\overline{\emptyset} = \Omega$
	$\overline{\overline{A}} = A = (A^c)^c = A$	

1.6.9. táblázat. A műveletek alapvető azonosságai

A fenti tulajdonságokkal rendelkező $(\Omega, \cup, \cap, \bar{})$ struktúrát Boole - algebrának nevezzük. Tehát a Boole-algebrához szükséges egy nem üres Ω halmaz és benne kettő darab kétváltozós művelet, mint az " $\cup$ " unió és a " $\cap$ " metszet, valamint egy darab egy változós művelet, mint a komplementer " $\bar{}$ " képzés művelete. A műveletekre teljesülni kell az 1.6.9. táblázatban foglalt azonosságoknak. Megjegyezzük, hogy az $\Omega = \{0,1\}$ halmaz a logikai VAGY ($\vee$), a logikai ÉS ($\wedge$), valamint a logikai tagadás műveleteivel szintén Boole-algebrát alkot.

▼ 1.7. Példák események meghatározására és rajtuk végzett műveletekre Maple-ben

Az alábbiakban példát mutatunk diszkrét és folytonos eseményterek és benne események

leírására, meghatározására, valamint műveletek végzésére Maple-ben. Rendezett párral jellemezhető kísérleteknél hasznos fogalom a halmazok **Descartes-szorzata**, amelyet bevezetünk. Megadjuk az **összetett rendszerek** működési eseményének leírását, ha ismertek az **alrendszerek működési eseményei**. Az 1.6. pontban tárgyalt műveletekkel egyszerű módon meg tudjuk adni az összetett rendszer működési eseményét, ha a rendszer **sorosan** vagy **párhuzamosan** kapcsolt elemeket tartalmaz.

1.7.1. PÉLDA. Két kocka dobás eseményeiről

Két szabályos 6 oldalú dobókockával dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az **összeg 4, 5 vagy 6** lesz, míg B azt, hogy **mindkét dobás páros**!

(i) Adja meg az Ω eseménytér elemeit Maple segítségével!

(ii) Adja meg az A és B eseményeket halmazokkal!

(ii) Határozza meg az $A \cap B$ **együttes eseményt** szavakkal és adja meg elemeit Maple-ben!

MEGOLDÁS

(i) Két kocka dobásnál az összes variációt egy 6×6 – s mátrixban könnyű megadni!

> $\text{restart} : \Omega := \text{Matrix}(6, 6, (i, j) \rightarrow [i, j])$

$$\Omega := \begin{bmatrix} [1, 1] & [1, 2] & [1, 3] & [1, 4] & [1, 5] & [1, 6] \\ [2, 1] & [2, 2] & [2, 3] & [2, 4] & [2, 5] & [2, 6] \\ [3, 1] & [3, 2] & [3, 3] & [3, 4] & [3, 5] & [3, 6] \\ [4, 1] & [4, 2] & [4, 3] & [4, 4] & [4, 5] & [4, 6] \\ [5, 1] & [5, 2] & [5, 3] & [5, 4] & [5, 5] & [5, 6] \\ [6, 1] & [6, 2] & [6, 3] & [6, 4] & [6, 5] & [6, 6] \end{bmatrix} \quad (1.7.1)$$

Itt az Ω mátrix 6 sorból és 6 oszlopból áll, azaz egy 6×6 -s mátrix. A mátrix i – ik sor j – ik oszlopában az $[i, j]$ lista áll, amely azt jelzi, hogy az első dobás értéke i és a második dobás értéke j lett és $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ lehet. Ebből könnyen kiolvasható, hogy az összes párosításra $6 \cdot 6 = 36$ lehetőség adódik. Az eseménytér, mint halmaz a fenti mátrixból halmaz konverzióval a következőképpen kapható Maple-ben.

> $\text{eseménytér} := \text{convert}(\Omega, \text{set}); N := \text{nops}(\text{eseménytér})$

$\text{eseménytér} := \{ [1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [3, 4], [3, 5], [3, 6], [4, 1], [4, 2], [4, 3], [4, 4], [4, 5], [4, 6], [5, 1], [5, 2], [5, 3], [5, 4], [5, 5], [5, 6], [6, 1], [6, 2], [6, 3], [6, 4], [6, 5], [6, 6] \}$

$N := 36$ (1.7.2)

(ii) Adja meg az A és B eseményeket halmazokkal!

Az $A = \{ [i, j] \mid i + j = 4, 5, 6 \}$ esemény megadásához is készítünk egy olyan 6×6 – s mátrixot, amelyben a megfelelő sor és oszlop indexek összegei szerepelnek. Az így kapott mátrixból ki kell gyűjteni az összes 4, 5 és 6 számokhoz tartozó sor és oszlop indexeket!

> $\text{összegek} = \text{Matrix}(6, 6, (i, j) \rightarrow i + j)$

> $A := \{ [1, 3], [2, 2], [3, 1], [4, 1], [3, 2], [2, 3], [1, 4], [1, 5], [2, 4], [3, 3], [4, 2], [5, 1] \};$

$nA := \text{nops}(A)$

$$\text{összegek} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$A := \{[1, 3], [1, 4], [1, 5], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [4, 1], [4, 2], [5, 1]\}$

$nA := 12$

(1.7.3)

Látható, hogy az A esemény $nA = 12$ -féleképpen következhet be.

$A \cap B = \{\text{mindkét dobás páros}\} = \{[i, j] \mid i, j \in \{2, 4, 6\}\}$ esemény Maple megadásához használjunk két egymásba ágyazott sorozat képző *seq* eljárást, melyben a lépték 2.

> $B := \{\text{seq}(\text{seq}([i, j], j = 2..6, 2), i = 2..6, 2)\}; nB := \text{nops}(B)$

$B := \{[2, 2], [2, 4], [2, 6], [4, 2], [4, 4], [4, 6], [6, 2], [6, 4], [6, 6]\}$

$nB := 9$

(1.7.4)

A külső sorozattal az első dobás i értékét állítjuk elő, mely 2 és 6 között változik 2 lépésközzel. A belső sorozat a második dobás j értékét változtatja hasonló módon. Így a B halmaz elemeinek száma $nB = 3 \cdot 3 = 9$.

(iii) Határozza meg az $A \cap B$ együttes eseményt szavakkal és adja meg elemeit Maple-ben!

Az $A \cap B$ eseményhez tartozó kimenetek mind az A és mind a B események "tulajdonságait" örökli. Tehát

$A \cap B = \{[i, j] \mid \text{az } (i + j) \text{ összeg 4, 5 vagy 6 és } i, j \text{ mindegyike páros}\}.$

Az A és B események együttesen úgy következhetnek be, ha a két dobás összege 4, 5 vagy 6, valamint mindegyik dobás páros. Mivel páros számok összege csak páros lehet, ezért az összeg nem lehet 5. Így a B halmaz elemei közül ki kell válogatni azokat, amelyek összege 4 vagy 6. Hasonlóan, az A halmaz elemei közül ki kell válogatni azokat, amelyek mindkét eleme páros. Ezt egyszerűen megteszi nekünk a halmazok metszetére beépített **intersect** Maple eljárás.

> $\text{'A metszet B'} := A \text{ intersect } B; nAB := \text{nops}(\%)$

$A \text{ metszet } B := \{[2, 2], [2, 4], [4, 2]\}$

$nAB := 3$

(1.7.5)

Tehát az $A \cap B$ metszet halmaznak 3 eleme van. Az alábbi 1.7.1. (a)-(c) ábrákon rendre szürke színnel kiemeltük az A , a B események, valamint az $A \cap B$ metszet halmaz elemeit az eseménytér 36 eleme közül.

