

3.1. Valószínűségek számítása kombinatorikus és számítógép algebrai eszközökkel

Valószínűségszámítás és statisztika számítógép algebrai támogatással	Készült a PTE PMMIK-n a TÁMOP -4.1.2.A/1-11/1-2011-0098 támogatásával
Klincsik Mihály	

3.1.1 Bevezetés

A **kombinatorika** a véges halmazok elemeinek **sorbarendezésével**, **csoportosításával**, **elemek kiválasztásával** és ezek leszámhlási módszereivel, szemléltetésével foglalkozó matematikai tudományág. A felsorolt műveletek hasznos építő elemei az **alkalmazott tudományoknak** úgy, mint az informatikának, a fizikának, a kémiának, a genetikának és az orvos tudománynak. Alábbiakban áttekintjük a kombinatorika **alapproblémáit**, amelyek megoldási logikája és adatstruktúrái **beépülnek** bonyolultabb feladatok megoldásaiba. A probléma mindig az, hogyan lehet a bonyolultabb feladatok megoldásait egyszerűbbekre visszavezetni. A vizsgált **alapesetek** egymással is összefüggenek és a felosztások igazodnak a gyakorlati alkalmazhatósághoz.

A megoldások egyik központi fogalma a **tevékenység**. A tevékenységeket célszerűen **felbontjuk** olyan résztevékenységekre, amelyek **végrehajtási számát** könnyebben meg lehet számolni. Alkalmazzuk az **összeadás szabályt**, a **szorzás szabályt** vagy a **kizárás és beszámítás** elvét. Két halmaz elemeinek egymáshoz rendelésekor vizsgáljuk a többszörös hozzárendelést a **skatulya-elv** vagy az általánosított skatulya-elv segítségével.

A számítások és a tevékenységek szemléltetését **mátrixok**, **táblázatok** megadásával és/vagy **gráfok** felrajzolásával segítjük.

Foglalkozunk az **alapfeladatok** bemutatásával és ezek alkalmazási feltételeivel úgy, mint a **permutáció** egy halmaz összes eleméből képezhető sorrendek megszámlálására; **variáció** egy halmaz néhány eleméből képezhető sorrendek megszámlálására; **kombináció** egy halmaz néhány elemének kiválasztására, ha a kiválasztás sorrendje nem számít.

Mindegyik alapfeladathoz tartozik egy **ismétlés nélküli** eset és egy **ismétléses** eset. Azért, hogy a számítások eredményeit tömörebb formában írassuk, bevezetünk olyan jelöléseket, mint az $n!$

faktoriális vagy az $\binom{n}{k}$ **binomiális együttható**.

Sok neves magyar matematikus alkotott maradandót a kombinatorika területén. Elég, ha megemlítjük a teljesség igénye nélkül Erdős Pál, Rényi Alfréd, Turán Pál, Lovász László és Szemerédi Endre nevét.

Célunk az alábbi fogalmak, összefüggések és eljárások megismerése, megértése

Tevékenységek végrehajtásának megszámlálása **összeadás szabály**, **szorzás-szabály**

Faktoriális, binomiális együttható, binomiális-tétel, Pascal-háromszög

A leszámhlálás kombinatorikai alapelvei: **kizárás és beszámítás** elve, **galambdúc** vagy skatulya elv, általánosított galambdúc elv

Mintavétel visszatevés nélkül, **hipergeometrikus eloszlás**

Sorrendek megszámlálása összes elemre: **permutáció**, **ismétléses permutáció**

Mintavétel visszatevéssel, **binomiális eloszlás**

Sorrendek megszámlálása néhány elemre: variáció, ismétléses variáció	Maple combinat csomag eljárásainak alkalmazása: <i>permute, choose</i>
Elemek kiválasztása, ha a sorrend nem számít: kombináció, ismétléses kombináció	Fa gráf rajzolása Maple GraphTheory csomag eljárásaival: <i>Graph, DrawGraph</i>
A Maple $sum(a[i], i = 1..n)$ szimbolikus összeadásának alkalmazása	Maple halmaz műveletei: <i>intersect</i> =metszet, <i>union</i> =egyesítés

3.1.2. Tevékenységek összeadás - szabálya és alkalmazása

A kombinatorika számlálási alapelvei között az **összeadás szabályt** az egyidejűleg **nem végrehajtható** résztevékenységek teljes végrehajtási számának megszámlolására használjuk úgy, hogy **összeadjuk** a résztevékenységek számát.

3.1.2.1. TEVÉKENYSÉGEK ÖSSZEADÁS SZABÁLYA

Ha egy T tevékenység felbontható az A és B két résztevékenységre úgy, hogy

- (i) az A tevékenység végrehajtására $n(A)$ lehetőségünk van,
- (ii) a B tevékenység végrehajtására $n(B)$ lehetőségünk van,
- (iii) az A és B tevékenységeket **egyidejűleg nem tudjuk végrehajtani**:

$A \cap B = \emptyset$,

akkor a $T = A$ vagy B tevékenység végrehajtására $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ lehetőségünk van.

Használjuk az $A \cup B$ logikai VAGY műveletet a tevékenységek együttes végrehajtására. Jelezve ezzel azt, hogy a két tevékenységet a kizáró logikai "vagy" művelet köti össze.

3.1.2.2. PÉLDA. Összeadás szabály alkalmazása

Egy mérnök szakos képzésen 40 fő nappalis hallgató és 20 fő levelezős hallgató vesz részt. Mindkét képzésben nem részesülhet egy hallgató. A szakesten összekeveredtek a hallgatók. Hányféleképpen tudunk kiválasztani közülük **egy hallgatót** függetlenül attól, hogy nappali vagy levelező képzésben vesz részt?

Megoldás

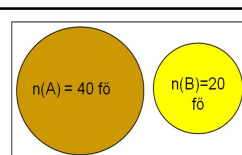
Definiáljuk az A és B tevékenységet!

A tevékenység:

kiválasztunk 1 főt a 40 nappalis hallgatók közül

B tevékenység:

kiválasztunk 1 főt a 20 levelezős hallgatók közül



A 40 fő nappali hallgató közül egyet kiválasztani 40-féleképpen lehet, azaz $n(A) = 40$. A 20 fő levelező hallgató közül egyet kiválasztani 20-féleképpen lehet, azaz $n(B) = 20$. Az A és B tevékenységeket egyszerre nem tudjuk végrehajtani, mert nincs olyan hallgató, aki mindkét képzésben részt vesz.

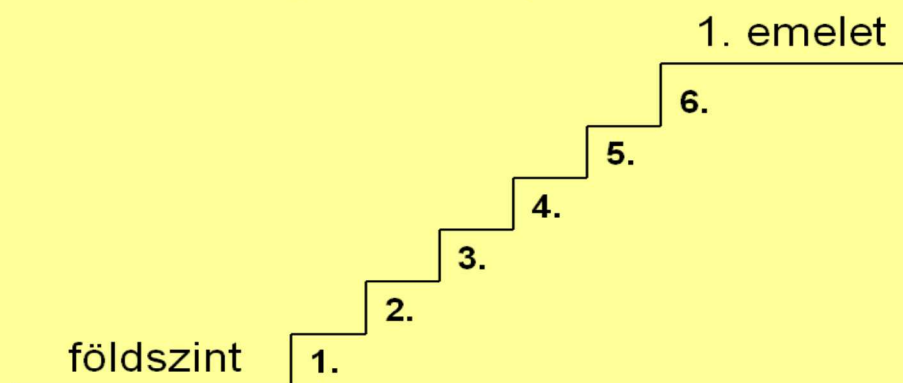
Így összesen $n(A) + n(B) = 40 + 20 = 60$ - féleképpen választhatunk ki 1 főt a teljes szakról. ♣

A következő példa kevésbé triviális az összeadás-szabály alkalmazására.

3.1.2.3. PÉLDA. LÉPCSŐN LÉPKEDÉS ÉS UGRÁLÁS

Egy $n (\geq 1)$ lépcsőfokból álló lépcsőn úgy tudunk felmenni, hogy egyszerre vagy 1

lépcsőfokot lépünk vagy 2 lépcsőfokot ugrunk. Hány különböző módon mehetünk fel a földszintről az $n = 6$ lépcsőfokból álló lépcsőn az első emeletre?



MEGOLDÁS

Jelölje x_k a k -adik lépcsőfokra való **különböző feljutások** számát!

Az $x_1 = 1$, mert egyet lépve tudunk feljutni az első lépcsőfokra.

Az $x_2 = 2$, mert feljuthatunk úgy a második lépcsőfokra, hogy egyszerre 2 lépcsőfokot ugrunk vagy kétszer lépünk 1 lépcsőfokot.

Vizsgáljuk a k -adik (>2) lépcsőfokra való feljutási lehetőségek számát. Kérdés, milyen módon juthatunk fel a k -dik lépcsőfokra? Keressünk összefüggést az alacsonyabb lépcsőfokokról való feljutási lehetőségek számával!

A tevékenység: utoljára 1 lépcsőfokot léptünk	B tevékenység: utoljára 2 lépcsőfokot ugrottunk
---	---

Az A tevékenység végrehajtása esetén a $(k - 1)$ -ik lépcsőfokról jutottunk fel a k -adikra a végén egy lépcsőfokot lépve, így $n(A) = x_{k-1}$.

A B tevékenység végrehajtása esetén a $(k - 2)$ -ik lépcsőfokról jutottunk fel a k -adikra a végén két lépcsőfokot ugorva, így $n(B) = x_{k-2}$.

Az A és B tevékenységet egyszerre nem tudjuk végrehajtani és csak úgy juthatunk fel a k -adik lépcsőfokra, ha utoljára vagy 1 lépcsőfokot lépünk vagy 2 lépcsőfokot ugrunk. Más lehetőség nincs.

A k -adik lépcsőfokra való különböző feljutások számát megkapjuk, ha a két diszjunkt feljutások számát összegezzük

$$x_k = n(A \vee B) = n(A) + n(B) = x_{k-1} + x_{k-2} \quad (k = 3, 4, 5, 6).$$

Ezzel a rekurzív összefüggéssel értelmezett sorozatot **Fibonacci-féle sorozatnak** nevezzük.

Nézzük az első 6 elemét!

$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 1 + 2 = 3$	$x_4 = 2 + 3 = 5$	$x_5 = 3 + 5 = 8$	$x_6 = 5 + 8 = 13$
-----------	-----------	-------------------	-------------------	-------------------	--------------------

Tehát a 6 -ik lépcsőfokra 13 különböző módon juthatunk fel. ♣

Az alábbi **Maple**

```
> restart :
> szint1 := [1, 2] :
> for lepcso from 2 to 6 do
    kovetkezo := NULL : eloza := szint1[(lepcso - 1)] :
```


Általánosítás

Az összeadás szabályt általánosítsuk az A és B két résztevékenység helyett tetszőleges számú összeadandó résztevékenységre!

3.1.3. Tevékenységek szorzás - szabálya és alkalmazása

A kombinatorika **számlálási** alapelvei között a **szorzás szabályt** az egymásután végrehajtott résztevékenységek **együttes végrehajtási számának** meghatározására használjuk úgy, hogy az egyes résztevékenységek számát **összeszorozzuk**.

3.1.3.1. TEVÉKENYSÉGEK SZORZÁS SZABÁLYA

Ha egy T tevékenység felbontható az A és B két résztevékenységre úgy, hogy

(i) az A tevékenység végrehajtására $n(A)$ -féle lehetőségünk van;

(ii) miután az A tevékenységet végrehajtottuk, ezután a B tevékenység végrehajtására minden esetben $n(B)$ lehetőségünk van,
akkor a $T = A$ és B tevékenységek **együttes végrehajtására** összesen $n(A \wedge B) = n(A) \cdot n(B)$ lehetőségünk van.

Használjuk a $T = A \wedge B$ **logikai ÉS** műveletet, jelezve ezzel azt, hogy a két tevékenységet logikai "és" művelet köti össze.

3.1.3.2. PÉLDA. Szorzás szabály alkalmazása

Egy mérnök szakon 40 fő nappalis és 20 fő levelezős képzésben részesülő hallgató végzett. Egy hallgató csak egyfajta diplomát kaphatott. Egy vállalat a feladatainak megoldásához keres **egy nappalin végzett és egy levelezőn végzett** mérnököt! Hányféleképpen tudja ezt megtenni a most végzettek közül válogatva?

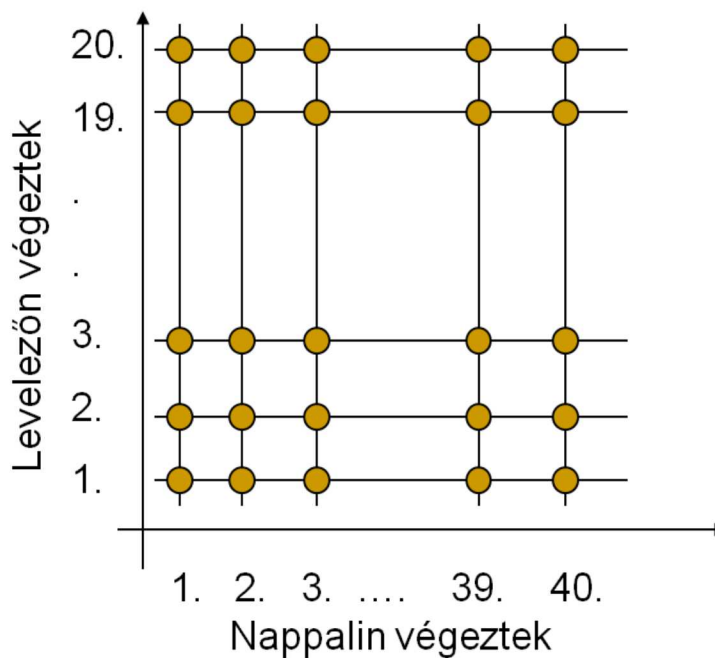
Megoldás

Ellentétben a 3.1.2.1. példával most nem 1 hallgatót választunk ki, hanem kettőt! A két tevékenység viszont nem változott.

A tevékenység	B tevékenység
kiválasztunk 1 főt a nappalin végzettek közül	kiválasztunk 1 főt a levelezőn végzettek közül

Most az A és B tevékenységeket elvégezhetjük egyszerre is és egymásután is!

Az $n(A) = 40$ és $n(B) = 20$ most is. Vegyünk fel egy koordinátarendszert a síkon és a nappalin végzett hallgatók sorszámaint tüntessük fel a sík vízszintes tengelyén és a levelezőn végzett hallgatók sorszámaint a függőleges tengelyen! Készítsük el a rácshálózatot az ábrán látható módon!



Ha a 40 nappalis közül kiválasztottunk egyet, akkor hozzá bármelyik levelezőn végzettet választhatjuk. A (k, m) koordinátájú rácsponttal jelezzük azt a kiválasztást, hogy a nappalin végzettek közül a k -adikat, míg a levelezőn végzettek közül az m -edik főt választottuk ki az adott munkára.

Például a 3-ik oszlopban levő 20 elem:

$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), \dots, (3,19), (3,20)$

azt jelöli, hogy a hármas sorszámú nappalin végzett hallgatót párosíthatjuk rendre a 20 különböző levelezőn végzett hallgatóval.

Az $n(B)=20$ sorból és $n(A)=40$ oszlopból álló téglalap alakú rácshálózat elemeinek száma $20 \cdot 40 = 800$.

A lehetőségek száma az $A \times B$ **Descartes-féle szorzat** elemeinek számával egyezik meg, azaz $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 40 \cdot 20 = 800$.

Ezért a kiválasztást 800 különböző módon tehetjük meg. ♣

A megoldás során a szorzás-szabály szemléltetésére alkalmazni tudtuk a halmazok Descartes-szorzatát. Vannak azonban olyan esetek, amikor a kiválasztás nem ugyanazokból az elemekből áll! Ezért ilyenkor a **tevékenység** a megfelelő eszköz a megszámlálás leírására és a **fa gráfot** használjuk a szemléltetéshez! Lásd a 3.1.6.2. permutációnál

3.1.4. Beszámítás és kizárási- elv avagy a logikai szita- formula.

Ha egy feladat úgy bontható fel A és B két résztevékenységre, hogy az A és B tevékenységek nem zárják ki egymást, mint azt feltételeztük az összeadási elvben, akkor az összeadási elv nem vezet helyes eredményre az $A + B$ tevékenység végrehajtási számának meghatározására! Ilyen esetekben alkalmazzuk a „beszámítás és kizárás” elvét. A tételt általánosítani lehet tetszőleges számú összeadandó résztevékenységre és a 2.5.6. Poincare-formulával analóg szita formulát kapjuk.

3.1.4.1. BESZÁMÍTÁS ÉS KIZÁRÁS ELVE avagy a SZITA-FORMULA KETTŐ

HALMAZRA

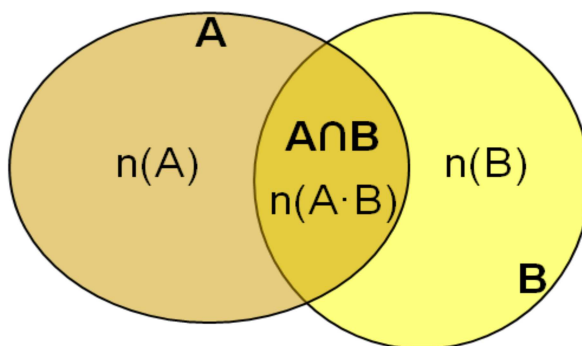
Ha az A tevékenység végrehajtására $n(A)$ és a B tevékenység végrehajtására $n(B)$ lehetőségünk van, akkor az **A vagy B** végrehajtási lehetőségeinek száma

$$n(A + B) = n(A) + n(B) - n(A \cdot B),$$

ahol $n(A + B)$ **jelöli** az A vagy B tevékenység végrehajtási lehetőségeinek számát és $n(A \cdot B)$ **jelöli** az A és B egyidejű végrehajtási lehetőségeinek számát.

Bizonyítás.

Az $n(A)$ számításánál beszámítottuk azokat az eseteket, amelyeket az A és B egyidejű végrehajtásakor hajtunk végre. Hasonlóan $n(B)$ számításánál beszámítottuk azokat az eseteket, amelyeket az A és B egyidejű végrehajtásakor hajtunk végre. Így az $n(A) + n(B)$ összegben kétszer számoltuk meg azokat az eseteket, amelyek az A és B tevékenységek egyidejű végrehajtásakor keletkező eredmények. Ezért az összegből egyszer le kell vonni – vagyis ki kell zárni – az $n(A \cdot B)$ közös elemeket!



Az ábrán az A tevékenység végrehajtási számát betettük az A halmazba, B tevékenységét a B halmazba és a közös végrehajtást az $A \cap B$ halmazba. Ekkor a feladat halmazok elemszámairól szól.

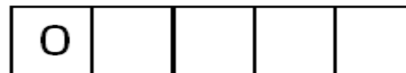
3.1.4.2. PÉLDA. BITSOROZATOK SZÁMA

Hány darab olyan 5 hosszúságú csupa 0-ból és 1-ből álló bitsorozatot tudunk képezni, amelyekre a **kezdő bit** 0 vagy az **utolsó bit** 1 legyen? (Beleértjük a vagy kapcsolatba azokat a lehetőségeket is, amikor 0-val kezdődik, de nem végződik 1-re; 1-re végződik, de nem kezdődik 0-val, továbbá 0-val kezdődik és 1-re is végződik a bitsorozat!)

MEGOLDÁS

Jelölje **A** azt a tevékenységet, hogy az 5 bit kezdő helyére 0-át írunk

$A = \{\text{az első bit helyén 0 áll}\}$



Jelölje **B** azt a tevékenységet, hogy az 5 bit utolsó helyére 1-et írunk

$B = \{\text{az utolsó bit helyén 1 áll}\}$



Az A és B tevékenységet egyszerre hajthatjuk végre, akkor olyan 5 hosszúságú bitsorozatokat kapunk, amelyek 0-val kezdődnek és 1-re végződnek! Tehát **A és B** nem egymást kizáró tevékenységek!

0				1
---	--	--	--	---

Vegyük észre, hogy az összeadási szabály nem alkalmazható. Helyette az általánosabb beszámítás és kizárás elvét kell használni.

Az **A tevékenység** végrehajtási lehetőségei $n(A)$ számának kiszámításához, használjuk a szorzás szabályt: jelölje A_2, A_3, A_4 és A_5 azt a **résztevékenységet**, hogy kitöltjük rendre a 2., 3., 4. és 5. (balról jobbra sorszámozva) szabad helyeket 0-val vagy 1-gyel.

0				
---	--	--	--	--

Mivel $n(A_2) = n(A_3) = n(A_4) = n(A_5) = 2$ és ezek a kitöltési lehetőségek egymástól függetlenek, ezért a szorzás-szabály alapján

$$n(A) = n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot n(A_4) \cdot n(A_5) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

különböző 0-val kezdődő 5 hosszúságú bitsorozat van. Ezek között természetesen vannak olyanok, amelyek 1-re végződnek. Felsoroljuk az összes ilyen esetet

0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1																				

A **B tevékenység** végrehajtási lehetőségei $n(B)$ számának meghatározására használjuk a szorzás szabályt: jelölje B_1, B_2, B_3 és B_4 azt az eseményt, hogy kitöltjük valahogyan az 1., 2., 3. és 4. (balról jobbra sorszámozva) szabad helyeket 0-val vagy 1-gyel.

				1
--	--	--	--	---

Mivel $n(B_1) = n(B_2) = n(B_3) = n(B_4) = 2$ és ezek a kitöltési lehetőségek egymástól függetlenek, ezért a szorzás-szabály alapján

$$n(B) = n(B_1) \cdot n(B_2) \cdot n(B_3) \cdot n(B_4) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16.$$

különböző 1-re végződő 5 hosszúságú bitsorozat van. Ezek között természetesen vannak olyanok, amelyek 0-val kezdődnek. Felsoroljuk az összes ilyen esetet:

0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1																				

Az **(A és B) = C tevékenység** végrehajtási lehetőségei $n(A \cdot B)$ számának kiszámításához használjuk a **szorzás szabályt**: jelölje C_2, C_3 és

C_4 azt a **résztevékenységet**, hogy kitöltjük valahogyan rendre a 2., 3. és 4. (balról jobbra sorszámozva) szabad helyeket 0-val vagy 1-gyel.

0				1
---	--	--	--	---

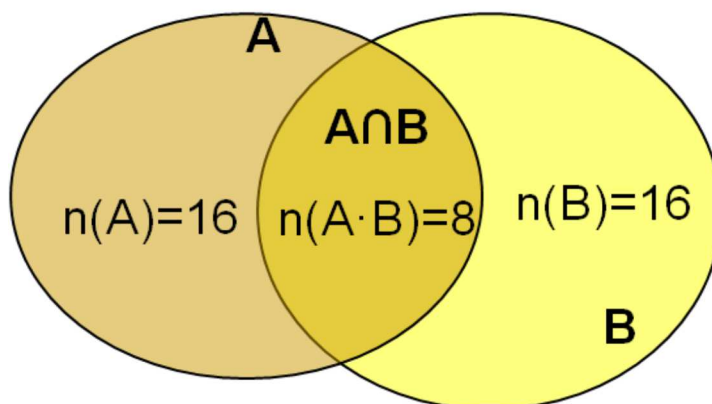
Mivel $n(C_2) = n(C_3) = n(C_4) = 2$ és ezek a kitöltési lehetőségek egymástól függetlenek, ezért

$$n(A \cdot B) = n(C_2) \cdot n(C_3) \cdot n(C_4) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

Tehát különböző 0-val kezdődő és 1-re végződő 5 hosszúságú bitsorozat 8 db van. Felsoroljuk az összes esetet.

0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1

Az alábbi ábra az egyes tartományokhoz tartozó 5 bit hosszú sorozatok számát mutatja. Ne tévesszen meg senkit, hogy az A halmaz is 16 elemű és a B halmaz is. Ezek nem az $A \setminus B$ illetve $B \setminus A$ halmazok elem számai!



Alkalmazzuk a „beszámítás és kizárás” elvét az összes 0-val kezdődő vagy 1-re végződő 5 hosszúságú bitsorozat számának meghatározásához! Így a keresett szám

$$n(A + B) = n(A) + n(B) - n(A \cdot B) = 16 + 16 - 8 = 24$$

Tehát összesen 24 olyan 5 hosszú bit sorozat van, amelyek 0 bittel kezdődnek vagy 1 bittel végződnek.

Az alábbi bal oldali táblázatban szerepelnek a kiszámolt $n(A) = 16$, $n(B) = 16$ és $n(A \cdot B) = 8$ számok. Ezeket kiegészítettük az *A tagadás* és *B tagadás* tevékenységek üres sor és üres oszlopával, valamint az összes 5 hosszú bit sorozatok $2^5 = 32$ számával.

	B	nem B	összeg
A	8		16
nem A			
összeg	16		$2^5 = 32$

	B	nem B	összeg
A	$\ominus 8$	8	$\oplus 16$
nem A	8	8	16
összeg	$\oplus 16$	16	$2^5 = 32$

A baloldali táblázatban csak a sarokban levő számok adottak. Ezek segítségével kiszámoltuk a táblázat belső számait és beírtuk a jobb oldali táblázatba! A jobb oldali táblázatban megjelöltük $\oplus$ jellel azt a két számot, amelyeket be kell számítani és $\ominus$ jellel azt, amelyet ki kell vonni az $n(A + B) = 32$ számításánál!

3.1.4.3. PÉLDA. OSZTHATÓSÁGI FELTÉTELEK

Legyen $S = \{1, 2, 3, \dots, 999, 1000\}$ az 1000-nél nem nagyobb pozitív egészek halmaza. Határozzuk meg hány olyan szám van az S halmazban, amelyek **nem oszthatók** a 3, 5 és 7 egyikével sem!

A számolást egyrészt végezzük az általánosított beszámítás-kizárás elv alapján!

Másrészt írjunk **Maple program kódot** a részhalmaz elemeinek megszámlálására!

