

▼ 4. Feltételes valószínűség és a szorzás-szabály alkalmazásai. A döntés fa.

Valószínűségszámítás és statisztika számítógép algebrai támogatással	Készült a PTE PMMIK és a TÁMOP -4.1.2.A/1-11/1-2011-0098 támogatásával
Klincsik Mihály	

▼ 4.1.Bevezetés

A logikai műveletek és az esemény algebrai műveletek között szoros megfeleltetés van. A logikai tagadás, az "és" illetve "vagy" műveleteknek az esemény komplementere, események együttes bekövetkezése és az események uniója műveletek felelnek meg. Mi a helyzet a logikai implikáció vagy ha, ...akkor típusú művelettel? Mi ennek az esemény algebrai megfelelője? A válasz a feltételes valószínűség. Ha az A és B események közül mondjuk a B hamarabb bekövetkezik mint A, akkor megkérdezhetjük, hogy B ismeretében mennyi lesz az A esemény valószínűsége.

Ha egy B esemény már bekövetkezett, akkor ez hatással lehet az A esemény valószínűségére. Következtetni szeretnénk az A esemény valószínűségére, annak egy rész információja alapján. Nevezetesen ismerjük A azon részét, amely már nem következhet be. Ennek a kapcsolatnak a leírására szolgál a feltételes valószínűség. Az **A esemény B eseményre vonatkozó feltételes**

valószínűségét a $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ hányadossal definiáljuk. Mivel B már bekövetkezett, ezért

az eseménytér leszűkül a B eseményre és a B mértékéhez kell viszonyítani az A esemény B-beli részének mértékét. Sok esetben a feltételes valószínűség megadása természetes és a szorzat esemény valószínűségét kell kiszámolni a $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ szorzás-szabály segítségével.

A feltételes valószínűség és a szorzás-szabály megjelenik a **döntési vagy valószínűségi fa** diagramon. Az első döntési fázis éleihez a döntés valószínűségeit rendeljük, a második döntési fázis éleihez feltételes valószínűségeket rendelünk. A fa gráf levelei mellett külön felvesszük a szorzat eseményeket és az ezekhez tartozó valószínűségeket. Ezeket a szorzás-szabály alapján a fák éleihez rendelt valószínűségek szorzatával számoljuk.

A fa diagram mellett a másik fontos eszköz a valószínűségi adatok reprezentálására a **táblázat**. Mindíg használjuk együtt a fa diagramot és a táblázatot, hogy a megfelelő következtetéseket le tudjuk vonni.

Célunk az alábbi fogalmak, összefüggések és eljárások megismerése, megértése	
Feltételes valószínűség definíciója	Együttes valószínűségek táblázatának készítése. Feltételes valószínűségek számítása táblázatból.
A valószínűségek szorzás-szabálya	Maple <i>GraphTheory</i> csomag <i>Graph</i> , <i>DrawGraph</i> eljárásai
Döntési fa diagramok készítése: döntési fázisok, valószínűségi súlyok, szorzat események valószínűségeinek számítása döntési fa alapján	

▼ 4.2. Feltételes valószínűség fogalmának előkészítése

Tekintsünk kettő bevezető példát a feltételes valószínűség fogalmának megvilágításához.

4.2.1. PÉLDA. Két kocka dobás

Egy dobókockával kétszer dobunk egymás után. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott pontszámok összege nagyobb, mint 8

$$A = \{ \text{a két dobás pontjainak összege} > 8 \}.$$

B esemény jelentse azt, hogy első dobásra ötöst dobtunk

$$B = \{ \text{a két dobásból az első dobás eredménye 5} \}.$$

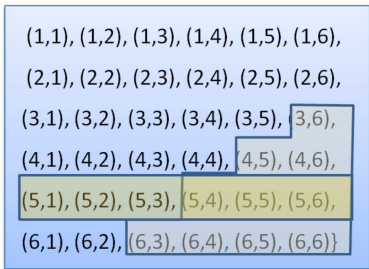
B esemény megelőzi az A esemény bekövetkezését!

(i) Számítsuk ki a $P(A|B)$ feltételes valószínűséget, vagyis mekkora annak valószínűsége, hogy a két dobás pontjainak összege nagyobb lesz 8-nál feltéve, hogy tudjuk az első dobás eredményét, amely 5 lett.

(ii) Szemléltessük a táblázattal és fa diagrammal az eseménytér elemeinek szétosztását A és B halmazokra!

Megoldás

Az Ω eseménytér elemeit az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz önmagával képezett Descartes-szorzata adja meg, vagyis az összes rendezett párok halmaza!

Két kocka dobás eseménytére	Az A és B halmazok az eseménytérben
> $\text{convert}(\text{Matrix}(6, 6, (i, j) \rightarrow [i, j]), \text{set})$ (1.2.1) $\{ [1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [3, 4], [3, 5], [3, 6], [4, 1], [4, 2], [4, 3], [4, 4], [4, 5], [4, 6], [5, 1], [5, 2], [5, 3], [5, 4], [5, 5], [5, 6], [6, 1], [6, 2], [6, 3], [6, 4], [6, 5], [6, 6] \}$ $A = \{ \text{a két dobás pontjainak összege} > 8 \} = \{ (3,6), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$ Az A eseményt 10 elemi esemény alkotja, azaz $A = 10$, ezért $P(A) = \frac{ A }{ \Omega } = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} = 0.2777$	$\Omega =$ 

Ha az első dobásról tudjuk, hogy 5 lett, akkor a két dobás együtt már csak az alábbi 6 elemi eseményből állhat

$$B = \{ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \}.$$

Ezek közül az elemi események közül ki kell választani azokat, amelyekre a számok összege > 8 . Ezek az $A \cdot B = \{ (5,4), (5,5), (5,6) \}$ lehetőségek. Mivel a B esemény 6 elemi eseményből csak 3 jöhet szóba, ezért a feltételes valószínűség

$$P(A|B) = \frac{|A \cdot B|}{|B|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Számítsuk ki az $A \cdot B$ és a B események valószínűségeit is

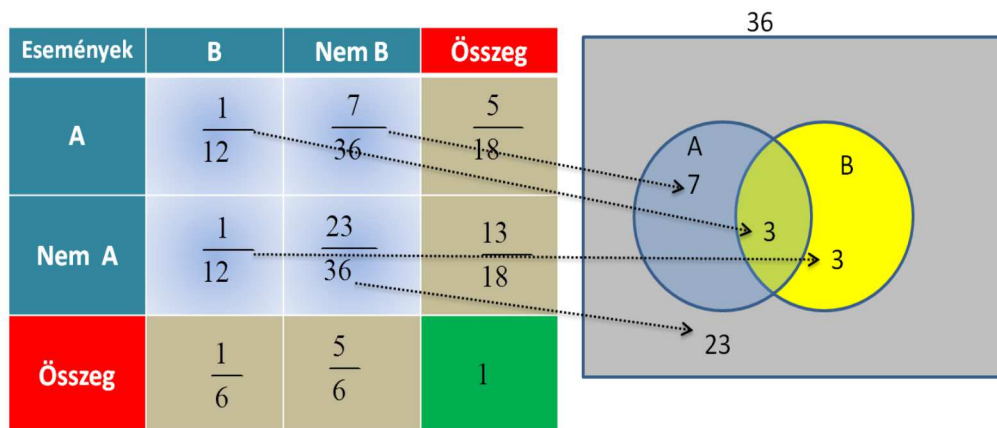
$$P(A \cdot B) = \frac{|A \cdot B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \text{ és } P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

A feltételes valószínűséget kiszámíthatjuk a fenti két valószínűség hányadosaként

$$P(A|B)$$

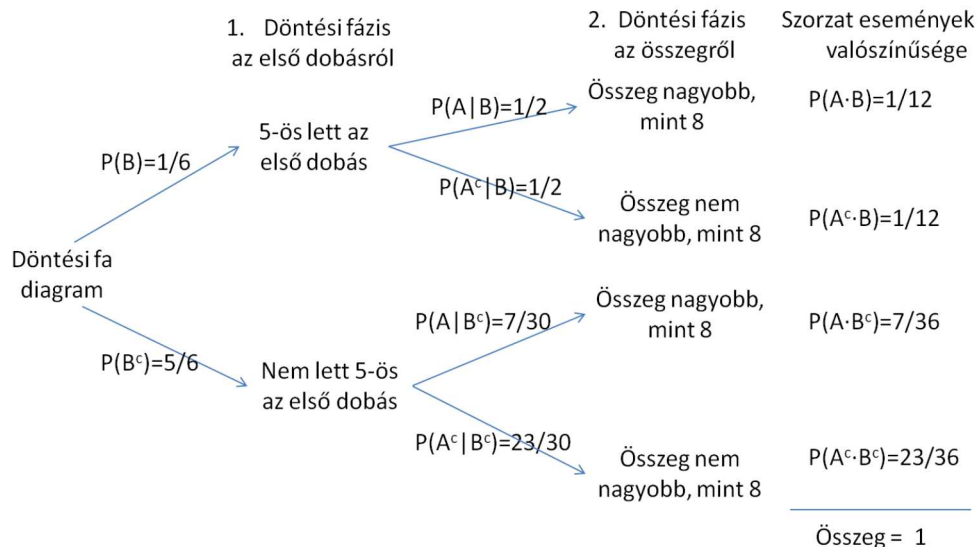
$$= \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Az A és B események, valamint tagadásaik együttes bekövetkezéseinek valószínűségei



Események táblázatának kapcsolata a Venn-diagrammal

A táblázat az $A \cdot B$, $\overline{A} \cdot B$, $A \cdot \overline{B}$, $\overline{A} \cdot \overline{B}$ szorzat események valószínűségeit tartalmazza, valamint a sorok és oszlopok összegeit. Az alábbi kétszintű döntési fa diagram is ugyanazokat a szorzat események valószínűségeit mutatja és mellette a feltételes valószínűségeket is.



Az első döntés arról szól, hogy vajon 5 számot kaptunk-e az első dobásnál. A második döntés a két dobás összege alapján történik, hogy az összeg nagyobb lett-e 8-nál vagy sem. Első szinten a fa éleihez a döntés valószínűségeit írjuk. A második döntési szinthez tartozó valószínűségek feltételes valószínűségek. A feltételben azok az események szerepelnek ahonnan jöttünk a fa

diagramon a második szinthez.

A táblázatból a feltételes valószínűségeket osztással kapjuk. Így további feltételes valószínűségek a táblázatra alapozva a következő lesznek

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cdot \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{5}{6}} = \frac{7}{30}$$

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cdot \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{23}{36}}{\frac{5}{6}} = \frac{23}{30}.$$

Tehát a táblázat egy belső cella értékét leosztjuk a sor vagy oszlop végén levő összeggel, egy feltételes valószínűséget ad. ♣

4.2.2. PÉLDA. Monty Hall probléma.

A játék leírása.

Show műsor keretében egy játékosnak felajánlják, hogy nyerhet egy új autót, ha szerencséje van és jól dönt. A játékszabályok a következők:

1. lépés. Három zárt ajtó van a színpadon. Kettő ajtó mögött egy-egy kecskét helyeztek el és a harmadik ajtó mögött található az új autó. Az elhelyezések véletlenszerűek, de a műsorvezető tudja, hogy melyik mögött milyen nyeremény található.
2. lépés. A játékos rámutat a három ajtó közül az egyikre.
3. lépés. A játékos által ki nem választott 2 ajtó közül a játékvezető kinyitja azt az ajtót, amelyik mögött kecske van. Ha mindkettő ilyen, akkor szabadon dönt.
4. lépés. A megmaradt 2 ajtó egyike biztosan az autót rejt. A játékos eldönti, hogy marad-e az eredeti döntésénél vagy megváltoztatja azt.
5. lépés. A játékvezető megmutatja a nyereményt a kiválasztott ajtó mögött, majd ellenőrzésképpen a harmadik ajtót is kinyitja.

Megjegyzés. Az Interneten a <http://www.stayorswitch.com> címen játszani is lehet a játékot.

1. STRATÉGIA

Ha nem változtatunk az első döntésünkön, akkor átlagosan 1/3 esetben fogunk nyerni.

2. STRATÉGIA

Ha változtatunk az első döntésünkön, akkor átlagosan 2/3 esetben fogunk nyerni.

A stratégiák jelentőségét a játék során az alábbi egyszerű táblázat magyarázza. Nézzük meg mi történik, ha az első ajtó kinyitásakor tudjuk, hogy mögötte mi található.

1. Ajtó nyitás	Nem változtatunk	Változtatunk
Autó	Nyerés	Vesztés
Kecske	Vesztés	Nyerés
Kecske	Vesztés	Nyerés

Mivel kétszer annyi kecske van, mint autó, ezért amikor első kiválasztáskor kecskére mutatunk, majd megváltoztatjuk döntésünk, akkor nyerünk. És ez kétszer olyan gyakran következik be, mint a veszítés, amely akkor következik be, ha az autót tartalmazó ajtóra mutatunk, majd változtatunk döntésünkön.