[1, 1]	[1, 2]	[1, 3]	[1, 4]	[1, 5]	[1, 6]
[2, 1]	[2, 2]	[2, 3]	[2, 4]	[2, 5]	[2, 6]
[3, 1]	[3, 2]	[3, 3]	[3, 4]	[3, 5]	[3, 6]
[4, 1]	[4, 2]	[4, 3]	[4, 4]	[4, 5]	[4, 6]
[5, 1]	[5, 2]	[5, 3]	[5, 4]	[5, 5]	[5, 6]
[6, 1]	[6, 2]	[6, 3]	[6, 4]	[6, 5]	[6, 6]

[1, 1]	[1, 2]	[1, 3]	[1, 4]	[1, 5]	[1, 6]
[2, 1]	[2, 2]	[2, 3]	[2, 4]	[2, 5]	[2, 6]
[3, 1]	[3, 2]	[3, 3]	[3, 4]	[3, 5]	[3, 6]
[4, 1]	[4, 2]	[4, 3]	[4, 4]	[4, 5]	[4, 6]
[5, 1]	[5, 2]	[5, 3]	[5, 4]	[5, 5]	[5, 6]
[6, 1]	[6, 2]	[6, 3]	[6, 4]	[6, 5]	[6, 6]

[1, 1]	[1, 2]	[1, 3]	[1, 4]	[1, 5]	[1, 6]
[2, 1]	[2, 2]	[2, 3]	[2, 4]	[2, 5]	[2, 6]
[3, 1]	[3, 2]	[3, 3]	[3, 4]	[3, 5]	[3, 6]
[4, 1]	[4, 2]	[4, 3]	[4, 4]	[4, 5]	[4, 6]
[5, 1]	[5, 2]	[5, 3]	[5, 4]	[5, 5]	[5, 6]
[6, 1]	[6, 2]	[6, 3]	[6, 4]	[6, 5]	[6, 6]

1.7.1. (a)–(c) ábra. Az 1.7.1 példa A, B és $A \cap B$ halmazok elemeinek kiemelése az eseménytérben

1.7.2. DEFINÍCIÓ. Halmazok Descartes-szorzata

Az A és B halmazok $A \times B$ -vel jelölt **Descartes-szorzata** alatt az összes olyan (a, b) rendezett párok halmazát értjük, amelyben az első elem az A halmazból való $a \in A$ és a második elem a B halmazból $b \in B$. Tehát röviden

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

Ezzel a jelöléssel az 1.7.1. példában szereplő két kocka dobás eseménytérét egyszerűen megadhatjuk az

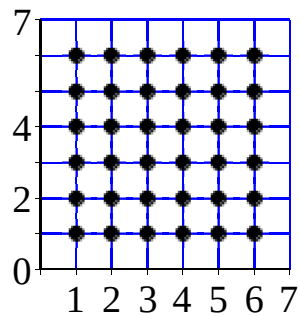
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$$

Descartes-szorzattal. Valamint a $B = \{\text{mindkét dobás páros}\}$ eseményt a $B = \{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\}$

Descartes-szorzattal.

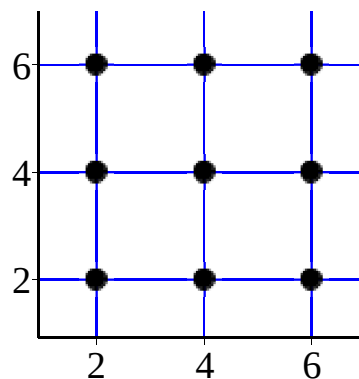
A fenti halmaz művelet nevét **René Descartes** (1596-1650) francia filozófus, természettudós és matematikusról kapta, mert ő volt a derékszögű koordináta-rendszer megalkotója és első alkalmazója. Szemléltetni a véges halmazok két tényezőes Descartes-szorzatát a sík derékszögű koordináta-rendszerében tudjuk. Az első halmaz elemeit az x-tengelyre, a második halmaz elemeit az y-tengelyre tesszük. A kapott pontokban a rácshálózat elemei a síkon leírják a Descartes-szorzat elemeit. Az alábbi két ábra a feladatban szereplő Ω halmazt és a B halmazt mutatja.

```
> plots[ pointplot]( [ seq(seq( [ i, j ], i = 1 ..6 ), j = 1 ..6 ) ], symbol = solidcircle, symbolsize
= 24, axis = [ gridlines = [ 6, color = blue ] ], view = [ 0 ..7, 0 ..7 ], scaling
= constrained, font = [ helvetica, 14 ], caption
= [ Két kockadobás eseménytere Descartes-szorzattal ] )
```



Két kockadobás eseménytere Descartes-szorzáttal

> `plots[pointplot]([seq(seq([i, j], i = 2 .. 6, 2), j = 2 .. 6, 2)], symbol = solidcircle,
symbolsize = 24, axis = [gridlines = [3, color = blue]], view = [1 .. 7, 1 .. 7], scaling
= constrained, font = [helvetica, 14], caption
= [Mindkét dobás páros eseménye Descartes –szorzattal])`



Mindkét dobás páros eseménye Descartes-szorzáttal

Az alábbi tétel indokolja a művelet szorzat elnevezését.

1.7.3. TÉTEL. A Descartes-szorzat elemeinek száma

Ha az A és B halmazok elemeinek száma véges, akkor az $A \times B$ Descartes-szorzat elemeinek száma, az egyes halmazok elemei számának szorzata

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Bizonyítás.

Legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, azaz $|A| = n$ és $|B| = m$. A Descartes-szorzat elemeit rendezzük olyan sorrendbe, hogy az a_1 elemet párosítsuk rendre B minden elemével, majd a_2 elemet párosítsuk B minden elemével. Végül a_n elemhez soroljuk fel a B halmazbeli párjait! Így a következő táblázatot kapjuk

$$(a_1; b_1), (a_1; b_2), \dots, (a_1; b_m),$$

$$(a_2; b_1), (a_2; b_2), \dots, (a_2; b_m),$$

$$\dots\dots\dots (a_n; b_1), (a_n; b_2), \dots, (a_n; b_m).$$

A kapott táblázat valójában egy mátrix, melynek n sora van m oszlopa. Így a táblázatban szereplő elemek száma $n \cdot m$, mely megegyezik az $A \times B$ Descartes-szorzat összes elemszámával.

1.7.4. PÉLDA. RÓMEÓ és JÚLIA találkozásának eseménye

Rómeó és Júlia találkoztól beszélnek meg egy bizonyos órán belül. Ezen az egy órán belül az érkezés időpontja egyformán valószínű bármelyik időpillanatban mindkettőjük részéről. Aki elsőnek érkezik, az vár 15 percet. Ha a másik nem érkezik meg ezen a 15 percen belül, akkor elmegy és nem találkoznak.

(i) Adja meg a kísérlet Ω eseményterét!

(ii) Adja meg az eseménytérben a találkozás T eseményét!

(iii) Rajzolja fel az Ω és T halmazokat!