Megoldás

Jelölje

$$H = \{n \in S \mid n \text{ nem osztható a } 3, 5 \text{ és } 7 \text{ egyikével sem}\}$$

a keresett halmazt és legyen

$A = \{n \in S \mid n \text{ osztható } 3 - \text{mal}\}$	$B = \{n \in S \mid n \text{ osztható } 5 - \text{tel}\}$	$C = \{n \in S \mid n \text{ osztható } 7 - \text{tel}\}$
---	---	---

rendre a 3-mal, 5-tel és 7-tel osztható számok halmaza, amelyek az S halmazból valók.

Számoljuk ki az oszthatósági halmazok számosságát az **egészrész függvény**vel

$$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = [333.3] = 333, |B| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = [200] = 200, |C| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = [142.8] = 142.$$

Mivel a 3, 5 és 7 prímek, ezért a H halmaz egyenlő az A , B és C halmazok komplementereinek metszetével

$$H = A^c \cap B^c \cap C^c.$$

A keresett H halmazt előállítjuk a **Maple beépített halmaz műveleteivel**: **minus=különbség**, **intersect=metszet**.

> restart :

$A := \{seq(3 \cdot k, k = 1 .. 333)\} :$

$B := \{seq(5 \cdot k, k = 1 .. 200)\} :$

$C := \{seq(7 \cdot k, k = 1 .. 142)\} :$

> $S := \{seq(k, k = 1 .. 1000)\} :$

$Ac := S \text{ minus } A : Bc := S \text{ minus } B : Cc := S \text{ minus } C :$

> $H := Ac \text{ intersect } Bc \text{ intersect } Cc ;$

$|H| = nops(H)$

$H := \{1, 2, 4, 8, 11, 13, 16, 17, 19, 22, 23, 26, 29, 31, 32, 34, 37, 38, 41, 43, 44, 46, 47, 52, 53, 58, 59, 61, 62, 64, 67, 68, 71, 73, 74, 76, 79, 82, 83, 86, 88, 89, 92, 94, 97, 101, 103, 104, 106, 107, 109, 113, 116, 118, 121, 122, 124, 127, 128, 131, 134, 136, 137, 139, 142, 143, 146, 148, 149, 151, 152, 157, 158, 163, 164, 166, 167, 169, 172, 173, 176, 178, 179, 181, 184, 187, 188, 191, 193, 194, 197, 199, 202, 206, 208, 209, 211, 212, 214, 218, 221, 223, 226, 227, 229, 232, 233, 236, 239, 241, 242, 244, 247, 248, 251, 253, 254, 256, 257, 262, 263, 268, 269, 271, 272, 274, 277, 278, 281, 283, 284, 286, 289, 292, 293, 296, 298, 299, 302, 304, 307, 311, 313, 314, 316, 317, 319, 323, 326, 328, 331, 332, 334, 337, 338, 341, 344, 346, 347, 349, 352, 353, 356, 358, 359, 361, 362, 367, 368, 373, 374, 376, 377, 379, 382, 383, 386, 388, 389, 391, 394, 397, 398, 401, 403, 404, 407, 409, 412, 416, 418, 419, 421, 422, 424, 428, 431, 433, 436, 437, 439, 442, 443, 446, 449,$

451, 452, 454, 457, 458, 461, 463, 464, 466, 467, 472, 473, 478, 479, 481, 482, 484, 487, 488, 491, 493, 494, 496, 499, 502, 503, 506, 508, 509, 512, 514, 517, 521, 523, 524, 526, 527, 529, 533, 536, 538, 541, 542, 544, 547, 548, 551, 554, 556, 557, 559, 562, 563, 566, 568, 569, 571, 572, 577, 578, 583, 584, 586, 587, 589, 592, 593, 596, 598, 599, 601, 604, 607, 608, 611, 613, 614, 617, 619, 622, 626, 628, 629, 631, 632, 634, 638, 641, 643, 646, 647, 649, 652, 653, 656, 659, 661, 662, 664, 667, 668, 671, 673, 674, 676, 677, 682, 683, 688, 689, 691, 692, 694, 697, 698, 701, 703, 704, 706, 709, 712, 713, 716, 718, 719, 722, 724, 727, 731, 733, 734, 736, 737, 739, 743, 746, 748, 751, 752, 754, 757, 758, 761, 764, 766, 767, 769, 772, 773, 776, 778, 779, 781, 782, 787, 788, 793, 794, 796, 797, 799, 802, 803, 806, 808, 809, 811, 814, 817, 818, 821, 823, 824, 827, 829, 832, 836, 838, 839, 841, 842, 844, 848, 851, 853, 856, 857, 859, 862, 863, 866, 869, 871, 872, 874, 877, 878, 881, 883, 884, 886, 887, 892, 893, 898, 899, 901, 902, 904, 907, 908, 911, 913, 914, 916, 919, 922, 923, 926, 928, 929, 932, 934, 937, 941, 943, 944, 946, 947, 949, 953, 956, 958, 961, 962, 964, 967, 968, 971, 974, 976, 977, 979, 982, 983, 986, 988, 989, 991, 992, 997, 998 }

$$|H| = 457$$

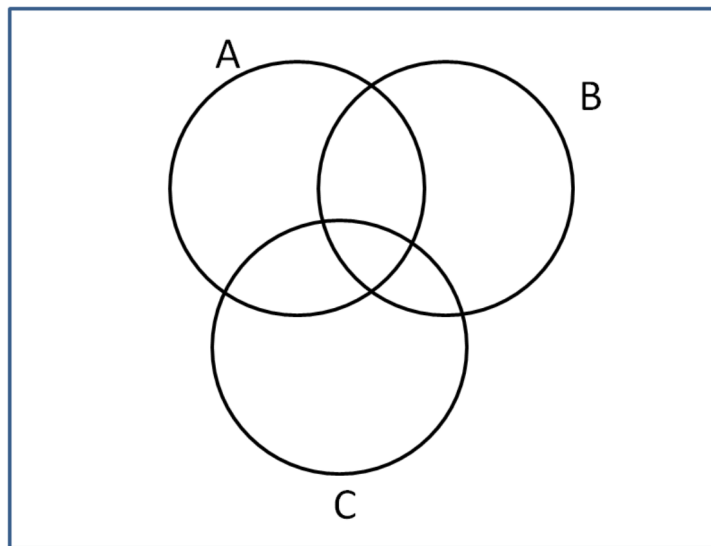
(1.4.1)

A Maple halmaz utasításait használva **megkaptuk** a H halmaz elemeit. Így láthatjuk, hogy nincs benne se 3-mal, se 5-tel, se 7-tel osztható szám. Az $nops(H)$ **megszámolta**, hogy a H halmaznak **457** eleme van.

Kérdés: Hogyan kapjuk meg a 457 elemet **kézi számolással**?

Válasz: A H komplementer halmazát a DeMorgan azonosság alapján számoljuk ki

$$H^c = A \cup B \cup C.$$



A **beszámítás és kizárás** elvet alkalmazzuk az A és $B \cup C$ halmazokra
(BK)

$$|A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|.$$

A kapott második tagra alkalmazzuk újból a **beszámítás-kizárás** elvét

(*)

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|.$$

Használjuk a disztributív szabályt a (BK) képlet harmadik tagjára

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Így újból alkalmazni tudjuk a **beszámítás-kizárás** elvét az unióra

$$(**) \quad |(A \cap B) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

A (*) és (**) képleteket behelyettesítve a (BK) formulába kapjuk az alábbi képletet

$$|H^c| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

A metszet halmazok elemeit számoljuk ki az előzőekkel analóg módon

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 5} \right\rfloor = \lfloor 66.6 \rfloor = 66, \quad |A \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 7} \right\rfloor = \lfloor 47.6 \rfloor = 47, \quad |B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{5 \cdot 7} \right\rfloor = \lfloor 28.5 \rfloor = 28.$$

A három halmaz metszetére

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{1000}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor = \lfloor 9.5 \rfloor = 9.$$

Így az általánosított beszámítás és kizárás elv alapján

$$|H^c| = (333 + 200 + 142) - (66 + 47 + 28) + 9 = 543.$$

Ahonnán

$$|H| = |S \setminus H^c| = 1000 - 543 = 457.$$

Ezzel megkaptuk a Maple által számolt halmaz elemszámot.

Tehát összesen 457 olyan szám van 1 és 1000 között, amelyek nem oszthatók a 3, 5 és 7 egyikével sem. ♦

Több halmaz uniójának számossága kiszámolható, ha ismert a halmazok számosságának összege, az összes kettős metszet számosságainak összege, az összes hármas metszet számosságainak összege,...stb. és végül az összes halmaz metszetének számossága.

3.1.4.4. Általános logikai szita formula

TÉTEL

Legyenek $A_1, A_2, \dots, A_n$ véges halmazok. Ekkor az $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ egyesítés halmaz elemszámára teljesül az

$$|A| = S_1^{(n)} - S_2^{(n)} + S_3^{(n)} - \dots + (-1)^{n+1} S_n^{(n)} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k^{(n)}$$

formula, ahol

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

a különböző k -tényezős metszetek számosságainak összege.

BIZONYÍTÁS

Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n = 2$, akkor igazolnunk kell, hogy $|A_1 \cup A_2| = S_1^{(2)} - S_2^{(2)}$, ahol

$$S_1^{(2)} = |A_1| + |A_2| \text{ és } S_2^{(2)} = |A_1 \cap A_2|.$$

Az állítás ekkor megegyezik a 3.1.4.1. kizárás és beszámítás elvével. Tegyük fel, hogy az állítás igaz n -re.

Meg kell mutatni, hogy $(n+1)$ -re is igaz. Zárójelezzük az összeget két tagú unióra

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}|.$$

Használjuk, hogy a halmazok uniója a metszetre nézve disztributív (vagy széttagolható)

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1}).$$

A jobb oldal n -tagú unió, melyre alkalmazzuk az indukciós feltevést

$$|(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})| = \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} |A_{j_1} \cdot \dots \cdot A_{j_l} \cdot A_{n+1}|$$

Ugyancsak alkalmazhatjuk az indukciós feltevést az $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ unióra. Így kapjuk a bizonyítandó állítást

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| &= \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot S_k^{(n)} + |A_{n+1}| - \sum_{l=1}^n (-1)^{l+1} \cdot \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n} |A_{j_1} \cdot \dots \cdot A_{j_l} \cdot A_{n+1}| = \\ &= S_1^{(n+1)} - S_2^{(n+1)} + S_3^{(n+1)} - \dots + (-1)^{n+2} S_{n+1}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} S_k^{(n+1)}. \quad \text{Q.e.d. } \blacklozenge \end{aligned}$$

3.1.4.5. Szita formula tagadás alakja

TÉTEL

Legyenek az $A_1, A_2, \dots, A_n$ véges halmazok részhalmazai az E halmaznak. Ekkor az unió komplementerének számosságára teljesül az

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}| = |E| - S_1^{(n)} + S_2^{(n)} - S_3^{(n)} + \dots + (-1)^n S_n^{(n)} = |E| + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k^{(n)}$$

formula, ahol a komplementert az E halmazra vesszük és

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cdot \dots \cdot A_{i_k}|$$

a különböző k -tényezős metszetek számosságainak összege.

BIZONYÍTÁS

Az állítás következik az $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}| = |E| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ számosságokra vonatkozó azonosságból és a 3.1.4.4. általános szita-formulából. Q.e.d. $\blacklozenge$

3.1.5. Galambdúc-elv avagy skatulya-elv. Általánosított skatulya-elv.

A leszámlálás kombinatorikai alapelvei között a skatulya elv vagy más néven galambdúc elv **objektumok és tároló helyek egymáshoz rendelésével** foglalkozik.

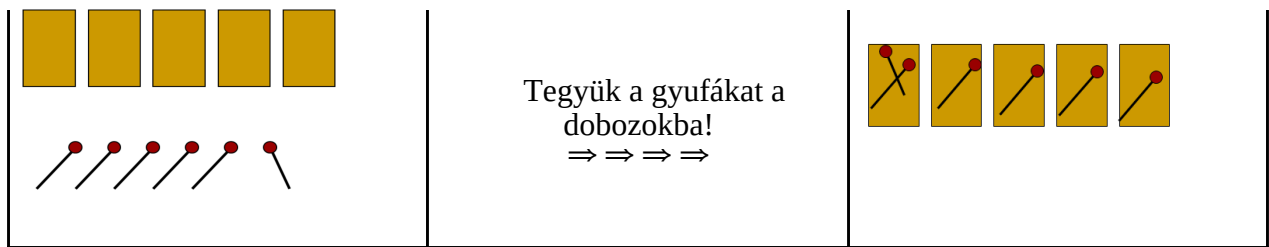
3.1.5.1. GALAMBDÚC-ELV

Ha van $(n + 1)$ galamb és csak n darab galambdúc, akkor kell hogy legyen olyan galambdúc, amelyikben legalább 2 galamb lesz, ha minden galamb berepült a galambdúc valamelyikébe.

Az elv a fenti jelentés tartalommal az angolszász irodalomból származik. A magyar változat az alábbi.

SKATULYA-ELV

Ha van $(n + 1)$ szál gyufa és csak n darab gyufásdoboz, akkor kell hogy legyen olyan gyufásdoboz, amelyikben legalább 2 szál gyufa lesz, ha mindegyik gyufaszálat betettük valamelyik gyufásdobozba.



BIZONYÍTÁS

Indirekt úton, tegyük fel, hogy a feltétel teljesül, mégis az állítással szemben nincs olyan gyufásdoboz, amelyikben legalább 2 gyufaszál lenne. Ez azt jelenti, hogy mindegyik gyufásdobozban maximum 1 szál gyufa lehet. De ekkor összesen maximum n db gyufa van az n dobozban. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy mind az $(n + 1)$ szál gyufát betettük valamelyik dobozba!

◆

3.1.5.2. PÉLDA

Van-e legalább két olyan hallgató az egyetemi karon, akik **monogramja megegyezik**. A monogramot a vezetéknev és a keresztnév kezdőbetűjéből képezett két betű alkotja. Figyelmen kívül hagyjuk a kettőnél több névvel rendelkezők további kezdőbetűit!

MEGOLDÁS

Jelölje A azt a tevékenységet , hogy a monogram első helyére beírjuk a család név kezdő betűjét .	Tevékenység $A = \{\text{család név kezdő betűje}\}$
Jelölje B azt a tevékenységet , hogy a monogram második helyére beírjuk a keresztnév kezdő betűjét .	Tevékenység $B = \{\text{keresztnév kezdő betűje}\}$

Családnév kezdőbetűje	Keresztnév kezdőbetűje
--------------------------	---------------------------

Például Kovács János nevű hallgatóra az A tevékenység eredménye a "K" betű és a B tevékenység eredménye a "J" betű.

Az A és B tevékenységek egymástól **függetlenül** végrehajthatók, ezért az A és B tevékenység egymás utáni végrehajtására a **szorzás szabályt** kell alkalmazni.

Az angol ABC 26 betűjét az alábbi táblázat mutatja.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

A magyar ABC további 15 új karakterét mutatja az alábbi táblázat, amelyek előfordulhatnak a monogramban.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
á	cs	é	gy	í	ly	ny	ó	ö	ő	sz	ű	ü	ű	zs

Így összesen $41 = 26 + 15$ karakterrel kell számolni, mind a monogram első helyén, mind a második helyén! Tehát $n(A) = 41$ és $n(B) = 41$.

A magyar ABC betűire alapozott kétbetűs különböző monogramok teljes száma

$$n(A \wedge B) = n(A) \cdot n(B) = 41 \cdot 41 = 1681.$$

Az 1681 különböző lehetőséget tekintjük úgy, mint különböző **gyufásdobozt**, felcímkezve a megfelelő **kétfetűs monogrammal**. A **hallgatókat** tekintjük **gyufaszálaknak** és egy hallgató monogramját tegyük a megfelelő gyufásdobozba. Ha a hallgatók száma nagyobb, mint az 1681 gyufásdoboz, akkor van legalább két olyan hallgató, akiknek a monogramja ugyanaz. Hiszen lesz olyan gyufásdoboz, amelyikben legalább két gyufaszál lesz. Ami azt jelenti, hogy van két egyező monogram, amely legalább két különböző hallgatóhoz tartozik. Jelenleg a karnak több, mint 1681 hallgatója van, ezért a válasz az, hogy van legalább két azonos monogramú hallgató.

Mondjuk ezt anélkül, hogy tudnánk kiről van szó. ♦

3.1.5.1. ÁLTALÁNOSÍTOTT SKATULYA-ELV

Ha N szál gyufát szeretnénk betenni k ($k < N$) darab gyufa skatulyába, akkor lesz olyan doboz, amelyik tartalmaz legalább

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$$

számú gyufaszálat.

Itt $\lceil x \rceil$ jelöli az x szám **felső egész részét**, amely a legkisebb olyan egész szám, mely nagyobb vagy egyenlő, mint x . Definíció alapján látható, hogy minden x számra teljesülnek az

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$$

egyenlőtlenségek. Például $x = 8.3$ felső egészrésze $\lceil 8.3 \rceil = 9$. Azt mondhatjuk, hogy a számot a legközelebbi egész számhoz fölfelé kerekítjük. Ezért jelöljük olyan szögletes zárójel párral, melyek felső részen meghagyjuk a befelé mutató vonalakat, viszont az alsót elhagyjuk!

Bizonyítás

Indirekt módon, tegyük fel, hogy a feltétel teljesül, mégis az állítással ellentétben nincs olyan

gyufásdoboz, amelyikben legalább $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ gyufaszál lenne. Ez azt jelenti, hogy **mindegyik** gyufásdobozban **maximum**

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$$

szál gyufa van. De ekkor **összesen maximum**

$$k \cdot \left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1 \right) < k \cdot \frac{N}{k} = N$$

gyufa van a k **gyufásdobozban**. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy az N gyufa mindegyikét betettük valamelyik dobozba! A kapott ellentmondás indirekt módon igazolja az általánosított skatulya elvet. ♦

3.1.5.2. PÉLDA

Minimálisan mennyi a tanulói létszáma annak az osztálynak, amelyikben biztosan van legalább 6 olyan tanuló, akik ugyanolyan osztályzatot kaptak matematikából?

Megoldás

Rövid gondolkodás után sokan a 6 létszámú osztályt mondják. De ekkor még nem biztos, hogy mindenki ugyanazt az osztályzatot kapja. Ha például az osztályzatok $\{1, 2, 3, 4, 5, 1\}$, akkor csak kettő tanulónak van azonos osztályzata és nem 6 tanulónak. Ezért tovább kell gondolni a feladat megoldását!

A gyufás dobozok száma most $k = 5$ a különböző osztályzatok száma. Képzeljük el, hogy ráírtuk a gyufás dobozokra jól látható módon az 1, 2, 3, 4, 5 osztályzatokat. Ha mindegyik dobozba maximum csak 5 nevet teszünk, akkor maximum 25 nevet tettünk az 5 dobozba. Ekkor, ha az osztálylétszám ennél eggyel nagyobb, azaz $N = 26$, akkor legalább egy dobozba 6 név kell hogy kerüljön, hiszen minden dobozban 5 név van és még egyet valahova be kell tenni.

Próbáljuk ki az **általánosított skatulya elvet** $N=25$ és $N=26$ gyufával és $k = 5$ dobozzal!

Első esetben

$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{25}{5} \right\rceil = \lceil 5 \rceil = 5$, tehát ekkor előfordulhat hogy mindegyik doboz pontosan 5 nevet tartalmaz. Tehát még előfordulhat az az eset, hogy egyik dobozban sincs 6 név.

A második esetben $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{26}{5} \right\rceil = \lceil 5.2 \rceil = 6$, tehát az általánosított skatulya-elv alapján van olyan doboz, amelyben legalább 6 név szerepel.

Tehát 26 a legkisebb olyan osztálylétszám, amelyben kell, hogy legyen legalább 6 olyan tanuló, akik ugyanolyan osztályzatot kaptak. ♦

3.1.5.3. PÉLDA. AZONOS SZÁMÚ ISMERŐSÖK LÉTEZÉSE

Tegyük fel, hogy valamely kettőnél több emberből álló rendezvényen bármely két ember vagy ismeri a másikat vagy ismeretlenek egymás számára. Mutassuk meg, hogy van legalább két olyan ember, akiknek **ugyanannyi ismerőse** van.

Megoldás

Kategorizáljuk az embereket az ismerősük száma szerint. Hányféle kategória lehet összesen? Előfordulhat az az eset, hogy valaki nem ismer senkit a társaságból. Jelölje ezt a csoportot S_0 .

Jelölje az egyes kategóriákat

$$S_k = \{ \text{azon emberek halmaza, akiknek pontosan } k \text{ ismerőse van a társaságban} \},$$

ahol $k = 0, 1, 2, \dots, (n - 1)$.

Ezek a skatulyelvben szereplő skatulyák. Tegyük az emberek neveit abba a skatulyába, amelyikhez tartoznak.

Minden ember pontosan egy kategóriához tartozik. Továbbá az S_0 és S_{n-1} kategóriák közül mindkettőben egyszerre nem szerepelhetnek nevek.

Ugyanis, ha $S_0 \neq \emptyset$, akkor van olyan ember akinek nincs ismerőse. Ezért $S_{n-1} = \emptyset$, vagyis nem lehet olyan ember, aki ismer mindenkit, mert neki azt is ismernie kellene, akinek nincs ismerőse. Másrészt, ha $S_{n-1} \neq \emptyset$, akkor van olyan ember aki mindenkit ismer. Ezért $S_0 = \emptyset$, vagyis nem lehet olyan ember, akinek nincs ismerőse, mert őt is ismernie kellene annak, aki mindenkit ismer. Tehát az S_0 és S_{n-1} kategóriák közül legalább az egyiknek üresnek kell lenni. Vagyis a kategóriák száma legfeljebb $(n - 1)$.

Tehát n ember van és $(n - 1)$ skatulya, ezért a skatulya- elv alapján van olyan skatulya, amelyikbe legalább 2 ember neve kerül. Annak a két embernek, akik ugyanabba a kategóriába tartoznak ugyanannyi ismerőse van. ♦

3.1.6. Permutáció: sorrendek képzése minden elemre. Faktoriális.

Következőekben megvizsgáljuk egy halmaz **összes** elemének különböző sorbarendezi lehetőségeit. Az elemek ismétlődése esetén listát célszerű használni halmaz helyett.

3.1.6.1. DEFINÍCIÓ. PERMUTÁCIÓK ÉS SZÁMUK

Egy $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ n elemű halmaz különböző **sorrendjeit** nevezzük az n elem **permutációinak** és P_n jelöli az n elem összes permutációinak számát.

3.1.6.2. PÉLDA. HÁROM ELEM ÖSSZES SORRENDJE

Adjuk meg az 1, 2, 3 számok **összes** különböző **sorrendjét**!

Megoldás

Ezek a sorrendek a következők

$$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

Egy sorrend megadásához a halmaz nem megfelelő adatstruktúra, mert egy halmaz elemeinek

tetszőleges a sorrendje. Ezért a fenti megadások során kerek zárójeleket használtunk. Maple-ben a **lista** a megfelelő adatszerkezet a sorrendek megadásához. A lista elemeit egymástól vessző választja el és szögletes zárójelek határolják az elején és a végén. A Maple *combinat* csomag *permute*([1, 2, 3]) eljárása megadja a példa megoldását.

A *permute* eljárás eredménye egy listák listája, ahol a belső listák a különböző sorrendeket mutatják. Minden belső lista 3 elemű és nincs két azonos.

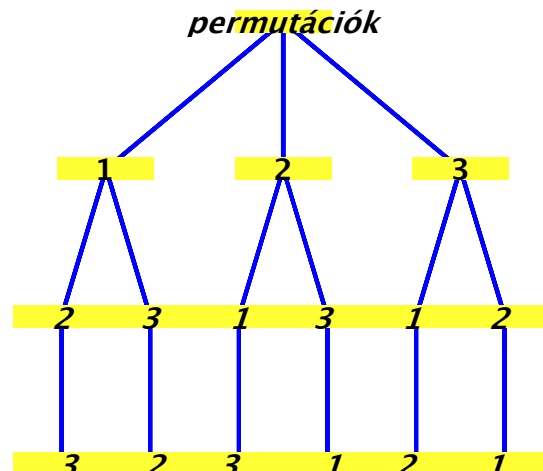
```
> with(combinat) :
> permute([1, 2, 3])
[[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]] (1.6.1)
=>
```

A sorrendek kialakítását **fa gráffal** szemléltethetjük. A fa gráf gyökerét "sorrendek" -nek neveztük. A csúcspontokat fentről lefelé haladva 3 szintre osztottuk. **Első szinten** az 1, 2, 3 csúcspontok szerepelnek, mert kezdetben a 3 szám bármelyikét választhatjuk a **első helyre**. Az első szint csúcspontjaiból a második szintre olyan csúcsokba vezet él, amely csúcs **nem lehet azonos** az első szinten levő számmal. Ezért mindegyik csúcsból 2 elágazás indul ki. Végül a második szint csúcsaiból csak 1 él indul ki, mert már az első két szinten levő számot a harmadik szám képzéséhez nem használhatjuk. A 6 különböző **sorrendet** úgy kapjuk, ha a gyökből indulva a levelekig **megyünk** és közben **felírjuk** az érintett csúcspontokat.

```
> with(GraphTheory) :
első := {permutációk, 1}, {permutációk, 2},
{permutációk, 3} :
második := {1, `2`, {1, `3`, {2, `1`, {2, `3`, {3,
`1`, {3, `2`}:
harmadik := {`2`, `3`, {`3`, `2`, {`1`, `3`, {`3`,
`1`, {`1`, `2`, {`2`, `1`}:
> Fa := Graph({első, második, harmadik});
> DrawGraph(Fa, style = tree, root = permutációk,
showlabels = true);
```

Fa :=

Graph 10: an undirected unweighted graph with 16 vertices and 15 edge(s)



3.1.6.3. PÉLDA.

Egy futó versenyen r futó vesz részt. Hány különböző befutási sorrend alakulhat ki?