KÖVETKEZTETÉS

Érdemes minden esetben megváltoztatni eredeti döntésünket a második döntési helyzetben, mert ekkor kétszer nagyobb eséllyel nyerünk.

4.2.2.1. Készítsünk szimulációs programot a Monty Hall probléma esélyeinek bemutatására

Első lépésként egyenletes eloszlásban generáljuk az **autó helyzetét** meghatározó 1, 2 vagy 3 ajtó sorszámokat. Az autót a megfelelő sorszámú ajtó mögé képzeljük. Készítünk egy 100 elemű autó vektort!

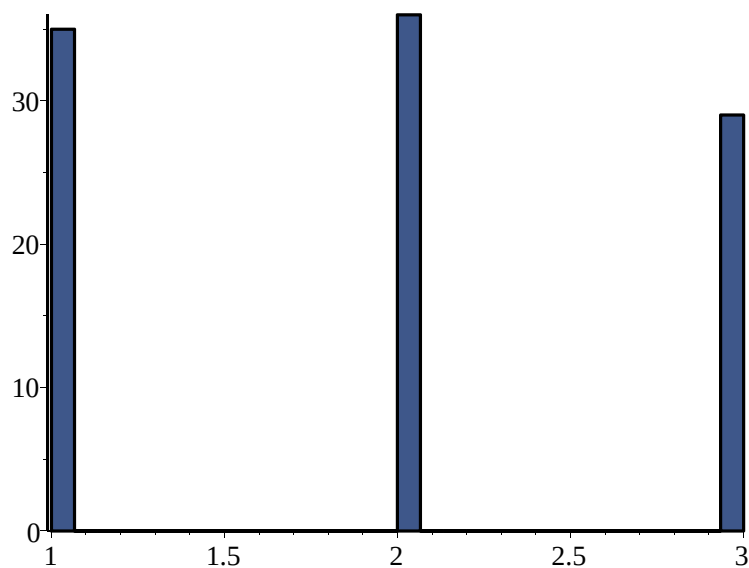
```
> restart :  
> randomize( ) :  
> with(Statistics) :  
> X := DiscreteUniform(1, 3)  
X := DiscreteUniform(1, 3) (1.2.2)
```

```
> N := 100  
N := 100 (1.2.3)
```

```
> auto := map(round, Sample(X, N))  
auto :=  $\left[ \begin{array}{l} 1 \dots 100 \text{ Vector}_{row} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran\_order} \end{array} \right]$  (1.2.4)
```

A hisztogram felrajzolásával az autó helyének egyenletes kiválasztását tudjuk ellenőrizni.

```
> Histogram(auto, frequencyscale = absolute)
```



Most jön a játékos első döntése. Az ajtó sorszámának választására generálunk ismét 100 véletlen számot az 1,2 és 3 közül függetlenül az autó pozíciójától.

```
> valasztas := map(round, Sample(X, N))
```

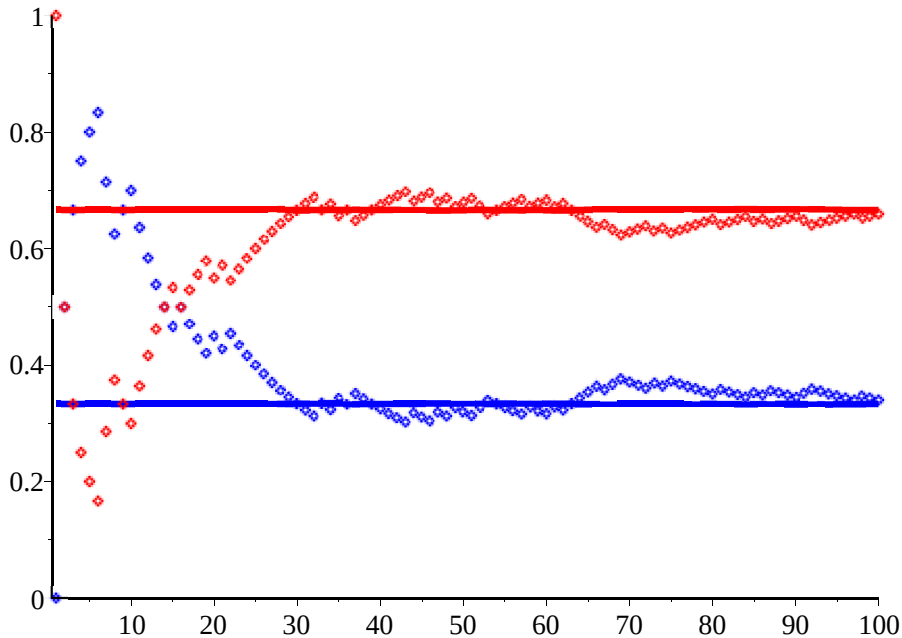

$$rgy2 := rgy2, \left[k, \frac{gyak2}{k} \right]:$$

od:

$$rgy2 := [rgy2]:$$

Rajzoljuk fel kék színnel az 1. stratégiához tartozó nyerések relatív gyakoriságait, és piros színnel a második stratégiához tartozókat!

```
> plot([rgy1, 1/3, rgy2, 2/3], 1..N, 0..1, style = [point, line, point, line], color = [blue, blue, red, red], thickness = 3)
```



Látható, hogy a változtatás stratégiája mellett $\frac{2}{3}$ a nyerés esélye, míg a helyben maradás esetén csak $\frac{1}{3}$ a nyerés esélye.

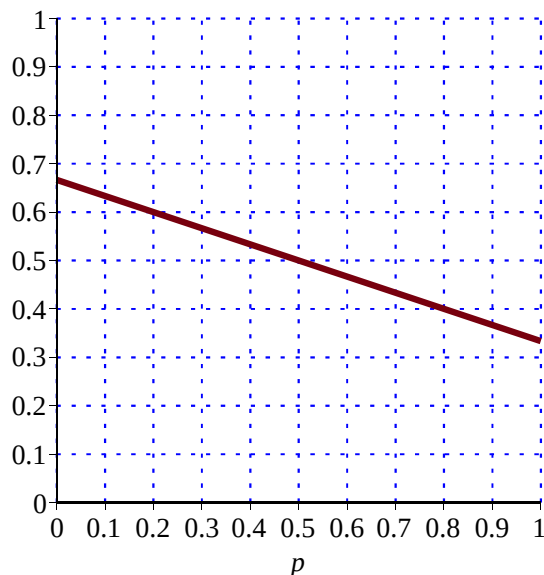
Kevert stratégia esetén az $\frac{1}{3}$ és a $\frac{2}{3}$ valószínűség között tetszőleges értéket elérhetünk. Ez alatt azt értjük, hogy a játékos minden játék során dönt arról, hogy megváltoztatja-e eredeti döntését vagy nem.

```
> kevert := 1/3 * p + 2/3 * (1 - p)
```

```
> plot(kevert, p = 0..1, 0..1, thickness = 3, scaling = constrained, axis = [gridlines = [10, linestyle = 2, subticks = false, color = blue]], title = Kevert stratégia)
```

$$kevert := -\frac{1}{3} p + \frac{2}{3}$$

Kevert stratégia



Az ábra azt mutatja, hogy ha a játékos $0 < p < 1$ valószínűséggel játsza a helyben maradást és $(1 - p)$ – vel a változtatás stratégiáját, akkor tetszőleges valószínűség kijöhet a nyerésre $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]$ intervallumban.

4.2.2.2. A Monty Hall probléma eredményeinek levezetése

A levezetés konkrétsága érdekében és az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

- (i) a játékos kinyitotta 1. számú ajtót és
- (ii) a műsorvezető kinyitotta a 2. számú ajtót, ahol kecske van.

Legyenek A_1, A_2, A_3 és B az alábbi események:

$$A_k = \{ \text{az autó a } k - \text{ik ajtó mögött van} \}, \text{ ahol } k = 1, 2, 3 \text{ és}$$

$$B = \{ \text{a műsorvezető kinyitotta a 2. ajtót} \}.$$

Mielőtt a műsorvezető kinyitja volna a 2. ajtót az autó bármelyik ajtó mögött ugyanolyan eséllyel lehetett

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$

1. lépés. Számoljuk ki a $P(B|A_1)$ feltételes valószínűséget!

Ha az autó az 1. ajtó mögött van és a játékos az 1. ajtóra mutat, akkor a játékvezető szabadon választhat a 2. és 3. ajtók közül, mert mindkettő mögött kecske van. Ezért $P(B|A_1) = \frac{1}{2}$

2. lépés. Számoljuk ki a $P(B|A_1^c)$ feltételes valószínűséget!

Ha az autó nincs az 1. ajtó mögött, akkor egyforma eséllyel lehet a 2. vagy 3. ajtó mögött. Ezért a játékvezető $\frac{1}{2}$ valószínűséggel mutat majd a 2. ajtóra. Tehát $P(B|A_1^c) = \frac{1}{2}$.

3. lépés. Számoljuk a $P(B)$ valószínűséget!

A teljes valószínűség-tétel alapján

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_1^c) \cdot P(A_1^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

4. lépés. Számoljuk a $P(A_1|B)$ feltételes valószínűséget!

A Bayes-tétel alapján annak feltételes valószínűsége, hogy az autó az 1. ajtó mögött van

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Vagyis, ha a játékos **kitart** az eredeti döntése mellett, akkor $\frac{1}{3}$ eséllyel nyer.

Az autó nem lehet a 2. ajtó mögött, mert azt nyitotta ki a játékvezető. Ahhoz, hogy a $P(A_3|B)$ valószínűséget kiszámoljuk, ehhez előbb a $P(B|A_3)$ valószínűséget kell számolni.

5. lépés. Számoljuk a $P(B|A_3)$ feltételes valószínűséget!

Ha az autó nincs a 3. ajtó mögött, akkor a játékvezető 1 valószínűséggel mutat a 2. ajtóra, hiszen az autót nem mutathatja meg és a játékos az 1. ajtóra mutatott, ezért arra sem mutathat. Tehát $P(B|A_3) = 1$.

6. lépés. Számoljuk a $P(A_3|B)$ feltételes valószínűséget!

A Bayes-tétel alapján annak feltételes valószínűsége, hogy az autó a 3. ajtó mögött van

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3) \cdot P(A_3)}{P(B)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Vagyis, ha a játékos **megváltoztatja** az eredeti döntését, akkor $\frac{2}{3}$ eséllyel nyer.

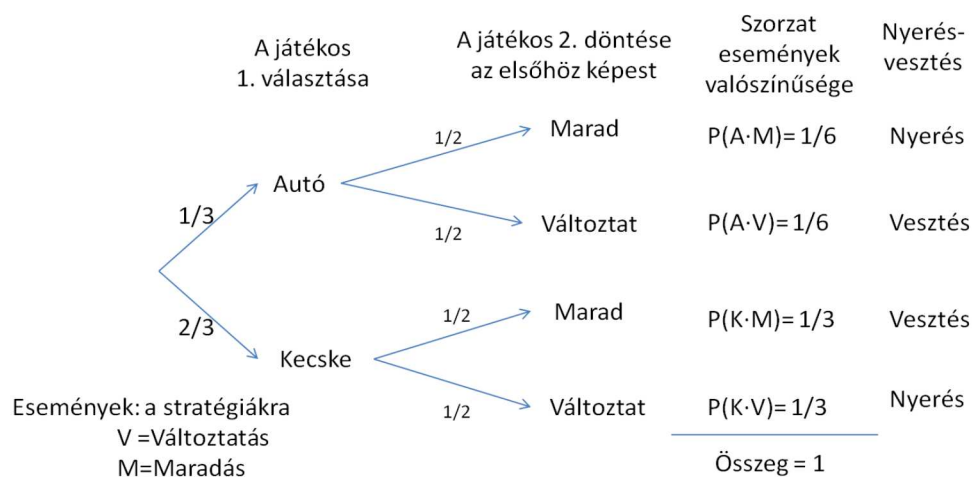
Összegzés

Tehát, ha a játékos **kitart az eredeti döntése mellett**, azaz másodszorra is ugyanazt az ajtót választja, mint először, akkor a nyerési esélye $\frac{1}{3}$.

Ha viszont a játékos **megváltoztatja az eredeti döntését**, azaz másodszorra azt az ajtót választja, amelyet elsőre nem jelölt meg, akkor a nyerési esélye $\frac{2}{3}$.

Tehát érdemes mindig **megváltoztatni eredeti döntésünket**, mert így dupla akkora a nyerési

4.2.2.3. A Monty Hall probléma döntési fa diagramja



A fa gráf első döntési szintjén a játékos első választása van, hogy az autót tartalmazó ajtót választotta vagy a kecskét tartalmazó ajtót. A második döntési szinten a játékos második választása van, amely lehet változtatás vagy maradás. Ezek alapján a szorzat események valószínűségei számolhatók, amelyekre eldönthető egyértelműen a nyerés vagy vesztes eseménye. Ezeket írtuk a fa diagram utáni oszlopba és a megfelelő sorba. Hasonlóan, mint a 4.2.1. példa esetében tettük a Monty Hall probléma valószínűség táblázatát rajzoljuk fel.