Megoldás

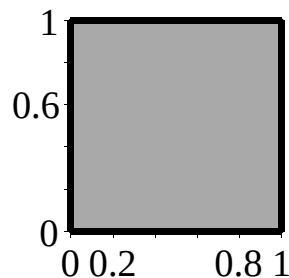
(i) **megoldása.** Jelölje X Rómeó érkezési időpontját és Y Júlia érkezési időpontját órában mérve. A feladat feltétele szerint X és Y is 0 és 1 óra közé esik, tehát $0 \leq X \leq 1$ és $0 \leq Y \leq 1$ tetszőleges valós számok. Az eseménytér elemeit az (X, Y) rendezett párral lehet egyértelműen megadni. Tehát

$$\Omega = \{ (X, Y) \mid X \in [0, 1], Y \in [0, 1] \} = [0, 1] \times [0, 1]$$

a $[0, 1]$ intervallum önmagával vett Descartes-szorzata. Ez az eseménytér folytonos, mely a derékszögű koordináta-rendszerben az első síknegyedbe eső **egység-négyzet**. A négyzetet felrajzoljuk a *plots* csomagban található *inequal* eljárással, melyben az X és Y változó értékhatárait kell beállítani.

> restart : with (plots) :

> inequal({ $0 \leq x, x \leq 1, 0 \leq y, y \leq 1$ }, $x = 0 \dots 1, y = 0 \dots 1, optionsfeasible = [color = "DarkGrey"]$,
optionsclosed = [$color = "black", thickness = 3$], font = [*helvetica*, 14], caption
= [*Rómeó és Júlia találkozásának folytonos eseménytere*], scaling = constrained)



Rómeó és Júlia találkozásának folytonos eseménytere

(ii) és (iii) **megoldása.** Adja meg és rajzolja fel az eseménytérben a találkozás T eseményét!

A találkozás akkor jön létre, ha X és Y eltérése kisebb vagy egyenlő, mint $15 \text{ perc} = \frac{1}{4} \text{ óra}$. Az

időeltérést vagy az $(X - Y)$ vagy az $(Y - X)$ különbség adja meg, attól függően, hogy Rómeó érkezett-e előbb, azaz $X \geq Y$ vagy Júlia érkezett-e előbb, azaz $Y \geq X$. Az abszolútérték használatával kiküszöbölhető ez a kettősség a különbségképzésben és a találkozás T eseményét

megadhatjuk

$$T = \left\{ (X, Y) \in \Omega \mid |X - Y| \leq \frac{1}{4} \right\}$$

egyenlőtlenséggel. Az $|X - Y| \leq \frac{1}{4}$ egyenlőtlenség, akkor és csak akkor teljesül, ha az X és Y

időpontok eltérése egymáshoz képest kisebb vagy egyenlő, mint $\frac{1}{4}$ óra = 15 perc. Tehát a

találkozás feltételeit pontosan leírja a fenti egyenlőtlenség. Ezután az

$|X - Y| \leq \frac{1}{4}$ egyenlőtlenséggel jellemzett (X, Y) pontok halmazát kell szemléltetni az

egységnégyzetben. Ha feltesszük, hogy $Y \leq X$, akkor az egyenlőtlenség alakja $X - Y \leq \frac{1}{4}$ lesz.

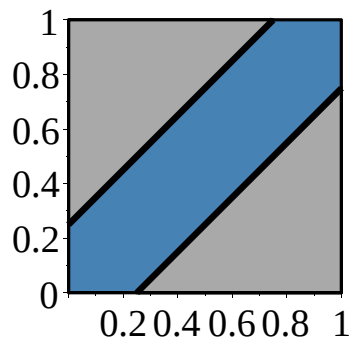
Ha feltesszük, hogy $X \leq Y$, akkor az egyenlőtlenség alakja $Y - X \leq \frac{1}{4}$ lesz. Így kapunk az $Y = X$ szögfelező alatt és felett párhuzamosan egy-egy sávot

$$X - \frac{1}{4} \leq Y \leq X \text{ vagy } X \leq Y \leq X + \frac{1}{4}$$

A két halmaz uniója adja a találkozás T eseményét.

Ezen lineáris egyenlőtlenségekkel jellemzett sávot szemléltetni tudja az *inequal* eljárással, az alábbi módon.

```
> inequal( { x - y <= 1/4, y - x <= 1/4 }, x = 0 ..1, y = 0 ..1, optionsfeasible = [ color = "SteelBlue",
  optionsexcluded = [ color = "DarkGrey"], optionsclosed = [ color = "black", thickness = 3 ], font
  = [ helvetica, 14 ], caption = [ Rómeó és Júlia találkozásának eseménye ], scaling = constrained )
```



Rómeó és Júlia találkozásának eseménye

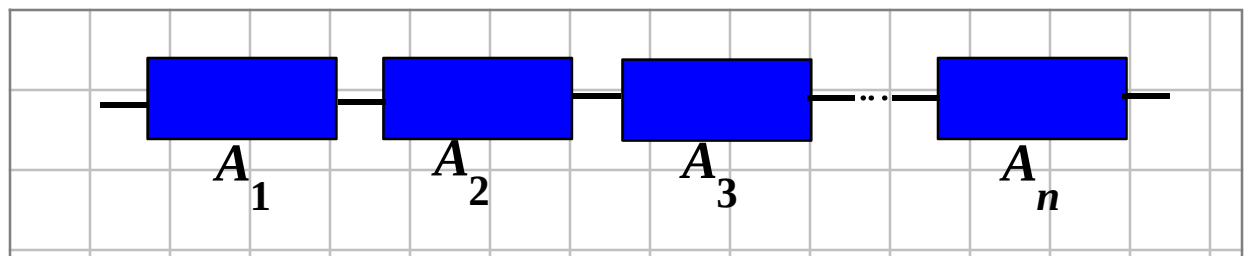
Az ábrán kék színnel rajzolt tartományba eső (X, Y) pontok jelölik a találkozást. Az ilyen a pontok X és Y koordinátája között a különbség $\frac{1}{4}$ -nél kisebb. Ha a négyzet $(1, 0)$ jobb alsó csúcspontját tartalmazó szürke háromszögben választunk egy (X, Y) pontot, akkor erre $Y + \frac{1}{4} < X$ teljesül. Ami azt jelenti, hogy Júlia érkezett előbb, majd várt 15 percet és Rómeó még csak ezután érkezett. A találkozás ezért nem jöhetett létre.

Ha a négyzet $(0, 1)$ bal felső csúcspontját tartalmazó szürke háromszögben választunk egy

(X, Y) pontot, akkor erre $X + \frac{1}{4} < Y$ teljesül. Ami azt jelenti, hogy Rómeó érkezett előbb, majd várt 15 percet és Júlia még csak ezután érkezett. A találkozás ezért nem jöhetett létre.

1.7.5. PÉLDA. Sorosan kapcsolt rendszer működésének leírása eseményekkel

Álljon egy rendszer n -darab sorosan kapcsolt alrendszerből. (Lásd a 1.7.2 ábrát!)



1.7.2. Ábra. Sorosan kapcsolt alrendszerek

Jelölje A_k a k – ik alrendszer működési eseményét, ahol $k = 1, 2, \dots, n$ lehet. Adjuk meg az n darab sorosan kapcsolt alrendszerből álló rendszer egészének B működési eseményét az A_k eseményekkel.