Megoldás

Jelölje P_r a keresett befutási sorrendek számát általánosan. Vizsgáljuk kis r résztvevőszám esetén P_r értékének meghatározását!

Ha $r=2$ résztvevő van, akkor kétféle sorrend alakulhat ki (1,2) és (2,1).
Ekkor összesen $P_2 = 2$ befutási sorrend lehetséges.

Legyen a résztvevők száma $r = 3$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	Az 1 rajtszámú futó végzett az első helyen
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	A 2 rajtszámú futó végzett az első helyen
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	A 3 rajtszámú futó végzett az első helyen

3.1.6.1. táblázat. $r = 3$ versenyző lehetséges befutási sorrendje csoportosítva

A fenti táblázat a permutációkat két soros jelöléssel mutatja $r = 3$ esetén az összes befutási sorrendre. Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix}$$

jelölés felső sorában a helyezések sorszámai és alsó sorban a versenyzők rajtszámjai vannak! A felső sorban a helyezések mindig természetes sorrendben vannak, míg az alsó sor a rajtszámokat a befutás sorrendjében tartalmazza. Mondhatjuk azt is, hogy minden permutáció egy

$\sigma: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ **leképezés**, amely kölcsönösen egyértelmű vagy latinosan bijektív.

A 3.1.6.1.táblázat i -ik sora olyan befutási sorrendeket mutat, amelyre első helyen az i -ik rajtszámú versenyző fut be. Ez kétféleképpen fordulhat elő, mert a második és harmadik helyre a másik két versenyző futhat be. Így összesen a 3.1.6.2. példának megfelelően $P_3 = 2 \cdot 3 = 6$.

$r=4$ résztvevő esetén az összes eset felsorolása helyett definiáljunk tevékenységeket és alkalmazzuk a szorzás szabályt!

Legyenek A_1, A_2, A_3 és A_4 tevékenységek a következők:

A_k tevékenység: a k -adik helyre választunk egy nevet a lehetséges versenyzők közül.

Kezdjük a választást az első hellyel! Az A_1 tevékenységet 4-féleképpen hajthatjuk végre, mert az 1, 2, 3 és 4 rajtszámú versenyzők bármelyikét tehetjük első helyre. Ezért $|A_1|=4$.

Ha választottunk egy versenyzőt az első helyre, akkor a második helyre választhatunk a megmaradt 3 versenyző közül egyet, ezért $|A_2|=3$.

Ha választottunk versenyzőt az első helyre is és a második helyre is, akkor a harmadik helyre választhatunk a megmaradt 2 versenyző közül egyet, ezért $|A_3|=2$.

Végül, ha választottunk versenyzőt az első helyre, a második és a harmadik helyre is, akkor a negyedik helyre a megmaradt 1 versenyzőt tehetjük csak, ezért $|A_4|=1$.

Egy befutási sorrendet az $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4$ négy tevékenység egymásutáni végrehajtásával lehet megadni. Tehát a tevékenységek szorzás szabályát kell használnunk, ezért

$$P_4 = |A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge A_4| = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

különböző befutási sorrend lehet 4 versenyző esetén.

Tetszőleges $r = 2, 3, 4, 5, \dots$ résztvevőre is hasonló gondolat menetet követhetünk.

Felbontjuk a sorrendképzés tevékenységét r résztvevőtevékenységre! Jelöljük ezeket $A_1, A_2, A_3, \dots, A_r$ –rel!

Az A_k tevékenység jelentse azt, hogy a k -adik helyre választunk egy nevet a befutók közül.

A korábbi megfontolások alapján az első helyre r választási lehetőségünk van, tehát $|A_1| = r$.

Ha választottunk egy versenyzőt az első helyre, akkor a második helyre választhatunk a megmaradt $(r - 1)$ versenyző közül, ezért $|A_2| = r - 1$.

Ha választottunk versenyzőt az első helyre és a második helyre is, akkor a harmadik helyre választhatunk a megmaradt $(r - 2)$ versenyző közül, ezért $|A_3| = r - 2$.

Folytathatjuk a felsorolást úgy, hogy a választási lehetőségek száma minden esetben eggyel csökken.

Ezért a végére éppen elfogynak a versenyzők, így $|A_r| = 1$.

A szorzás szabály alapján $P_r = r \cdot (r - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = r!$ befutási sorrend lehet r versenyző esetén.

Ahol $r!$ jelölést r faktoriálisnak olvassuk, melyben a faktor szó a tényezőre utal a szorzásban.

Q.e.d.

A most használt módszer segítségével igazolhatjuk az alábbi tételt.

3.1.6.4. TÉTEL. PERMUTÁCIÓK SZÁMA

Az n különböző elem összes lehetséges sorrendjének száma n -faktoriális, azaz

$$P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

az egész számok szorzata 1-től n -ig.

Az alábbi séma a permutáció sematikus ábrája, amely mutatja az egyes szinteken a választási lehetőségek számát és a permutáció számítását szorzás-szabállyal

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \text{a választási lehetőségek száma} \\ \text{választást szimbolizáló téglalapok} \\ \text{a szintek sorszámai} \end{array} & \begin{array}{c} n \quad (n-1) \quad (n-2) \quad \dots \quad 1 \\ \square \quad \square \quad \square \quad \dots \quad \square \\ 1. \quad 2. \quad 3. \quad \dots \quad n. \end{array} \end{array}$$

A cellákba beírhatjuk az egyes **választásokat**, a cellák alatt szerepel a cella **sorszáma** és fölötte a választási **lehetőségek** száma látható.

Maple-ben is a felkiáltó jelet használjuk a faktoriális jelölésére. Nézzük a $P_n = n!$ sorozat első 9 elemét!

```
> for n from 1 to 9 do
  cat(n, "!") = n!
end do
```

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$7! = 5040$$

$$8! = 40320$$

$$9! = 362880$$

(1.6.2)

A sorozat elemei gyorsan növekszenek.

3.1.6.5. IMÉTLÉSES PERMUTÁCIÓ

A következő példa előkészíti az **ismétléses permutáció** fogalmát és azonos elemek előfordulása

Eseten a sorrendek megszámlálási stratégiáját!

3.1.6.6. PÉLDA. SZINES GOLYÓK KIHÚZÁSÁNAK SORRENDJE

Egy kosárban 5 golyó van, amelyek közül 3 fekete és 2 piros színű. Hányféleképpen lehet a golyókat egymásután kivenni a kosárból, ha a golyókat csak a színük alapján tudjuk megkülönböztetni?

MEGOLDÁS

Nézzük a megoldást Maple-ben!

A feket golyókat f betűvel a piros golyókat p betűvel jelöltük. Így 3 darab f betűt és 2 darab p betűt teszünk a <i>golyók</i> nevű listába. A <i>permute</i> eljárás megadja az összes sorrendet, figyelembe véve azt, hogy az f betűket és a p betűket egymás között nem lehet megkülönböztetni. Láthatóan 10 különböző húzási sorrendet kaptunk.	> restart : with(combinat) : golyók := [f, f, f, p, p]; húzások := permute(golyók); száma := nops(húzások) golyók := [f, f, f, p, p] húzások := [[f, f, f, p, p], [f, f, p, f, p], [f, f, p, p, f], [f, p, f, f, p], [f, p, f, p, f], [f, p, p, f, f], [p, f, f, f, p], [p, f, f, p, f], [p, f, p, f, f], [p, p, f, f, f]] száma := 10 (1.6.3)
Mivel sorrendet képezünk, ezért ezt az eljárást is nevezhetjük permutációnak. Azonban az elemek ismétlődhetnek, ezért ismétléses permutációnak nevezzük. Mivel 5 elem közül 3 és 2 ismétlődik, ezért $P_5^{3,2}$ jelöli az összes sorrendek számát. A sorrendeket a jobb átláthatóság kedvéért egy mátrix soraiba tettük és sorszámokkal láttuk el. Amikor az összes sorrendet fel kell sorolni, akkor két nehezen ellenőrizhető feltételre kell figyelni. FELTÉTELEK (f_1) Van-e két egyező sorrend? (f_2) Van-e még hiányzó sorrend?	> sorrendek := zip((x,y) → [x, op(y)], [seq(cat(i, ``), i = 1..száma)], húzások) : Összessorrend = matrix(száma, 6, sorrendek) Összes sorrend = 1. f f f p p 2. f f p f p 3. f f p p f 4. f p f f p 5. f p f p f 6. f p p f f 7. p f f f p 8. p f f p f 9. p f p f f 10. p p f f f (1.6.4) Tehát $P_5^{3,2} = 10$.

Milyen algoritmus alapján kaphatjuk meg a fenti 10 különböző sorrendet?

Az **algoritmikus** leírását kezdjük azzal, hogy a feketéket és a pirosakat egymás között átmenetileg megkülönböztetjük.

Így a 3 fekete golyó neve legyen f_1, f_2 és f_3 , valamint a 2 piros golyó neve legyen p_1 és p_2 .

[Az így kapott 5 különböző golyó sorrendjének száma $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

> *feketék, pirosak* := [f_1, f_2, f_3], [p_1, p_2]

> $\text{összes_sorrend} := \text{permute}([\text{op}(\text{feketé}), \text{op}(\text{pirosak})]) : \text{nops}(\text{összes_sorrend})$
 $\text{feketé}, \text{pirosak} := [f_1, f_2, f_3], [p_1, p_2]$

120

(1.6.5)

A 3 fekete golyót egymás között $3! = 6$ féleképpen rakhatjuk sorrendbe.

A 2 piros golyót egymás között $2! = 2$ féleképpen rakhatjuk sorrendbe.

> $\text{sorrendek_feketé} := \text{permute}(\text{feketé});$
 > $\text{sorrendek_pirosak} := \text{permute}([p_1, p_2])$
 $\text{sorrendek_feketé} := [[f_1, f_2, f_3], [f_1, f_3, f_2], [f_2, f_1, f_3], [f_2, f_3, f_1], [f_3, f_1, f_2], [f_3, f_2, f_1]]$
 $\text{sorrendek_pirosak} := [[p_1, p_2], [p_2, p_1]]$ (1.6.6)

Ha az (1.6.4) összes sorrend közül kiválasztunk egyet, legyen ez a példa kedvéért az első sor

1. = [f, f, f, p, p],

akkor ebből $6 \cdot 2 = 12$ új sorrendet képezhetünk, ha benne a 3 feketét és a 2 pirosat megkülönböztetjük. Megadjuk ezt a 12 sorrendet.

> $M := [\text{seq}(\text{seq}([\text{cat}(2 \cdot (i - 1) + j, \text{`}`), \text{op}(\text{sorrendek_feketé}_i),$
 $\text{op}(\text{sorrendek_pirosak}_j)], j = 1..2), i = 1..6)]:$
 > $\text{matrix}(12, 6, M)$

1.	f_1	f_2	f_3	p_1	p_2
2.	f_1	f_2	f_3	p_2	p_1
3.	f_1	f_3	f_2	p_1	p_2
4.	f_1	f_3	f_2	p_2	p_1
5.	f_2	f_1	f_3	p_1	p_2
6.	f_2	f_1	f_3	p_2	p_1
7.	f_2	f_3	f_1	p_1	p_2
8.	f_2	f_3	f_1	p_2	p_1
9.	f_3	f_1	f_2	p_1	p_2
10.	f_3	f_1	f_2	p_2	p_1
11.	f_3	f_2	f_1	p_1	p_2
12.	f_3	f_2	f_1	p_2	p_1

(1.6.7)

Tehát a 120 különböző sorrendből 12 azonos, ha a fekete golyókat egymás között és a pirosakat egymás között nem tudjuk megkülönböztetni. Így 12 elemű csoportokat tudunk képezni a 120 sorrendből és mindegyik csoportból egy reprezentáns elem szerepel az ismétléses permutációban. Tehát

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{(3 \cdot 2) \cdot 2} = \frac{120}{12} = 10$$

a 120 sorrendet 12-vel osztva kapjuk a 10 sorrendet.

A feladat általánosításához legyen a különböző színek száma r és az azonos színű golyók száma

az egyes színcsoportokon belül legyen rendre $k_1, k_2, \dots$ és k_r .

3.1.6.7. DEFINÍCIÓ. ISMÉTLÉSES PERMUTÁCIÓK ÉS SZÁMUK

Tegyük fel, hogy egy n elemű A halmaz elemeit k_1 darab, k_2 darab, ...és k_r darab azonos elemekből álló $A_1, A_2, \dots, A_r$ csoportokra tudjuk felbontani úgy, hogy az

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r, |A_1| = k_1, |A_2| = k_2, \dots, |A_r| = k_r, k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$$

egyenlőségek alapján mindegyik elem pontosan egy csoporthoz tartozik. Ugyanakkor az A_i csoporton belül az elemeket nem lehet egymástól megkülönböztetni minden $i = 1, 2, \dots, r$ esetén. Az n elem különböző **sorrendjeit** az n elem $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ osztályú **ismétléses permutációinak** nevezzük és az összes ilyen sorrendek számát $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)}$ jelöli.

Megjegyzés.

Az összes ismétléses permutáció számának jelölésére használatos még a $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r}$ jelölés is.

Igazoljuk a 3.1.6.5. példa bizonyítási módszerével a következő állítást.

3.1.6.8. TÉTEL. ISMÉTLÉSES PERMUTÁCIÓK SZÁMA

Az n elem $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ osztályú **ismétléses permutációinak** számát a

$$P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!} = \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{\left(\sum_{i=1}^r k_i\right)!}{\prod_{i=1}^r (k_i!)}$$

képlet adja meg, ahol $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$.

Bizonyítás

Ha az azonos elemeket átmenetileg megkülönböztetjük egymás között, akkor az összes sorrend $n!$ lesz. A k_1 azonos elemet egymás között $k_1!$ féleképpen tudjuk sorbarendezeni, a k_2 azonos elemet egymás között $k_2!$ féleképpen tudjuk sorbarendezeni, folytatva a fesorolást végül a k_r azonos elemet egymás között $k_r!$ féleképpen tudjuk sorbarendezeni. Így az $n!$ sorrend között $(k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!)$ olyan sorrend van, amelyekből egyetlen elem marad, ha a megkülönböztetéseket megszüntetjük. Ezért, ha az $n!$ sorrendek számát elosztjuk a $(k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!)$ szorzattal, akkor megkapjuk azoknak a sorrendeknek számát, amelyekben az elemek ismétlődnek a megfelelő számszor. Q.e.d. ♦

Maple-ben a 3.1.6.5. példa $P_5^{3,2}$ ismétléses permutációk számát a *combinat* csomag *multinomial*(5, 3, 2) eljárása adja meg.

> 5 elem (3,2) osztályú ismétléses permutációinak száma = multinomial(5, 3, 2)

5 elem (3,2) osztályú ismétléses permutációinak száma = 10

(1.6.8)

3.1.6.9. Összefoglalás

Táblázatos formában összefoglaljuk a most megismert kombinatorikai fogalmak definícióját és számítási képleteit.

	ISMÉTLÉS NÉLKÜLI PERMUTÁCIÓ	ISMÉTLÉSES PERMUTÁCIÓ

Definíció	n különböző elem összes lehetséges sorrendjének száma P_n	n elem sorrendjének száma, ha közöttük van $k_1, k_2, \dots, k_r$ darab azonos
Számítási képlet	$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$	$P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_r)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!}$ $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$

3.1.7. Variáció: sorrendek képzése néhány elemmel

A variáció abban különbözik a permutációtól, hogy a sorrendben résztvevő elemek száma kevesebb is lehet, mint a halmaz elemeinek száma. Ehhez előbb az alaphalmaz n eleme közül ki kell választani k ($\leq n$) elemet, majd ezeket valamilyen sorrendben berakni k darab sorszámozott fiókba egyesével (minden fiókba egy elemet). Az elemek egy sorrendje a fiókokban egy variációt jelent. A különböző kiválasztások különböző k elemet eredményeznek. Így a variáció leírásához két természetes szám szükséges. Egyik szám az alaphalmaz elemeinek n száma, amelyek közül választunk. A másik szám, a kiválasztott elemek k száma, amely maximum n lehet. A k számot a sorrend hosszának is nevezzük. Ezért azt is mondhatjuk röviden, hogy a sorrendképzést csak **néhány** elemre végezzük el egyszerre.

3.1.7.1. DEFINÍCIÓ. VARIÁCIÓK ÉS SZÁMUK

Egy $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ n elemű halmaz elemeiből képezhető k ($\leq n$) hosszúságú különböző **sorrendeket** nevezzük az n elem k -ad osztályú **variációinak** és V_n^k jelöli az n elem **összes** k -ad osztályú variációinak számát.

3.1.7.2. PÉLDA. NÉGY ELEM MÁSODOSZTÁLYÚ VARIÁCIÓI

Adjuk meg az 1, 2, 3, 4 számokból képezhető **összes** kettő hosszúságú sorrendeket!

Megoldás

A sorrendek táblázatos formában a következő párok

(1, 2), (1, 3), (1, 4),
(2, 1), (2, 3), (2, 4),
(3, 1), (3, 2), (3, 4),
(4, 1), (4, 2), (4, 3).

Az i -ik sorban szereplő párok első helyén mindig az i szám áll, ahol $i = 1, 2, 3, 4$ lehet. Ezért a táblázat 4 sorból áll.

A táblázat elemeinek második helyén állhat minden olyan szám, amelyik nincs az első helyen, mert ismétlődés nem fordulhat elő. Ezért 3 variáció szerepel minden sorban.

Tehát 4 elem összes másodosztályú variációinak száma

$$V_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$$

Sematikus jelöléssel 2 cellát kell rajzolni, mert két helyre lehet választani számokat.

$\begin{matrix} 4 & 3 \\ \square & \square \\ 1. & 2. \end{matrix}$

Az első helyen 4 és a második helyen 3 választási lehetőség van!

Maple megoldás

Ugyanezt kapjuk a Maple *combinat* csomag *permute*([1, 2, 3, 4], 2) eljárásával.

```
> restart : with(combinat) :
permute([1, 2, 3, 4], 2)
```


> 4 elem 2-d osztályú variációinak száma = $nops(\%)$
 $[[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 1], [2, 3], [2, 4], [3, 1], [3, 2], [3, 4], [4, 1], [4, 2], [4, 3]]$

4 elem 2-d osztályú variációinak száma = 12 (1.7.1)

> $Matrix(4, 4, (x, y) \rightarrow \text{if } x = y \text{ then `` else } [x, y] \text{ end if})$

$$\begin{bmatrix} `` & [1, 2] & [1, 3] & [1, 4] \\ [2, 1] & `` & [2, 3] & [2, 4] \\ [3, 1] & [3, 2] & `` & [3, 4] \\ [4, 1] & [4, 2] & [4, 3] & `` \end{bmatrix}$$
 (1.7.2)

A $permute([1, 2, 3, 4], 2)$ utasítás azt jelzi, hogy az $[1, 2, 3, 4]$ listából kell kiválasztani 2 elemet úgy, hogy a sorrend számít.

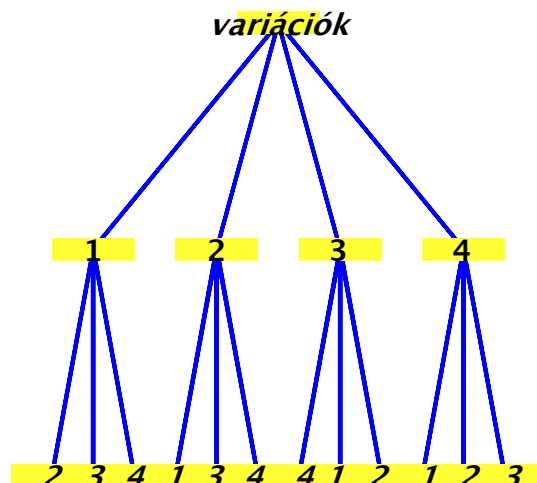
A mátrix megadás azt mutatja, hogy egy 4×4 mátrix 16 eleme közül a főátlóban nem szerepelnek elemek, mert az ismétlés kizárt. Ezért összesen $16 - 4 = 12$ variáció van.

A választásokat fagráf felrajzolásával is szemléltethetjük.

A fagráf első szintjén 4 elágazás van. A kapott csomópont mindegyikéből újabb 3 elágazás indul ki. Így összesen $4 \cdot 3 = 12$ levele van a fának. Mivel a fagráfban a gyökértől bármely levélig egyértelmű út vezet, ezért 12 darab kettő hosszúságú útvonal képezhető a 'variációk' gyökértől a levelek felé. Egy útvonalon haladva írjuk fel az érintett csúcspontokat, amelyeken áthaladtunk. Így kapjuk az összes kettő hosszúságú variációját az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz elemeinek.

A gráf különböző csúcspontjait különböző névvel kell ellátni. Itt ettől a szabálytól el kell tekinteni, mert mindegyik számjegy négyszer is szerepel a csúcspontokban. Ezt programozás technikai szempontból úgy oldottuk meg, hogy szóközőket tettünk a számok elé illetve mögé.

> $with(GraphTheory) :$
 $első := \{\text{variációk}, 1\}, \{\text{variációk}, 2\}, \{\text{variációk}, 3\}, \{\text{variációk}, 4\} :$
 $második := \{1, '2'\}, \{1, '3'\}, \{1, '4'\}, \{2, '1'\}, \{2, '3'\}, \{2, '4'\}, \{3, '1'\}, \{3, '2'\}, \{3, '4'\}, \{4, '1'\}, \{4, '2'\}, \{4, '3'\} :$
 > $Fa := Graph(\{első, második\}) :$
 > $DrawGraph(Fa, style = tree, root = \text{variációk}, showlabels = true) ;$



3.1.7.3. PÉLDA

Egy futó versenyen n futó vesz részt. A versenyen hány különböző befutási sorrend alakulhat ki az első k helyen? ($k \leq n$)

Megoldás

Jelölje V_n^k a keresett befutási sorrendek számát n futó esetén és csak az első k helyet figyelve.

Felbontjuk a sorrendképzés tevékenységét k résztvevő tevékenységre! Jelölje ezeket $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$.

Az A_i tevékenység jelentse azt, hogy az i -edik helyre választunk egyet a megmaradt versenyzők közül.

Az első helyre n választási lehetőségünk van: $|A_1| = n$.

Ha választottunk egy versenyzőt az első helyre, akkor a második helyre választhatunk a megmaradt $(n - 1)$ versenyző közül: $|A_2| = n - 1$.

Ha választottunk versenyzőt az első helyre és a második helyre is, akkor a harmadik helyre választhatunk a megmaradt $(n - 2)$ versenyző közül: $|A_3| = n - 2$.

Folytathatva a felsorolást, a választási lehetőségek száma minden esetben eggyel csökken. Ezért a k -adik helyre a választható versenyzők száma $(n - k + 1)$: $|A_k| = n - k + 1$.

Egy befutási sorrendet az $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k$ tevékenységek egymásutáni végrehajtásával lehet megadni. A tevékenységek szorzás szabályát használva kapjuk

$$V_n^k = |A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k| = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = [n]^k$$

különböző befutási sorrendek számát n versenyző között az első k helyen. Q.e.d. ♦

A kapott k tényező szorzatot bővítsük $(n - k)!$ szorzattal

$$V_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \cdot \frac{(n - k)!}{(n - k)!} = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Ezzel igazoltuk az alábbi tételt

3.1.7.4. TÉTEL. VARIÁCIÓK SZÁMA

Az n különböző elem összes lehetséges k hosszúságú sorrendjének száma, vagyis az n elem k -ad osztályú **variációinak** száma

$$V_n^k = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!} = [n]_k$$

3.1.7.5. Megjegyzés

A 3.1.6.1 permutáció és 3.1.7.1 variáció definícióiból világos hogy $k = n$ esetén a variáció fogalma megegyezik a permutációval. Tehát

$$V_n^n = P_n = n!$$

Mivel $k = n$ esetben a nevező $(n - k)! = 0!$, ezért $0! = 1$ kell, hogy legyen.

Az alábbi szemantikus ábra a variáció választási lehetőségeit és a számítást mutatja szorzás-szabály alapján

$$\frac{\text{a választási lehetőségek száma}}{\text{választást szimbolizáló téglalapok sorszáma}} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{cccc} n & (n-1) & (n-2) & \dots & (n-k+1) \\ \square & \square & \square & \dots & \square \\ 1. & 2. & 3. & & k \end{array}$$

A cellákba beírhatjuk az egyes **választásokat**, a cellák alatt szerepel a cella **sorszáma** és fölötte a választási **lehetőségek** száma.

A következő példa előkészíti az **ismétléses variáció** fogalmát és a sorrendek megszámlálását!

3.1.7.6. PÉLDA. TOTÓ VARIÁCIÓK 2 MÉRKŐZÉS ESETÉN

A TOTÓ játéknál a labdarugó mérkőzések kimeneteleire lehet tippelni, hogy melyik csapat nyer illetve döntetlen lesz-e. Az 1, 2 vagy x tippek közül valamelyiket kell a megadott cellákba

beírni, annak megfelelően, hogy az első helyen megadott csapat nyer, vagy a második helyen megadott csapat nyer illetve az eredmény döntetlen lesz. Hány variációs tippet lehet összesen megjátszani olyan szelvényen, amelyen csak 2 mérkőzés szerepel?

MEGOLDÁS

A tippeket táblázatos formába mutatjuk be alábbiakban

(1, 1), (1, 2), (1, x),
(2, 1), (2, 2), (2, x),
(x, 1), (x, 2), (x, x).

A táblázat első sorában az első mérkőzésre a tipp 1, a második sorban a tipp 2 és a harmadikban a tipp x az első mérkőzésre. Minden sorban 3 variáció szerepel, mert a második mérkőzésre a tipp független az elsőtől.

Azt mondjuk, hogy az {1, 2, x} elem összes másodosztályú **ismétléses variációinak** száma

$$V_3^2 = 3 \cdot 3 = 9.$$

Sematikus jelöléssel rajzolnunk kell 2 cellát, mert két helyre lehet beírni az 1,2,x jelek közül egyet ismétléssel.

3 3
□ □
1. 2.