4.2.2.4. Monty Hall játék együttes eseményeinek táblázata

Stratégiák	Nyerés	Vesztés	Összeg
Változtatás	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
Maradás	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Összeg	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$P(\text{nyerés}|\text{változtatás}) = \frac{P(\text{nyerés} \cdot \text{változtatás})}{P(\text{változtatás})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{nyerés}|\text{maradás}) = \frac{P(\text{nyerés} \cdot \text{maradás})}{P(\text{maradás})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Tehát a döntési fa diagram és a táblázat alapján is igazoltuk sejtésünket!

▼ 4.3. Feltételes valószínűség definíciója és tételek

4.3.1. DEFINÍCIÓ. Feltételes valószínűség

Az A esemény B eseményre vonatkozó feltételes valószínűségén a

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

hányadost értjük, ha $P(B) > 0$.

A $P(A|B)$ valószínűség kiejtése: az A esemény valószínűsége a B feltételre vonatkozóan vagy ezzel egyenértékűen az A esemény feltételes valószínűsége a B eseményre.

Valójában a feltételes valószínűség egy újabb mérték, amelyet a régi $P: S \rightarrow [0, 1]$ valószínűséggel definiálunk. Ezért a P betűvel jelölés összemosza az eredeti mértéket és az új mértéket. Valójában a korrektebb jelölés $P_B(A) = P(A|B)$ lenne. Fogadjuk el a 4.3.1. pontban használt jelölést, tudva azt, hogy ez egy új valószínűségi mező új valószínűség mértékkel. A most definiált valószínűségről megmutatjuk, hogy eleget tesz a valószínűség axiómáinak.

4.3.2. ÁLLÍTÁS. A feltételes valószínűség 0 és 1 közé esik.

Tetszőleges A és B eseményekre

$$0 \leq P(A|B) \leq 1$$

teljesül.

Bizonyítás

Az $A \cap B \subseteq B$ tartalmazás és a valószínűség monotonitása miatt $P(A \cdot B) \leq P(B)$. Ahonnan

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \leq 1. \quad Q.e.d.$$

4.3.3. ÁLLÍTÁS. Az eseménytér feltételes valószínűsége 1.

Tetszőleges B eseményre

$$P(\Omega|B) = 1$$

teljesül, ahol Ω az eseménytér.

Bizonyítás

Mivel $B \cdot \Omega = \Omega$, ezért $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1. \quad Q.e.d.$

4.3.4. ÁLLÍTÁS. Egymást kizáró események összegének feltételes valószínűsége tagonként számolható.

Ha A_1 és A_2 egymást kizáró események, akkor a

$$P(A_1 + A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

additivitás teljesül.

Bizonyítás

A halmazok disztributív műveleti tulajdonsága alapján $(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$, továbbá az $A_1 \cdot B$ és $A_2 \cdot B$ tagok egymást kizáró események, mert A_1 és A_2 is az volt. Ezért az összeg (eredeti) valószínűségét tagonként vehetjük

$$P((A_1 + A_2) \cdot B) = P(A_1 \cdot B) + P(A_2 \cdot B).$$

Ezek alapján

$$P(A_1 + A_2|B) = \frac{P((A_1 + A_2) \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cdot B) + P(A_2 \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cdot B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cdot B)}{P(B)} =$$

$$P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

Q.e.d.

A feltételes valószínűség számításához szükséges a szorzat esemény valószínűsége és a feltételi esemény valószínűsége. A feladatok szövege alapján a feltételes valószínűség kiszámítása a definícióra épülten nehézkes. Jellemző eset az, hogy a szorzat esemény valószínűségét számoljuk a feltételes valószínűséggel, mert a feltételes valószínűség számítása egyszerű. Ezt az utat követjük majd a 4.4. pontban.

4.3.5. PÉLDA. Feltételes valószínűség számítása definíció alapján

Statisztikai adatokból tudjuk, hogy annak valószínűsége, hogy Pécsen esik az eső június 15-én 0.33 és annak valószínűsége, hogy június 15-én és 16-án is esik 0.2 .

Ha tudjuk, hogy június 15-én esik, akkor mekkora a valószínűsége, hogy 16 -án is esni fog az eső.

Megoldás

A feladatban szereplő két esemény

$A = \{ \text{az eső esik Pécsen június 16-án} \}$ és $B = \{ \text{az eső esik Pécsen június 15-én} \}$.

A feladat szövege szerint $P(B) = 0.33$ és a szorzat valószínűsége $P(A \cdot B) = 0.2$.

Meg kell határozni a $P(A|B)$ feltételes valószínűséget, amely definíció szerint

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.33} \approx 0.6061. \quad \clubsuit$$

Statisztikai adatokból kibányászhatjuk a számításhoz szükséges $P(A \cdot B)$ és $P(B)$ valószínűségeket, de ezek az esetek nem gyakoriak.

▼ 4.4. A valószínűségek szorzási-szabálya

Sok – a gyakorlatban is felmerülő - probléma esetén a feltételes valószínűség adott és ebből a szorzat esemény valószínűségét kell kiszámítani. A feltételes valószínűség definíciójában szereplő

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

egyenlőséget szorozzuk meg $P(B)$ nevezővel! Ekkor kapjuk a szorzás-tételnek nevezett összefüggést

$$P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Az állítás általánosítható két tényezőről tetszőleges számú tényezőre.

4.4.1. TÉTEL. Szorzás-szabály

Tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n$ események szorzatára teljesül az alábbi azonosság

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1|A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) \cdot P(A_2|A_3 \cdot \dots \cdot A_n) \cdot \dots \cdot P(A_{n-1}|A_n) \cdot P(A_n).$$

Bizonyítás

Az egyenlőség $n=2$ esete a definícióból következik. Tekintsük az $n=3$ esetet!

A szorzás művelet asszociatív, ezért zárójelezéssel képezzünk két tényezőt. Majd a két tényező szorzatra alkalmazzuk a szorzás- szabályt $n=2$ esetét

$$P(A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)) = P(A_1|A_2 \cdot A_3) \cdot P(A_2 \cdot A_3) = P(A_1|A_2 \cdot A_3) \cdot P(A_2|A_3) \cdot P(A_3).$$

Ezzel igazoltuk a tétel állítását $n=3$ esetre.

Tetszőleges n pozitív egészre az állítást teljes indukcióval bizonyíthatjuk be a fentiekhez hasonló módon.

Q.e.d.

Nézzünk egy egyszerű példát a szorzás- tétel alkalmazására.

4.4.2. PÉLDA. Szorzás-tétel alkalmazása mintavételezés valószínűségeinek számítására

Egy doboz 10 csavart tartalmaz, amelyből 3 hibás. Kettő csavart húzunk ki egymás után véletlenszerűen. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a két csavarból egyik sem hibás?

Megoldás

Nem mondtuk meg a példa megfogalmazásánál, hogy visszatevés nélkül vagy visszatevéssel vesszük-e ki a csavarokat. Oldjuk meg mindkét esetet és hasonlítsuk össze az eredményeket!

(a) eset. Kihúzás visszatevés nélkül

Első húzáskor 10 csavar között 7 jó csavar van, amelyek közül kell 1 jó csavart kivenni. Ezért az $A_1 = \{\text{elsőre jó csavar húzás}\}$ esemény valószínűsége

$$P(A_1) = \frac{7}{10}.$$

Mivel a kivett csavart nem tesszük vissza, ezért a második húzás előtt már csak 9 csavar van a dobozban. Ha feltesszük, hogy az elsőre kihúzott csavar jó, akkor a dobozban 6 jó csavar maradt. Ezért az $A_2 = \{\text{másodikkra jót húzunk}\}$ esemény valószínűsége az A_1 esemény feltételezése mellett megadható

$$P(A_2|A_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Megjegyezzük, hogy az A_2 esemény valószínűségét nem tudtuk volna megmondani, ha nem teszünk fel semmit. Hiszen nem tudjuk pontosan, hogy első húzásnál mi történt.

A szorzás-tétel alapján a szorzat eseményre kapjuk a

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{15} \approx 0.466$$

valószínűséget kapjuk. Látható, hogy a feladat megoldása során nélkülözhetetlen fogalom volt a feltételes valószínűség, amelyet természetes módon lehetett számolni!

(b) eset. Kihúzás visszatevéssel

Mivel 10 csavarból 7 jó és 3 jó csavart kell kivenni, ezért első húzásra az $A_1 = \{\text{jó csavar húzás}\}$ esemény valószínűsége nem változik

$$P(A_1) = \frac{7}{10}.$$

Mivel a kivett csavart visszatettük, ezért a második húzásnál is 10 csavarból kell kivenni egyet és a dobozban 7 jó csavar van, függetlenül attól, hogy mi történt előtte. Ezért

$$P(A_2|A_1) = \frac{7}{10} = P(A_2).$$

A jobb oldalon szereplő $P(A_2)$ azt jelzi, hogy értéke független attól, hogy előtte az A_1 bekövetkezett-e vagy nem. Ugyanis a kivett csavart visszatesszük.

A szorzás-tétel alapján

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1) = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = 0.49.$$

Tehát két jó csavar húzásának valószínűsége nagyobb, ha a kivett csavart visszatesszük. ♣
Nézzük egy kissé bonyolultabb esetet, amikor nem tesszük vissza a kivett tárgyakat.

4.4.3. PÉLDA. Mintavétel visszatevés nélkül

Egy dobozban N darab alkatrész van, amelyből S selejtes. Négy alkatrészt veszünk ki véletlenszerűen visszatevés nélkül. Mekkora a valószínűsége annak, hogy elsőre jót, másodikkra és harmadikkra selejtet és negyedikkre jót húzunk ki?

Megoldás

Definiáljuk a kérdéssel kapcsolatos alábbi négy eseményt

$$A_k = \{a \text{ k} - \text{adik húzásra kivett alkatrész hibátlan}\}$$

ahol $k = 1, 2, 3, 4$ lehet.

A feladat a $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4)$ szorzat esemény valószínűségét kérdezi!

A szorzatban a második és harmadik tényező tagadás eseménye szerepel, jelezve azt, hogy második és harmadik kihúzásra selejtet szeretnénk kihúzni!

Az első húzás előtt N db alkatrészünk van. Közöttük $(N-S)$ a jó alkatrész és ebből egy jót kell kivenni, ezért az A_1 esemény valószínűségét meg tudjuk kezdetben mondani

$$P(A_1) = \frac{(N-S)}{N}.$$

A második húzás előtt $(N-1)$ db alkatrészből kell választani. Ha elsőre jót húztunk, akkor S selejt van a dobozban és egy selejtet kell kivenni. Ezért az A_2 esemény feltételes valószínűségét tudjuk megmondani az A_1 eseményre

$$P(\overline{A_2} | A_1) = \frac{S}{N-1}.$$

A harmadik húzás előtt $(N-2)$ db alkatrész van. Ha elsőre jót és másodikkra selejtet húztunk, akkor az $(S-1)$ selejt közül kell egy selejtet kivenni. Ezért az A_3 esemény feltételes valószínűsége az $A_1 \cdot A_2$ szorzat feltételre vonatkozóan

$$P(\overline{A_3} | A_1 \cdot A_2) = \frac{S-1}{N-2}.$$

Tehát a harmadik húzás valószínűségét csak úgy tudjuk, ha ismerjük az első húzás eredményét is és a második húzás eredményét is.

A negyedik húzás előtt $(N-3)$ db alkatrészünk van. Ha elsőre jót, másodikkra és harmadikkra selejtet húztunk, akkor a megmaradt $(N-S-1)$ jó alkatrész közül egy jót kell kivenni. Ezért az A_4 esemény feltételes valószínűségét meg tudjuk mondani az $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ együttes eseményre vonatkozóan

$$P(A_4 | A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{(N-S-1)}{N-3}.$$

A szorzás-szabály alapján kapjuk a keresett valószínűséget

$$\begin{aligned} P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot A_4) &= P(A_4 | A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) \cdot P(\overline{A_3} | A_1 \cdot A_2) \cdot P(\overline{A_2} | A_1) \cdot P(A_1) = \\ &= \frac{(N-S-1)}{N-3} \cdot \frac{S-1}{N-2} \cdot \frac{S}{N-1} \cdot \frac{(N-S)}{N}. \end{aligned}$$

A példa tanulsága az, hogy a feltételes valószínűségeken keresztül célszerű az együttes események valószínűségét számolni. ♣

4.4.4 PÉLDA. Feltételes valószínűség egy érdekes tulajdonsága

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A , B és C eseményekre teljesül az alábbi egyenlőség

$$P(A \cdot B | C) = P(A | B \cdot C) \cdot P(B | C)$$

Bizonyítás

Bal oldal a feltételes valószínűség definíciója szerint

$$P(A \cdot B | C) = \frac{P(A \cdot B \cdot C)}{P(C)}$$

Jobb oldal a feltételes valószínűség definíciója szerint

$$P(A | B \cdot C) \cdot P(B | C) = \frac{P(A \cdot B \cdot C)}{P(B \cdot C)} \cdot \frac{P(B \cdot C)}{P(C)} = \frac{P(A \cdot B \cdot C)}{P(C)}.$$

Megkaptuk a baloldali képletet. Q.e.d.