Megoldás

Képzeljünk az alrendszerek helyébe (karácsonyfa) izzókat. A "működik" esemény most helyettesíthető a "világít" eseménnyel. Vajon mikor világít az n izzóból álló sorba kapcsolt fűzér? Ha akár egy izzót is kicsavarunk, akkor már nem világít egyik lámpa se. Ezzel megegyezően, ha valamelyik izzó kiég, akkor a fűzér egyik izzója sem világít. Tehát csak akkor világít a teljes fűzér, ha mindegyik izzó rendesen becsavart állapotban van és mindegyik izzó külön-külön is működik. Tehát a sorosan kapcsolt rendszer egészének működéséhez szükséges, hogy az A_1 , $A_2, \dots$ és A_n alrendszer mindegyike működjön. Ugyanez az események nyelvén és a megfelelő műveleteket használva

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

Tehát sorosan kapcsolt rendszer esetén a teljes rendszer működési eseménye megegyezik az alrendszerek működési eseményeinek metszetével vagy szorzatával.

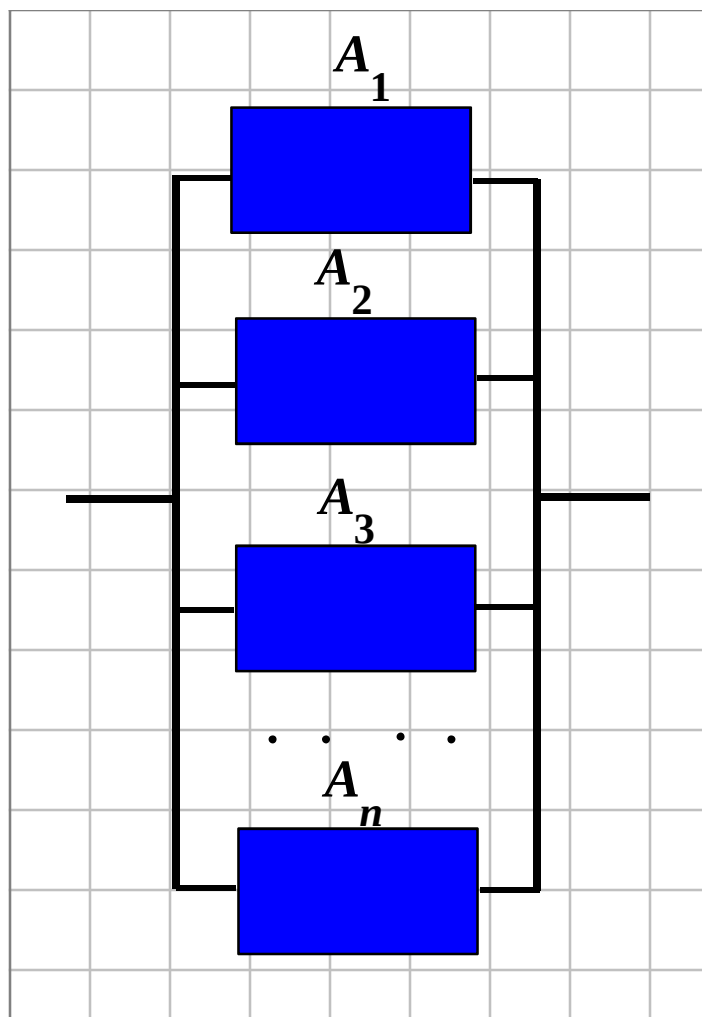
A fenti egyenlőség tagadása a De Morgan azonosság alapján következőképpen írható

$$B^c = A_1^c + A_2^c + \dots + A_n^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c$$

Vagyis, ha az alrendszer valamelyike (akár egy is) nem működik, akkor már nem működik a sorosan kapcsolt rendszer egésze. ♣

1.7.6. PÉLDA. Párhuzamosan kapcsolt rendszer működésének leírása eseményekkel

Álljon egy rendszer n -darab párhuzamosan kapcsolt alrendszerből. (Lásd a 1.7.3 ábrát!)



1.7.3. Ábra. Párhuzamosan kapcsolt alrendszerek

Jelölje A_k a k – ik alrendszer működési eseményét, ahol $k = 1, 2, \dots, n$ lehet. Adjuk meg az n darab párhuzamosan kapcsolt alrendszerből álló rendszer egészének B működési eseményét az A_k eseményekkel.

Megoldás

A párhuzamos kapcsolás előnye az, hogy ha valamelyik alrendszer meghibásodik, akkor a feladatát átveszi egy vele párhuzamosan kapcsolt másik alrendszer. Az alrendszerek mindegyike ugyanazt a feladatot látja el. Vagyis a rendszer redundáns alrendszerekből áll és így működtetése nagyobb költséget igényel, mintha csak egy alrendszer lenne. Viszont a párhuzamos kapcsolás növeli a rendszer egészének megbízhatóságát. Például gyakran egy **repülőgép** megbízhatóan működne 2 sugár hajtóművel is, amelyből egyet a balszárny alatt és egyet a jobb szárny alatt szoktak elhelyezni. A repülés nagyobb biztonsága érdekében azonban gyakran 4 hajtóművet is felvisznek, kettőt a balszárny alatt és kettőt a jobb szárny alatt (lásd 1.7.4. ábrát)



1.7.4. ábra. A repülőgép működésének nagyobb megbízhatósága érdekében 4 hajtóművet visznek

fel

A párhuzamosan kapcsolt rendszerben bármelyik alrendszer működése elegendő ahhoz, hogy a rendszer egésze működjön.

Tehát a rendszer egészének működéséhez elegendő, ha az $A_1, A_2, \dots$ és A_n alrendszerek közül legalább az egyik működik. Ugyanez az események nyelvén és a megfelelő műveleteket használva

$$B = A_1 + A_2 + \dots + A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

Tehát párhuzamosan kapcsolt rendszer esetén a teljes rendszer akkor működik, ha valamelyik alrendszer működik. Vagyis az egyes alrendszerek működési eseményeinek összege vagy uniója az egész rendszer működési eseményével egyenlő.

A fenti egyenlőség tagadása a De Morgan azonosságok alapján következőképpen írható

$$B^c = A_1^c \cdot A_2^c \cdot \dots \cdot A_n^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c$$

Vagyis, a párhuzamosan kapcsolt rendszer egésze akkor nem működik, ha egyik alrendszer sem működik. ♣

1.8. Események σ -algebrája

Az események között végzett műveletek (mint a tagadás, unió, metszet vagy különbség) újabb halmazokat eredményezhetnek. Az így kapott halmazokkal ismét műveleteket végezve újabb halmazokhoz juthatunk. Vajon az ilyen új halmazképzés mikor fejeződik be. Az olyan halmazrendszert, amelyből a műveletek már nem vezetnek ki σ -algebrának nevezzük. Ez a halmazrendszer elegendően sok eseményt tartalmaz ahhoz, hogy később a valószínűség fogalmát a benne szereplő eseményekre definiálni tudjuk. Halmazrendszer alatt az Ω eseménytér részhalmazaitól álló halmazt értünk.

1.8.1. DEFINÍCIÓ. σ - algebra (szigma algebra)

Az Ω eseménytér részhalmazaitól álló S halmazrendszert σ -algebrának nevezzük, ha teljesíti az alábbi 3 feltételt.

(a) $\emptyset \in S$

(b) Ha $A \in S$, akkor $A^c \in S$.

(c) Ha az $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ (akár végtelen sok) események az S — halmazrendszer elemei, akkor $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in S$ is teljesül.

Szavakkal azt mondhatjuk, hogy az S halmazrendszer σ -algebra, ha zárt a véges vagy akár megszámlálhatóan végtelen sok unióra nézve, valamint zárt a komplementer képzésre. Mivel az üres halmaz komplementere az eseménytér, ezért Ω is mindig eleme a σ -algebrának. A DeMorgan azonosságból származó $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ azonosság alapján következik, hogy nemcsak az unióra zárt a σ -algebra, hanem a metszet műveletre is. Ezt külön nem kell megkövetelni a definícióban, hiszen ez következmény. Lássunk néhány példát σ -algebrára!