Az első helyen is 3 és a második helyen is 3 választási lehetőségünk van!

1. Maple megoldás. permute eljárással

```
> restart : with(combinat) :  
permute([1, 1, 2, 2, x, x], 2);  
> 3 elem 2-od osztályú ismétléses variációinak száma = nops(%)  
[[1, 1], [1, 2], [1, x], [2, 1], [2, 2], [2, x], [x, 1], [x, 2], [x, x]]  
3 elem 2-od osztályú ismétléses variációinak száma = 9
```

(1.7.3)

2. Maple megoldás. Mátrix elemekkel

```
> alap := [1, 2, x];  
> variációk = Matrix(3, 3, (i, j) -> [alap[i], alap[j]])  
alap := [1, 2, x]
```

$$\text{variációk} = \begin{bmatrix} [1, 1] & [1, 2] & [1, x] \\ [2, 1] & [2, 2] & [2, x] \\ [x, 1] & [x, 2] & [x, x] \end{bmatrix}$$

(1.7.4)

3. Maple megoldás. Egymásba ágyazott sorozat képző seq utasítással

```
> seq(seq([i, j], j = alap), i = alap)  
[1, 1], [1, 2], [1, x], [2, 1], [2, 2], [2, x], [x, 1], [x, 2], [x, x]
```

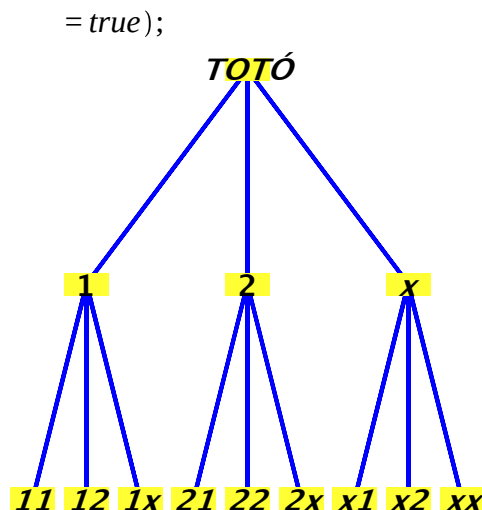
(1.7.5)

A választásokat fagráf felrajzolásával is szemléltethetjük.

A fagráf első szintjén 3 elágazás van. A kapott csomópont mindegyikéből újabb 3 elágazás indul ki. Így összesen $3 \cdot 3 = 9$ levele van a fának. Mivel a fagráfban a gyökértől bármely levélig

```
> restart; with(GraphTheory) :  
első := {TOTÓ, 1}, {TOTÓ, 2}, {TOTÓ, x} :  
> második := {1, `11`}, {1, `12`}, {1, `1x`}, {2, `21`},  
              {2, `22`}, {2, `2x`}, {x, `x1`}, {x, `x2`}, {x,  
              `xx`} :  
> Fa := Graph({első, második}) :  
> DrawGraph(Fa, style = tree, root = TOTÓ, showlabels)
```

egyértelmű út vezet, ezért 9 darab kettő hosszúságú útvonal képezhető a 'TOTÓ' gyökértől a levelek felé. Egy útvonalon haladva írjuk fel az érintett csúcspontokat, amelyeken áthaladtunk. Így kapjuk az összes kettő hosszúságú variációját az $\{1,2,x\}$ halmaz elemeinek, ahol ismétlés előfordulhat.
A gráf leveleit a két választásnak megfelelően két jellel láttuk el.



A feladat általánosításához legyen a különböző jelek száma n és a helyek száma k .

3.1.7.7. DEFINÍCIÓ. ISMÉTLÉSES VARIÁCIÓK ÉS SZÁMUK

Tegyük fel, hogy n elemet kell elhelyezni k darab sorszámozott helyre úgy, hogy az elhelyezés során az n elem bármelyike ismétlődhet akárhányszor. A különböző elhelyezéseket az n elem k -ad osztályú **ismétléses variációinak** nevezzük és az összes ilyen sorrendek számát

$$V_n^{k,i}$$

jelöli.

Az ismétléses variációkra igaz a következő tétel.

3.1.7.8. TÉTEL. ISMÉTLÉSES VARIÁCIÓK SZÁMA

Az n elem összes k -ad osztályú **ismétléses variációinak** számát a

$$V_n^{k,i} = n^k$$

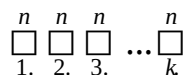
hatvány képlettel számolhatjuk ki

Bizonyítás

Az első helyre választhatjuk az n elem bármelyikét. Mivel az elemek választhatók tetszőleges számszor, ezért minden előző döntésünk a második helyen n további elágazással folytatható. Hasonlóan a harmadik és minden további helyre is a választási lehetőségek száma n . Az összes variációs sorrendek számát megkapjuk az egyes választási lehetőségek számainak szorzataként. Tehát

$$V_n^{k,i} = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k = n^k.$$

Az alábbi séma az ismétléses variáció választási lehetőségeinek sematikus ábrája.



A cellákba beírhatjuk az egyes **választásokat**, a cellák alatt szerepel a cella **sorszáma** (összesen k darab) és fölött a választási **lehetőségek** száma (minden esetben n) látható. Q.e.d.

3.1.7.9. PÉLDA. BANK KÁRTYÁK PIN KÓD VARIÁCIÓI

A bank kártyák PIN kódja 4 számjegyből áll. Összesen hány különböző PIN kódot lehet képezni, ha mindegyik jegy 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 vagy 9 lehet?

Megoldás

A 4 jegyű kód mindegyike helyére gépelhetjük a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, vagy 9 számok valamelyikét. Felbontjuk a tevékenységet 4 résztevékenységre! Jelöljük ezeket A_1, A_2, A_3, A_4 -el!

Az A_k tevékenység jelentse azt, hogy a k -adik helyre beírunk egy számjegyet a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, vagy 9 számok közül. Mindegyik esetben $|A_k| = 10$. ($k = 1, 2, 3, 4$)

Ezért a szorzás szabály alapján a PIN kódok különböző begépelési variációinak száma

$$V_{10}^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$$

a 10 elem negyed osztályú ismétléses variációinak száma.

Így a bank kártyák között kiadható különböző PIN kódok száma 10 000.

3.1.7.10. PÉLDA. ÖSSZES RÉSZHALMAZOK HALMAZA VARIÁCIÓKKAL

Mutassuk meg az ismétléses variációk fogalmának felhasználásával, hogy egy n elemű H halmaz összes részhalmazainak száma

$$|2^H| = 2^n$$

Megoldás

Egy részhalmazt egyértelműen megadhatunk úgy is, hogy az elemek alá vagy 1-t vagy 0-t írunk, annak megfelelően, hogy az adott elemet kiválasztottuk vagy nem választottuk ki.

Nézzük példaként a $H = \{a, b, c\}$ három elemű halmaz részhalmazait egyértelműen megadó

Maple programot, amelyben három hosszú 0,1 bináris jelsorozatokat generálunk.

Tekintsük a 0 és 1 jelekből ismétléssel képezhető összes 3 hosszúságú jelsorozatokat. Ezek az áma

$$V_2^3 = 2^3 = 8.$$

Ezt a permute eljárással generáljuk!

```
> restart :
elemek := [a, b, c]
> with(combinat) :
> n := 3; alap := [seq(0, k = 1..n), seq(1, k = 1..n)];
bináris := permute(alap, n); nops(%)
elemek := [a, b, c]
n := 3
alap := [0, 0, 0, 1, 1, 1]
bináris := [[0, 0, 0], [0, 0, 1], [0, 1, 0], [0, 1, 1], [1, 0, 0],
[1, 0, 1], [1, 1, 0], [1, 1, 1]]
8
```

(1.7.6)

A hatvány halmaz elemeit úgy kapjuk, hogy az üres halmazhoz azokat az elemeket tesszük hozzá, amelyeknek megfelelő helyen 1 áll. A összes 3 hosszúságú 0 és 1 jelekből álló sorozaton végig haladva megkapjuk az alaphalmaz összes részhalmazát.

```
> hatvány := NULL :
for k from 1 to 2^n do
sorozat := bináris[k] :
halmaz := { } :
for j from 1 to n do
if sorozat[j] = 1 then halmaz := halmaz
union {elemek[j]} end if:
end do:
hatvány := hatvány, halmaz :
end do:
hatvány := [hatvány]
hatvány := [{ }, {c}, {b}, {b, c}, {a}, {a, c}, {a, b}, {a, b, c}]
```

(1.7.7)

	$b, c\}$																																													
A kapott részhalmazokat sorszámokkal látjuk el és mátrix segítségével tesszük szemléletesebbé. A mátrix első oszlopa a sorszámokat, a második, harmadik és negyedik oszlopban az "a", "b" és "c" elemek kiválasztására vagy mellőzésére utaló 1 és 0 jelek variációi szerepelnek. Az utolsó oszlop a kiválasztott elemeket mutatja, vagyis a megfelelő részhalmazokat. Az első sorban az üres halmaz, az utolsóban a teljes halmaz szerepel. Vizsgáljuk meg, hogy mindegyik részhalmaz pontosan egyszer fordul elő a felsorolásban.	> $sorrendek := NULL :$ for i from 1 to (2^n) do $sorrendek := sorrendek, [cat(i, \cdot), op(bináris[i]),$ $hatvány[i]]$ end do; > $Matrix(2^n + 1, n + 2, [[sorszám, op(elemek),$ $részalmaz], sorrendek])$ <table><tr><th>$sorszám$</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>$részalmaz$</th></tr><tr><td>1.</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>$\{ \}$</td></tr><tr><td>2.</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>$\{c\}$</td></tr><tr><td>3.</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>$\{b\}$</td></tr><tr><td>4.</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>$\{b, c\}$</td></tr><tr><td>5.</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>$\{a\}$</td></tr><tr><td>6.</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>$\{a, c\}$</td></tr><tr><td>7.</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>$\{a, b\}$</td></tr><tr><td>8.</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>$\{a, b, c\}$</td></tr></table> (1.7.8)	$sorszám$	a	b	c	$részalmaz$	1.	0	0	0	$\{ \}$	2.	0	0	1	$\{c\}$	3.	0	1	0	$\{b\}$	4.	0	1	1	$\{b, c\}$	5.	1	0	0	$\{a\}$	6.	1	0	1	$\{a, c\}$	7.	1	1	0	$\{a, b\}$	8.	1	1	1	$\{a, b, c\}$
$sorszám$	a	b	c	$részalmaz$																																										
1.	0	0	0	$\{ \}$																																										
2.	0	0	1	$\{c\}$																																										
3.	0	1	0	$\{b\}$																																										
4.	0	1	1	$\{b, c\}$																																										
5.	1	0	0	$\{a\}$																																										
6.	1	0	1	$\{a, c\}$																																										
7.	1	1	0	$\{a, b\}$																																										
8.	1	1	1	$\{a, b, c\}$																																										

A fenti $n = 3$ esetet általánosítva, tekintsük az összes n hosszúságú 0 és 1 jelekből álló sorozatokat. Ezek teljes száma a $\{0,1\}$ jelekből ismétléssel képezhető n -ed osztályú ismétléses variációinak száma

$$V_2^{n,i} = 2^n.$$

Q.e.d.

3.1.7.11. Összefoglalás

Táblázatos formában összefoglaljuk a most megismert kombinatorikai fogalmak definícióját és számítási képleteit.

	ISMÉTLÉS NÉLKÜLI VARIÁCIÓ	ISMÉTLÉSESES VARIÁCIÓ
Definíció	n különböző elemből kiválasztható összes k hosszúságú sorrendek száma: V_n^k	n különböző elemből kiválasztható összes k hosszúságú sorrendek száma ismétlési lehetőséggel: $V_n^{k,i}$
Számítási képlet	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$	$V_n^{k,i} = n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k$

3.1.8. Kombináció: elemek kiválasztása. Binomiális együtthatók.

A kombináció abban különbözik a variációtól, hogy az elemek kiválasztásának sorrendje nem számít a kombinációnál. Tehát egy n elemű halmazból kell kiválasztani k ($\leq n$) elemet. A különböző kiválasztások különböző k elemet eredményeznek. Így a kombináció leírásához is két természetes szám szükséges. Egyik szám az alaphalmaz elemeinek n száma, amelyek közül választunk. A másik szám, a kiválasztott elemek k száma, amely maximum n lehet.

3.1.8.1. DEFINÍCIÓ. KOMBINÁCIÓK ÉS SZÁMUK

Egy $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ n elemű halmaz elemeiből kiválasztható k ($\leq n$) elemű különböző **részalmazokat** nevezzük az n elem k – ad osztályú **kombinációinak** és C_n^k jelöli az n elem **összes** k – ad osztályú kombinációinak számát.

3.1.8.2. PÉLDA. NÉGY ELEM ÖSSZES MÁSODOSZTÁLYÚ KOMBINÁCIÓJA

Adjuk meg az $\{1, 2, 3, 4\}$ számokból kiválasztható **összes** kettő elemű részalmazokat!

Megoldás

A halmaz adat struktúra garantálja, hogy egyrészt a kiválasztások sorrendje nem számít, másrészt ugyanazt az elemet kétszer nem lehet kiválasztani. Így a különböző kiválasztások a következők

$$\begin{aligned} &\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\} \\ &\{2, 3\}, \{2, 4\}, \\ &\{3, 4\}. \end{aligned}$$

Az i – ik sorban levő halmazokban szerepel az i szám.

Az első sorban az 1 szám mellé csak a 2, 3 és 4 számokat választhatjuk. A második sorban a 2 szám mellé az 1 számot nem választhatjuk, mert az $\{1, 2\}$ halmaz már szerepelt az előző sorban. Ezért a választási lehetőség a 3 és 4. A harmadik sorban a 3 szám mellé csak a 4-t választhatjuk, mert az előzőekben az 1 és 2 már szerepelt. A negyedik sor üres, mert a 4 számot már az 1,2 és 3 számokkal együtt már kiválasztottuk.

Tehát 4 elem összes másodosztályú kombinációinak száma

$$C_4^2 = 3 + 2 + 1 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

Mivel a számításhoz a szorzás -szabályt nem tudjuk közvetlenül alkalmazni, ezért a megszokott sémánk ebben az esetben nem működik!

1. Maple megoldás. A combinat csoma choose eljárásával

```
> restart : with(combinat) :
    kombinációk = choose([1, 2, 3, 4], 2);
> 4 elem 2 –od osztályú kombinációinak száma = nops(rhs(%))
    kombinációk = [[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4]]
    4 elem 2-od osztályú kombinációinak száma = 6
```

(1.8.1)

2. Maple megoldás. Mátrix elemekkel

```
> alap := [1, 2, 3, 4];
> kombinációk = Matrix(4, 4, (i, j) → if i ≥ j then `` else [alap[i], alap[j]] end if)
    alap := [1, 2, 3, 4]
    kombinációk = \begin{bmatrix} `` & [1, 2] & [1, 3] & [1, 4] \\ `` & `` & [2, 3] & [2, 4] \\ `` & `` & `` & [3, 4] \\ `` & `` & `` & `` \end{bmatrix}
```

(1.8.2)

3. Maple megoldás. Egymásba ágyazott sorozat képző seq utasítással

> kombinációk = seq(seq({i, j}, j = i + 1 ..4), i = 1 ..4)
kombinációk = ({1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4})

(1.8.3)

A choose([1, 2, 3, 4], 2) utasítás azt jelzi, hogy az [1,2,3,4] listából kell kiválasztani 2 elemet úgy, hogy a sorrend nem számít.

A mátrix megadás azt mutatja, hogy egy 4x4 mátrix 16 eleme közül a főátlóban és alatta nem szerepelnek elemek, mert az ismétlések kizártak. Ezért összesen $\frac{(16 - 4)}{2} = \frac{12}{2} = 6$

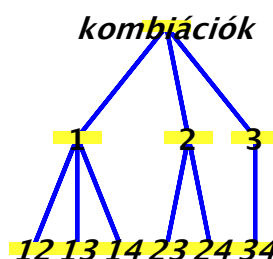
kombináció van.

A két egymásba ágyazott sorozat képző seq utasításban a belső sorozat indexe nagyobb, kell hogy legyen, mint a külső sorozat indexe.

A választásokat fagráf felrajzolásával is szemléltethetjük.

A fagráf első szintjén 3 elágazás van. A kapott első csomópontból 3 elágazás indul ki, a másodikból 2 és a harmadikból csak 1. Így összesen $3 + 2 + 1 = 6$ levele van a fának. Mivel a fagráfban a gyökértől bármely levélig egyértelmű út vezet, ezért 6 darab kettő hosszúságú útvonal képezhető a 'kombinációk' gyökértől a levelek felé. A gráf leveleit a két választásnak megfelelően két jellel láttuk el.

> restart; with(GraphTheory) :
első := {kombinációk, 1}, {kombinációk, 2}, {kombinációk, 3} :
> második := {1, '12'}, {1, '13'}, {1, '14'}, {2, '23'}, {2, '24'}, {3, '34'} :
> Fa := Graph({első, második}) :
> DrawGraph(Fa, style = tree, root = kombinációk, showlabels = true);



3.1.8.3. Megjegyzés. A kombinációk, mint monoton leképezések

A fenti példa megoldásai azt sugallják, hogy egy kombináció tekinthető olyan

$$f: \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$

függvénynek is, amely monoton, azaz

$$f(1) < f(2).$$

A fentiek szerint 6 ilyen függvény van és ezek

$$f_1(1) = 1, f_1(2) = 2,$$

$$f_2(1) = 1, f_2(2) = 3,$$

$$f_3(1) = 1, f_3(2) = 4,$$

$$f_4(1) = 2, f_4(2) = 3,$$

$$f_5(1) = 2, f_5(2) = 4,$$

$$f_6(1) = 3, f_6(2) = 4.$$

Az ismétléses permutáció bizonyításánál használt módszerrel igazoljuk az alábbi tételt.

3.1.8.4. TÉTEL. KOMBINÁCIÓK SZÁMA

Az n különböző elemből kiválasztható k elemű részhalmazok száma, vagyis az n elem k — ad osztályú kombinációinak száma

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} = \frac{V_n^k}{k!}$$

Bizonyítás

Átmenetileg különböztessük meg a kiválasztások sorrendjét. Ekkor az összes k hosszúságú sorrendet kapjuk meg, vagyis variációkat. Láttuk a 3.1.7.4. tételnél, hogy ezek száma összesen $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Ha ezeket a sorrendeket halmazokká alakítjuk, akkor $k!$ olyan halmazt kapunk, amelyek ugyanazok lesznek. Ugyanis egy k elemű kiválasztás elemeit $k!$ féleképpen lehet sorba rendezni. Ha nem vagyunk tekintettel a sorrendekre, akkor pontosan $k!$ sorrendből kapunk egyetlen kombinációt! Tehát az n elem k -ad osztályú variációinak számát $k!$ -al osztva megkapjuk az n elem k -ad osztályú kombinációinak számát. Tehát

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}. \quad \text{Q.e.d.}$$

3.1.8.5. DEFINÍCIÓ. BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓ

Az $\binom{n}{k}$ jelölést " n alatt k " -nak mondjuk és **binomiális együtthatónak** is nevezzük és kiszámítását (kézzel)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2}$$

alapján végezzük.

Az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatóban k értéke felveheti a $0, 1, 2, \dots, n$ értékeket. Maple-ben a kifejezések palettán megtalálható a jele és értékét a *combinat* csomag $\text{binomial}(n, k)$ eljárása számolja. Minden pozitív n egészre $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ teljesül.

A 3.1.8.2. példában szereplő 4 elem másodosztályú kombinációinak számát a *combinat*- $\text{binomial}(4, 2)$ utasítás adja meg.

> 4 elem másod osztályú kombinációinak száma = $\binom{4}{2}$

4 elem másod osztályú kombinációinak száma = 6

(1.8.4)

3.1.8.6. Következmény. A kombináció, mint speciális ismétléses permutáció

Mutassuk meg, hogy

$$\binom{n}{k} = P_n^{k, n-k} = \binom{n}{k, n-k}$$

Bizonyítás

A képletek alapján világos az állítás igazsága, mert

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{és} \quad P_n^{k, n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Azonban ez az egyenlőség rávilágít a kombináció egy ismétléses permutációval való értelmezésére. Nevezetesen egy n elemű $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ halmaz valamely $H = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$

k elemű részhalmazának kiválasztásához, rendeljük hozzá azt a 0 és 1 elemekből álló n hosszú ismétléses permutációt, amelyben ott áll 1, amelyik elemet kiválasztottuk és 0 áll ott, amelyiket nem választottuk ki. Így kölcsönösen egyértelmű módon egymáshoz rendeltük az n elem k -ad osztályú kombinációit és a k darab 1 és $(n-k)$ darab 0 számot tartalmazó elemek sorrendjeit. Q.e.d.

3.1.8.7. PÉLDA.

Mutassuk meg, hogy az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazból összesen kiválasztható 2 elemű részhalmazok és az $[1, 1, 0, 0]$ lista összes sorrendjei kölcsönösen egyértelműen egymáshoz rendelhetők.

[Megoldás

A 2 elemű részhalmazokat a <i>combinat</i> csomag <i>choose</i>(<i>[a, b, c, d]</i>, 2) eljárás megadja. Ezek száma $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6.$	<pre>> restart : elemek := [a, b, c, d]; n := nops(elemek); k := 2; > with(combinat) : > kombinációk := choose(elemek, k) elemek := [a, b, c, d] n := 4 k := 2 kombinációk := [[a, b], [a, c], [a, d], [b, c], [b, d], [c, d]] (1.8.5)</pre>																																										
Tekintsük az <i>[1, 1, 0, 0]</i> list összes ismétléses permutációit! Ezek azáma $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6.$ Ezt a <i>permute</i>(<i>[1, 1, 0, 0]</i>) eljárással generáljuk!	<pre>> bináris := permute([seq(1, i = 1..k), seq(0, i = 1..n - k)]) bináris := [[1, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 0], [1, 0, 0, 1], [0, 1, 1, 0], [0, 1, 0, 1], [0, 0, 1, 1]] (1.8.6) ></pre>																																										
A kapott kombinációkat sorszámokkal látjuk el és mátrix segítségével tesszük szemléletesebbé. A mátrix első oszlopa a sorszámokat, a második, harmadik és negyedik oszlopban az "a", "b" és "c" elemek kiválasztására vagy mellőzésére utaló 1 és 0 jelek variációi szerepelnek. Az utolsó oszlop a kiválasztott elemeket mutatja, vagyis a megfelelő részhalmazokat. Vizsgáljuk meg, hogy mindegyik 2 elemű részhalmaz pontosan egyszer fordul elő a felsorolásban.	<pre>> sorrendek := NULL : for i from 1 to $\binom{n}{k}$ do sorrendek := sorrendek, [cat(i, `.`), op(bináris[i]), kombinációk[i]] end do: > Matrix($\left(\binom{n}{k} + 1, n + 2, [[\text{sorszám}, \text{op}(\text{elemek}),\right.$ $\left.\text{részhalmaz}], \text{sorrendek}]\right)$</pre> <table><thead><tr><th>sorszám</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th><th>részhalmaz</th></tr></thead><tbody><tr><td>1.</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>[a, b]</td></tr><tr><td>2.</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>[a, c]</td></tr><tr><td>3.</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>[a, d]</td></tr><tr><td>4.</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>[b, c]</td></tr><tr><td>5.</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>[b, d]</td></tr><tr><td>6.</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>[c, d]</td></tr></tbody></table> (1.8.7)	sorszám	a	b	c	d	részhalmaz	1.	1	1	0	0	[a, b]	2.	1	0	1	0	[a, c]	3.	1	0	0	1	[a, d]	4.	0	1	1	0	[b, c]	5.	0	1	0	1	[b, d]	6.	0	0	1	1	[c, d]
sorszám	a	b	c	d	részhalmaz																																						
1.	1	1	0	0	[a, b]																																						
2.	1	0	1	0	[a, c]																																						
3.	1	0	0	1	[a, d]																																						
4.	0	1	1	0	[b, c]																																						
5.	0	1	0	1	[b, d]																																						
6.	0	0	1	1	[c, d]																																						

[A következő példa előkészíti az **ismétléses kombináció** fogalmát és ezek megszámlálását!

3.1.8.8. PÉLDA.

Alma, barack és citrom van egy-egy tele kosárral mindegyik fajtából. Ki kell szednünk összesen 5 gyümölcsöt a kosarakból tetszőleges módon ismétlési lehetőséggel. A kiszedés

sorrendje nem számít, csak az, hogy hány almát, hány barackot és hány citromot szedtünk ki. Hány különböző összetételben szedhetjük ki az 5 gyümölcsöt?

Megoldás

Rövidítsük az almát „a” betűvel, a barackot „b”-vel és a citromot „c” betűvel.

A Maple *combinat* csomagjának *choose* ($[a, a, a, a, a, b, b, b, b, b, c, c, c, c]$, 5) utasításával megkapjuk az összes lehetséges kiválasztást az ismétlődési lehetőségeket is figyelembe véve. Azért kell ötször megadni az "a", "b" és "c" karaktereket, mert így tud a *choose* eljárás öt "a" vagy öt "b" vagy öt "c" karaktert választani. Tehát a kiválasztásnak megfelelő számszor kell az ismétlődéseket megadni. A listákban a betűk abc sorrendben szerepelnek. Ez biztosítja, hogy egy sorrend csak egyszer forduljon elő. Tehát például az 1 "a", 1 "b" és a 3 "c" választás csak egyszer fordul elő! Láthatjuk, hogy a választások száma 21.

```
> restart : with(combinat) :
kombinációk := choose([a, a, a, a, b, b, b, b,
c, c, c, c], 5);
3 elem ötöd osztályú ismétléses
kombinációinak száma = nops(kombinációk)
kombinációk := [[a, a, a, a, a], [a, a, a, a,
b], [a, a, a, a, c], [a, a, a, b, b], [a, a,
a, b, c], [a, a, a, c, c], [a, a, b, b, b],
[a, a, b, b, c], [a, a, b, c, c], [a, a, c, c,
c], [a, b, b, b, b], [a, b, b, b, c], [a, b,
b, c, c], [a, b, c, c, c], [a, c, c, c, c], [b,
b, b, b, b], [b, b, b, b, c], [b, b, b, c, c],
[b, b, c, c, c], [b, c, c, c, c], [c, c, c, c,
c]]
3 elem ötöd osztályú ismétléses
kombinációinak száma = 21
```

Egy másik megoldást kapunk, ha észrevesszük, hogy a gyümölcsök sorrendjét érdemes mindig a, b, c sorrendben felírni és csak azt kell jelezni, hogy mennyi az egyes betűk száma. Ehhez Euler javaslata alapján jelölje "*" csillag karakter a gyümölcsöket és a váltásokat a gyümölcsök között az ` ` elválasztó jel. Rakjuk sorrendbe az 5 csillagot és a 2 elválasztó jelet!