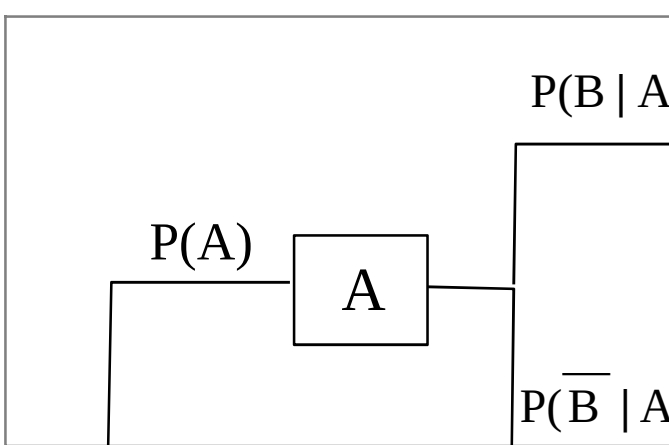
▼ 4.5. Döntési fa diagram. Példák.

Az alábbi két ábra egy két szintű és mindegyik szinten bináris döntési helyzetet mutat. A bal oldali ábra táblázat formában és a jobb oldali ábra fa diagram formában mutatja a döntés valószínűségeit.

Valószínűségi 2×2 táblázat	B	$\overline{B}$	Összeg
A	$P(A \cdot B)$	$P(A \cdot \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cdot B)$	$P(\overline{A} \cdot \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Összeg	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}, \quad P(\overline{B}|A) = \frac{P(A \cdot \overline{B})}{P(A)}$$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cdot B)}{P(\overline{A})}, \quad P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cdot \overline{B})}{P(\overline{A})}$$



Megállapítások a táblázatra és a megfelelő fa diagramra

	Táblázat	Fa diagram
(a)	A szorzat eseményeket és az összegeit mutatja	A feltételes valószínűségeket és a szorzat események összegéből a sor összegeket mutatja a fa élein
(b)	A feltételes valószínűségeket számolni kell osztással a definíció alapján és a táblázaton kívül írni	A szorzat események valószínűségeit számolni kell a szorzás-szabály alapján és fa levelei mellé kell írni

A következő egyszerű példákra felrajzoljuk a döntési fa diagramot és a táblázatot!

4.5.1. PÉLDA. Repülőgép észlelés radarral

Ha berepül egy repülőgép valamely légtérbe, akkor a radar az esetek 0.99 részében helyes módon érzékeli azt és automatikusan jelzi a berepülés tényét. Ha nincs repülőgép a légtérben, akkor a radar hibás módon mégis érzékelhet repülőgépet (pl. madárak miatt) 0.1 valószínűséggel. Tegyük fel, hogy az adott légtérben repülőgép 0.05 valószínűséggel fordul elő.

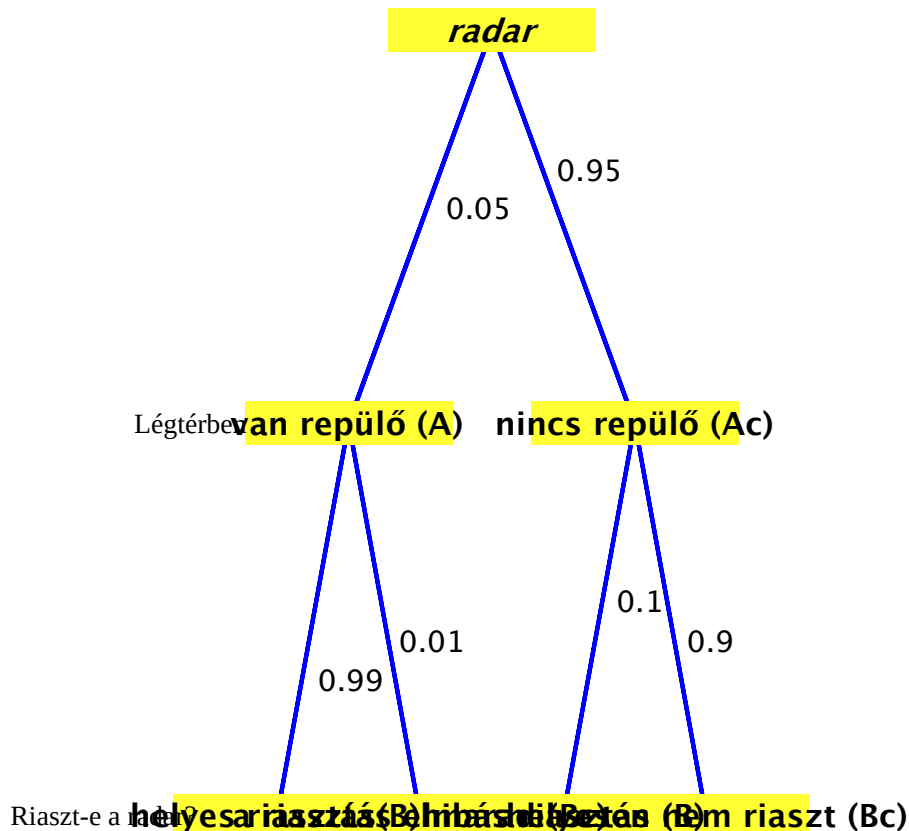
(a) Mekkora a valószínűsége a hibás riasztás eseményének, vagyis annak, hogy nincs repülőgép mégis riaszt a radar?

(b) Mekkora a valószínűsége az elmulasztott riasztás eseményének, vagyis annak, hogy van repülőgép a légtérben, de nem riaszt a radar?

Megoldás

Az egymást követő események megjelenítésére kiválóan alkalmas a döntés fa. Rajzoljuk fel a "légtérben van-e repülőgép" és a "radar riaszt-e" döntési fázisokhoz tartozó döntés fát a GraphTheory segítségével!

```
> restart : with( GraphTheory ) : with( plots ) :
> élek := { [ { radar, "van repülő (A)" }, 0.05 ], [ { radar, "nincs repülő (Ac)" }, 0.95 ],
  [ { "van repülő (A)", "helyes riasztás(B)" }, 0.99 ], [ { "van repülő (A)",
    "a riasztás elmarad (Bc)" }, 0.01 ], [ { "nincs repülő (Ac)", "hibás riasztás (B)" }, 0.1 ],
  [ { "nincs repülő (Ac)", "helyesen nem riaszt (Bc)" }, 0.9 ] } :
> G := Graph( élek ) :
> rajzG := DrawGraph( G, style = tree, root = radar, scaling = unconstrained ) :
sz := plots[ textplot ]( [ [ -0.2, 0.5, "Légtérben"], [ -0.4, 0.0, "Riaszt-e a radar?" ] ] ) :
display( [ rajzG, sz ] )
```



Az ábrán az A és B események a következőket jelölik

$A = \{ \text{van repülőgép a légtérben} \}$, $B = \{ \text{a radar repülőgépet érzékel} \}$

Ezek kiegészítő eseményei

$A^c = \{ \text{nincs repülőgép a légtérben} \}$, $B^c = \{ \text{a radar nem érzékel repülőgépet} \}$

A döntési fázis első részében a légtérben levő repülőgépről tudunk dönteni, mert adott, hogy a légtérben $P(A) = 0.05$ valószínűséggel tartózkodik repülőgép. Ez azt jelenti, hogy 1 óra (60 perces) időintervallumban átlagosan $60 \cdot 0.05 = 3$ percig tartózkodik repülőgép. Mivel $P(A) = 0.05$

és ennek tagadása $P(A^c) = 0.95$. Ez a két valószínűség kerül a gyökből kiinduló két élre.

A második fázisban a **radar riasztás**ról dönthetünk. Vagy riaszt a radar vagy nem. Ha van repülőgép, akkor az esetek 99%-ában riaszt a radar. Így az $A = \text{"van repülő"}$ csúcsból a $B = \text{"helyesen riaszt"}$ csúcs felé vezető élre a 0.99 feltételes valószínűséget kell írni. Tehát $P(B|A) = 0.99$ a riasztás feltételes valószínűsége, azon feltétel mellett, hogy repülő van a légtérben. Mivel a gráf élei a "radar" csúcs felől a levelek felé irányítottak, ezért a feltételi esemény mindig megelőzi magát az eseményt. Itt a "van repülőgép" csúcs után következik a "helyesen riaszt" a radar csúcs. Ezért a "van repülőgép" eseményt már tudjuk, amikor a radar jelzéséről döntünk. Így a feltétel a "van repülőgép" a légtérben esemény.

Nézzük az A csúcsból induló kiegészítő élet. Erre az élre a $B^c = \text{"radar nem jelez"}$ kiegészítő eseményének valószínűsége kerül feltételezve, hogy $A = \{\text{van repülő a légtérben}\}$. Más választásunk nincs, ha van repülő a légtérben, ezért ez 1-re egészíti ki az előző valószínűséget $P(B^c|A) = 0.01$

Nézzük meg a "nincs repülőgép a légtérben" döntés után a radar mit tehet. Vagy jelez vagy nem. Melyik van megadva? A jelzés van adva a szövegben és ez $P(B|A^c) = 0.1$, amely azt jelenti, hogy 0.1 a valószínűsége, hogy a radar jelez feltéve, hogy nincs repülő a légtérben.

A másik élre a kiegészítő esemény valószínűsége kerül $P(B^c|A^c) = 0.9$, melynek jelentése: 0.9 valószínűséggel nem jelez a radar, feltéve hogy nincs repülő

(a) Nézzük a **hibás riasztás** eseményét, hogy lehet egyrészt megadni A és B -vel, és másrészt a valószínűségét kiszámolni! Mikor következik ez be? Ha egyidőben következnek be a **{nincs repülőgép a légtérben}** és a **{radar riaszt}** események. Az egyszerre bekövetkezést a logikai ÉS művelettel tudjuk meadni, mely a halmazok metszetét, vagyis az események szorzatát jelenti.

$$\begin{aligned} P(\text{hibás riasztás}) &= P(\{\text{nincs repülőgép a légtérben}\} \text{ és } \{\text{a radar riaszt}\}) = \\ &= P(A^c \cdot B) = P(B|A^c) \cdot P(A^c) = 0.1 \cdot 0.95 = 0.095. \end{aligned}$$

Az itt használt $P(A^c \cdot B) = P(B|A^c) \cdot P(A^c)$ szorzás szabályt, a feltételes valószínűséget definiáló egyenlet átrendezésével kapjuk.

Tehát a **hibás riasztás** az esetek 9.5%-ban fordulhat elő.

Szemléletesen, ha a gyöktől a "hibás riasztás" levélhez vezető úton az élekre írt valószínűségek szorzatát vesszük, akkor megkapjuk a keresett $P(A^c \cdot B)$ valószínűséget.

A fenti tény igaz minden győrtől levélig vezető útvonalra is.

(b) Hasonló számítással kapjuk az elmulasztott riasztás valószínűségét

$$\begin{aligned} P(\text{elmulasztott riasztás}) &= P(\{\text{repülőgép van a légtérben}\} \text{ ÉS } \{\text{a radar nem riaszt}\}) = \\ &= P(A \cdot B^c) = P(B^c|A) \cdot P(A) = 0.01 \cdot 0.05 = 0.0005. \end{aligned}$$

Tehát az elmulasztott riasztás az esetek 0.05%-ában fordul elő, ami nagyon kicsi. Azt lehet mondani, hogy a radar hibái közül inkább a hibás riasztás fordul elő gyakrabban, szemben az elmulasztott riasztással szemben.

Ráadásként rendre kiszámoljuk a fa gyökerétől a levelekig vett négy útvonal mentén a szorzatokat. Ezek közül kettőt már kiszámoltunk, amelyek a radarral kapcsolatos hibák. Kezdjük a Maple számításokat a feladat szövegében adott valószínűségek és feltételes valószínűségek megadásával, amelyek szerepelnek a fa élein.

- > $(P(A)) := 0.05; (P(A^c)) := 1 - P(A)$
 - > $(P(B|A)) := 0.99; (P(B^c|A)) := 1 - (P(B|A))$
 - > $(P(B|A^c)) := 0.1; (P(B^c|A^c)) := 1 - (P(B|A^c))$
- $P(A) := 0.0500000000$
 $P(A^c) := 0.9500000000$
 $P(B|A) := 0.9900000000$
 $P(B^c|A) := 0.0100000000$
 $P(B|A^c) := 0.1000000000$

-- --

$$P(Bc|Ac) := 0.9000000000 \quad (1.5.1)$$

A baloldali útvonalon vett szorzat az $A \cdot B$ szorzat esemény valószínűségét adja.

$$> \text{'P(A*B)'} := P(A) \text{'P(B|A)'}$$

$$P(A*B) := 0.0495000000 \quad (1.5.2)$$

Ez annak a valószínűsége, hogy van repülő és jelez a radar.