1.8.2. PÉLDA. A legkisebb és a legnagyobb σ -algebra.

Legyen Ω tetszőleges nem üres halmaz. Ekkor az

(i) $S_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ halmazrendszer σ -algebra;

(ii) $S_2 = 2^{\Omega} = \{A \mid A \subseteq \Omega\}$ az összes részhalmazok halmaza σ -algebra

Az S_1 a legkisebb és S_2 a legnagyobb σ -algebra, amely Ω részhalmazaitól képezhető. Minden más S σ -algebrára, amelyet Ω részhalmazaitól képezhetünk teljesül az $S_1 \subseteq S \subseteq S_2$ tartalmazás.

Az S_1 σ -algebrát **triviális** σ -algebrának, míg az S_2 σ -algebrát **teljes** σ -algebrának is nevezhetjük.

1.8.3. PÉLDA. Egy esemény által generált σ -algebra

Legyen A az Ω eseménytér tetszőleges nem üres és valódi részhalmaza. Ekkor az

$$S = \{ \emptyset, A, A^c, \Omega \}$$

halmazrendszer σ -algebra.

Megoldás

Az 1.8.1. definíció (a) feltétele teljesül, mert az üres halmazt felsoroltuk S -ben. Az A esemény tagadása és a tagadás tagadása $(A^c)^c = A$ is S -ben van. A lehetséges unió párosítások

$$\emptyset + A = A, \emptyset + A^c = A^c, \emptyset + \Omega = \Omega, A + A^c = \Omega, A + \Omega = \Omega, A^c + \Omega = \Omega$$

mindegyike az S -halmazrendszer eleme. Így az S halmazrendszer σ -algebra. Ezt a halmazrendszert később az A részhalmaz által generált legszűkebb σ -algebrának nevezzük. ♣

Felmerül a kérdés, ha H tetszőleges Ω részhalmazából képezett halmazrendszer **nem σ -algebra**, akkor kiegészíthető-e minden esetben σ -algebrává. A válasz nyilvánvalóan pozitív, hiszen a hatványhalmaz minden esetben egy σ -algebra. Az ilyen kiegészítések közül a legkisebbnek külön nevet adunk.

1.8.4. TÉTEL. σ -algebrák metszete σ -algebra

Legyen S_1 és S_2 az Ω eseménytér két σ -algebrája. Ekkor az $S = S_1 \cap S_2$ metszet is σ -algebra.

Bizonyítás.

Mivel az üres halmaz mindkét σ -algebrának eleme, ezért metszetüknek is eleme. Hasonlóan, ha $A \in S_1 \cap S_2$ akkor $A \in S_1$ és $A \in S_2$. Mivel S_1 és S_2 is σ -algebra, ezért $A^c \in S_1$ és $A^c \in S_2$.

Ahonnai $A^c \in S = S_1 \cap S_2$. Hasonlóan bizonyítható, hogy az 1.8.1. definíció (c) tulajdonsága is teljesül a metszetre. Könnyen látható, hogy nemcsak kettő σ -algebra metszetére igaz az állítás, hanem tetszőleges számú σ -algebra metszetre is. ♦

Ezen tétel garantálja, hogy a következő definíciónak értelme van.

1.8.5. DEFINÍCIÓ. Legsűkebb σ -algebra

Legyen H az Ω eseménytér részhalmazából álló tetszőleges halmazrendszer. A $\sigma(H)$ szimbólummal jelöljük a H elemeit tartalmazó **legsűkebb σ -algebrát**. A legsűkebb kifejezés alatt azt értjük, hogy bármely olyan S σ -algebra, amelyre $H \subseteq S$ teljesül, akkor teljesül a $\sigma(H) \subseteq S$ tartalmazás is.

A $\sigma(H)$ legsűkebb σ -algebrát a H halmazrendszer elemeit tartalmazó σ -algebrák metszetével kapjuk.

Az 1.8.2. példa $S_1 = \{ \emptyset, \Omega \}$ legkisebb σ -algebráját tekinthetjük úgy is, mint azt a legsűkebb σ -algebrát amelyet vagy az üres halmaz vagy az eseménytér generál: $S_1 = \sigma(\emptyset) = \sigma(\Omega)$.

1.8.6. PÉLDA. Egy esemény által generált σ -algebra

Legyen A az Ω eseménytér tetszőleges nem üres és valódi részhalmaza (vagyis A egy esemény), valamint $H = \{A\}$ az A halmazt tartalmazó halmazrendszer (csak egyelemű). Ekkor

$$\sigma(\{A\}) = \{ \emptyset, A, A^c, \Omega \}$$

az a legsűkebb σ -algebra, mely tartalmazza $H = \{A\}$ -t.

Megoldás

Az 1.8.4 példában láttuk, hogy $\sigma(\{A\})$ egy σ -algebra. Legyen S tetszőleges olyan σ -algebra, melynek eleme az A halmaz $A \in S$. Az 1.8.1. definíció (a) és (b) feltételei miatt $\emptyset$, Ω és A^c események is elemei kell, hogy legyenek az S σ -algebrának. Így S tartalmazza a $\sigma(\{A\})$ halmazrendszer minden elemét, azaz $\sigma(\{A\}) \subseteq S$. Tehát $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ halmazrendszer a legszűkebb A -t tartalmazó σ -algebra. ♣

1.8.7. PÉLDA. Elemi esemény által generált σ -algebra

Megoldás

Legyen az eseménytér $\Omega = \{1, 2, 3\}$ három elemű és $A = \{1\}$ elemi esemény. Ekkor

$$\sigma(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\},$$

mert az 1.8.6. példában $\{1\}^c = \{2, 3\}$ az A esemény tagadása.

Ugyanezt a σ -algebrát kapjuk akkor is, ha az A esemény tagadása által generált σ -algebrát tekintjük, vagyis

$$\sigma(\{2, 3\}) = \sigma(\{1\}) \quad \clubsuit$$

1.8.8. PÉLDA. A σ -algebrát célszerű a feladathoz igazítani

Megoldás

Válasszuk meg célszerűen az események σ -algebráját ahhoz a játékhoz, amelyben a **játékos nyer** 10 euro-t, ha a szabályos **kocka dobás** után az $A = \{1, 2\}$ esemény következik be és **veszít** 5 euro-t, ha az $\{3, 4, 5, 6\} = A^c$ esemény következik be. Mivel nem kell megkülönböztetni több eseményt, mint az A és ennek tagadás A^c eseményét, ezért ehhez elegendő az

$$S = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

σ -algebrával dolgozni.

Ha **módosítjuk** a játékszabályt úgy, hogy a játékos ugyanúgy nyer 10 euro-t, ha a szabályos kocka dobás ω kimenetelére $\omega \in \{1, 2\}$ teljesül, de veszít 3 euro-t, 4 euro-t, 5 euro-t vagy 6 euro-t, ha a kimenetel megfelelően $\omega = 3, 4, 5$ vagy 6 lesz. Ekkor **finomítani kell** az előző σ -algebrán azért, hogy meg tudjuk különböztetni az

$$\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

eseményeket is. Ennek érdekében a fenti események tagadásait, unióit minden lehetséges módon képezni kell és ezek lesznek az események. Tehát a σ -algebrát megadni legegyszerűbben a

$$\sigma(\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\})$$

generált σ -algebrával tudjuk. ♣

▼ 1.9. Teljes eseményrendszer

A teljes eseményrendszer felosztja az eseményteret olyan részekre (eseményekre), amelyek páronként egymástól idegenek (diszjunktak) és az összegük kiadja a teljes eseményteret. Az ilyen teljes eseményrendszer az Ω egy osztályozását adja és fontos szerepet játszik majd egy tetszőleges A esemény valószínűségének kiszámításánál, ha ismertek az A esemény és a teljes eseményrendszer elemei metszetének valószínűségei.