Ezek száma az $(5 + 2) = 7$ elem $(5, 2)$ ismétléses permutációinak számával egyezik

$$P_7^{5, 2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \binom{5 + 2}{5} = 21 = \binom{5 + 2}{2}$$

Az első ` ` elválasztó jel előtt levő csillagok alma választást jelölnek, az első és második ` ` elválasztó jel között levő csillagok barack választásokat jelölnek, míg a második ` ` elválasztó jel mögött levő csillagok citrom választást jelölnek. Beleértjük ebbe azt is, hogy némelyik választás lehet üres is!

Például az

[illegible]

[a, b, c, c, c] gyümölcs választáshoz tartozó csillagok és elválasztók sorozata ['*', ' ', '*', ' ', '*', '*', '*']	21 (1.8.9)
Az jobb áttekinthetőség kedvéért mátrix formában is megjelenítjük a gyümölcs választásokat. Ehhez azonban némi előkészületet kellett elvégezni! Meg kell számolni, hogy az egyes választásokban mennyi "a", mennyi "b" és mennyi "c" betű szerepel. Erre kiválóan alkalmas a <i>StringTools</i> csomag <i>SearchAll(betű, string)</i> eljárása, mert a <i>betű</i> karakter összes előfordulásait a <i>string</i> karaktersorozatban visszaadja. Ehhez azonban a <i>kombinációk</i> karaktereit az <i>Implode</i> eljárással szét kell szedni karakterekre.	> with(StringTools) : > szöveg := map(Implode, kombinációk) : > számok := [seq([nops([SearchAll("a", szöveg_i)]), nops([SearchAll("b", szöveg_i)]), nops([SearchAll("c", szöveg_i)])], i = 1..21)] : > választások := NULL : for i from 1 to 21 do választások := választások, [cat(i, ` `), op(számok[i]), kombinációk[i],] end do: > matrix(22, 5, [[sorszám, a, b, c, gyümölcsök], választások]) (1.8.10)

sorszám	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	gyümölcsök
1.	5	0	0	[<i>a, a, a, a, a</i>]
2.	4	1	0	[<i>a, a, a, a, b</i>]
3.	4	0	1	[<i>a, a, a, a, c</i>]
4.	3	2	0	[<i>a, a, a, b, b</i>]
5.	3	1	1	[<i>a, a, a, b, c</i>]
6.	3	0	2	[<i>a, a, a, c, c</i>]
7.	2	3	0	[<i>a, a, b, b, b</i>]
8.	2	2	1	[<i>a, a, b, b, c</i>]
9.	2	1	2	[<i>a, a, b, c, c</i>]
10.	2	0	3	[<i>a, a, c, c, c</i>]
11.	1	4	0	[<i>a, b, b, b, b</i>]
12.	1	3	1	[<i>a, b, b, b, c</i>]
13.	1	2	2	[<i>a, b, b, c, c</i>]
14.	1	1	3	[<i>a, b, c, c, c</i>]
15.	1	0	4	[<i>a, c, c, c, c</i>]
16.	0	5	0	[<i>b, b, b, b, b</i>]
17.	0	4	1	[<i>b, b, b, b, c</i>]
18.	0	3	2	[<i>b, b, b, c, c</i>]
19.	0	2	3	[<i>b, b, c, c, c</i>]
20.	0	1	4	[<i>b, c, c, c, c</i>]
21.	0	0	5	[<i>c, c, c, c, c</i>]

(1.8.10)

A példa általánosításához legyen a különböző gyümölcsök száma n és az ismétléssel kiválasztandó gyümölcsök száma k . A példában $n = 3$ fajta gyümölcs van és $k = 5$ gyümölcsöt kell kiválasztani ismétlődéssel úgy, hogy a sorrend nem számít.

3.1.8.9. DEFINÍCIÓ. ISMÉTLÉSES KOMBINÁCIÓK ÉS SZÁMUK

Tegyük fel, hogy n különböző elem közül ki kell választani k darabot úgy, hogy a kiválasztások során az elemek tetszőleges számszor ismétlődhet és a kiválasztás sorrendje nem számít. A különböző kiválasztásokat az n elem k -ad osztályú **ismétléses kombinációinak** nevezzük és az összes ilyen kiválasztások számát

$$C_n^{k, i}$$

jelöli.

Az ismétléses kombinációkra igaz a következő tétel.

3.1.8.10. TÉTEL. ISMÉTLÉSES KOMBINÁCIÓK SZÁMA

Az n elem összes k -ad osztályú **ismétléses kombinációinak** számát a

$$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} = P_{n+k-1}^{n-1,k}$$

binomiális együtthatóval számolhatjuk ki.

Bizonyítás

Alkalmazzuk a "*" csillagok és az "|" elhatároló jelek módszert a bizonyításhoz.

A k elem kiválasztásához használjunk k darab "*" jelet és a különböző elemek váltásához használjunk $(n-1)$ darab "|" elhatároló jelet. Így minden k elemű ismétléses kiválasztásához kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhető az $(n-1)$ darab "|" elhatároló jelnek és a k darab "*" jelnek az ismétléses permutációja. Ezért az n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációk $C_n^{k,i}$ száma megegyezik az $(n+k-1)$ elem $(n-1, k)$ ismétléses permutációinak $P_{n+k-1}^{n-1,k}$

$$= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} \text{ számával. Q.e.d.}$$

3.1.8.11. Összefoglalás

Táblázatos formában összefoglaljuk a most megismert kombinatorikai fogalmak definícióját és számítási képleteit.

	ISMÉTLÉS NÉLKÜLI KOMBINÁCIÓ	ISMÉTLÉSES KOMBINÁCIÓ
Definíció	n elemből kiválasztható k elemű részhalmazok száma, ahol a sorrend nem számít C_n^k	n különböző elemből ismétléssel kiválasztható összes k hosszúságú sorozatok száma, ahol a sorrend nem számít: $C_n^{k,i}$
Számítási képlet	$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = P_n^{k, n-k}$	$C_n^{k,i} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} = P_{n+k-1}^{n-1,k}$

3.1.9. Binomiális tétel. Pascal-háromszög.

A binomiális együttható nevét onnan kapta, hogy szorzó tényezőként előfordulnak $(a+b)^n$ két tagú összeg hatványainak kifejtésénél.

Két tagú összeg hatványai <pre> > restart : for n from 1 to 5 do (a+b)^n = expand((a+b)^n) end do a+b = a+b (a+b)^2 = a^2 + 2 a b + b^2 (a+b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3 (a+b)^4 = a^4 + 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 a b^3 + b^4 (a+b)^5 = a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5 </pre> (1.9.1)	<pre> > for n from 1 to 5 do cat(n, ` `) (seq((n = 0 ..n)) end do; print(A Pascal- háromszög elemei) 1. (1, 1) 2. (1, 2, 1) 3. (1, 3, 3, 1) 4. (1, 4, 6, 4, 1) 5. (1, 5, 10, 10, 5, 1) A Pascal-háromszög (1.9.2) elemei </pre>
--	--

Az $(a + b)^n$ két tagú összeg hatványainak kifejtése szerepel a bal oldali cellában, míg az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatókból képezett piramis alakú háromszög képe látható a jobb oldalon. A bal oldali táblázat $(a + b)^n$ hatványában szereplő együtthatók rendre azonosak a jobb oldali táblázat n -ik sorában szereplő számokkal. Ez az egyezés a binomiális-tételen alapul.

3.1.9.1. TÉTEL. BINOMIÁLIS-TÉTEL

Tetszőleges a és b számokra teljesül az

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot a^2 \cdot b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^n$$

azonosság, ahol $n = 1, 2, 3, \dots$ egész.

Bizonyítás

Az $(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \cdot (a + b) \cdot \dots \cdot (a + b)}_{n \text{ darab tényező}}$ szorzat disztributív kifejtésében az n darab

$(a + b)$ tényező mindegyikéből vagy az a vagy a b tagot kell választani. Ha k tényezőtől választjuk az a tagot és a maradék $(n - k)$ tényezőtől a b tagot, akkor $a^k \cdot b^{n-k}$ alakú szorzatot kapunk. Ilyen szorzatokból pontosan annyi szerepel az összegben, ahányféleképpen az n tényező közül ki tudjuk választani a k tényezőt úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít. Mint tudjuk, ezek száma megegyezik az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatóval. Ezzel igazoltuk, hogy a kifejtésben $\binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ alakú tagok szerepelnek és itt k értéke lehet $0, 1, 2, \dots, n$. A $k = 0$ esetben minden tényezőtől b -t választunk és b^n tagot kapjuk. A másik véglet a $k = n$ eset, amikor minden tényezőtől a -t választunk és a^n tagot kapjuk. Q.e.d.

A binomiális tételből következik, hogy a Pascal-háromszög n -ik sorában szereplő binomiális együtthatók összege 2^n és a tagokat ellentétes előjellel összegezve nullát kapunk.

3.1.9.2. TÉTEL. Pascal háromszög sorainak összege pozitív és váltakozó előjellel

Tetszőleges pozitív egész n esetén

$$(i) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$(ii) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0$$

Bizonyítás

(i) Válasszuk a binomiális-tételben az $a = 1$ és $b = 1$ esetet. Ekkor a bal oldalon

$(a + b)^n = (1 + 1)^n = 2^n$ szerepel. Jobb oldalon 1 mindegyik hatványa 1 lesz, ezért $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k$

$\cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ szerepel. Ezzel kapjuk az (i) azonosságot.

A Maple *Sum* eljárása képes kiszámolni szimbolikus módon a fenti összeget.

$$\begin{aligned} & \text{> restart; } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ & \sum_{k=0}^n \text{binomial}(n, k) = 2^n \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

(ii) Válasszuk a binomiális-tételben az $a = -1$ és $b = 1$ esetet. Ekkor a bal oldalon $(a + b)^n = (-1 + 1)^n = 0$ szerepel. Jobb oldalon 1 mindegyik hatványa 1 lesz és (-1) hatványai váltakozva $+1$ és -1 lesz. Ezért $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} =$ szerepel. Ezzel kapjuk az (ii) azonosságot.

A Maple *Sum* eljárása képes kiszámolni szimbolikus módon a fenti összeget.

$$\begin{aligned} &> \text{restart}; \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \\ &\sum_{k=0}^n (-1)^k \text{binomial}(n, k) = 0 \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

Mivel a Pascal-háromszög n -ik sorában a k -ik helyen éppen az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható áll, ezért a sor összegek 2 hatványai lesznek.

```
> restart :
for n from 0 to 8 do
  cat(n, ` `) (seq( (n choose k), k = 0 .. n) ), 2^n
end do;
print(A Pascal-háromszög elemei)
```

0. (1), 1
 1. (1, 1), 2
 2. (1, 2, 1), 4
 3. (1, 3, 3, 1), 8
 4. (1, 4, 6, 4, 1), 16
 5. (1, 5, 10, 10, 5, 1), 32
 6. (1, 6, 15, 20, 15, 6, 1), 64
 7. (1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1), 128
 8. (1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1), 256

A Pascal-háromszög elemei (1.9.5)

A binomiális együttható szimmetria tulajdonságát mondja ki a következő tétel.

3.1.9.3. TÉTEL. BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓ SZIMMETRIA TULAJDONSÁGA

Tetszőleges $0 \leq k \leq n$ egész számokra teljesül az

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

szimmetria tulajdonság.

Bizonyítás

Számoljuk az egyenlőség jobb oldalán szereplő binomiális együtthatót definíció szerint

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}. \text{ Q.e.d.}$$

A binomiális együtthatók rekurzív számítását teszi lehetővé a következő rekurzív azonosság.

3.1.9.4. TÉTEL. BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓ REKURZÍV AZONOSSÁGA

Tetszőleges $1 \leq k < n$ egész számokra teljesül az

rekurzív azonosság.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{\overbrace{(k+n-k)}^n}{(n-k) \cdot k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Mivel a Pascal háromszög $n - ik$ sorának $k - ik$ eleme (ahol k lehet $0, 1, 2, \dots, n$) éppen az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható, ezért a fenti rekurzív képlet alkalmas az elemek kiszámítására.

[illegible]

A nyilak azt mutatják, hogy ha a számításban eljutottunk pl. az $n = 4$ sorig, akkor a következő $n = 5$ sor elemeit az előző sorban egymás mellett szereplő számok összegei adják. A sor elejére és végére odaírjuk az 1 számot. Ezt a szabályt végnélkül folytathatjuk, hogy megkapjuk a binomiális együtthatók értékeit.

Visszatevés nélküli mintavételről beszélünk, ha egy N **elemű halmazból** – annak megkeverése után – találmomra kiveszünk **néhány elemet** és megvizsgáljuk, hogy mennyi a kivett mintában a megkülönböztetettek (például selejtesek) száma.

$$(1 \leq s < N)$$

(iii) Kiválasztunk véletlenszerűen n elemű mintát visszatevés nélkül. ($n \leq N$)

Kérdés

Mekkora **valószínűséggel** kerül a mintába k darab a megkülönböztett (vagy selejtes) gyártmányok közül? ($k = 0, 1, 2, \dots, \min(n, s)$ lehet)

Megoldás

A feladat megfogalmazásából kiderül, hogy a kiválasztások sorrendje nem lényeges. A kérdésre a választ az alábbi lépések és számítások végén kapjuk meg.

A tevékenységek és a számítások lépései	Ezek száma
1. tevékenység. Az összes lehetőség megszámlálása N elem közül kell n elemet kiválasztani úgy, hogy a sorrend nem számít.	$C_N^n = \binom{N}{n}$
2. tevékenység. Válasszunk ki k gyártmányt az s selejt közül!	$C_s^k = \binom{s}{k}$
3. tevékenység. Válasszunk ki $(n - k)$ gyártmányt az $(N - s)$ jó közül!	$C_{N-s}^{n-k} = \binom{N-s}{n-k}$
4. tevékenység. Kedvező lehetőségek megszámlálása. A 2. és 3. tevékenységek együttes végrehajtása a szorzás-szabály alapján.	$\binom{s}{k} \cdot \binom{N-s}{n-k}$

Mivel a kísérlet eseménytere az

$$\Omega = \{ \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \mid i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, 3, \dots, N\} \text{ és } i_j \neq i_l \}$$

és ennek minden eleme egyformán valószínű, ezért az

$$A = \{a \text{ kivett } n \text{ elemű mintában } k \text{ selejtes van}\}$$

esemény valószínűségét a

$$(3.1.10.1) \quad P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{\binom{s}{k} \cdot \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

hányadossal számolhatjuk, ahol $k = 0, 1, 2, \dots, \min(n, s)$. ♦

3.1.10.2. PÉLDA

Egy dobozban $N = 40$ izzólámpa van, amelyek közül $s = 5$ selejtes. Kiveszünk $n = 8$ izzót véletlenszerűen visszatevés nélkül. Mennyi selejtes lesz legnagyobb valószínűséggel a kivett mintában?

Megoldás

Képezzük a (3.1.10.1) formula alapján Maple-ben azt a 6 elemű sorozatot, melynek elemei a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ értékekre a selejtek valószínűségei!

> restart

> N, s, n := 40, 5, 8

> valószínűségek := $\left[\text{seq} \left(\frac{\binom{s}{k} \cdot \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}, k = 0 \right. \right.$

Mutassuk meg, hogy a kapott valószínűségek összege 1.

A selejtválasztások valószínűségeinek eloszlása oszlop diagrammal.

$$N, s, n := 40, 5, 8$$

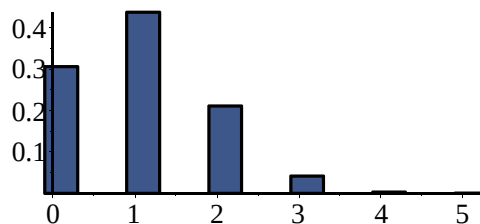
$$\text{valószínűségek} := \left[\frac{25172}{82251}, \frac{35960}{82251}, \frac{17360}{82251}, \frac{3472}{82251}, \frac{280}{82251}, \frac{7}{82251} \right] \quad (1.10.1)$$

$$\sum_{k=1}^{\min(n, s)+1} \text{valószínűség}_k = \sum_{k=1}^{\min(n, s)+1} \text{valószínűség}_k$$

$$\sum_{k=1}^6 \text{valószínűség}_k = 1 \quad (1.10.2)$$

```
> evalf (valószínűségek);
Statistics[ColumnGraph](valószínűségek, offset
=-0.1, width = 0.4, distance = 0.6, title
= Selejtválasztások valószínűségei visszatevés
nélkül);
[0.3060388324, 0.4371983319, 0.2110612637,
0.0422122527, 0.0034042139,
0.0000851053]
```

Selejtválasztások valószínűségei
visszatevés nélkül



Egy **diszkrét eloszlást** kaptunk, mert a valószínűségek összege 1. Az eloszlás Maple neve *Hypergeometric* és magyarul **hipergeometrikus eloszlásnak** nevezzük. Legnagyobb valószínűséggel a 8 kivett izzó között 1 selejtes lesz, amelynek esélye kb. 0.4372.

Ha X jelöli a kivett 8 izzó között a selejtek számát, akkor X értéke felveheti a 0, 1, 2, 3, 4, 5 értékeket, mert összesen 5 selejt van és így 5-nél több selejtet nem tudunk kivenni, hiszen **nem tesszük vissza** a kivett izzókat! A *Statistics* csomag *RandomVariable(Hypergeometric(40, 5, 8))* eljárásával közvetlenül meg tudjuk adni azt az X változót, amely a fenti tulajdonságokkal rendelkezik.

```
> with(Statistics) :
> X := RandomVariable(Hypergeometric(40, 5, 8)) :
> seq(Probability(X = k), k = 0..5)
```

$$\frac{25172}{82251}, \frac{35960}{82251}, \frac{17360}{82251}, \frac{3472}{82251}, \frac{280}{82251}, \frac{7}{82251} \quad (1.10.3)$$

Ezek a valószínűségek rendre ugyanazok, mint amit az előbb kaptunk. Tehát számolhatunk **közvetlenül** a binomiális együtthatók alapján. Vagy számolhatjuk **közvetve** az eloszlás értékeit, a *Hypergeometric* és a *Probability* eljárások alapján! Azt válaszolhatjuk a kérdésre, hogy az $X = 1$ esemény valószínűsége a legnagyobb és $P(X = 1) \approx 0.4372$.

3.1.11. Mintavétel visszatevéssel. Binomiális eloszlás.

Visszatevéses mintavételről beszélünk, ha egy N elemű **halmazból** – annak megkeverése után – taláalomra kivesszünk **egyesével** n **elemet**. Minden kiválasztás után **megvizsgáljuk**, hogy a kivett elem megkülönböztetett-e vagy sem, majd minden alkalommal **visszatesszük** a kivett elemet. Közben **feljegyezzük**, hogy a vizsgálat milyen eredménnyel zárult. Ugyanazt kérdezzük, mint a 3.1.10. pontban, hogy mennyi valószínűséggel lesz a kivett n elemű mintában k számú megkülönböztetett (azaz selejtes)?

3.1.11.1. DEFINÍCIÓ. MINTAVÉTEL VISSZATEVÉSSSEL

Feltételek

- (i) Rendelkezésre áll N darab **egyforma** gyártmány pl. csavar.
 - (ii) A gyártmányok között s darab megkülönböztetett pl. **selejtes** van.
- ($1 \leq s < N$)
- ↗ (iii) Kiválasztunk **egy** elemet véletlenszerűen N közül.
 - ↑ (iv) Feljegyezzük, hogy milyen elemet vettünk ki: **selejtes-e** vagy **jó**!
 - ↑ (v) **Visszatesszük** a kivett elemet és folytatjuk a (iii) pontnál, addig amíg n elemet nem veszünk ki összesen.

Kérdés

Mekkora **valószínűséggel** kerül a mintába k darab a megkülönböztetett (vagy selejtes) gyártmányok közül, ahol $k = 0, 1, 2, \dots, n$ lehet.

Megoldás

A különbség jól látható a 3.10.1. ponthoz képest. Mivel egyesével vesszük ki az elemeket, majd feljegyezzük hogy selejtes-e vagy jó és visszatesszük a kivett elemet, ezért egyrészt a **kiválasztás sorrendje számít**. Másrészt minden alkalommal ugyanazzal az N elemű alaphalmazzal találkozunk a kiválasztáskor. A kérdésre adandó választ az alábbi tevékenységek és számítások mutatják.

A tevékenységek és a számítások lépései	Ezek száma
1. tevékenység. Az összes lehetőség megszámlálása n helyre kell bepakolni N elem közül tetszőleges ismétlési lehetőséggel	$V_N^{n,i} = N^n$
2. tevékenység. Válasszuk ki azt a k helyet az n hely közül, ahová a 3.tevékenység során az s selejt kerül ismétlési lehetőséggel!	$C_n^k = \binom{n}{k}$
3. tevékenység. Tegyük selejteket a k kiválasztott helyre az s selejt közül választva ismétlési lehetőséggel!	$V_s^{k,i} = s^k$
4. tevékenység. Tegyük jó alkatrészeket a maradék $(n - k)$ helyre az $(N - s)$ jó alkatrész közül választva ismétlési lehetőséggel!	$V_{N-s}^{n-k,i} = (N - s)^{n-k}$
5. tevékenység. Kedvező lehetőségek megszámlálása. A 2., 3. és 4. tevékenységek együttes végrehajtása a szorzás-	$\binom{n}{k} \cdot s^k \cdot (N - s)^{n-k}$

szabály alapján.

Mivel a kísérlet

$$\Omega = \{ (i_1, i_2, \dots, i_n) \mid i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, 3, \dots, N\} \}$$

eseményterének minden eleme egyformán valószínű, ezért az

$$A = \{ \text{az } n \text{ elemű mintában } k \text{ selejtes van} \}$$

esemény valószínűségét a

$$(3.1.11.1) \quad P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{\binom{n}{k} \cdot s^k \cdot (N-s)^{n-k}}{N^n}$$

képlettel számolhatjuk, ahol $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

♣

A (3.1.11.1) képletet egyszerűbb alakra hozhatjuk, ha bevezetjük a

$$p = \frac{s}{N}$$

selejtarány jelölést! Ugyanis a nevezőben elvégezzük az $N^n = N^k \cdot N^{n-k}$ felbontást

$$P(A) = \binom{n}{k} \cdot \frac{s^k}{N^k} \cdot \frac{(N-s)^{n-k}}{N^{n-k}} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Ez a képlet a **binomiális eloszlás** képlete, amely szerint a valószínűség nem függ a nagy halmaz

N méretétől és az s selejtszámtól közvetlenül, csak a $p = \frac{s}{N}$ selejtarányon keresztül. Ez így

logikus, hiszen a kivett elemek visszatevése miatt minden esetben ugyanazokkal az alkatrészekkel állunk szembe a húzás előtt.

3.1.11.2.PÉLDA

Egy dobozban $N = 40$ izzólámpa van, amelyek közül $s = 5$ selejtes. Kiveszünk $n = 8$ izzót véletlenszerűen visszatevéssel. Mennyi selejtes lesz legnagyobb valószínűséggel a kivett mintában?

Megoldás

Képezzük a (3.1.11.1) formula alapján Maple-ben azt a 9 elemű sorozatot, melynek elemei a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ változtatásával a selejtek valószínűsége.

Mutassuk meg, hogy a kapott valószínűségek összege 1!

> restart

> $N, s, n := 40, 5, 8;$

> $p := \frac{s}{N};$

> $\text{valószínűségek} := \left[\text{seq} \left(\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, k = 0..n \right) \right]$
 $N, s, n := 40, 5, 8$

$$p := \frac{1}{8}$$

$$\text{valószínűségek} := \left[\frac{5764801}{16777216}, \frac{823543}{2097152}, \frac{823543}{4194304}, \frac{117649}{2097152}, \frac{84035}{8388608}, \frac{2401}{2097152}, \frac{343}{4194304}, \frac{7}{2097152}, \frac{1}{16777216} \right] \quad (1.11.1)$$

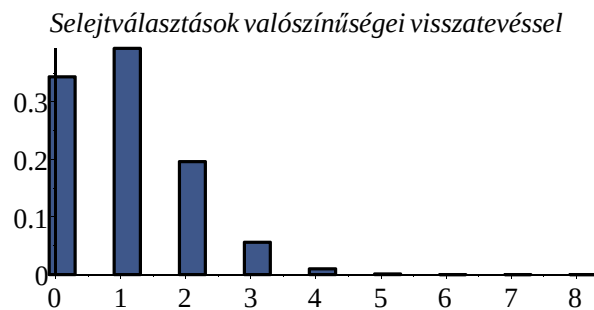
>

A selejtválasztások valószínűségeinek eloszlása oszlop diagrammal.

$$\begin{aligned} &> \sum_{k=1}^{n+1} \text{'valószínűségek'}_k = \sum_{k=1}^{n+1} \text{valószínűségek}_k \\ &\quad \sum_{k=1}^9 \text{valószínűségek}_k = 1 \end{aligned} \quad (1.11.2)$$

> evalf (valószínűségek);
Statistics[ColumnGraph] (valószínűségek, offset = -0.1, width = 0.4, distance = 0.6, title = Selejtválasztások valószínűségei visszatevéssel);

[0.3436089158, 0.3926959038, 0.1963479519, 0.0560994148, 0.0100177527, 0.0011448860, 0.0000817776, 0.0000033379, 5.9604644780 10⁻⁸]



Egy **diszkrét eloszlást** kaptunk, mert a valószínűségek összege 1. Az eloszlás Maple neve *Binomial* a magyar neve **binomiális eloszlás**. Legnagyobb valószínűséggel a 8 kivett izzó között 1 selejtes lesz, amelynek esélye kb. 0.3927.