A második útvonalon vett szorzat az $A \cdot B^c$ szorzat esemény valószínűségét adja, ahol B^c a B esemény tagadása vagy komplementere.

$$> \text{'P(A*Bc)'} := P(A) \text{'P(Bc|A)'}$$

$$P(A*Bc) := 0.0005000000 \quad (1.5.3)$$

Ez az elmulasztott riasztás esete, amikor van repülő, de nincs riasztás.

A harmadik útvonalon vett szorzat az $A^c \cdot B$ szorzat esemény valószínűségét adja, ahol A^c az A esemény tagadása vagy komplementere.

$$> \text{'P(Ac*B)'} := P(Ac) \text{'P(B|Ac)'}$$

$$P(Ac*B) := 0.0950000000 \quad (1.5.4)$$

Ez a téves riasztás esete, amikor nincs repülő, de riaszt a radar.

A negyedik útvonalon vett szorzat az $A^c \cdot B^c$ szorzat esemény valószínűségét adja.

$$> \text{'P(Ac*Bc)'} := P(Ac) \cdot \text{'P(Bc|Ac)'}$$

$$P(Ac*Bc) := 0.8550000000 \quad (1.5.5)$$

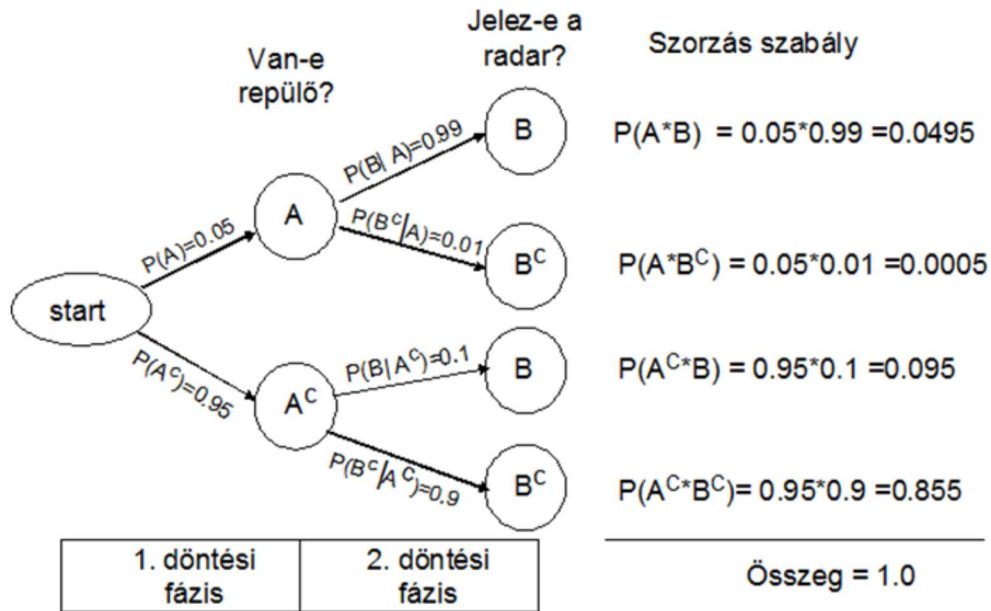
Ez annak a valószínűsége, hogy nincs repülő és nem jelez a radar. Ez a legnagyobb valószínűségű eset, amely a rendszer helyes működésének egyfajta garanciája.

A négy szorzat esemény valószínűségeit összegezve 1-t kapunk! Ez azt jelenti, hogy egy eseménytér teljes eseményrendszerét kaptuk meg.

$$> \text{'P(A*B)'} + \text{'P(A*Bc)'} + \text{'P(Ac*B)'} + \text{'P(Ac*Bc)'}$$

$$1.0000000000 \quad (1.5.6)$$

A repülő érzékelése radarral probléma eredeti fa diagramja



Mátrix formában is szemléltetjük a négyféle lehetőséget. A sorokban a repülőgépre vonatkozó információ van, míg az oszlopokban a radar jelezére vonatkozó információ szerepel. Az utolsó oszlopban a sorok összege, míg az utolsó sorban az oszlopok összege kerül.

> `Matrix(4, 4, [[Repülő / Radar, B, Bc, összeg], [A, `P(A*B)`, `P(A*Bc)`, `P(A*B)` + `P(A*Bc)`], [A^c, `P(Ac*B)`, `P(Ac*Bc)`, `P(Ac*B)` + `P(Ac*Bc)`], [összeg, `P(A*B)` + `P(Ac*B)`, `P(A*Bc)` + `P(Ac*Bc)`, 1]])`

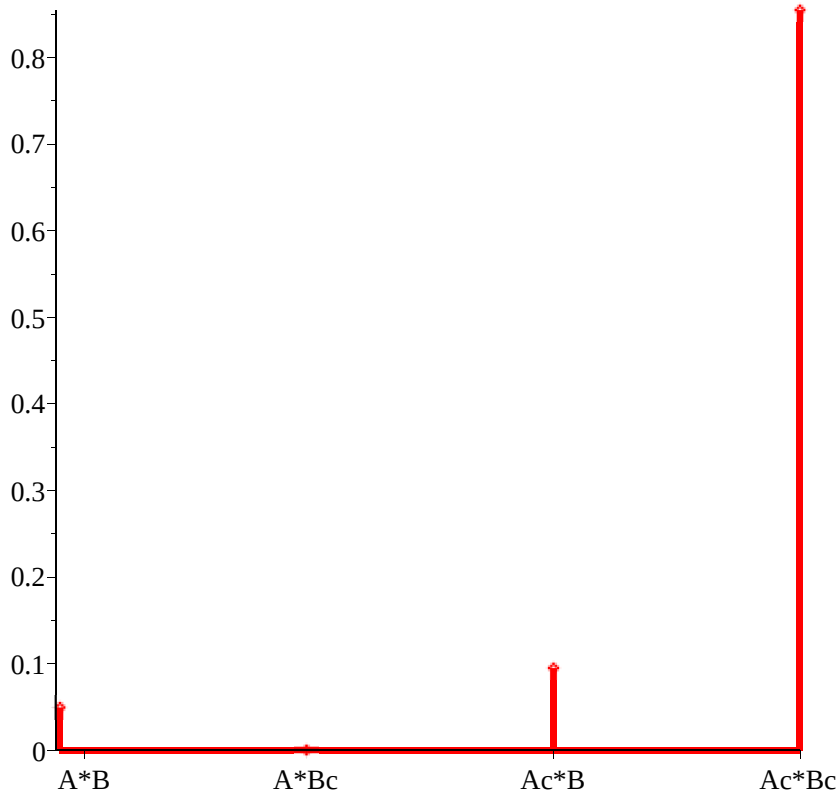
Repülő / Radar	B	Bc	összeg
A	0.0495000000	0.0005000000	0.0500000000
A ^c	0.0950000000	0.8550000000	0.9500000000
összeg	0.1445000000	0.8555000000	1

(1.5.7)

A következőkben pálcika diagrammal szemléltetjük a négy esemény valószínűségét. Így az egyes esetek valószínűségei összemérhetők.

> `DynamicSystems:-DiscretePlot([1, 2, 3, 4], [ `P(A*B)`, 0, `P(Ac*B)`, `P(Ac*Bc)`, style = stem, thickness = 3, color = red, xtickmarks = [1.1 = "A*B", 2 = "A*Bc", 3 = "Ac*B", 4 = "Ac*Bc"], title = Az előforduló esetek eloszlása . A két középső eset hibát mutat)`

Az előforduló esetek eloszlása . A két középső eset hibát mutat



A mátrix melléktáblájában álló elemek összege a hibás jelzést adja, ezek a téves riasztás és az elmulasztott riasztások összege.

$$\begin{aligned} > \text{Hibás jelzések valószínűsége} &:= P(A*Bc) + P(Ac*B) \\ &= 0.0955000000 \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

A mátrix főátlójában álló elemek összege a helyes működés valószínűségét adja, ezek a helyes riasztás és helyes nem riasztás esetei.

$$\begin{aligned} > \text{Helyes jelzések valószínűsége} &:= P(A*B) + P(Ac*Bc) \\ &= 0.9045000000 \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Végül nézzük meg a helyes jelzéseknek a hibás jelzésekhez viszonyított arányát

$$\begin{aligned} > \frac{\text{Helyes jelzések valószínűsége}}{\text{Hibás jelzések valószínűsége}} \\ &= 9.4712041880 \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Tehát a rendszer megbízhatósági aránya kb. 9.5 .

4.5.2. PÉLDA. Feltételes szorzattér készítés

Egy urnában 3 egyforma szétcsavarható gömb van, melyekben az 1, 2 illetve 3 sorsszámok egyike található. Mindegyik szám benne van valamelyik gömbben és mindegyik gömbben pontosan egy szám van. A gömb közül véletlenszerűen kihúzzunk egyet, majd annyiszor dobunk fel egy szabályos pénzérmét, ahányas számú gömböt húztuk ki. Jelölje X a pénzérme feldobása után kapott fej dobások számát!

- (a) Adjuk meg a feladat Ω eseményterét a halmaz elemeinek felsorolásával! (Számoljunk fa diagram segítségével!)
- (b) Számoljuk ki X lehetséges értékeit az egyes elemi eseményeken!
- (c) Számoljuk ki X értékeihez tartozó valószínűségeket!

Megoldás

Az 1, 2 és 3 számot tartalmazó gömb mindegyikének kihúzása egyformán valószínű, ezért $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$. Ezek a fa első döntési fázisának élein levő valószínűségek.

Ha az 1-t tartalmazó gömböt húztuk ki, akkor a pénzérme $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ valószínűséggel esik F=Fej illetve I=Írás oldalára.

Ha a 2-t tartalmazó gömböt húztuk ki, akkor a pénzérmét kétszer kell feldobni, így $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ valószínűséggel lesz FF, FI, IF illetve II a két dobás.

Ha a 3-t tartalmazó gömböt húztuk ki, akkor a pénzérmét háromszor kell feldobni, így $\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ valószínűséggel lesz FFF, FFI, FIF, FII, IFF, IFI, IIF, III a három dobás.

Ezek az értékek a fa második döntési fázisában szereplő élek feltételes valószínűségei.

(a) Tehát $\Omega = \{ F, I, FF, FI, IF, II, FFF, FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII, III \}$ és így elemeinek szám $N=14$.

> restart; $N := 2 + 4 + 8$

$$N := 14 \quad (1.5.11)$$

(b) Számoljuk ki X lehetséges értékeit az egyes elemi eseményeken!

Mivel X jelöli a fejdobások számát, ezért értéke az egyes elemi eseményeken a következő

$\Omega = \{ F, I, FF, FI, IF, II, FFF, FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII, III \}$

$X = [1, 0, 2, 1, 1, 0, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 0]$

X lehetséges értékeit vegyük fel egy listába!

> $X := [0, 1, 2, 3]$

$$X := [0, 1, 2, 3] \quad (1.5.12)$$

(c) Számoljuk ki X értékeihez tartozó valószínűségeket!

A megfelelő élek mentén vett valószínűségek szorzatai adják az egyes elemi események valószínűségét.

Például az $X=0$ eseményhez 3 elemi esemény az $\{I, II, III\}$ tartozik. Ezek valószínűségei rendre

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ és $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}$. Összeadva a valószínűségeket megkapjuk az $X=0$ valószínűségét.

Hasonlóan számoljuk a többi valószínűséget is!

$$\begin{aligned} > pX := \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}}{8}, \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}}{8}, \frac{1}{3} \right] \\ & \quad pX := \left[\frac{7}{24}, \frac{11}{24}, \frac{5}{24}, \frac{1}{24} \right] \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Ellenőrizzük, hogy vajon minden értéket figyelembe vettünk-e és hogy jól számoltunk-e oly módon, hogy az összeg 1 kell, hogy legyen!

$$> \sum_{k=1}^4 pX_k$$

Hogyan lehetne formalizálni az eseménytér képzését? Három klasszikus mezőből tehető össze, ún. feltételes Descartes-szorzáttal!

> $\Omega_1 := F, I; \Omega_2 := FF, FI, IF, II; \Omega_3 := FFF, FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII, III$

> $\Omega := [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3]$

$$\Omega_1 := F, I$$

$$\Omega_2 := FF, FI, IF, II$$

$$\Omega_3 := FFF, FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII, III$$

$$\Omega := [F, I, FF, FI, IF, II, FFF, FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII, III]$$

(1.5.15)

A PX valószínűségeket a szorzás-szabállyal kapjuk.