1.9.1. DEFINÍCIÓ. TELJES ESEMÉNYRENDSZER

Az Ω eseménytér valamely $T = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ eseményeit **teljes eseményrendszernek** nevezzük,

ha

- (i) páronként egymást kizárók, azaz $B_i \cap B_k = \emptyset$ minden $i \neq k$ és $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$
- (ii) összegük az eseménytér, azaz $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n = \Omega$.

1.9.2. PÉLDA. Az A és $\bar{A}$ tagadás események teljes eseményrendszert alkotnak

Legyen az A esemény az Ω eseménytér tetszőleges valódi részhalmaza! Ekkor a

$$T = \{A, A^c\}$$

halmazrendszer **teljes eseményrendszert** alkot.

Megoldás.

Mivel T két elemű, ezért könnyű ellenőrizni az 1.9.1 definíció (i) és (ii) feltételeinek teljesülését. Egyrészt A és tagadása az A^c egymást kizárók, $A \cap A^c = \emptyset$. Másrészt összegük kiadja $A \cup A^c = \Omega$ a teljes eseményteret. ♣

1.9.3. PÉLDA. Az A és B eseményekből képezett teljes eseményrendszer

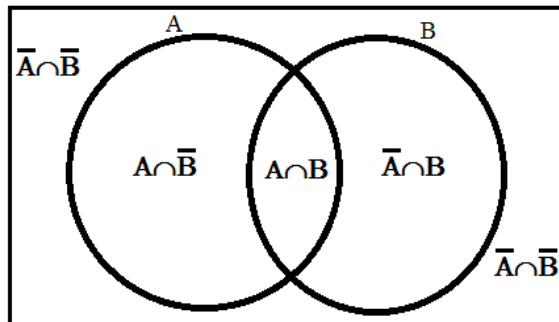
Legyen az A és B esemény az Ω eseménytér két tetszőleges valódi részhalmaza. Ekkor a

$$T = \{A \cap B, A^c \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B^c\}$$

halmazrendszer **teljes eseményrendszert** alkot.

Megoldás

Egy általános elhelyezkedésű A és B halmazok esetén a metszetük nem üres. (lásd 1.9.1. ábrát)



1.9.1. Ábra. Az eseménytér felosztása két eseménnyel diszjunkt részekre

Az A és B két halmaz az Ω eseményteret 4 egymásba nem nyúló részre osztja fel. Az 1.9.1. ábra Venn-diagramm tartományaiba beleírtuk azokat a halmaz műveleteket, ahogyan azok keletkeznek az A és B halmazokból. Ehhez elegendő használni csak a tagadást és a metszet műveletet. Annak algebrai bizonyítása, hogy ezek közül bármelyik kettőt kiválasztva idegen halmazokat kapunk mindegyik párra hasonlóan megy. Ezért bemutatunk egy bizonyítást és a többit az olvasóra bízunk.

Mutassuk meg például, hogy az $A^c \cap B$ és az $A \cap B^c$ események egymást kizárók, vagyis metszetük a lehetetlen esemény! Az

$$(A^c \cap B) \cap (A \cap B^c) = (A^c \cap A) \cap (B \cap B^c) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$

egyenlőségben első lépésben a metszet művelet kommutatív és asszociatív szabályait használtuk.

Második lépésben felhasználtuk, hogy egy halmaz és kiegészítőjének metszete az üres halmaz.

Végül az üres halmaz metszete bármilyen halmazzal az üres halmaz. (ld. 1.6.2. táblázat)

Mutassuk most meg, hogy a 4 esemény összege kiadja az eseményteret! Ehhez célszerűen a

metszet és unió jelek helyett használjuk szorzás és összeg jelöléseket

$$A \cdot B + A^c \cdot B + A \cdot B^c + A^c \cdot B^c = (A + A^c) \cdot B + (A + A^c) \cdot B^c = \Omega \cdot B + \Omega \cdot B^c = B + B^c = \Omega.$$

A levezetés során használtuk a disztributív szabályt. ♣

1.9.4. PÉLDA. Véges eseménytér összes elemi eseménye teljes eseményrendszert alkot

Legyen egy véletlen kísérlet Ω eseménytere véges halmaz $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Ekkor az

$$A_1 = \{\omega_1\}, A_2 = \{\omega_2\}, \dots, A_n = \{\omega_n\}$$

elemi események $T = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ rendszere **teljes eseményrendszert** alkot.

Megoldás

Az $A_i \cap A_k = \emptyset$ azért teljesül, mert az $\omega_i \neq \omega_k$, ha $i \neq k$ és $i, k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Hiszen ω_i jelöli a véletlen kísérlet egy kimenetelét és ω_k egy másikat. A két kimenetel nem lehet azonos, különben az Ω halmazban kevesebb elem lenne, mint n . Nyilvánvalóan

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} = \Omega.$$

Tehát az összes elemi esemény összege kiadja az eseményteret. Ezzel igazoltuk a példa állítását.

♣

1.10. Elméleti ellenőrző kérdések

1.10.1. Milyen feltételek mellett mondjuk egy jelenségről, hogy az **véletlen**? Milyen példákat ismer?

1.10.2. Mi a kapcsolat a **jelenség** és a **kísérlet** között? Mondjon rá példát!

1.10.3. Mit nevezünk a véletlen kísérlet **kimenetelének**? Mondjon rá példákat!

1.10.4. Mikor nevezünk egy véletlen kísérletet **diszkrétnek** illetve **folytonosnak**? Mondjon egyszerű példát!

1.10.5. Mit nevezünk **eseménytémék**? Mondjon egyszerű példákat!

1.10.6. Mit nevezünk **eseménynek**? Mondjon egyszerű példákat!

1.10.7. Mit nevezünk **elemi eseménynek**? Mondjon egyszerű példákat!

1.10.8. Mit nevezünk **összetett eseménynek**? Mondjon egyszerű példákat!

1.10.9. Mit értünk **hatványhalmaz** alatt? Adjon rá egyszerű példát!

1.10.10. Mit értünk két halmaz **Descartes-szorzata** alatt? Milyen egyszerű példát ismer Descartes-szorzatra?

1.10.11. Milyen struktúrát nevezünk **Boole-algebrának**? Milyen példákat ismer?

1.10.12. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik egy **σ -algebra**? Milyen egyszerű példákat ismer σ -algebrára!

1.10.13. Milyen ismérvei vannak egy **teljes eseményrendszernek**? Milyen egyszerű példákat ismer?

1.10.14. Hogyan kapjuk **sorosan kapcsolt alrendszerek** működési eseménye ismeretében a teljes rendszer működési eseményét?

1.10.15. Hogyan kapjuk **párhuzamosan kapcsolt alrendszerek** működési eseménye ismeretében a teljes rendszer működési eseményét?

1.11. Gyakorló feladatok

1.11.1. feladat

Adja meg az alábbi véletlen **kísérletek eseménytereit**!

(i) Felmérést végzünk, hogy az emberek **születés napja** milyen gyakran esik az év valamelyik hónapjára.