Ha Y jelöli a kivett 8 izzó között a selejtek számát, akkor Y értéke felveheti a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 értékeket, mert akár minden esetben selejtet vehetünk ki, hiszen

visszatesszük a kivett izzókat! A *Statistics* csomag *RandomVariable*(*Binomial*(8, $\frac{5}{40}$))

eljárásával megadhatjuk azt az Y változót, amely a fenti tulajdonságokkal rendelkezik.

```
> with(Statistics) :
> Y := RandomVariable(Binomial(8, 5/40)) :
> seq(Probability(Y = k), k = 0..8)
5764801 823543 823543 117649 84035 2401 343
16777216 2097152 4194304 2097152 8388608 2097152 4194304
7 1
2097152 16777216
```

(1.11.3)

Ezek a valószínűségek rendre ugyanazok, mint amit az előbb kaptunk. Tehát, lehet számolni közvetlenül a képletek alapján. Továbbá, megkaphatjuk az eloszlás értékeit közvetve a *Binomial* és a *Probability* eljárások segítségével! Használva ezeket a jelöléseket, a kérdésre a válasz az, hogy legnagyobb valószínűsége az $Y = 1$ eseménynek lesz és ez $P(Y = 1) \approx 0.3927$.

3.1.12. Kombinatorikai és valószínűségi példák és megoldások Maple-vel

A kombinatorikai példák megoldásai során alkalmazzuk a fenti elveket, szabályokat és lezárlási algoritmusokat. Sok esetben tudunk Maple programot írni, amely megszámlolja egy adott típusú halmaz elemeit. Így ellenőrizhetjük, hogy a számolás alapelveit helyesen alkalmazzuk-e! Sok esetben az azonosságokat szimbolikusan is tudjuk Maple-ben igazolni!

3.1.12.1. ÖSSZEADÁS ÉS SZORZÁS SZABÁLYOK EGYÜTTES ALKALMAZÁSA

Vannak olyan feladatok, amelyekben az **összeadás-szabályt és a szorzás-szabályt** együttesen kell alkalmazni.

3.1.12.1. PÉLDA. Összeadás és szorzás szabályok együttes alkalmazása

A BASIC programozási nyelv kezdeti verzióiban egy **változó név** állhatott egy vagy két karakterből. A változó nevek képzésére a következő szabályt kellett betartani:

(i) Ha a név egy karakteres, akkor ez a karakter a 26 betűs angol ABC egy betűje lehetett.

(ii) Ha két karakteres változó nevet használunk, akkor az első karakter alfabetikus, míg a második alfanumerikus karakter lehetett.

(iii) A kis és nagy betűket a rendszer nem különböztette meg.

Hány különböző **változó nevet** lehetett maximálisan képezni egy BASIC programon belül, ha feltesszük, hogy ezek közül 5 **foglalt kulcsszó** volt, mint pl. az „if” ?

Megoldás

Az A tevékenység jelentse azt, hogy 1 karakter hosszú változó nevet választunk.

$$A = \{a \text{ változó név } 1 \text{ karakter hosszú}\}$$

A B tevékenység jelentse azt, hogy 2 karakter hosszú változó nevet választunk.

$$B = \{a \text{ változó név } 2 \text{ karakter hosszú}\}$$

Amennyiben $n(A)$ jelöli az összes lehetséges 1 hosszúságú változó nevek számát és $n(B)$ jelöli az összes lehetséges 2 hosszúságú változó nevek számát, akkor nyilvánvaló hogy az összes képezhető 1 vagy 2 hosszúságú nevek számát az

$$n(A \vee B) = n(A) + n(B)$$

összeg adja, mert egy név egyszerre 1 és 2 karakterből nem állhat. Tehát ekkor az összeadási szabályt kell alkalmazni.

Számoljuk ki $n(A)$ értékét!

Ha a változó név 1 karakterből áll, akkor **nem lehet számjegyet** választani. Ezért az alábbi 26 karakterből lehet kiválasztani egyet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

Ezt a választást, tehát az A tevékenységet 26 féleképpen tehetjük meg, ezért $n(A) = 26$.

Számoljuk ki most $n(B)$ értékét!

Felbonthatjuk a B tevékenységet B_1 és B_2 résztvevényiségekre!

B_1 jelöli a választási tevékenységet az első karakter pozícióra vonatkozóan.

B_2 jelöli a választási tevékenységet a második karakter pozícióra vonatkozóan.

A B_1 résztvevényiségre az előzőekhez hasonlóan most is 26 lehetőségünk van, így $n(B_1) = 26$.

A B_2 résztvevényiségre viszont $36 = 26 + 10$ lehetőségünk van, mert a második karakter pozíció helyén választhatunk a számjegyek $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ közül is. Így

$$n(B_1) = 36.$$

Miután a B_1 résztvevénységet valahogyan végrehajtottuk, azután a B_2 tevékenységre minden esetben $n(B_2) = 36$ választási lehetőségünk maradt. Ezért a $B = B_1 \wedge B_2$ tevékenység végrehajtási lehetőségeit a szorzási szabály alkalmazásával számlálhatjuk meg

$$n(B) = n(B_1) \cdot n(B_2) = 26 \cdot 36 = 936.$$

Így az összes 1 vagy 2 karakteres nevek számát az összeadás-szabály alapján kapjuk

$$n(A \vee B) = n(A) + n(B) = 26 + 936 = 962$$

Mivel azonban ezek között 5 foglalt kulcsszó van, ezért a feladat megoldása $962 - 5 = 957$ megengedett változó név.

3.1.12.2. A $\left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}\right)^2$ AZONOSSÁG BIZONYÍTÁSA

3.1.12.2. PÉLDA. Azonosság a binomiális együtthatókra

Mutassuk meg, hogy teljesül a binomiális együtthatókra az alábbi azonosság

$$\left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}\right)^2 = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j}$$

Megoldás

A Maple *combinat* nevű kombinatorika csomagjában a *binomial* (n, k) eljárás szolgál az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható értékének kiszámítására tetszőleges n és k érték esetén! A binomiális együttható a palettán is megtalálható ikon formában! Írjunk olyan ciklust, amely kiszámolja az egyenlőség bal oldalát $n=1$ -től kezdődően $n=10$ -ig és a jobb oldalát pedig a 'sum' eljárással! A *sum* eljárás a palettán szumma jel formában található. A különböző n értékekre kapott számokat tegyük be egy tömbbe az áttekinthetőség kedvéért!

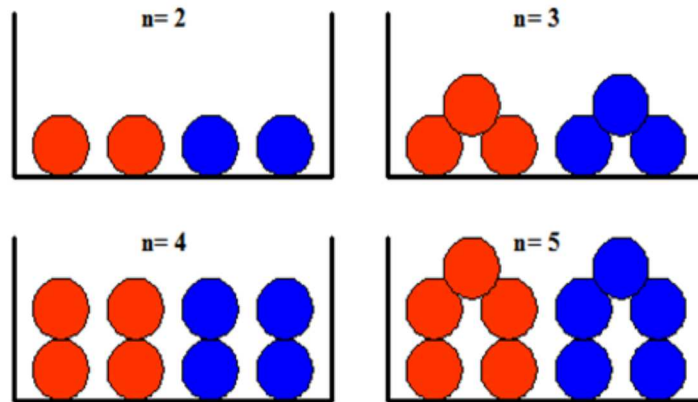
```
> restart : with(combinat) : unassign('n', 'j') : tabla := NULL :
for n to 10 do tabla := tabla, [n,  $\binom{2n}{n}$ ,  $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2$ ] end do :
array([[ [n,  $\binom{2n}{n}$ ,  $\sum_{j=0}^n \text{binomial}(n, j)^2$  ], tabla ])
```

n	$\text{binomial}(2n, n)$	$\sum_{j=0}^n \text{binomial}(n, j)^2$
1	2	2
2	6	6
3	20	20
4	70	70
5	252	252
6	924	924
7	3432	3432
8	12870	12870
9	48620	48620
10	184756	184756

(1.12.2.1)

[Láthatóan az azonosság $n = 1$ -től 10 -ig fennáll.

Az azonosság tetszőleges n -re való bizonyításához tekintsük a következő modellt!
Egy urnában legyen $2n$ darab golyó, melyből n darab piros és n darab kék színű. A következő ábra $n = 2, 3, 4$ és 5 esetén ábrázolja a kiinduló állapotokat!



Az azonosság bal oldalán szereplő $\binom{2 \cdot n}{n}$ szám megegyezik a $2n$ darab golyóból ennyiféleképpen lehet kivenni n darab golyót!

Az alábbi programrészlet tetszőleges n -re képez két listát, amelyben a **piros** illetve a **kék** golyók nevei vannak megsorszámozva.

A 'choose' eljárás megadja az összes n elemű kiválasztást a $2n$ elem közül!

```
> n := 3; pirosak := [seq(cat(piros, k), k = 1..n)];
    kékek := [seq(cat(kék, k), k = 1..n)]
    n := 3
```

```
    pirosak := [piros1, piros2, piros3]
```

```
    kékek := [kék1, kék2, kék3]
```

(1.12.2.2)

```
> choose([op(pirosak), op(kékek)], n);
```

```
 $\binom{2 \cdot n}{n} = nops(\%)$ 
```

```
[ [kék1, kék2, kék3], [kék1, kék2, piros1], [kék1,
    kék2, piros2], [kék1, kék2, piros3], [kék1,
    kék3, piros1], [kék1, kék3, piros2], [kék1,
    kék3, piros3], [kék1, piros1, piros2], [kék1,
    piros1, piros3], [kék1, piros2, piros3], [kék2,
    kék3, piros1], [kék2, kék3, piros2], [kék2,
    kék3, piros3], [kék2, piros1, piros2], [kék2,
    piros1, piros3], [kék2, piros2, piros3], [kék3,
    piros1, piros2], [kék3, piros1, piros3], [kék3,
    piros2, piros3], [piros1, piros2, piros3]]
```

```
binomial(2 n, n) = 20
```

(1.12.2.3)

Ezeket az n elemű kiválasztásokat tekinthetjük úgy is, hogy kiveszünk j darab **piros** golyót és hozzá választunk $(n-j)$ darab **kék** golyót.

A j darab pirosat az n darab pirosból $\binom{n}{j}$ -féleképpen választhatjuk ki.

Az $(n-j)$ darab kéket az n darab kékből

$\binom{n}{n-j}$ - féleképpen választhatjuk ki.

Így a **j** darab **piros** golyót és hozzá az **(n-j)** **kék** golyó kiválasztásának tevékenységét a **szorzás szabály** alkalmazásával kapjuk meg, tehát ezek száma

$$\binom{n}{j} \cdot \binom{n}{n-j}.$$

Mivel azonban a binomiális együtthatóra teljesül az $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$ azonosság, ezért a fenti szorzat megegyezik az

$$\binom{n}{j} \cdot \binom{n}{n-j} = \binom{n}{j} \cdot \binom{n}{j} = \binom{n}{j}^2$$

értékkel. Itt a **j = 0, 1, 2, ..., n** lehet és a különböző **j** értékekhez tartozó kiválasztások egymást páronként kizárják, ezért az **összeadási szabályt** kell alkalmazni az összes **n** elemű kiválasztás megszámolásához! Tehát az összes **2n** elemű golyók közül az összes **n** elemű

kiválasztás megegyezik az $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2$ összeggel!

Ezzel az azonosságot bizonyítottuk. ♦

Szemléltessük a leírtakat! Írtunk olyan Maple program részletet, amely ciklusban $j = 0$ -tól n -ig felsorolja a **j** darab piros és hozzá **(n-j)** darab kék golyó választását. A kiválasztást a 'choose' eljárás végzi, míg az egymáshoz rendelést a 'cartprod' nevű **Descartes-szorzatot** megadó eljárással képezzük. Így az adatstruktúra egy **sorozat** lesz, melynek minden tagja egy **lista**. Minden lista elem **két halmazt** tartalmaz, az egyik halmaz megmutatja, hogy a **piros golyókból** mely golyókat választottuk ki, míg a második halmaz megmutatja, hogy a **kék golyókból** mely golyókat választottuk ki.

```
> tabla := NULL :
for j from 0 to n do
    T := cartprod([choose({op(pirosak)},j),
    choose({op(kékek)},n-j)]);
    while not T[finished] do
        tabla := tabla, T[nextvalue]()
    end do
end do :
>
> tabla
>  $\sum_{j=0}^n \text{binomial}(n, j)^2 = \text{nops}([\%])$ 
>
[ { }, {kék1, kék2, kék3}, [ {piros1}, {kék1,
kék2}, [ {piros1}, {kék1, kék3}, [ {piros1},
{kék2, kék3}, [ {piros2}, {kék1, kék2},
[ {piros2}, {kék1, kék3}, [ {piros2}, {kék2,
kék3}, [ {piros3}, {kék1, kék2}, [ {piros3},
{kék1, kék3}, [ {piros3}, {kék2, kék3},
[ {piros1, piros2}, {kék1}, [ {piros1,
piros2}, {kék2}, [ {piros1, piros2}, {kék3},
[ {piros1, piros3}, {kék1}, [ {piros1,
piros3}, {kék2}, [ {piros1, piros3}, {kék3},
[ {piros2, piros3}, {kék1}, [ {piros2,
piros3}, {kék2}, [ {piros2, piros3}, {kék3},
[ {piros1, piros2, piros3}, { } ]
```

$$\sum_{j=0}^3 \text{binomial}(3, j)^2 = 20 \quad (1.12.2.4)$$

A végére hagyjuk a csattanót, mert a bizonyítást a Maple megválaszolja szimbolikusan tetszőleges pozitív egész n esetén, ha a *convert* eljárással átalakítjuk a jobb oldali összeget *binomial* típusra, és közben feltesszük, hogy $n > 0$ egész.

unassign('n', 'j') :

$$\sum_{j=0}^n \text{binomial}(n, j)^2 = \text{convert}\left(\sum_{j=0}^n \text{binomial}(n, j)^2, \text{binomial}\right) \text{ assuming } n::\text{posint}$$

$$\sum_{j=0}^n \text{binomial}(n, j)^2 = \text{binomial}(2n, n) \quad (1.12.2.5)$$

3.1.12.3. KÉT GOLYÓ HÚZÁSA $2 \cdot n$ FEKETE ÉS n PIROS GOLYÓ KÖZÜL

3.1.12.3. PÉLDA

Egy dobozban $2n$ fekete és n piros golyó van. Kihúzzunk véletlenszerűen **egyszerre két golyót** a dobozból. **Van-e** olyan $n \geq 1$ érték, amelyre ugyanakkora az esélye az $A = \{\text{két golyó színe azonos}\}$ és $B = \{\text{a két golyó színe különböző}\}$ eseményeknek.

Megoldás

Az **összeadás szabály** alapján

$$P(\text{a két golyó azonos színű}) = \frac{\binom{2n}{2} + \binom{n}{2}}{\binom{3n}{2}}$$

A **szorzás-szabály** alapján

$$P(\text{a két golyó különböző színű}) = \frac{\binom{2n}{1} \cdot \binom{n}{1}}{\binom{3n}{2}}$$

Arra keresünk feltételt, hogy a két esemény valószínűsége egyenlő legyen. Mivel a nevezők azonosak, ezért a két valószínűség egyenlőségére a számlálók egyenlőségét írjuk fel!

> restart :

$$\text{egyenlet} := \frac{(2n) \cdot (2n - 1)}{2} + \frac{n \cdot (n - 1)}{2} = (2n) \cdot n$$

$$\text{egyenlet} := n(2n - 1) + \frac{1}{2}n(n - 1) = 2n^2 \quad (1.12.3.1)$$

A kapott másodfokú egyenlet n -nel osztva első fokúra redukálható, amelyet a *solve* Maple paranccsal megoldunk!

$$\text{megoldás} := \text{solve}\left(\frac{\text{egyenlet}}{n}, \{n\}\right)$$

$$\text{megoldás} := \{n = 3\} \quad (1.12.3.2)$$

A megoldás $n = 3$. Tehát, ha egy dobozban 6 fekete és 3 piros golyó van, akkor kettő golyót

viSSzatevés nélkül kihúZva az **azonos színű** húzás esélye ugyanakkora, mint a **különböZő színű** húzásnak. Ugyanis összesen $\binom{6+3}{2} = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ -féleképpen húzhatunk ki 2 golyót. Ebből a **különböZő színű húzások**nál 6-ból 1-et és 3-ból 1-et kell húzni, ezért összesen $6+3=9$ lehetőség van. A maradék $18 - 9 = 9$ ugyanennyi lehetőség, az azonos színű húzások száma.

3.1.12.4. SZÜLETÉSNAPOK EGYEZÉSE

3.1.12.4. PÉLDA

(a) Mekkora a valószínűsége az

$A_n = \{ n \text{ fős csoportban van legalább 2 olyan ember, akik születésnapja az év ugyanazon napjára esik} \}$ eseménynek egy $n = 20$ fős csoportban?

(b) Változtassuk a csoport n méretét 1 és 366 között és rajzoljuk fel az A_n események valószínűségét!

(c) Határozzuk meg annak a csoportnak az n méretét, melyre $P(A_n) \approx 0.5$!

Feltételezzük, hogy a csoport tetszőleges tagjának a születés napja ugyanolyan eséllyel eshet az év 365 napjának bármelyikére. A szökőévet hagyjuk figyelmen kívül!

Megoldás

(a) Kezdjük az eseménytér elemeinek leírásával. Egy ember születésnapja az

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 365\}$$

napok bármelyikére ugyanolyan eséllyel eshet. Ha n ember lehetséges születésnapjainak variációit vizsgáljuk, akkor az S halmaz n -szeres Descartes-szorzatát kell venni önmagával. Tehát

$$\Omega = \{ n \text{ ember születésnapjainak különböző lehetőségei} \} = \Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega = \Omega^n$$

$$\Omega = \{ (k_1, k_2, \dots, k_n) \mid k_j \in S, j = 1, 2, \dots, n \}.$$

Ezért az összes lehetőség az $|\Omega| = V_{365}^n = 365^n$ **ismétléses variáció modelljével** számolható, amely a Descartes-szorzat elemeinek száma. A feltételezés szerint minden variáció egyformán esélyes, ezért klasszikus valószínűségi mezővel van dolgunk.

A számítást a

$$P(A_n) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{\#A_n}{\#\Omega} = \frac{|A_n|}{|\Omega|}$$

formula alapján végezhetjük el, ahol az A_n esemény a példa szövegében szerepel.

Rögzítsük Maple változóba az év napjainak számát és a csoport n méretét, majd adjuk meg az összes variációk számát!

> restart :

napok := 365; n := 20;

> összes_lehetőség := napokⁿ

napok := 365

n := 20

összes_lehetőség :=

1761397149289626339965899029490128250217437744140625

(1.12.4.1)

Az összes lehetőségek száma meglepően nagy, amely kiszámítása nem okozott gondot a Maple számára, hiszen kb. 500 000 decimális jegyet tud kezelni.

Az A_n esemény elemeinek megszámlálása helyett könnyebb kiszámolni a **tagadás esemény**

$\overline{A_n} = \{ \text{a csoport minden tagjának a születésnapja az év különböző napjára esik} \}$

$$\overline{A_n} = \{ (k_1, k_2, \dots, k_n) \mid k_j \in S, k_i \neq k_j, i, j = 1, 2, \dots, n \}$$

elemeinek számát. Ennek megszámlálásához az **ismétlés nélküli variáció modelljét** hívjuk segítségül.

Az első ember az év 365 napjának bármelyikén születhet. A második ember már nem

születhet azon a napon, mint amelyiken az első ember született, ha az A_n^c tagadás esemény

lehetőségeit keressük. Ezért 364 olyan napot lehet kijelölni a második ember számára,

amelyiken születhet! Folytatva a lehetőségek megszámlálását, mindig eggyel kevesebb lesz

azon napok száma, amelyen egy csoportbeli ember születhet! Az $n=20$ -ik ember

születésnapjára marad

$$(365 - 20 + 1) = 346$$

választási lehetőség a napok közül!

A szorzás szabályt kell alkalmazni az $\overline{A_n}$ elemeinek megszámlálására

$$|A_{20}^c| = 365 \cdot 364 \cdots 346 = \frac{365!}{(365 - 20)!} = V_{365}^{20}$$

vagyis a kedvező esetek 365 elem 20-ad osztályú ismétlés nélküli variációival egyezik.

> Lehetőségek száma, hogy mindenki különböző napon született := napok! / (napok - n)!

Lehetőségek száma, hogy mindenki különböző napon született :=
10366907533424609448441029 \ 91873410166195245875200000

Így a tagadás esemény valószínűsége tetszőleges n tagú csoport esetén

$$P(A_n^c) = \frac{\frac{365!}{(365 - n)!}}{365^n} = \frac{\binom{365}{n} \cdot n!}{365^n}$$

Kérjük a Maple-től a hányados közelítő tizedes tört alakját!

> Esély arra, hogy mindenki különböző napon született := evalf (Lehetőségek száma, hogy mindenki különböző napon született / összes lehetőség)

Esély arra, hogy mindenki különböző napon született := 0.5885616164 (1.12.4.3)

A tagadás esemény és az eredeti esemény valószínűségei között
 $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
összefüggés teljesül.

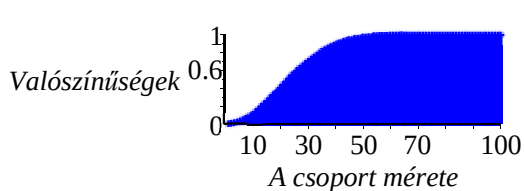
> Esély arra, hogy legalább 2 ember ugyanazon a napon született :=

1 - Esély arra, hogy mindenki különböző napon született;
Esély arra, hogy legalább 2 ember ugyanazon a napon született := 0.4114383836 (1.12.4.4)

Tehát 20 fős csoport esetén kb. 41,1% az esélye annak, hogy van legalább 2 ember, akik születésnapja ugyanazon napra esik. Ez a valószínűség meglepően nagy.

(b) Változtassuk a csoport n méretét 1 és 366 között és rajzoljuk fel az

valószínűségeit!

Ha a csoport $n=1$ emberből áll, akkor $A_1 = \emptyset$ a lehetetlen esemény és így $P(A_1) = 0$. Ha a csoport $n = 2$ emberből áll, akkor $P(A_2) = 1 - \frac{365 \cdot 364}{365^2} = \frac{1}{365}$	> $P('n'=2) = 1 - \frac{\text{napok!}}{(\text{napok} - 2)!}$ $P(n=2) = \frac{1}{365} \quad (1.12.4.5)$
A másik véglet az $n=366$ fős csoport, mert ebben biztosan van legalább 2 ember, akiknek a születésnapja azonos napra esik $P(A_{366}) = 1$. (lásd a skatulya-elvet). Nézzük a számítást $n = 365$ fős csoportra $P(A_{365}) = 1 - \frac{365!}{365^{365}}$	> $P('n'=365) = 1 - \text{evalf}\left(\frac{\text{napok!}}{\text{napok}^{365}}\right)$ $P(n=365) = 1.0000000000 \quad (1.12.4.6)$ > Gyakorlati szempontból 1 valószínűséget kaptunk.
Képezzük a valószínűségek sorozatát a megtalált univerzális képletet $n = 1$ és $n = 100$ csoport méretek között!	> $\text{valószínűségek} := \left[\text{seq}\left(\text{evalf}\left(1 - \frac{\binom{365}{n} \cdot n!}{365^n}\right), n = 1 \dots 100\right) \right]$
A valószínűségek pálcika vagy túske diagrammját a <i>DiscretePlot</i> eljárással készítjük el, amely a <i>DynamicSystems</i> csomagban található. Az ábra azt mutatja, hogyan növekszik annak valószínűsége, hogy van legalább 2 ember a csoportban, akik az év ugyanazon napján születtek, ha növeljük a csoport méretét.	> <code>DynamicSystems:-DiscretePlot([seq(n, n = 1..100)], valószínűségek, style = stem, color = blue, labels = [A csoport mérete, Valószínűségek], title = A valószínűségek növekedése a csoport méretének növekedésével!)</code> A valószínűségek növekedése a csoport méretének növekedésével! 
(c) Határozzuk meg annak a csoportnak az n méretét, melyre $P(A_n) \approx 0.5$!	
Keressük ki a fenti számok közül a 0.5 határ átlépést az ábra felnagyításával! Ha az egér jobb gombjával az ábrán klikkelünk, akkor a gyors menüben egy "Manipulator" almenüt	> $P('n'=22) = \text{valószínűségek}[22]$, $P('n'=23) = \text{valószínűségek}[23]$; $P(n=22) = 0.4756953077, P(n=23) = 0.5243046923 \quad (1.12.4.7)$

találunk. Ebben "Scale" a nagyítást, a "Pan" az ábra mozgatását végzi.

$$= 23) = 0.5072972343$$

Látható, hogy $n = 22$ fős csoport esetén a valószínűség 0.4757, még kisebb 0.5-nél, viszont $n = 23$ fős csoportnál 0.50729, már nagyobb 0.5-nél. Ezért 23 fő elegendő a feltételhez, mely meglepően kevés!

Megjegyzés: Tanórán kérdezzük meg a hallgatókat, hogy az év melyik napján születtek és írjuk ezeket a táblára. Ellenőrizzük az egyezésekre kiszámolt valószínűséget!

3.1.12.5. CSOPORTOSÍTÁS ÉS A MONTE CARLO - MÓDSZER

3.1.12.5. PÉLDA. Csoportok kialakítása

Egy **múzeumi látogatás** során valamely 15 fős társaságban 4 lány van. A társaságot 3 **idegenvezető**höz kell beosztani úgy, hogy mindegyik csoport 5 főből álljon!