> $PX1 := \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; PX2 := seq\left(\frac{1}{4}, i = 1..4\right); PX3 := seq\left(\frac{1}{8}, i = 1..8\right)$

> $PX := \frac{1}{3} \cdot [PX1, PX2, PX3]$

$$PX1 := \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

$$PX2 := \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$$

$$PX3 := \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$$

$$PX := \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24} \right]$$

(1.5.16)

$$> \sum_{i=1}^{nops(PX)} PX_i$$

(1.5.17)

Miután megalkottuk a feltételes szorzatteret a valószínűségekkel együtt, csak meg kell számolni, hogy melyik esetben lesz X értéke 0,1,2,3. Számoljuk meg, hogy hány F betű van az eseménytér elemeiben, és adjunk hozzá annyi valószínűséget a gyak nevű gyakoriság listához amennyi szerepel a PX valószínűség listában a megfelelő helyen!

> $with(StringTools) : gyak := [0, 0, 0, 0] :$

for k **to** $nops(\Omega)$ **do**

$H := map(convert, \Omega, string);$

$x := CountCharacterOccurrences(H_k, "F");$

$gyak_{x+1} := gyak_{x+1} + PX_k$

end do :

> $gyak$

$$\left[\frac{7}{24}, \frac{11}{24}, \frac{5}{24}, \frac{1}{24} \right]$$

(1.5.18)

A fenti számítás folyamatát szemléltetjük fa gráf felrajzolásával!

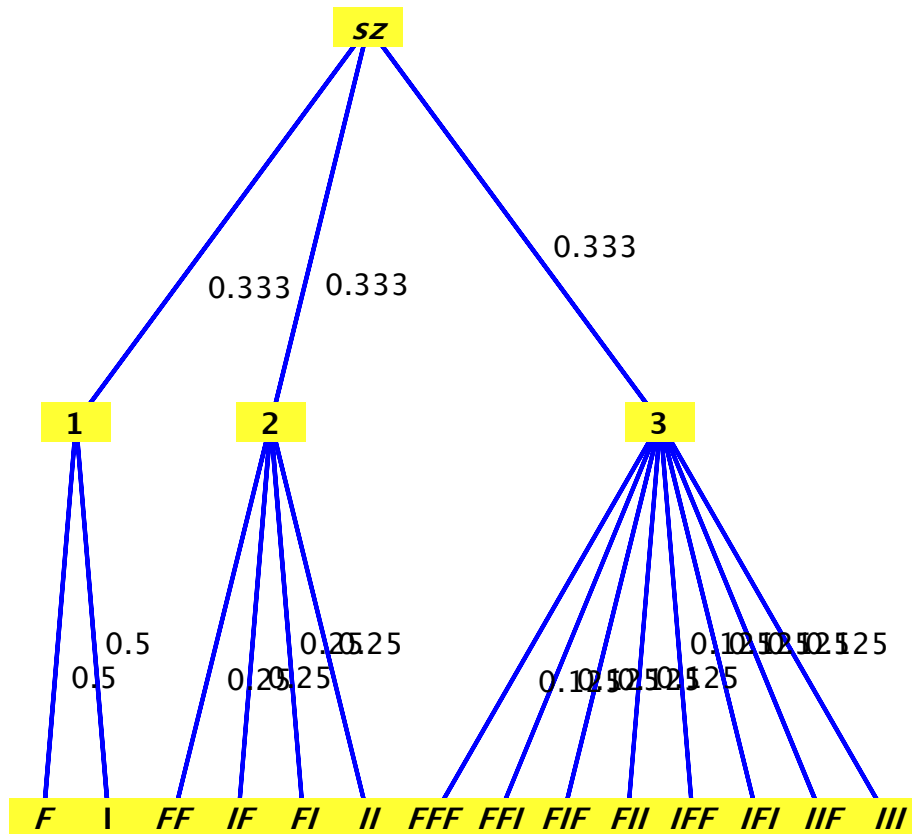
> $with(GraphTheory) :$

$csúcsok := [sz, 1, 2, 3, F, "I", FF, IF, FI, II, FFF, FFI, FIF, FII, IFF, IFI, IIF, III] :$

$$\begin{aligned} \text{élek} := & \left\{ \left[\{1, \text{"I"}\}, \frac{1}{2} \right], \left[\{1, F\}, \frac{1}{2} \right], \left[\{1, \text{sz}\}, \frac{1}{3} \right], \left[\{2, FF\}, \frac{1}{4} \right], \left[\{2, FI\}, \frac{1}{4} \right], \left[\{2, \right. \right. \\ & IF\}, \frac{1}{4} \right], \left[\{2, II\}, \frac{1}{4} \right], \left[\{2, \text{sz}\}, \frac{1}{3} \right], \left[\{3, FFF\}, \frac{1}{8} \right], \left[\{3, FFI\}, \frac{1}{8} \right], \left[\{3, FIF\}, \right. \\ & \left. \frac{1}{8} \right], \left[\{3, FII\}, \frac{1}{8} \right], \left[\{3, IFF\}, \frac{1}{8} \right], \left[\{3, IFI\}, \frac{1}{8} \right], \left[\{3, IIF\}, \frac{1}{8} \right], \left[\{3, III\}, \frac{1}{8} \right], \\ & \left. \left[\{3, \text{sz}\}, \frac{1}{3} \right] \right\} : \end{aligned}$$

$G := \text{Graph}(\text{csúcsok}, \text{élek}) :$

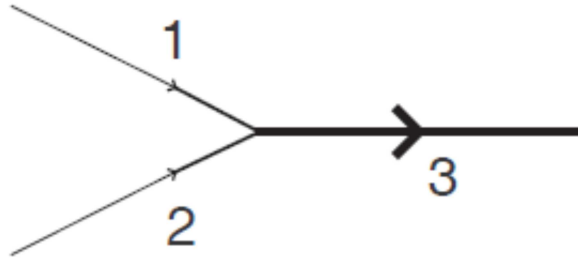
> $\text{DrawGraph}(G, \text{style} = \text{tree}, \text{root} = \text{sz}, \text{scaling} = \text{unconstrained})$



▼ 4.6. Példák feltételes valószínűségek alkalmazására

4.6.1. PÉLDA. Forgalmi dugók kialakulása

Tanulmányozták forgalmi dugók kialakulása szempontjából az 1 és 2 számú olyan útakat, amelyek az alábbi ábra szerint összefutnak a 3 számú útban.



Az 1 és 2 számú utak összekapcsolódnak és folytatódnak a 3 számú útban
Az 1 és 2 számú utak kapacitása (vagyis a sávok száma) azonos, míg a 3 számú út kapacitása nagyobb, mint az 1 és 2 utak kapacitása külön-külön. Csúcsforgalmi időszakban annak valószínűsége, hogy a forgalom bedugul az 1 számú úton $p_1 = 0.1$. Hasonlóan $p_2 = 0.3$ annak valószínűsége, hogy a forgalom bedugul a 2 számú úton. Megfigyelések alapján ismert, hogy ha a 2 számú úton a forgalom bedugul, akkor az 1 számú úton 3 alkalomból egyszer szintén bedugul a forgalom. Definíáljuk az alábbi eseményeket

$A = \{ \text{a forgalom bedugul az 1 számú úton} \},$
 $B = \{ \text{a forgalom bedugul az 2 számú úton} \},$
 $C = \{ \text{a forgalom bedugul az 3 számú úton} \}.$

- (a) Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy a forgalom
- (i) az 1 és a 2 számú utak mindegyikén bedugul;
 - (ii) a 2 számú úton bedugul, feltéve, hogy a forgalom bedugult az 1 számú úton;
 - (iii) csak az 1 számú úton dugul be, de a 2 számún nem;
 - (iv) csak a 2 számú úton dugul be, de az 1 számún nem;
 - (v) az 1 vagy a 2 számú út valamelyikén bedugul;
 - (vi) nem dugul be sem az 1 számú és sem a 2 számú úton;
- (b) Tegyük fel, hogy a 3 számú úton a forgalom bedugul
- 1 valószínűséggel, ha az 1 és 2 utak mindegyikén forgalmi dugó keletkezik;
 - 0.15 valószínűséggel, ha csak a 2 számú úton keletkezik forgalmi dugó az 1 számún nem;
 - 0.1 valószínűséggel, ha sem az 1 és sem 2 számú utakon nincs forgalmi dugó.
- Számoljuk ki annak **valószínűségét**, hogy forgalmi dugó alakul ki
- (vii) mindhárom úton
 - (viii) a 3 számú úton;
 - (ix) az 1 számú úton, feltéve hogy a 3 számú úton forgalmi dugó van.

Bizonyítás

(a) Felvesszük a megadott valószínűségeket és feltételes valószínűségeket

> *restart*;

$P(A), P(B) := 0.1, 0.3$

> $P(A|B) := \frac{1}{3}$

$P(A), P(B) := 0.1000000000, 0.3000000000$

$$P(A|B) := \frac{1}{3} \quad (1.6.1)$$

(i) Mennyi annak valószínűsége, hogy a forgalom bedugul az 1 és a 2 számú utak mindegyikén?

A valószínűségek szorzás szabályát alkalmazzuk $P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot 0.3 = 0.1$

$$> (P(AB)) := P(A|B) \cdot P(B) \quad P(AB) := 0.1000000000 \quad (1.6.2)$$

Tehát $P(A \cdot B) = 0.1$, annak valószínűsége, hogy az 1. és 2. számú út mindegyikén a forgalom bedugul.

(ii) Mennyi annak valószínűsége, hogy a forgalom bedugul a 2 számú úton, feltéve, hogy a forgalom bedugult az 1 számú úton?

A $P(B|A)$ feltételes valószínűséget a definíció alapján kapjuk

$$P(B|A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}.$$

Az (i) pontban kiszámoltuk a számlálót és a nevező adva volt.

$$> P(B|A) := \frac{P(AB)}{P(A)} \quad P(B|A) := 1.0000000000 \quad (1.6.3)$$

Tehát $P(B|A) = 1$, vagyis 1 valószínűséggel bedugul a 2. számú út, ha tudjuk, hogy 1. számú út bedugult.

(iii) Mennyi annak valószínűsége, hogy a forgalom csak az 1 számú úton dugul be, de a 2 számún nem?

A $P(A \cdot B^c) = P(A - B) = P(A) - P(A \cdot B)$ különbségre vonatkozó képlete alapján kapjuk a választ.

$$> (P(AB^c)) := P(A) - P(AB) \quad P(AB^c) := 0.0000000000 \quad (1.6.4)$$

Tehát $P(A \cdot \overline{B}) = 0$, vagyis nulla annak valószínűsége, hogy az 1. úton bedugul, de a 2. úton nem dugul be. A nulla valószínűség nem jelenti azt, hogy ez az esemény nem következhet be.

(iv) Mennyi annak valószínűsége, hogy a forgalom bedugul a 2 számú úton, de az 1 számún nem?

Most a fordított különbséget kell számolni $P(B - A) = P(B) - P(A \cdot B) = P(A^c \cdot B)$.

$$> (P(A^c B)) := P(B) - P(AB) \quad P(A^c B) := 0.2000000000 \quad (1.6.5)$$

Tehát $P(\overline{A} \cdot B) = 0.2$, vagyis 0.2 annak valószínűsége, hogy a 2. számú úton a forgalom bedugul, de az 1. úton nem.

(v) Mennyi annak valószínűsége, hogy a forgalom bedugul vagy az 1 számú vagy a 2 számú úton? Az összeg esemény valószínűségére érvényes $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ azonosságot alkalmazzuk.

$$> (P(A + B)) := P(A) + P(B) - P(AB) \quad P(A + B) := 0.3000000000 \quad (1.6.6)$$

Tehát $P(A + B) = 0.3$, vagyis 0.3 annak valószínűsége, hogy vagy az 1. vagy a 2. számú úton a forgalom bedugul.

(vi) Mennyi annak valószínűsége, hogy a forgalom nem dugul be sem az 1 számú és sem a 2 számú úton?

Használjuk a DeMorgan azonosságok közül az $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ az összeg tagadásáról szólót és a tagadás esemény valószínűségét megadó $P(\overline{A + B}) = 1 - P(A + B)$ képletet.

$$> (P(A^c B^c)) := 1 - P(A + B) \quad P(A^c B^c) := 0.7000000000 \quad (1.6.7)$$

Tehát $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 0.7$ annak valószínűsége, hogy sem az 1. számú sem a 2. számú úton a forgalom nem dugul be.

(b) Tegyük fel, hogy ha az 1 és a 2 utak mindegyikén forgalmi dugó keletkezik, akkor a 3 számú úton 1 valószínűséggel bedugul a forgalom.