(ii) Egy pénzérmét feldobunk háromszor egymástól függetlenül és feljegyezzük sorrendben a fej

vagy írás értékeket.

(iii) Addig dobunk ismételten egy kockát, amíg $\{6\}$ kimenetelt nem kapunk.

(iv) Sok 3 gyermekes család közül kiválasztunk véletlenszerűen egyet és megszámláljuk a fiúk számát.

(v) Sok 3 gyermekes család közül kiválasztunk véletlenszerűen egyet és felírjuk a fiúk és lányok nemét a születések sorrendjében.

1.11.2. feladat

Igazolja Venn-diagrammal, hogy tetszőleges A és B eseményekre teljesülnek az alábbi azonosságok!

(a) $(A \cup B) \cap B^c = A - B$

(b) $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A - B) \cup (B - A)$

(c) $A \cap B^c = A - B$

(d) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

(e) $(A \cap B^c) \cup B = A \cup B$

1.11.3. feladat

Igazolja, hogy ha $\underline{A}$ részeseménye a B eseménynek, azaz $A \subseteq B$, akkor a $\overline{B}$ (B tagadás) esemény részeseménye az A (A tagadás) eseménynek $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

1.11.4. feladat

Adja meg az alábbi összetett eseményeket a **tagadás**, az **összeg** (vagy unió $\cup$), a **szorzat** (vagy metszet $\cap$) és a **különbség** műveletek, valamint az A , B és C események segítségével egyszerűen!

(a) Legfeljebb egy esemény következik be az A , B és C események közül.

(b) Legalább egy esemény bekövetkezik az A , B és C események közül.

(c) Az A , B és C események egyike sem következik be.

(d) Pontosan egy esemény következik be az A , B és C események közül.

(e) Mindhárom esemény bekövetkezik.

(f) Az A és C események bekövetkeznek, de B nem.

(g) Pontosan kettő esemény következik be.

1.11.5. feladat

(i) Mutassa meg, hogy ha az A és B események az Ω eseménytér valódi, nem üres részhalmazai és $A \neq B$, akkor az

$$S = \{ \emptyset, A, B, A^c, B^c, A \cdot B, A \cdot B^c, A^c \cdot B, A^c \cdot B^c, A + B, A^c + B, A + B^c, A^c + B^c, A \cdot B + A^c \cdot B^c, A \cdot B^c + A^c \cdot B, \Omega \}$$

halmazrendszer (16 elemű) az a legszűkebb **σ -algebra**, mely **tartalmazza az $\{A, B\}$ halmazrendszert**.

(ii) Mutassuk meg, hogy $\sigma(\{A\}) \subseteq \sigma(\{A, B\})$ tartalmazás teljesül.

(iii) Hogyan változik a $\sigma(\{A, B\})$ σ -algebra, ha $A \subseteq B$ tartalmazást feltételezzük?

1.11.6. feladat

Igaz-e az alábbi tartalmazási állítás?

Ha H_1 és H_2 az Ω eseménytér halmazrendszerei, továbbá ha $H_1 \subseteq H_2$, akkor az általuk generált

sigma-algebrákra is igaz a tartalmazás: $\sigma(H_1) \subseteq \sigma(H_2)$.

Ha igaz, akkor bizonyítsa. Ha hamis, akkor adjon ellenpéldát!

1.11.7. feladat

Az alábbi **véletlen kísérletek** kimenetelei vajon **diszkrét** értékek vagy **folytonosan** változó mennyiségek?

(i) A dart játéktáblára dobunk egy hegyes dart nyilat!

(ii) A külső hőmérsékletet leolvassuk egy folyadékos hőmérőn feltüntetett skálán.

(iii) Egy digitális órán leolvassuk a pontos időt **óra:perc:másodperc** formában.

1.11.8. feladat

A tőzsdén egy **részvény árfolyam változását** figyeljük. Egy napon a tőzsde nyitáskor még nem tudjuk pontosan megmondani, hogy aznap záráskor az árfolyam **növekedett** (N), **változatlan maradt** (M) vagy **csökkent** (C) a reggeli árfolyamhoz képest.

Így a véletlen kísérlet eseménytere az $\Omega = \{N, M, C\}$.

- (i) Adja meg az $A = \{N, M\}$, $B = \{N, C\}$ és $D = \{M, C\}$ események jelentését szavakkal!
- (ii) Milyen esemény lesz az $\{N\} \cap \{C\}$ együttes esemény?

1.11.9. feladat

Ketten játszanak **kő-papír-olló** véletlen játékot úgy, hogy a játékosok egyszerre mutatnak véletlenszerűen a kezükkel kö, papír vagy ollóra emlékeztető kézjeleket!

- (a) Hányféle különböző párosítás jöhet ki a játék során?
- (b) Adja meg az Ω eseményteret mátrix és halmaz formában is!
- (c) Szemléltesse a lehetőségeket fa gráf segítségével!
- (d) Adja meg az 1. játékos (2. játékos) nyerésének eseményét, ha tudjuk hogy a kö nyer az olló ellen, az olló nyer a papír ellen és a papír nyer a kö ellen? Azonos tárgy mutatása esetén a játék döntetlen.

1.11.10. feladat

Egy vállalatnál 2 fő részére hirdettek állást. Az állásra 9 fő jelentkezett, akik közül 6 férfi és 3 nő volt. Kiválasztottak két jelentkezőt az állás betöltésére véletlenszerűen a 9 közül.

- (a) Adja meg a kísérlet Ω eseményterét Maple segítségével!
- (b) Adja meg az
 $A = \{\text{mindkét állást azonos nemű jelentkező (vagy két nő vagy két férfi) kapta meg}\}$ eseményt!
- (c) Adja meg az
 $B = \{\text{a két állást különböző nemű jelentkező (egy nő és egy férfi) kapta meg}\}$ eseményt!
- (d) Mutassa meg, hogy az $\{A, B\}$ teljes eseményrendszer!

1.11.11. feladat

Egy kockát kétszer dobunk fel!

- (a) Adja meg a kísérlet eseményterét mátrix és fa gráf formában is Maple segítségével!
- (b) Konvertálja a mátrixot halmazzá!
- (c) Adja meg az $A = \{\text{az első dobás nagyobb, mint a második}\}$ eseményt!
- (d) Adja meg az $B = \{\text{a két dobás összege 6}\}$ eseményt!
- (e) Adja meg az $A \cap B$ és $A \cup B$ eseményeket!

1.11.12. feladat

Egy $L=1$ méter hosszú pálcát két véletlenszerűen választott helyen eltörünk. Ilyen módon keletkezik 3 darab x , y és z véletlen hosszúságú pálcika.

- (i) Adja meg és ábrázolja a törési kísérlet Ω eseményterét!
- (ii) Adja meg és rajzolja be a $H = \{x, y, z \text{ oldalakkal háromszög szerkeszthető}\}$ eseményt!

1.11.13. feladat

Egy **számítógépes program** segítségével megoldjuk az

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

másodfokú egyenletet úgy, hogy a program input értékei az egyenlet a , b és c véletlenszerűen választott együtthatói és a kimenete az egyenlet megoldásai.

- (a) Adja meg a **véletlen tesztelés** bemeneti eseményterét!
- (b) Adja meg az $A = \{\text{az egyenletnek két egyenlő gyöke van}\}$ eseményt!
- (c) Adja meg az $B = \{\text{az egyenletnek két különböző valós gyöke van}\}$ eseményt!
- (d) Adja meg az $C = \{\text{az egyenletnek komplex konjugált gyök párja van}\}$ eseményt!
- (e) Mutassa meg, hogy az $\{A, B, C\}$ események teljes eseményrendszert alkotnak!