(a) Hány különböző 5, 5 és 5 fős csoportot képezhetünk összesen? Írjuk le a számítás menetét!

(b) Számoljuk meg, hogy az

$$A = \{a \text{ kettő} - \text{kettő lány egy-egy csoportba kerül}\}$$

csoportosításnak hány különböző eleme van?

(c) Mekkora az esélye egy véletlenszerű csoportosításnál az A esemény előfordulásának?

(d) Generáljunk 500 véletlenszerű 3×5 fős csoportosítást! Vizsgáljuk meg, hogy a véletlen csoportosítások közül melyik tartozik az A részhalmazhoz és melyik nem! Számoljuk ki az A esemény relatív gyakoriságait, majd rajzoljuk fel a valószínűséggel együtt! Milyen következtetést vonhatunk le?

Megoldás

(a) A feladat megfogalmazásából az alábbiak következnek

(i) A csoportokon belül a **sorrend nem számít!**

(ii) A csoportok egymás közötti cseréje **számít!**

Az eseménytér létrehozására 2 különböző **modell**t is adunk.

1. Modell. Legyenek a készítendő csoportok nevei C_1 , C_2 és C_3 . Kezdjük a C_1 csoport 5 emberének kiválasztásával. A különböző kiválasztások száma

$$n_1 = \binom{15}{5} = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11 = 3003,$$

mert az emberek kiválasztásának sorrendje nem számít!

> restart : with(combinat) :

$$n_1 := \binom{15}{5}$$

$$n_1 := 3003$$

(1.12.5.1)

A C_2 második 5 fős csoportba a maradék 10 ember közül lehet választani 5 főt úgy, hogy a sorrend nem számít! Ezt megtehetjük

$$n_2 = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 252$$

különböző módon.

> $n_2 := \text{binomial}(10, 5)$

$$n_2 := 252$$

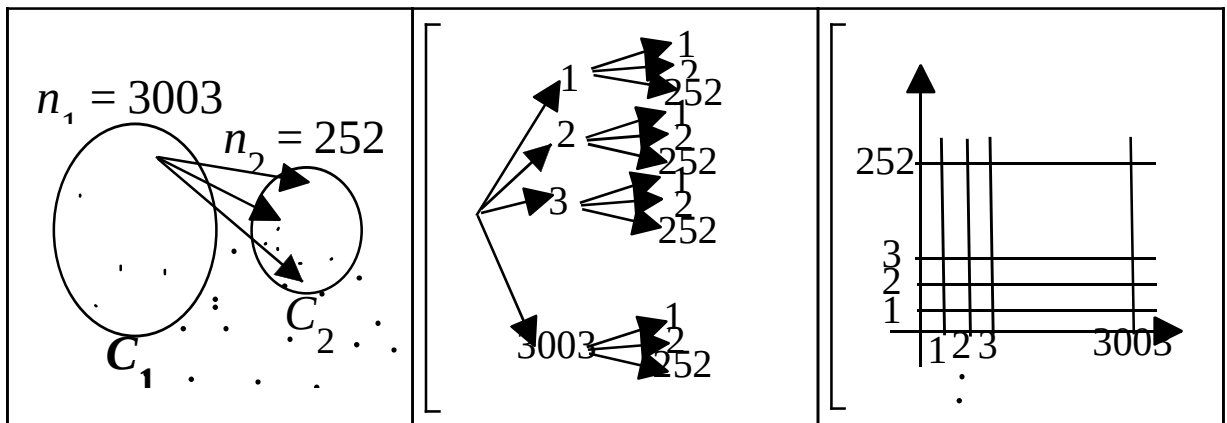
(1.12.5.2)

> $3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6$

A maradék 5 ember alkotja a C_3 harmadik csoportot. A két kiválasztási lehetőségek számának szorzata megadja az összes lehetőséget! Ugyanis az első kiválasztás minden elemét folytathatjuk a második kiválasztás bármelyik elemével.

Az alábbi első ábra függvényyszerűen mutatja, hogy tetszőleges C_1 5 fő kiválasztását folytathatjuk a C_2 5 fő tetszőleges kiválasztásával. Itt C_1 elemei 5 fős csoportokat jelölnek és C_2 halmaz elemei is más 5 főből álló csoportot jelölnek. Így az ábra szemantikusan azt szimbolizálja, minden pontból 252 halmazra mutat nyíl. De C_1 két különböző eleméből mutató nyilak nem ugyanazokra az elemekre mutatnak.

A második ábrán gráf elágazások mutatják első 3003 hozzárendelést, majd mindegyik elemhez 252 második hozzárendelés tartozik. A harmadik ábra a Descartes-szorzat szemléltetése. Vízszintes tengelyen a 3003 elem, függőlegesen a 252 elem. A rácsponatokban az egymáshoz rendelések láthatók. Mindegyik ábrára vonatkozik, hogy a második hozzárendelésnél a halmazok változnak!



(a) Két halmaz egymáshoz rendelése (b) Gráf útvonalainak megszámlálása (c) Két halmaz Descartes-szorzata

$$> \text{összes} := n_1 \cdot n_2$$

$$\text{összes} := 756756$$

(1.12.5.4)

Tehát a csoportosítási kísérlet összes lehetséges kimenetele egy 756756 elemű halmaz.

Ha a **binomiális együtthatókat** összeszorozzuk, akkor **ismétléses permutációra** emlékeztető képletet kapunk

$$\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5} = \frac{15!}{5! \cdot 10!} \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{15!}{5! \cdot 5! \cdot 5!} = P_{15}^{5, 5, 5}$$

Tehát egy 15 elemű halmaz sorba rendezéseinek számát kaptuk, amelyben 5, 5 és 5 elem azonos.

2. Modell. A fenti ismétléses permutáció adja az újabb modell ötletét. A 15 embert állítsuk egy rögzített sorrendbe, majd osszunk ki közöttük 5 darab egyes, 5 darab kettes és 5 darab hármas számot tartalmazó papír lapot véletlenszerűen! Mindenki abba a csoportba tartozik, amelyik számot kapta. Ez éppen a 15 elem ismétléses permutációja, melyben 5 egyes, 5 kettes és 5 hármas ismétlődik. Maple-ben ezek számát a *multinomial*(15, 5, 5, 5) eljárással lehet **számolni** illetve a

$$\text{permute}([1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3])$$

eljárással lehet **előállítani!**

$$> \text{multinomial}(15, 5, 5, 5)$$

$$756756$$

(1.12.5.5)

> $\Omega := \text{permute}([1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3])$:#ennek számítása sokáig tart

> $\text{nops}(\Omega); \Omega_{30..40}$

756756

$[[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 2], [1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3],$ (1.12.5.6)
 $[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3], [1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2],$
 $[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 3], [1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 2],$
 $[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 2, 2], [1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3],$
 $[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 2, 3, 3], [1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 3],$
 $[1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 2]]$

Tehát összesen 756756 eleme van az eseménytérnek.

(b) Számoljunk meg, hogy az

$A = \{a \text{ kettő} - \text{kettő lány egy-egy csoportba kerül}\}$

részalmaznak hány különböző eleme van?

Ehhez a 11 fiút úgy kell a csoportokba osztani, hogy 3, 3, 5 kerüljön az egyes csoportokba! Mivel az (ii) feltétel alapján a csoportok egymás közötti sorrendje számít, ezért a fiúk ilyen beosztását alapvetően az alábbi 3 különböző módon tehetjük meg

3, 3, 5
 3, 5, 3
 5, 3, 3

Ezek számát számoljuk *multinomial* eljárással!

> $k_1 := \text{multinomial}(11, 3, 3, 5);$

$k_2 := \text{multinomial}(11, 3, 5, 3);$

$k_3 := \text{multinomial}(11, 5, 3, 3);$

$k_1 := 9240$

$k_2 := 9240$

$k_3 := 9240$

(1.12.5.7)

Ezek a csoportosítások mind különbözőek, mert az 5 fiút tartalmazó csoport minden esetben más-más idegenvezetőhöz kerül! A 3, 3 fiú mellé tudunk 2, 2 lányt beosztani és így lesz meg minden csoportban az 5 fő. A 4 lány 2, 2 csoportra osztását $\binom{4}{2} = 6$ -féleképpen tehetjük meg!

> $\text{lányok} := \text{binomial}(4, 2);$

$\text{choose}([L1, L2, L3, L4], 2)$

$\text{lányok} := 6$

$[[L1, L2], [L1, L3], [L1, L4], [L2, L3], [L2, L4], [L3, L4]]$

(1.12.5.8)

> $\text{kedvező} := (k_1 + k_2 + k_3) \cdot \text{lányok}$

$\text{kedvező} := 166320$

(1.12.5.9)

Tehát a kedvező esetekre $|A| = 166\,320$ csoportosítást kaptunk, amikor kettő-kettő lány ugyanahhoz a csoporthoz tartozik.

(c) Mekkora az esélye egy véletlenszerű csoportosításnál az A esemény előfordulásának?

A lányok ilyen csoportosításának esélye a kedvező esetek és összes esetek számának hányadosa, mert minden csoportosítás egyformán esélyes.

> $p := \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}; \text{evalf}(\%)$

$$p := \frac{20}{91}$$

0.2197802198

(1.12.5.10)

Tehát kb. 21.98 % annak esélye, hogy egy véletlen csoportosítás során a 4 lány közül kettő-kettő ugyanabba a csoportba kerül. Azt mondhatjuk, hogy durván minden ötödik csoportosítás megfelelő.

(d) Generáljunk 500 véletlenszerű 3×5 fős csoportosítást! Vizsgáljuk meg, hogy a véletlen csoportosítások közül melyik tartozik az A részhalmazhoz és melyik nem! Számoljuk ki az A esemény relatív gyakoriságait, majd rajzoljuk fel a valószínűséggel együtt! Milyen következtetést vonhatunk le?

Tekintsük a 2. modellt és a lányok álljanak az utolsó 4 helyen. Így például az eseménytér 756000-ik elemének utolsó 4 eleme kettő darab 1 és kettő darab 2. Ez azt jelenti, hogy a 4 lány közül 2 lány az első és 2 lány a második csoportba kerül.

> Ω_{756000}

[3, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 2]

(1.12.5.11)

Tehát ez megfelel a feltételeknek. De például az eseménytér 5000-ik eleme nem teljesíti a feltételt, mert utolsó négy helyén 1 darab 1, 1 darab 2 és kettő darab 3 van.

> Ω_{5000}

[1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 1, 3, 3, 2, 3, 1, 3]

(1.12.5.12)

Hogyan tudjuk a két esetet megkülönböztetni?

> $\text{convert}(\Omega_{756000, 12..15}, \text{multiset}), \text{convert}(\Omega_{5000, 12..15}, \text{multiset})$

[[1, 2], [2, 2]], [[1, 1], [2, 1], [3, 2]]

(1.12.5.13)

A megoldás nyitja a *multiset* adatstruktúra. Tudjuk, hogy egy halmazban egy elem csak egyszer fordulhat elő. Ezzel ellentétben a *multiset* vagy *többses halmaz* struktúrában egy elem többször is előfordulhat. Egy listából a $\text{convert}(\text{lista}, \text{multiset})$ eljárással tudunk *multiset* adatstruktúrát készíteni. Ez két elemű listák listája. Annyi elemű a külső lista, ahány különböző eleme volt az eredeti listának. A két elemű listák első eleme a halmaz egy elemét mutatja és a második szám pedig megadja azt, hogy ebből az elemből hány darab van a listában.

Így a fenti konverziók közül az első azt mutatja, hogy az 1 számból is kettő és 2 számból is kettő van. Míg a második lista konverziója szerint, 1-ből van egy, 2-ből is egy van és 3-ból van 2 darab. Tehát egy elem a konvertálás után megfelel a feltételeknek, ha a lista 2 elemet tartalmaz és a listák mindegyikében a második szám 2.

Ellenőrizzük, hogy összesen 166320 olyan elem van-e az eseménytérben olyan, amely megfelel az A esemény feltételének!

> $\text{darab} := 0 :$

for k **from** 1 **to** összes **do**

$\text{lánycsop} := \text{convert}(\Omega_k[12..15], \text{multiset});$

if $\text{nops}(\text{lánycsop}) = 2$ **and** $\text{lánycsop}_{1_2} = 2$ **then** $\text{darab} := \text{darab} + 1$ **end if;**

end do;

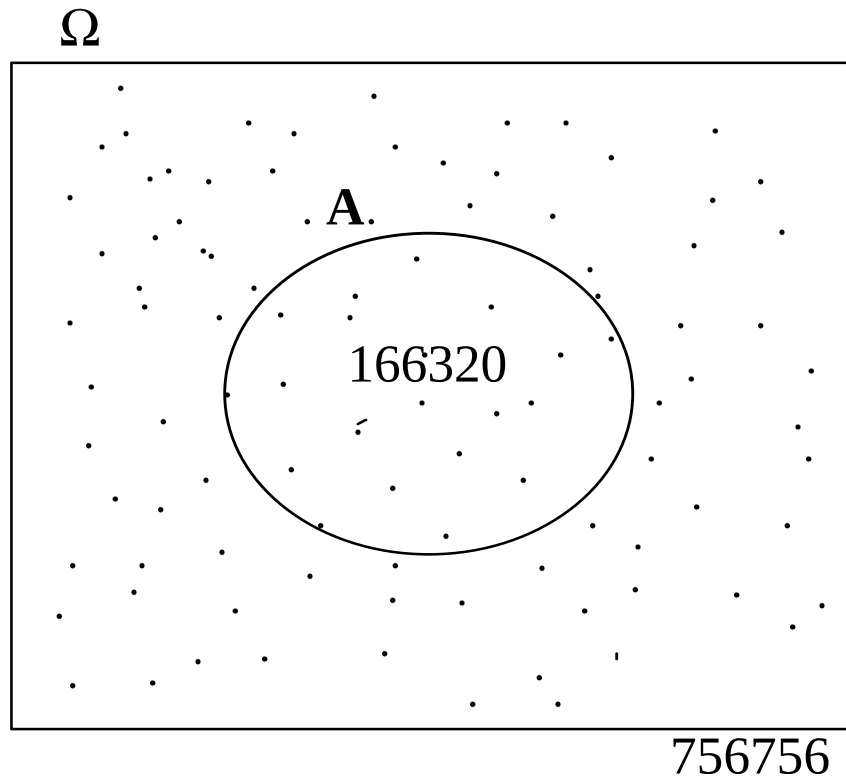
darab

166320

(1.12.5.14)

Tehát a Maple is az általunk kiszámolt kedvező esetszámot adta meg a leszámlálás során.

Alábbiakban generálunk egyenletes eloszlásban $m = 500$ véletlen számot 1 és 756756 között. A kapott véletlen csoportosításokra ellenőrizzük, hogy bele esik-e az A halmazba. Ha igen, akkor a gyakoriságokat megnöveljük eggyel. Felrajzoljuk az A esemény relatív gyakoriságainak vonalas ábráját és az A esemény valószínűségét!



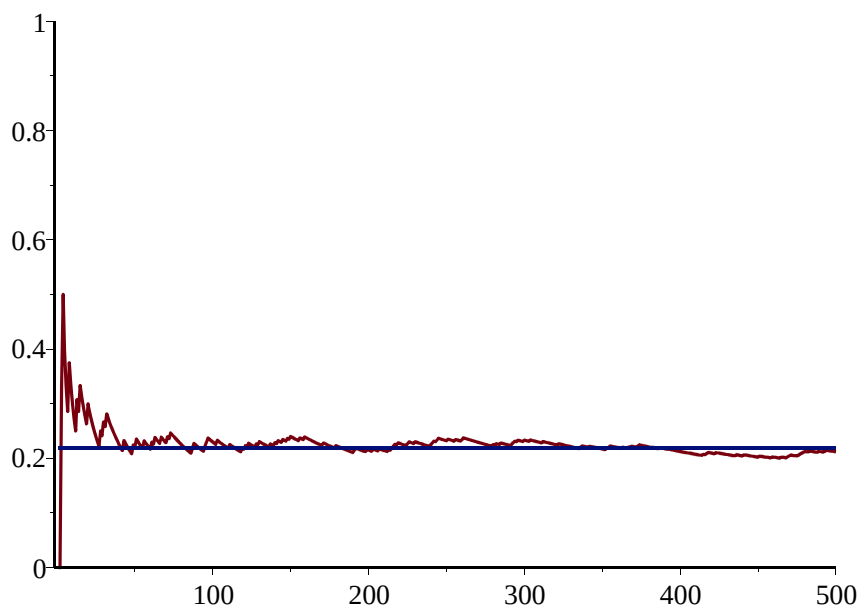
```
> randomize( ) :
> with(Statistics) : X := DiscreteUniform(1, összes) :
> m := 500;
> véletlenek := map(round, convert(Sample(X, m), list)) :
> véletlenek1..20
```

$m := 500$

[286000, 107109, 240106, 348346, 177580, 523183, 446379, 680261, 548275, (1.12.5.15)
9367, 293939, 349688, 163798, 282461, 438060, 516210, 369720, 525604,
674009, 110946]

```
> rgy := NULL : jó := 0 :
  for k to m do
    lánycsop := convert(Ωvéletlenekk[12..15], multiset);
    if nops(lánycsop) = 2 and lánycsop12 = 2 then
      jó := jó + 1
    end if;
    rgy := rgy, [k,  $\frac{jó}{k}$ ]
  end do :
```

```
> plot([rgy], p, 1..m, view = [1..m, 0..1])
```



A relatív gyakoriságok láthatóan a kiszámolt valószínűség körül ingadoznak és egyre közelebb kerülnek hozzá. Ezért a halmaz elemeinek számítása helyes volt.

3.1.12.6. FIXPONT NÉLKÜLI PERMUTÁCIÓK SZÁMA

Az általánosított kizárás és beszámítás vagy más néven szita-formula nevezetes alkalmazása a fixpont nélküli permutációk számának meghatározása.

3.1.12.6.1. DEFINÍCIÓ. PERMUTÁCIÓ FIXPONTJA

Az $S = (1, 2, 3, \dots, n)$ természetes számok egy $\sigma : S \rightarrow S$ permutációjának fixpontja a $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ szám, ha

$$\sigma(k) = k$$

teljesül, azaz a permutációs keverés során k az eredeti pozíciójában marad azaz fixen marad

Például a $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ permutációnak a 3 fixpontja, mert $\sigma_1(3) = 3$ és más fixpontja nincs is.

3.1.12.6.2. DEFINÍCIÓ. FIXPONT NÉLKÜLI PERMUTÁCIÓ

Az $S = (1, 2, 3, \dots, n)$ természetes számok egy $\sigma : S \rightarrow S$ permutációját **fixpont nélkülinek** nevezzük, ha

$$\sigma(i) \neq i$$

teljesül minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén. Az összes n -ed rendű fixpont nélküli permutációk számát D_n jelöli. A D betű az angol "derangement" elnevezés kezdőbetűje.

A $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ permutáció fixpont nélküli, mert

$\sigma_2(1) = 2, \sigma_2(2) = 1, \sigma_2(3) = 4$ és $\sigma_2(4) = 3$.

Az elnevezés onnan ered, hogy nincs olyan elem az $(1, 2, 3, \dots, n)$ sorrendben, amely a

permutációs keverés után a helyén maradna.

Számoljuk meg, hány különböző fixpont nélküli D_n permutáció van tetszőleges $n = 1, 2, 3, \dots$ esetén.

3.1.12.6.3. TÉTEL.

Az $S = (1, 2, 3, \dots, n)$ számok fixpont nélküli permutációinak D_n számát megadja a

$$D_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right) = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

formula.

Bizonyítás

Rögzített $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén jelölje A_k azoknak a $\sigma : S \rightarrow S$ permutációknak a halmazát, amelyeknek k fixpontja, azaz

$$A_k = \{ \sigma : S \rightarrow S \mid \sigma(k) = k \}.$$

Természetesen az A_k halmaz tartalmaz olyan permutációkat is, amelyek nemcsak a k elemet hagyják fixen. Például az identikus permutáció mindegyik $A_1, A_2, \dots, A_n$ halmaznak eleme. Az $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ unió halmaz tartalmazza az összes fixponttal rendelkező permutációt. Ennek komplementer halmaza az összes E n -ed rendű permutációra nézve, a fixpont nélküli permutációk halmaza. Tehát

$$D_n = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |E| - S_1^{(n)} + S_2^{(n)} - S_3^{(n)} + \dots + (-1)^n S_n^{(n)}$$

a logikai szita-formula 3.1.4.5. tagadási alakja szerint, ahol $S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$ a

különböző k -tényezős metszetek számosságainak összege.

Világos, hogy $|E| = n!$ az összes permutáció száma. Határozzuk meg az $S_k^{(n)}$ számokat! Ehhez azt kell tudni, hogy az $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ metszet halmaznak egy σ permutáció akkor lesz eleme, ha

$\sigma(i_1) = i_1, \dots, \sigma(i_k) = i_k$ teljesül. Így a maradék $(n - k)$ helyre a permutációban tetszőleges számot tehetünk az $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ elemek közül ismétlés nélkül. Vagyis ezek száma az $(n - k)$ elem permutációinak száma

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = P_{n-k} = (n - k)!$$

ahol $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ tetszőleges. Az $S_k^{(n)}$ összegben annyi ilyen tag szerepel,

ahányféleképpen az n elem közül kiválaszthatjuk azt a k -elemet, amelyeket fixen hagyunk. A kiválasztás sorrendje nem számít, ezért permutációt kell alkalmaznunk. Tehát

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (n - k)! = \binom{n}{k} \cdot (n - k)! = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} \cdot (n - k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Ahonnan

$$D_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!} = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right)$$

kapjuk a bizonyítandó formulát. Q.e.d. ♦

Megjegyzés.

A

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

képlet alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = \frac{1}{e} \approx 0.3678794412 \dots$$

mert az $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ exponenciális függvény Taylor-sorfejtésében $x = -1$ értéket téve

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} + \dots$$

A kapott $p = 0.3678 \dots$ szám megadja annak az eseménynek a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen választott permutációnak (mindegy, hogy hány elemet rendez) nincs fixpontja.

Nézzük a D_n sorozat elemeit $n = 8$ – ig!

$$> \text{seq} \left(D_n = n! \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{1}{k!}, n = 0 \dots 8 \right)$$

$$D_0 = 1, D_1 = 0, D_2 = 1, D_3 = 2, D_4 = 9, D_5 = 44, D_6 = 265, D_7 = 1854, D_8 = 14833 \quad (1.12.6.1)$$

Például $n = 3$ esetén az összes

$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$

6 darab permutáció közül a $(2, 3, 1)$ és a $(3, 1, 2)$ permutációknak nincs fixpontja. Ezért $D_3 = 2$.

3.1.13. Elméleti ellenőrző kérdések

3.1.13.1. Milyen esetben használjuk a kombinatorikai tevékenységek összeadás-szabályát? Mondjon rá példát!

3.1.13.2. Milyen esetben használjuk a kombinatorikai tevékenységek szorzás-szabályát? Mondjon rá példát!

3.1.13.3. Milyen esetben használjuk a kombinatorikai tevékenységek kizárás és beszámítás - szabályát? Mondjon rá példát!

3.1.13.4. Mit mond ki a galamb dúc -elv? Mondjon az alkalmazására példát!

3.1.13.5. Mit jelent az n elem permutációja? Mondjon rá példát!

3.1.13.6. Hány különböző sorrendet képezhetünk n elemből? Hogyan jelöljük?

3.1.13.7. Mit jelent az n elem $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ ismétléses permutációja? Mennyi ezek száma?

3.1.13.8. Mit jelent az n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli variációja? Mondjon rá példát!

3.1.13.9. Hány különböző k – hosszúságú sorrendet képezhetünk n elemből, ha $k \leq n$?

3.1.13.10. Mit jelent az n elem k -ad osztályú ismétléses variációja? Mennyi ezek száma?

3.1.13.11. Milyen kapcsolatot ismer az ismétlés nélküli variáció és az ismétlés nélküli permutáció között?

3.1.13.12. Mit jelent az n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációja? Mondjon rá példát!

3.1.13.13. Mit jelöl az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható? Hogyan lehet kiszámolni?

3.1.13.14. Mit mond ki a binomiális-tétel?

3.1.13.15. Milyen azonosságokat ismer a binomiális együtthatókra? Soroljon fel legalább kettőt!

3.1.13.16. Milyen kapcsolatot ismer az ismétlés nélküli kombináció és az ismétléses permutáció között?

3.1.13.17. Milyen számokból áll a Pascal-háromszög?

3.1.13.18. Milyen képzési szabállyal számolhatjuk a Pascal-háromszög számait?

3.1.14. Gyakorló feladatok

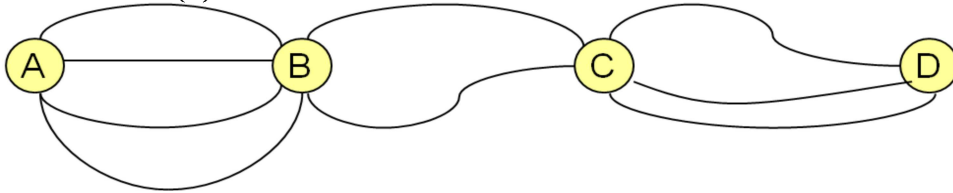
3.1.14.1. feladat

Az A és B városokat 4 különböző út köt össze. A B és C városok között két különböző út halad, míg a C és D városokat 3 különböző út köt össze.

Hány különböző útvonalon juthatunk el

(i) az A városból a C városba?

(ii) az A városból a D városba?



3.1.14.2. feladat

Hány tanuló van minimálisan abban az osztályban, amelyikben biztosan van 3 olyan tanuló, akik ugyanabban a hónapban születtek?

3.1.14.3. feladat

Hány embert kell minimálisan meghívni egy születésnapi bulira ahhoz, hogy biztosan legyen legalább két olyan ember, akik azonos napon születtek?