A feltétel a $P(C|A \cdot B) = 1$ feltételes valószínűséget adja meg.

$$> \text{'P(C|AB)'} := 1$$

$$P(C|AB) := 1 \quad (1.6.8)$$

(vii) Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy forgalmi dugó alakul ki mindhárom úton:

$$P(A \cdot B \cdot C) = ?$$

A szorzás-szabályt kell alkalmazni három tényezőre úgy, hogy a feltételben az $B \cdot C$ szorzat esemény legyen.

$$> (P(ABC)) := \text{'P(C|AB)'} P(AB)$$

$$P(ABC) := 0.1000000000 \quad (1.6.9)$$

(viii) Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy a 3 számú úton a forgalom bedugul $P(C) = ?$

Adottak még a $P(C|A \cdot B) = 0.15$ és $P(C|A \cdot \overline{B}) = 0.1$ feltételes valószínűségek. Ezekkel a feltételes valószínűségekkel ki tudjuk számolni a három tényezős szorzat események valószínűségeit a fentiekhez hasonlóan.

$$> \text{'P(C|AcB)'} , \text{'P(C|AcBc)'} := 0.1500000000, 0.1000000000$$

$$P(C|AcB), P(C|AcBc) := 0.1500000000, 0.1000000000 \quad (1.6.10)$$

$$> (P(AcBC)) := \text{'P(C|AcB)'} P(AcB);$$

$$(P(AcBcC)) := \text{'P(C|AcBc)'} P(AcBc)$$

$$P(AcBC) := 0.0300000000$$

$$P(AcBcC) := 0.0700000000 \quad (1.6.11)$$

Mivel a (iii) pontban kiderült, hogy $P(A \cdot \overline{B}) = 0$, ezért a $P(C|A \cdot \overline{B})$ értéke nélkül tudjuk, hogy $P(A \cdot B \cdot C) = 0$.

$$> (P(ABcC)) := \text{'P(C|ABc)'} P(ABc)$$

$$P(ABcC) := 0.0000000000 \quad (1.6.12)$$

Az eseményteret felosztottuk $\Omega = A \cdot B + A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$ részekre, ahol páronként egymást kizárók az események. A disztributív szabályt használva

$$P(C) = P(C \cdot A \cdot B + C \cdot A \cdot \overline{B} + C \cdot \overline{A} \cdot B + C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B}) = P(C \cdot A \cdot B) + P(C \cdot A \cdot \overline{B}) + P(C \cdot \overline{A} \cdot B) + P(C \cdot \overline{A} \cdot \overline{B})$$

$$> (P(C)) := P(ABC) + P(AcBC) + P(ABcC) + P(AcBcC)$$

$$P(C) := 0.2000000000 \quad (1.6.13)$$

Tehát $P(C) = 0.2$ annak valószínűsége, hogy a 3. számú úton a forgalom bedugul.

(ix) Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy az 1 számú úton bedugul, feltéve hogy a 3 számú úton forgalmi dugó van.

A feltételes valószínűség definíciója alapján

$$P(A|C) = \frac{P(A \cdot C)}{P(C)}.$$

A nevezőt a (viii) pontban számoltuk ki. Számoljuk ki a $P(A \cdot C)$ számlálót! Mivel $\Omega = B + \overline{B}$, ezért

$$A \cdot C = A \cdot C \cdot (B + \overline{B}) = A \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C.$$

A két tag egymást kizáró, ezért a valószínűséget a jobb oldalon tagonként vehetjük

$$P(A \cdot C) = P(A \cdot B \cdot C) + P(A \cdot \overline{B} \cdot C)$$

$$> P(A|C) := \frac{P(ABC) + P(ABcC)}{P(C)} \\ P(A|C) := 0.5000000000 \quad (1.6.14)$$

Tehát $P(A|C) = 0.5$, vagyis 0.5 a valószínűsége annak, hogy a forgalom az 1. számú úton bedugul, feltéve, hogy a 3. számú úton bedugult a forgalom. ♣

4.6.2. PÉLDA. Vizsgák előfeltétellel

Egy hallgató az egymásra épülő "A", "B" és "C" vizsgáját szeretné letenni. Akkor vizsgázhat "B" tárgyból, ha az "A" vizsgája sikeres volt. "C" tárgyból akkor vizsgázhat, ha a "B" vizsgája sikeres volt. A sikeres "A" vizsga esélye 0.9. Ha átmegy az "A" vizsgán, akkor a sikeres "B" vizsga feltételes valószínűsége 0.8. Ha átmegy az "A" és "B" vizsgán is, akkor a sikeres "C" vizsga feltételes valószínűsége 0.7.

(a) Mekkora az esélye, hogy mindhárom vizsgán átmegy?

Tudjuk, hogy a hallgatónak mindhárom vizsgája nem sikerült. Tehát valamelyik vizsga (lehet, hogy mindhárom) nem sikerült és akkor a ráépülő vizsga sem lehet sikeres.

(b) Mekkora annak feltételes valószínűsége, hogy az "A" vizsga sikertelen volt?

(c) Mekkora annak feltételes valószínűsége, hogy a "B" vizsga sikertelen volt?

(d) Mekkora annak feltételes valószínűsége, hogy a "C" vizsga sikertelen volt?

(e) Mennyi a (b), (c) és (d) részben kapott valószínűségek összege?

Megoldás

Az alábbi jelöléseket használjuk a feladatban szereplő eseményekre

A = az "A" vizsga sikeres, B = a "B" vizsga sikeres, C = a "C" vizsga sikeres

(a) A szorzás szabályt alkalmazzuk a 3 tényezős $A \cdot B \cdot C$ szorzat esemény valószínűségének kiszámítására

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cdot B)$$

> restart :

$$P(A), P(B|A), P(C|AB) := 0.9000000000, 0.8000000000, 0.7000000000$$

> $(P(ABC)) := P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB)$

$$P(A), P(B|A), P(C|AB) := 0.9000000000, 0.8000000000, 0.7000000000$$

$$P(ABC) := 0.5040000000 \quad (1.6.15)$$

Tehát annak esélye, hogy minhárom vizsgán átmegy a diák 50.4%.

(b) A feladat a $P(A^c | (ABC)^c)$ feltételes valószínűséget kérdezi, mert a $A \cdot B \cdot C$ azt jelöli, hogy mindhárom vizsga sikeres és ennek tagadása az, hogy valamelyik vizsga sikertelen. A feltételes

valószínűség definíciója alapján ez $\frac{P(A^c | (ABC)^c)}{P((ABC)^c)}$. Mivel az A^c = az A vizsga sikertelen

esemény része az $(ABC)^c$ eseménynek - valamelyik vizsga sikertelen-, ezért a számláló $P(A^c)$. Így az előző hányados

$$P(A^c | (ABC)^c) = \frac{P(A^c)}{1 - P(ABC)} = \frac{1 - P(A)}{1 - P(ABC)}.$$

$$> P1 := \frac{1 - P(A)}{1 - P(ABC)}$$

$$P1 := 0.2016129032 \quad (1.6.16)$$

Tehát kb. 20.16% annak feltételes esélye, hogy az "A" vizsga nem sikerült feltéve, hogy a három vizsga mindegyike nem sikeres!

(c) A kérdés a $P(A^c | (ABC)^c)$ feltételes valószínűséget kérdezi, mert a "A" vizsgának sikeresnek kellett lenni ahhoz, hogy a "B" vizsgát megkezdhesse! A feltételes valószínűség

definíciója alapján ez

$$\frac{P(A B^c (A B C)^c)}{P((A B C)^c)} . \text{ Mivel az } A B^c \text{ esemény része az } (A B C)^c \text{ eseménynek}$$

- minhárom vizsga sikertelen- , ezért a számláló $P(A B^c)$. Így az előző hányados, a feltételes valószínűség definíciója alapján

$$\frac{P(A B^c)}{1 - P(A B C)} = \frac{P(B^c | A) \cdot P(A)}{1 - P(A B C)} = \frac{(1 - P(B | A)) \cdot P(A)}{1 - P(A B C)} .$$

$$> P2 := \frac{(1 - P(B|A)) P(A)}{1 - P(ABC)}$$

$$P2 := 0.3629032258$$

(1.6.17)

Tehát kb. 36.3% annak feltételes esélye, hogy a második vizsga nem sikerült, feltéve, hogy a három vizsga mindegyike nem sikeres.

(d) A kérdés a $P(A B C^c | (A B C)^c)$ feltételes valószínűséget kérdezi, mert a "A" és "B" vizsgának sikeresnek kellett lenni, hogy a "C" vizsgát megkezdhesse! A feltételes valószínűség definíciója alapján ez $\frac{P(A B C^c (A B C)^c)}{P((A B C)^c)}$. Mivel az $A B C^c$ esemény része az $(A B C)^c$

eseménynek - minhárom vizsga sikertelen- , ezért a számláló $P(A B C^c)$. Így az előző hányados

$$\frac{P(A B C^c)}{1 - P(A B C)} = \frac{P(C^c | A B) P(B | A) P(A)}{1 - P(A B C)} = \frac{(1 - P(C | A B)) P(B | A) P(A)}{1 - P(A B C)}$$

$$> P3 := \frac{(1 - P(C|AB)) P(B|A) P(A)}{1 - P(ABC)}$$

$$P3 := 0.4354838710$$

(1.6.18)

Tehát kb. 43.5% annak feltételes esélye, hogy a harmadik vizsga nem sikerült, feltéve, hogy mindhárom vizsga nem volt sikeres.

Megjegyzés: Nyilvánvalóan legnagyobb az esélye annak, hogy a harmadik vizsga sikertelen lesz. Hiszen a harmadik vizsga akkor is sikertelen, ha az első sikertelen vagy ha az első sikeres, de a második sikertelen, az egymásra épülés miatt. És ha sikeresen túljutott az első két vizsgán a hallgató, akkor még hátra van a harmadik vizsgával való megbírkózás.

(e) A három feltételes valószínűség összege 1.

$$> P1 + P2 + P3$$

$$1.0000000000$$

(1.6.19)



4.6.3. PÉLDA. A légy tartózkodási helye

A szobában repked egy légy ide-oda. Megfigyelték, hogy a légy a teljes idejének $\frac{1}{3}$ -részében

repül és $\frac{2}{3}$ részében vagy a 4 oldal fal valamelyikén vagy a plafonon tartózkodik egyforma valószínűséggel és kétszer akkora valószínűséggel van a padlón, mint többi fal (oldal fal és mennyezet) valamelyikén.

Keresik a legyet a 4 oldal falon és a mennyezeten, de nem találják.

(a) Mekkora valószínűséggel van a légy valahol a padlón van (vagyis nem repül)?

(b) A légy teljes idejének hányad részében kellene repülni, hogy az (a) pontban kérdezett feltételes valószínűség $\frac{1}{2}$ legyen?

Megoldás

(a) $F1, F2, F3, F4$ = a légy oldal falon tartózkodásának eseménye, M -a légy a mennyezeten van, P

- a légy a padlón van

ezek egymást kizárók és $P(F1)=P(F2)=P(F3)=P(F4)=P(M) = p$ és $P(P)=2p$. Feltétel szerint

$$P(F1+F2+F3+F4+M+P)=P(F1)+P(F2)+P(F3)+P(F4)+P(M)+P(P) = 5p+2p= \frac{2}{3}$$

Ahonnán $p = \frac{2}{21}$ a valószínűsége, hogy valamelyik oldal falon van a légy.

A feladat az alábbi feltételes valószínűséget kérdezi

$$P(P|B1^c * F2^c * F3^c * F4^c * M^c) = \frac{P(P F1^c F2^c F3^c F4^c M^c)}{P(B1^c B2^c B3^c B4^c)} = \frac{P(P)}{1 - P(B1) - P(B2) - P(B3) - P(B4)}$$

mert P rész eseménye a $B1^c * B2^c * B3^c * B4^c * M^c$ szorzat eseménynek! Hiszen, ha a légy a padlón van, akkor nem lehet az oldal fal egyikén se és a mennyezeten se.

> restart :

$$> p := \frac{2}{3.7}; \text{evalf}(\%)$$

$$> pfelt := \frac{2p}{1-5p}; \text{evalf}(\%)$$

$$p := \frac{2}{21}$$

$$0.0952380952$$

$$pfelt := \frac{4}{11}$$

$$0.3636363636$$

(1.6.20)

Tehát a légy $\frac{4}{11} = 0.3636$ valószínűséggel tartózkodik a padlón, feltéve, hogy nincs se az oldal falakon, se és a mennyezeten.

(b) Legyen x a teljes időnek az a része, melyet a légy repüléssel tölt ($0 < x < 1$). Ekkor (1-x) jelöli a teljes időnek azt a részét, amelyet valamelyik falon van, A számítást az előzőekhez hasonlóan végezzük, csak most p ismeretlen és a feltételes valószínűség ismert $\frac{1}{2}$!

$$> p := \frac{1-x}{7}$$

$$> \text{solve}\left(\frac{2p}{1-5p} = \frac{1}{2}, \{x\}\right); \text{evalf}(\%)$$

$$p := \frac{1}{7} - \frac{1}{7} x$$

$$\left\{x = \frac{2}{9}\right\}$$

$$\{x = 0.2222222222\}$$

(1.6.21)

Tehát ha a légy az idejének $\frac{2}{9}$ -részét repüléssel tölti, akkor $\frac{1}{2}$ valószínűséggel tartózkodik a padlón, feltéve hogy nincs se az oldal falakon, se és a mennyezeten. Az (a) esettel

összehasonlítva, a teljes idejének nem $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ részében repül, mint (a) részben, hanem kevesebb

csak

$\frac{2}{9}$ részben kellene repülnie. ♣

4.6.4. PÉLDA. János tartózkodási helye

János az egész nap $\frac{2}{3}$ részét (azaz 24 órából 16 órát) az 5 barátja valamelyikénél tölti. Az öt barát mindegyikénél egyforma valószínűséggel tartózkodhat. Szülei elindultak János keresésére. Eddig János 4 barátját felkeresték, de nem találták egyiknél sem.