1.11.14. feladat

Egy üzemben három motor működik, amelyek egymástól függetlenül az időnek rendre 75, 80 és 90 százalékában üzemelnek. Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlen időpontban

- (i) mindhárom motor működik;
- (ii) legalább kettő működik;
- (iii) az első és a második áll?

1.11.15. feladat

Véletlenszerűen készítünk $c = 5$ centiméter átfogójú és a, b befogójú derékszögű H háromszögeket.

- (i) Adja meg a kísérlet összes lehetséges kimeneteléhez az Ω eseményteret!
- (ii) Ábrázolja az Ω eseményteret!
- (iii) Adja meg és rajzolja be az $A = \{(a, b) \in \Omega \mid 3 \leq a \leq 4\}$ eseményt az Ω eseménytérbe!

1.11.16. feladat

Legyen A, B és C az Ω eseménytér három eseménye. Mely kimenetek tartoznak az

$$(A \cup B \cup C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$$

eseményhez? Rajzolja fel Venn-diagrammal a fenti halmazt!

1.11.17. feladat

Egy 25 fős tanulói osztályközösségben felméri, hogy hány főnek van MP3 lejátszója. Adjuk meg a felmérés lehetséges eredményének Ω eseményterét. Definiálja a következő eseményeket:

- $A = \{\text{azon tanulók száma, akik iskolába menet hallgatják az MP3 lejátszót}\}$
 - $B = \{\text{azon tanulók száma, akik hallgatnak Elvis Presley számokat az MP3 lejátszón}\}$
- Adja meg a $C = A \cdot B$, $D = A - B$ és $E = B - A$ események jellemzését!

1.11.18. feladat

Egy mobiltelefon adótornya megbízható jelerősséget az adó 10 km sugarú kör alakú környezetében tud szolgáltatni.

A kísérletünk abban áll, hogy figyeljük a toronyhoz beérkező telefon hívások pontos helyét.

(a) Adja meg a kísérlet eseményterét, vagyis azon hívások helyeit, amelyeket a torony képes fogadni.

(b) Az (a) részben megadott eseménytérben adja meg azt az eseményt, hogy egy hívás a toronytól 2 és 5 km közé esik!

1.11.19. feladat

Egy folytonos kísérlet eseménytere az $\Omega = [-5, 5] \times [-5, 5] =$

$\{(x, y) \mid -5 \leq x \leq 5 \text{ és } -5 \leq y \leq 5\}$ négyzet belső pontjai. Tekintsük az $A_z = \{(x, y) \in \Omega \mid \max(x, y) < z\}$ és $B_z = \{(x, y) \in \Omega \mid \min(x, y) < z\}$ halmazokat z -változtatásával!

- (a) Rajzolja be az eseménytérbe az A_2 eseményt!
- (b) Rajzolja be az eseménytérbe a B_3 eseményt!
- (c) Képezze az $A_2 \cap B_3$ eseményt!
- (d) Képezze az $A_4 \cap B_3$ eseményt!

1.11.20. feladat

Legyen $\Omega = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ eseménytér a valós számok halmaza.

(a) A halmaz műveletek disztributív törvényét használva a $[0, 4] \cap ([-1, 2] \cup [3, 5])$ halmazt adja meg két intervallum és az unió művelet alkalmazásával!

(b) A De Morgan azonosságok segítségével írja fel az $([1, 3] \cup [4, 6])^c$ halmazt tagadás nélkül!

1.11.21. feladat

Magyarázza meg, hogy milyen feltételek mellett lesznek az alábbi véletlen kísérletek ekvivalensek a pénzfeldobás kísérletével?

- (i) Megfigyelünk egy pixelt (vagy pontot) valamely fekete-fehér beszkenelt dokumentumban.

- (ii) Egy bináris jel vétele a kommunikációs csatornán.
- (iii) Teszteljük, hogy egy eszköz működik-e.
- (iv) Ellenőrizzük, hogy a barátunk elérhető-e online az interneten.
- (v) Ellenőrizzük, hogy egy bit hibásan jött-e át a zajos csatornán.

1.11.22. feladat

Magyarázza meg, hogyan lesznek az alábbi kísérletek ekvivalensek egy **urna kísérlettel**!

- (i) Feldobunk egy szabályos pénzérmét kétszer.
- (ii) Feldobunk kettő szabályos kockát.
- (iii) Két kártyát húzunk egy 52 lapos kártya pakliból az első húzás után visszatevéssel illetve visszatevés nélkül.

1.12.23. feladat

Válassza ki a helyes választ!

Egy véletlen kísérlet összes lehetséges kimenetelének elnevezése

- (a) elemi esemény
- (b) eseménytér
- (c) minta
- (d) populáció

1.12.24. feladat

Válassza ki a helyes választ!

Az elemi esemény

- (a) pontosan két kimenetel összessége
- (b) csak egy kimenetelt tartalmaz
- (c) nem tartalmaz egyetlen kimenetelt sem
- (d) egyik sem a fentiek közül.

1.12.25. feladat

Válassza ki a helyes választ!

A véletlen kísérletek eseményterének konstrukciója során hasznos grafikus eszköz a

- (a) fa diagramm
- (b) torta diagramm
- (c) hisztogram
- (d) Venn-diagramm

1.12.26. feladat

Két felnőttet megkérdeznek a fegyvertartásról, hogy ellenzik-e vagy mellette vannak! Mindegyik felnőtt esetén kétféle válasz lehetséges: támogatja a fegyvertartást vagy ellenzi. Az alábbiak közül válassza ki az **összetett esemény(eke)t**!

- (a) Mindkét felnőtt támogatja a fegyvertartást.
- (b) Egyik felnőtt sincs a fegyvertartás ellen.
- (c) Legfeljebb az egyik felnőtt van a fegyvertartás mellett.
- (d) Legalább az egyik ellenzi a fegyvertartást.

1.12.27. feladat

Válassza ki a helyes választ!

Két pénzérmét feldobunk egyszerre. Ekkor a kísérletnek

- (a) kettő kimenetele van
- (b) három kimenetele van
- (c) négy kimenetele van
- (d) nyolc kimenetele van

1.12.28. feladat

Válassza ki a helyes választ!

Az esemény

- (a) és az eseménytér ugyanaz a fogalom
- (b) csak egy kimenetelt tartalmaz

- (c) tartalmaz egy vagy több kimenetetelt
- (d) a fentiek közül egyik sem.

1.12.29. feladat

Válassza ki a helyes választ!

Két egymást kiegészítő eseménynek

- (a) lehet közös kimenetele
- (b) nem lehet közös kimenetele
- (c) ugyanaz a kimenetele
- (d) egyik sem a fentiek közül

1.12.30. feladat

Válassza ki a helyes választ!

Két egymást kizáró esemény

- (a) együttese nem tartalmazza az összes kimenetetelt
- (b) együttese tartalmazza az összes kimenetetelt
- (c) együttese biztosan bekövetkezik
- (d) együtt nem következhet be

1.12.31. feladat

Válassza ki a helyes választ!

Egy pénzérmét háromszor dobunk fel. Például egy lehetséges kimenetel a "fej,fej, fej". Ekkor a "két fej és egy írás" esemény

- (a) a lehetetlen semény.
- (b) a biztos esemény.
- (c) összetett esemény.
- (d) elemi esemény.

>