3.1.14.4. feladat

Legyen adott 10 kártya, amelyek között 5 piros és 5 zöld színű. Véletlenszerűen ezeket 10 borítékba tesszük, amelyek közül szintén 5 piros és 5 zöld.

(i) Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan 2 kártya kerül a vele egyező színű borítékba került?

$$\left(\frac{5^4 \cdot (4!)^2}{10!} \right)$$

(ii) Írjunk Maple programot az eseménytér megadására és a kedvező esetek leszámolására!

(iii) Írjunk Maple szimulációs programot a relatív gyakoriságok bemutatására!

3.1.14.5. feladat

Orvosok 8 csoportba sorolják az embereket aszerint, hogy vércsoportjuk milyen

$$AB^+, AB^-, A^+, A^-, B^+, B^-, O^+, O^-.$$

Feljegyzik továbbá a vérnyomás állapotát, amely lehet alacsony, normál vagy magas.

Hány különböző kategóriába sorolhatók ilyen módon a páciensek? (24)

3.1.14.6. feladat

Az üzemanyagok gazdaságosságát vizsgáló tanulmányban, a teszteléshez használtak **3 versenyautót, 5 különböző minőségű üzemanyagot** és a tesztek **7 különböző versenypályán** folytak.

A tesztelésben **2 autóvezető** vett részt és a teszt futásokat minden versenypályán elvégezték minden lehetséges variációban.

Mennyi teszt kísérletet kellett összesen elvégezni? ($2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 210$)

3.1.14.7. feladat

Hány különböző módon lehet elültetni egy parkban levő kör mentén 5 boróka fenyőt? ($4! = 24$)

3.1.14.8. feladat

Egy főiskolai futball csapat egy szezont folyamán 12 játékot játszik. Hány különböző módon fordulhat elő,

hogy a csapat a szezont 7 győzelemmel, 3 vereséggel és 2 döntetlennel? $\left(\frac{12!}{7! \cdot 3! \cdot 2!} = 7920 \right)$

3.1.14.9. feladat

Kilenc ember megy síelni 3 olyan autóval, amelyek rendre 2, 4 és 5 utast tudnak maximálisan szállítani.

Hány különböző módon utazhat a 9 kilenc ember a sí pályához úgy, hogy mindegyik autót használják?

3.1.14.10. feladat

Egy N elemű terméket tartalmazó sokaságban $s (< N)$ darab selejt van. Minőségbiztosítás érdekében véletlenszerűen kivesznek $n (< N)$ elemű mintát visszatevés nélkül és átvizsgálják. Ha a kivett mintában

a selejtekek száma nagyobb vagy egyenlő, mint m ($\leq s$), akkor visszautasítják a teljes sokaságot. Határozzuk meg a visszautasítás valószínűségét!

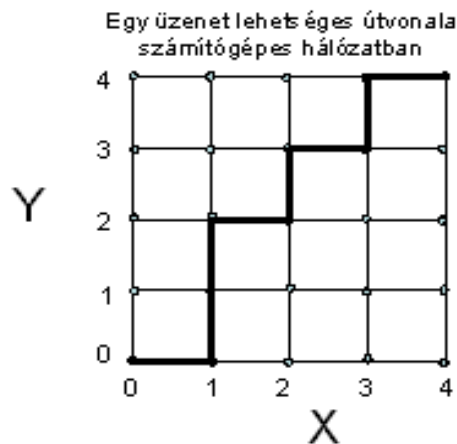
3.1.14.11. feladat

Egy hajón a legénység 15 matrózból áll. A napi parancs szerint 3 főnek navigációs feladatokat, 5 főnek telekommunikációs feladatokat és a maradék 7 főnek javítási feladatokat kell ellátni. Feltesszük, hogy a matrózokat úgy képezték ki, hogy mindenki el tudja látni bármelyik feladatot.

- Hányféle különböző módon lehet a feladatok ellátására 3, 5 és 7 fős csoportokra osztani a 15 matrózt!
- Adjuk meg a *permute* eljárás segítségével az összes lehetséges különböző csoportosítást?
- Két jó barát egy csoportba szeretne kerülni. Hányféle olyan csoportosítás van, amelyben ez teljesül?
- Mekkora a valószínűsége egy véletlenszerű csoportosítás során annak, hogy a 2 jó barát egy csoportba kerül?
- Véletlenszerűen választott $N=1000$ csoportosításból számoljuk a relatív gyakoriságait annak, hogy a két jó barát egy csoportba kerül. Mutassuk meg, hogy ezek a (d)-ben számolt valószínűség körül ingadoznak!

3.1.14.12. feladat

Egy 25 számítógépből álló hálózat számítógépei az alábbi 5×5 -ös táblázat $(x;y)$ rácspontjaiban helyezkednek el, ahol $x, y = 0,1,2,3,4$ lehet.



Minden üzenet a bal alsó sarok $(0;0)$ rácspontjából indul ki és a $(4;4)$ jobb felső sarokba érkezik. A számítógépek csak a közvetlen szomszédjaikkal tudnak kommunikálni.

Üzenet továbbítás szabálya:

Mindegyik számítógép az üzenetet vagy a tőle **jobbra** vagy a hozzá képest **fölfelé** elhelyezkedő szomszédja irányába tudja továbbítani.

Egy üzenet lehetséges útvonalát mutatja az ábra a $(0;0)$ pontból indulva a $(4;4)$ pontba érkező.

Minden útvonal egyforma eséllyel következhet be.

- Hány különböző útvonalon juthat el egy üzenet a $(0;0)$ sarokból indulva a $(4;4)$ sarokba érkező, figyelembe véve a továbbítás fenti szabályát?
- Hány különböző olyan útvonal létezik a fentiek közül, amelyben résztvesz a $(4;3)$ ponton levő számítógép?
- Mekkora a valószínűsége, hogy olyan útvonalon megy az üzenet $(0;0)$ -tól a $(4;4)$ számítógép felé, melyben résztvesz a $(4;3)$ koordinátájú számítógép?
- Mekkora a valószínűsége, hogy olyan útvonalon megy az üzenet $(0;0)$ -tól a $(4;4)$ számítógép felé, melyben résztvesz a $(3;3)$ koordinátájú számítógép?
- Mekkora a valószínűsége, hogy olyan útvonalon megy az üzenet $(0;0)$ -tól a $(4;4)$ számítógép felé, melyben résztvesz a $(2;3)$ koordinátájú számítógép?

3.1.14.13. feladat

Egy autókereskedőnél rendelhető autó színek $A = \{\text{szürke, kék, piros, fekete}\}$

Az autók kivitelezési lehetőségei $B = \{3 \text{ ajtó, } 4 \text{ ajtó, } 5 \text{ ajtó}\}$

Miden színt lehet párosítani tetszőleges kivitelezéssel. Hányféle rendelést lehet összeállítani?

3.1.14.14. feladat

Egy kémiai labor foglalkozáson 12 tanuló közül 4 lány. A mérések elvégzéséhez véletlenszerűen 3 csoportot kell képezni, amelyek mindegyike 4 főből áll!

(a) Hány különböző 3 darab 4 fős csoport képezhető a 12 tanulóból? Írjuk le a számítás menetét!

(b) Hány különböző olyan 4-4-4 fős csoportosítás képezhető, amikor mindhárom csoportban legalább 1 lány van?

(c) Mekkora az esélye annak, hogy olyan 4-4-4 fős csoportosítást képezzünk, amelyben mindhárom csoportban legalább 1 lány van?

(d) Generáljunk véletlenszerűen 3 csoportot, mindegyiket 4 fővel! Vizsgáljuk meg, hogy mindhárom csoportba került-e lány! Számoljuk ki ezen esemény relatív gyakoriságait, majd rajzoljuk fel!

3.1.14.15. feladat

Egy sakkasztalon véletlenszerűen elhelyezünk 8 bástyát. Mekkora a valószínűsége, hogy egyik bástya sem

üti a másikat? $\left(\frac{8!}{\binom{64}{8}} \right)$

3.1.14.16. feladat

Tíz pár cipő közül véletlenszerűen kiválasztunk 4 darab cipőt. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott cipőkből összeállítható legalább egy pár cipő, ha

(a) a 10 pár mindegyike különböző? $1 - \frac{2^4 \cdot \binom{10}{4}}{\binom{20}{4}}$

(b) a 10 pár cipők mindegyike azonos? $1 - \frac{2 \cdot \binom{10}{4}}{\binom{20}{4}}$

3.1.14.17. feladat

Elhelyezünk n urnába n golyót véletlenszerűen. Mekkora a valószínűsége, hogy

(a) nem lesz üres urna?

(b) pontosan egy üres urna lesz?

Feldobunk egy szabályos kockát, majd annyiszor lövünk egy céltáblára, amennyit a kockával dobtunk. A céltáblát minden egyes alkalommal $\frac{1}{5}$ valószínűséggel találjuk el. Mennyi a

valószínűsége, hogy legalább egyszer eltaláljuk a céltáblát? $\left(\frac{1}{6} \cdot \sum_{k=1}^6 \left(1 - \left(\frac{4}{5} \right)^k \right) \right)$

3.1.14.19. feladat

Két játékos, A és B a következő játékszabály alapján játszik. Feldob az A játékos egy szabályos kockát, majd két szabályos érmét annyiszor dob fel, ahányat dobott a kockával. Ha a pénz feldobások során legalább egyszer két fejet dobott, akkor B fizet az A játékosnak 1 Euro – t, ellenkező esetben A fizet a B játékosnak 1 Euro – t. Melyiküknek előnyös a játék? (A játék annak előnyös, akinek nagyobb a nyerési valószínűsége.) (Az A játékosnak előnyös, mert A nyerési

esélye $\frac{1}{2} \cdot \left(1 + \left(\frac{3}{4} \right)^6 \right) > \frac{1}{2}$.)

3.1.14.20. feladat

Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^n k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} \text{ azonosságot, ha } n \geq 1 \text{ egész.}$$

3.1.14.21. feladat.

A fixpont nélküli $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ permutációk D_n számára igazoljuk a

$$D_n = n \cdot D_{n-1} + (-1)^n, D_0 = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

rekurziós formulát a 3.1.12.6.3. tétel alapján.

3.1.14.22. feladat.

Egy urnában fehér és piros golyók vannak. Visszatevéssel kihúzunk két golyót. Bizonyítsuk be, hogy

legalább $\frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy a kihúzott golyók egyforma színűek!

3.1.14.23. feladat.

Igazoljuk a binomiális-tétel következő általánosítását az ú.n. polinomiális -tételt

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_r = n \\ 0 \leq k_1, k_2, \dots, k_r \leq n}} \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!} \cdot a_1^{k_1} \cdot a_2^{k_2} \cdot \dots \cdot a_r^{k_r}$$

3.1.14.24. feladat.

(a) Hány olyan pozitív egész megoldása van az

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

egyenletnek, amelyre az összegben tekintettel vagyunk a sorrendre és $n \geq k$.

(b) Használjuk az (a) feladat megoldásához a *combinat* csomag *composition(n, k)* eljárását!

(c) A földszinten várakozó 5 utas beszáll egy liftbe, amely az 1, 2, 3 és 4 emeletek között közlekedik. Az 5 utas hányféleképpen szállhat ki a 4 emelet között? (Megjegyzés: Előfordulhat, hogy valamely emeleten nem száll ki senki.)

3.1.14.25. feladat.

Egy $n=20$ fős osztály tanulói elhatározzák, hogy **mikulás csomagot** készítenek egymásnak. Ehhez mindenki nevét felírják külön-külön papírlapra és beteszik egy kalapba, majd mindenki húz egy cédulát. Minden diák a kihúzott cédulán szereplő társa részére készít csomagot. Előfordulhat, hogy valaki a saját nevét húzza. Ezeket kedvezőtlen eseteknek tekintjük. Mekkora a valószínűsége, hogy $n = 20$ diák esetén senki nem húzza ki a saját nevét?

3.1.14.26. feladat.

Mekkora a valószínűsége, hogy egy szabályos érmét 10-szer feldobva pontosan 5 fej és 5 írás

értéket kapunk? $\left(\frac{\binom{10}{5}}{2^{10}} = \frac{1}{4} \right)$

3.1.14.27. feladat.

Egy francia kártya 52 lapja közül véletlenszerűen kihúzunk 13 lapot. Mekkora a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között 4 kőr (♥) és 3 treff (♣) van? Az 52 lap között 13 treff (♣), 13 káró

(♦), 13 kőr (♥) és 13 pikk (♠) van. $\left(\frac{\binom{13}{4} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{26}{6}}{\binom{52}{13}} \right)$

3.1.14.28. feladat.

A 000, 001, ..., 999 három jegyű számok között hány olyan szám van, amelyekben a számjegyek szigorúan monoton növekvő sorrendben vannak? Például a 028 szám számjegyei növekvő

sorrendben vannak, de a 244 számban nem. $\binom{10}{3}$

3.1.14.29. feladat.

Egy olyan új számítógép chipet tesztelnek, amelynek n lába van. Az összes olyan tesztet ki kell próbálni, amelyben k lábra magas feszültség értéket és $(n - k)$ lábra alacsony feszültség értéket kapcsolnak. Hányféle teszt mintát kell összesen kipróbálni? $\binom{n}{k}$

3.1.14.30. feladat.

Az ötös LOTTO játékban 90 sorszámozott golyó közül 5 golyót húznak ki visszatevés nélkül. Mekkora az esélye, hogy egy véletlenszerűen kitöltött szelvénnel

- (a) 5 találatunk lesz
- (b) 4 találatunk lesz
- (c) 3 találatunk lesz
- (d) 2 találatunk lesz
- (e) 1 vagy 0 találatunk lesz?

3.1.14.31. feladat.

A bridzs játékban az 52 kártya lapot egyformán osztják ki a 4 játékos között, azaz mindenki 13 lapot kap.

Az egy játékoshoz kerülő lapok sorrendje nem számít, csak az, hogy melyik 13 lap került hozzá.

Hány különböző kezdés alakulhat ki a bridzs játékban? $\left(\frac{52!}{(13!)^4} = \binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \right)$

3.1.14.32. feladat.

Egy négyzetrácsos papírlap 4 sorból és 4 oszlopból álló négyzetét bekeretezzük. Ebbe a 4x4-es táblázatba zéró "0" és "X" jeleket írunk, összesen 8 darab "0" jelet és 8 darab "X" jelet. A kitöltés sorrendjére nem vagyunk tekintettel az alábbi kérdéseknél. A számítások menetét indokolja!

- (a) Hány különböző mintázat jöhet létre?
- (b) Hány különböző olyan mintázat van, amelyben minden sorban pontosan 2 darab "0" jel van?
- (c) Hány különböző olyan mintázat van, amelyben nem kerül 2 szomszédos négyzetbe (melyek oldalakkal érintkeznek) ugyanolyan jel?
- (d) Hány különböző olyan mintázat van, amelyben minden "0" jelnek pontosan egy "0" szomszédja van és minden "X" jelnek pontosan egy "X" szomszédja?

3.1.14.33. feladat.

Egy négyzet alakú tábla oldalait felosztottuk 4 egyenlő részre és így kaptunk egy 4x4-es táblázatot. A 16 mező valamelyik 4 mezőjére 4 egyforma korongot helyezünk el, az elhelyezés sorrendje nem számít. A számítások menetét indokolja!

- (a) Hány különböző elhelyezése lehetséges a négy korongnak a 16 mezőn?
- (b) Hány különböző olyan elhelyezés van, melyben a 4 korong mindegyike valamelyik átlóban helyezkedik el?
- (c) Hány különböző olyan elhelyezés van, melyben a 4 korong egyike sincs az átlóban?
- (d) Hány különböző olyan elhelyezés van, melyben minden sorban és oszlopban csak egy korong szerepel?

3.1.14.34. feladat.

Egy részeg postás figyelmetlenül oszt szét öt levelet azok címzettjei között.

- (a) Hányféle különböző módon oszthatja szét az 5 levelet összesen?
- (b) Mennyi a valószínűsége, hogy mind az 5 címzett megkapja a saját levelét?
- (c) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 4 címzett kapja meg a saját levelét?
- (d) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 3 címzett kapja meg a saját levelét?
- (e) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 címzett kapja meg a saját levelét?

A számítások menetét indokolja!

3.1.14.35. feladat.

A sík egy 'a' egyenesén kijelölünk 11 pontot és az 'a' egyenessel párhuzamos másik 'b' egyenesen 10 pontot.

- (a) Hány különböző (nem elfajuló) háromszöget képezhetünk a megadott pontok segítségével, mint csúcspontokkal?
- (b) Hány különböző (nem elfajuló) négyszöget képezhetünk a megadott pontok segítségével,

mint csúcspontokkal?

(c) Hány olyan különböző cikk-cakk vonalat képezhetünk, amelyben kiindulunk az 'a' egyenes valamelyik pontjából és egyenest húzunk a 'b' egyenes egy tetszőleges pontjához. Ezt folytatva, a jelenlegi pontból vonalat húzunk a másik egyenes egy még szabadon hagyott pontjához. Az eljárást addig folytatjuk, amíg el nem fogynak a szabad pontok?

3.1.14.36. feladat.

Van 8 teljesen egyforma (méretre, színre, stb.) labdánk, amelyeket nem lehet egymástól megkülönböztetni. Van három dobozunk, amelyekre felírtuk az 1, 2 és 3 számokat. Hány különböző módon lehet a 8 egyforma labdát a 3 sorszámozott dobozba szétosztani úgy, hogy

(a) tetszőleges számú labda kerülhet bármelyik dobozba?

(b) egyik doboz sem maradhat üresen?

(c) egyik doboz sem maradhat üresen és a harmadik dobozba páratlan számú labdát kell pakolni?

3.1.14.37. feladat.

Hét zászlónk van, melyből kettő piros, kettő kék és három zöld színű. Az azonos színű zászlókat egymás között nem lehet megkülönböztetni. A 7 zászlót balról jobbra sorba rendezve jelzéseket szeretnénk leadni távolra. Hány különböző jelzést tudunk leadni a sorba rendezéssel, ha

(a) a sorrendben nincs semmilyen korlátozás?

(b) az azonos színű zászlóknak egymás mellett kell lenni?

(c) piros színű zászló után csak zöld színű zászló lehet?

(d) kék és piros nem lehet egymás mellett?

3.1.14.38. feladat.

Valakinek 10 barátja van, akik közül 6 fiú és 4 lány. Egy partira a 10 barát közül csak négyet tud meghívni. Hányféleképpen hívhatja meg a 4 barátját, ha

(a) nincs korlátozás, hogy a 10 közül kit hív meg?

(b) ha van két olyan barátja, akik nincsenek jó viszonyban, ezért őket együtt nem hívhatja meg?

(c) ha van két olyan barátja, akiket vagy együtt hív meg vagy egyiket se hívja meg?

(d) ha két lányt és két fiút szeretne meghívni?

3.1.14.39. feladat.

Tekintsünk egy hét számjegyből álló telefonrendszert. Mindegyik számjegy 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 lehet. Egy közvélemény kutatáshoz, kiválasztunk véletlenszerűen egy telefonszámot!

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy olyan telefonszámot választunk ki, amelyben nincs két azonos szám?

(b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a telefonszámok növekvő sorrendben lesznek?

(c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számhoz tartozik előfizető, ha összesen 10000 olyan telefonszám van, amelyet még nem használnak?

3.1.14.40. feladat.

Egy egyetem a meghirdetett kurzusokat alapszintű és felsőbb szintű kategóriákba sorolja. Az egyetem egy szakán 8 alapszintű (A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8) kurzust és 10 felsőbb szintű (F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9, F10) kurzust tud ajánlani a hallgatók számára. Egy hallgató által kiválasztott egyéni tanrend akkor érvényes, ha 4 alapszintű és 3 felsőbb szintű kurzust tartalmaz.

(a) A hallgatók hányféleképpen állíthatnak össze maguknak különböző érvényes tanrendet

(b) Tudjuk, hogy az F1, F2, F3, F4 és F5 felsőbb szintű kurzusok előfeltétele az A1 alapszintű kurzus. Vagyis, ha valaki az F1, F2, F3, F4, F5 felsőbb kurzus valamelyikét választja, akkor szükségképpen választania kell az A1 alapkurzust is!

Hányféleképpen lehet összeállítani érvényes tanrendet, melyből az A1 kurzust kihagyjuk?

(c) Hányféleképpen lehet összeállítani érvényes tanrendet, melyben az A1 kurzust kiválasztjuk?

(d) Hányféleképpen lehet összeállítani érvényes tanrendet úgy, ha az F1, F2, F3, F4, F5 felsőbb kurzus közül pontosan egyet választunk?

3.1.14.41. feladat.

Egy táncos rendezvényen 4 fiú és 4 lány jött össze.

- (a) A 8 résztvevő hányféleképpen sorakozhat fel egymás mellé egy sorban?
- (b) Hányféle olyan sorrend alakulhat ki, melyben a lányok egymás mellett vannak?
- (c) Hányféle olyan sorrend alakulhat ki, melyben váltakozva állnak a lányok és fiúk, azaz minden fiú után egy lány áll és fordítva?
- (d) A táncoláshoz hány különböző 4 párt (fiú – lány) alkothatnak?

3.1.14.42. feladat

Egy vállalat 20 számítógépe között szeretne hálózati kapcsolatot kiépíteni. A számítógépek két épületben vannak elhelyezve. Az épületek mindegyikében 10 - 10 gép van.

(a) Hány különböző összekötést kell létrehozni ahhoz, hogy mindegyik gép össze legyen kötve mindegyik másikkal?

(b) Hány különböző összekötést kell létrehozni akkor, ha az egyik épületben levő mindegyik gépet össze szeretnék kötni a másik épületben levő mindegyik géppel? Tehát az egy épületen belül levőket nem kötik össze!

(b_1) Mekkora a valószínűsége ekkor, hogy 2 véletlenszerűen kiválasztott gép között van összeköttetés?

(b_2) Mekkora a valószínűsége ekkor, hogy 3 véletlenszerűen kiválasztott gép mindegyike között van összeköttetés?

(c) Hány különböző összekötést kell létrehozni akkor, ha a két épület között nem hoznak létre összeköttetést csak az épületeken belül levő gépek mindegyikét, kötik össze mindegyikkel!

(c_1) Mekkora a valószínűsége ekkor, hogy 2 véletlenszerűen kiválasztott gép között van összeköttetés?

(c_2) Mekkora a valószínűsége ekkor, hogy 3 véletlenszerűen kiválasztott gép mindegyike között van összeköttetés?

3.1.14.43. feladat

Három barát megbeszéli, hogy a 15 tételt tartalmazó vizsgára úgy készülnek fel közösen, hogy mindenki kidolgoz 5-5 különböző tételt írásban. Amikor készen vannak a 3-szor 5 kidolgozással, akkor egymás között kicserélik. Ilyen módon mind a 15 tételt együttes erővel kidolgozták és minden tételt csak egy valaki dolgozott ki. A vizsgán a tanár a 15 tétel közül véletlenszerűen kiválaszt 3 tételt és minden diák ezt a 3 tételt kapja.

(a) Hányféleképpen választhatja ki a tanár a 15 tétel közül a vizsgán kitűzött 3 tételt?

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy mindenki kap a saját kidolgozott tételei közül pontosan egyet a vizsgán? c) Mekkora a valószínűsége, hogy mindhárom tétel a vizsgán egyetlen diák (mindegy, hogy ki) által kidolgozott 5 közül való?

3.1.14.44. feladat

Egy angol nyelvtanár a fordítási gyakorlat vizsgához kijelölt 8 oldalnyi szöveget otthoni feldolgozásra, melyből a vizsgán véletlenszerűen kiválaszt 3 oldalt. Ebből a három oldalból kell minden diáknak 1 oldalt tetszőlegesen kiválasztania a vizsgán, amelyet lefordít.

(a) Mennyi oldalt kell egy diáknak minimális feldolgoznia otthon, hogy biztosan legyen olyan oldal a vizsgán, amelyet már lefordított?

(b) István elhatározta, hogy csak 5 oldalt tanulmányoz át a nyolcból. Mekkora a valószínűsége annak, hogy ezen 5 oldal valamelyike szerepel a vizsgán a tanár által kiválasztott 3 oldal között?

(c) Mennyi legyen az a legkevesebb oldalszám, amelyet Istvánnak otthon át kell tanulmányoznia, hogy $\frac{3}{4}$ -nél nagyobb legyen annak valószínűsége, hogy a kijelölt 3 oldalban szerepel legalább egy általa előzetesen lefordított oldal?

3.1.14.45. feladat

Tekintsük a 4 bitből álló kódszavak halmazát! Például egy lehetséges kódszó: '0110'

(a) Hány különböző kódszó készíthető?

(b) Hány olyan kódszó van, amelyek ugyanannyi 1-et tartalmaznak, mint ahány 0-át?

(c) Hány olyan kódszó van, amelyeket balról jobbra olvasva ugyanazt kapjuk, mint amikor jobbról balra olvassuk?

3.1.14.46. feladat.

Tekintsük az 5 bitből álló kódszavak halmazát! Például egy lehetséges kódszó: '01101'

- (a) Hány különböző kódszó készíthető?
- (b) Hány olyan kódszó van, amelyben eggyel több 1 szerepel, mint ahány 0?
- (c) Hány szimmetrikus kódszó van? Vagyis adjuk meg az olyan kódszavak számát, amelyben a középső harmadik bitre nézve szimmetrikusan ugyanazok a bitek szerepelnek jobbra és balra? (Például a '01010' kódszó szimmetrikus.)

3.1.14.47. feladat.

Hányféleképpen lehet $n = 2 \cdot m$ tenisz játékost párosítani és az m darab tenispályához hozzárendelni az első forduló megrendezéséhez?

3.1.14.48. feladat

Egy szabályos játékkockával hatszor dobunk.

- (a) Mekkora a valószínűsége, hogy olyan dobássorozatot kapunk, amelyben nincs két azonos szám?
- (b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a hat dobásból kettő hatost kapunk?
- (c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a hat dobásból 3 páros és 3 páratlan lesz?