(a) Mekkora valószínűséggel van János az ötödik barátjánál?

(b) Az egész nap hányadrészét kellene Jánosnak barátainál tölteni, hogy a fenti feltételes valószínűség $\frac{1}{2}$ legyen?

Megoldás

(a) Az eseményekre az alábbi jelölést használjuk

B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 = a barátoknál tartózkodás eseménye,

$B_i \cdot B_k = 0$ egymást kizárók és

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = P(B_5) = p.$$

Feltétel szerint

$$P(B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = 5p = \frac{2}{3}.$$

Ahonnan $p = \frac{2}{15}$ a valószínűsége, hogy valamelyik barátjánál tartózkodik János.

A feladat az alábbi feltételes valószínűséget kérdezi

$$P(B_5 | B_1^c \cdot B_2^c \cdot B_3^c \cdot B_4^c) = \frac{P(B_5 B_1^c B_2^c B_3^c B_4^c)}{P(B_1^c B_2^c B_3^c B_4^c)} = \frac{P(B_5)}{1 - P(B_1) - P(B_2) - P(B_3) - P(B_4)}$$

mert B_5 rész eseménye a $B_1^c \cdot B_2^c \cdot B_3^c \cdot B_4^c$ szorzat eseménynek!

> restart :

> $p := \frac{2}{3 \cdot 5}$

> $pfelt := \frac{p}{1 - 4p}$

$$p := \frac{2}{15}$$

$$pfelt := \frac{2}{7} \quad (1.6.22)$$

Tehát János $\frac{2}{7}$ valószínűséggel tartózkodik az ötödik barátjánál, feltéve, hogy nincs az első négyenél.

(b) Legyen $p = x$ az egy barátjánál tartózkodás valószínűsége. A számítást az előzőekhez hasonlóan végezzük

> $p := \frac{x}{5};$

> $solve\left(\frac{p}{1 - 4p} = \frac{1}{2}, \{x\}\right)$

$$p := \frac{1}{5} x$$

$$(1.6.23)$$

$$\left\{ x = \frac{5}{6} \right\} \quad (1.6.23)$$

Tehát János az idejének $\frac{5}{6}$ -részét kellene a barátoknál tölteni (azaz 24 órából 20 órát), hogy $\frac{1}{2}$ valószínűséggel tartózkodjon az ötödik barátjánál, feltéve, hogy nincs első négynél. ♣

4.6.5. PÉLDA. Színes golyók húzása két dobozból

Két dobozban zöld és sárga golyók vannak. Az egyik dobozban 6 zöld és 3 sárga golyó van, míg a másodikonban 4 zöld és 5 sárga golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk egyet a két doboz közül, majd a kiválasztott dobozból kiveszünk egy golyót.

(a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kivett golyó zöld színű?

(b) Ha a két doboz kiválasztása nem egyformán valószínű, akkor határozzuk meg a dobozok választásának valószínűségét úgy, hogy a zöld golyók húzásának ugyanakkora legyen a valószínűsége, mint a sárga golyó húzásának! Milyen véletlen kísérlettel választaná ki a két doboz közül, hogy melyikből húzzon?

Megoldás

(a) Az első doboz kiválasztásának valószínűsége legyen p . Ez most 0.5, a véletlenszerűség miatt.

> restart :

> $p := \frac{1}{2}$

$$p := \frac{1}{2} \quad (1.6.24)$$

Ha az első dobozt választjuk, akkor $\frac{6}{9}$ a zöld golyó húzásának valószínűsége. Ha a második dobozt választjuk, akkor $\frac{4}{9}$ a zöld golyó húzásának valószínűsége. A szorzás -szabály alapján $\frac{6}{9} \cdot p$ a valószínűsége a zöld golyó húzásának az első dobozból. Hasonlóan $\frac{4}{9} \cdot (1 - p)$ a valószínűsége a zöld golyó húzásának a második dobozból. Vagy az első vagy a második dobozból húzhatunk zöldet, ezért a két együttes esemény valószínűségének az összegét kell venni!

> A zöld golyó választásának valószínűsége = $\frac{6p}{9} + \frac{4(1-p)}{9}$

$$\text{A zöld golyó választásának valószínűsége} = \frac{5}{9} \quad (1.6.25)$$

(b) Legyen most ' p ' az első doboz választásának valószínűsége és ekkor $(1-p)$ a második doboz választásának valószínűsége. Az előző valószínűséget írjuk fel ismeretlen ' p ' értékkel és a végeredménynek 0.5-nek kell lenni. A kapott egyenletet oldjuk meg p -re!

> $p := 'p' :$

> $\frac{6p}{9} + \frac{4(1-p)}{9} = \frac{1}{2}$

> solve(%, {p})

$$\frac{2}{9} p + \frac{4}{9} = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ p = \frac{1}{4} \right\}$$

(1.6.26)

Tehát az első dobozt $\frac{1}{4}$ valószínűséggel kell választani a másodikat $\frac{3}{4}$ valószínűséggel.

Ezt a választást megvalósíthatjuk egy 4 oldalú szabályos "dobó tetraéderrel" is. Például, ha az 1 -

el jelölt oldalára esik a tetraéder, akkor az első dobozból húzunk, és minden más esetben a második dobozból húzunk egy golyót. Ekkor 50% lesz a zöld golyó húzás esélye, ha sokszor ismétljük a dobást és a húzást. ♣

4.6.6. PÉLDA. Műveletek és valószínűségek

Határozzuk meg a $P(A)$, $P(B)$ $P(AB)$ valószínűségeket, ha adottak $P(A|B) = \frac{1}{5}$, $P(A|B^c) = \frac{1}{3}$ és $P(B|A^c) = \frac{1}{2}$ feltételes valószínűségek!

Megoldás

Felvesszük a megadott 3 feltételes valószínűséget!

$$> \text{'P(A|B)', 'P(A|Bc)', 'P(Bc|Ac)' := } \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$$

$$P(A|B), P(A|Bc), P(Bc|Ac) := \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \quad (1.6.27)$$

A feltételes valószínűségek definícióit felírjuk és benne olyan átlakításokat végzünk, amelyekben már nincs tagadás művelet!

$$> \text{def1 := 'P(A|B)' = } \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$\text{def1 := } \frac{1}{5} = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1.6.28)$$

$$> \text{def2 := 'P(A|Bc)' = } \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)}$$

$$\text{def2 := } \frac{1}{3} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)} \quad (1.6.29)$$

$$> \text{def3 := 'P(Bc|Ac)' = } \frac{1 - P(A) - P(B) + P(AB)}{1 - P(A)}$$

$$\text{def3 := } \frac{1}{2} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(AB)}{1 - P(A)} \quad (1.6.30)$$

Három egyenletünk van és $P(A)$, $P(B)$ és $P(A \cdot B)$ az ismeretlenek. Megoldjuk Maple segítségével.

$$> \text{solve(\{def1, def2, def3\}, \{P(A), P(B), P(AB)\})}$$

$$\left\{ P(A) = \frac{3}{11}, P(AB) = \frac{1}{11}, P(B) = \frac{5}{11} \right\} \quad (1.6.31)$$

$$\text{Tehát } P(A) = \frac{3}{11}, P(AB) = \frac{1}{11}, P(B) = \frac{5}{11}. \quad \clubsuit$$

A következő példa a minőség szabályozás statisztikai mintavételezés témakörébe tartozik. Megmutatjuk, hogy a döntések első és másodfajú hibái valójában feltételes valószínűségek.

4.6.7. PÉLDA. Mintavételezési hibák számítása táblázatból

Egy nyomtatott áramköröket gyártó cég 2000 darab elektronikai alkatrészt vesz át naponta további felhasználásra. A 2000 darabot tartalmazó szállítmányt megfelelőnek nevezik, ha benne a selejtes darabok száma nem több, mint 20.

Átvételi eljárás.

A napi szállítmányból kivesznek $n=80$ darabot és megállapítják a selejtes darabok számát.

Átvételi terv.

Ha a selejtes darabok száma a 80 elemű mintában kisebb vagy egyenlő, mint 2, akkor a tételt

átveszik.

Ha a selejtes darabok száma a 80 elemű mintában nagyobb, mint 2, akkor a tételt visszautasítják.

A szállításról 120 napon keresztül a következő statisztikát rögzítették:

A 2000 tételből a rosszak ill. jók száma			
	Rossz tételek	Jó tételek	Összesen
Átvett tételek	4		85
Visszautasított tételek			
Összesen	9		120

(a) Töltsük ki a táblázat üresen hagyott celláit!

(b) Számítsuk ki az átvételi terv elsőfajú hibáját! Tehát annak valószínűségét, hogy visszautasítunk jó szállítmányt.

(c) Számítsuk ki az átvételi terv másodfajú hibáját! Tehát annak valószínűségét, hogy átveszünk nem megfelelő szállítmányt!

(d) Vonjuk le a következtetéseket az átvételi tervre vonatkozóan!

Megoldás

A feladatban szereplő eseményeknek adjunk nevet

$R = \{ \text{Rossz a tétel, mert a 2000 db között a selejtek száma} > 20 \}$ ennek ellentét eseménye

$J = \{ \text{Jó a tétel, mert a 2000 db között a selejtek száma} \leq 20 \}$.

$A = \{ \text{a tételt átvették, mert a 80 elemű mintában a selejtek száma} \leq 2 \text{ volt} \}$ ennek ellentét eseménye

$V = \{ \text{a tételt visszautasították, mert a 80 elemű mintában a selejtek száma} > 2 \text{ volt} \}$

Töltsük ki a táblázatot úgy, hogy az összegek helyesek legyenek!

(a) Töltsük fel a T mátrix ismert elemeit!

> restart :

$T := \text{Matrix}(4, 4) : T_{1,1} := \text{Mintavételezés} : T_{1,2} := A \text{ tétel rossz}(R) : T_{1,3} := A \text{ tétel jó}(J) :$

$T_{1,4} := \text{Összesen} : T_{2,1} := \text{Átvett tételek}(\hat{A}) : T_{3,1} := \text{Visszautasított tételek}(V) : T_{4,1} :=$

$\text{Összesen} :$

> $T_{2,2}, T_{2,4}, T_{4,2}, T_{4,4} := 4, 85, 9, 120 :$

> T

$$\left[\begin{array}{cccc} \text{Mintavételezés} & A \text{ tétel rossz}(R) & A \text{ tétel jó}(J) & \text{Összesen} \\ \text{Átvett tételek}(\hat{A}) & 4 & 0 & 85 \\ \text{Visszautasított tételek}(V) & 0 & 0 & 0 \\ \text{Összesen} & 9 & 0 & 120 \end{array} \right] \quad (1.6.32)$$

A peremek középső számait az összegből kivonással kapjuk. Végül a táblázat közepén álló számot a szélek kivonásával kapjuk!

> $T_{2,3} := T_{2,4} - T_{2,2} : T_{3,2} := T_{4,2} - T_{2,2} : T_{3,4} := T_{4,4} - T_{2,4} : T_{4,3} := T_{4,4} - T_{4,2} :$

$T_{3,3} := T_{3,4} - T_{3,2} : T$

Mintavételezés	A tétel rossz(R)	A tétel jó(J)	Összesen
Átvett tételek(Á)	4	81	85
Visszautasított tételek(V)	5	30	35
Összesen	9	111	120

(1.6.33)

(b) Elsőfajú hiba annak feltételes valószínűsége, hogy visszautasítunk olyan tételt, amely valójában jó.

$$P(\text{Elsőfajú hiba}) = P(\text{visszautasítjuk a tételt, feltéve hogy a tétel jó}) = P(V | J)$$

Tehát az első fajú hibát a $P(V | J) = \frac{P(VJ)}{P(J)}$ feltételes valószínűség kiszámításával kaphatjuk

meg. A $P(V \cdot J)$ valószínűséget a relatív gyakorisággal közelítjük. Tehát a V jelű sor és J jelű oszlop kereszteződésében álló 30-at el kell osztani az összes 120 megfigyelési számmal!

$$> P(VJ), P(J) := \frac{30}{120}, \frac{111}{120}$$

$$> P(V|J) = \frac{P(VJ)}{P(J)}; \text{első fajú hiba} = \text{evalf}(\%)$$

$$P(VJ), P(J) := \frac{1}{4}, \frac{37}{40}$$

$$P(V|J) = \frac{10}{37}$$

$$\text{első fajú hiba} = (P(V|J) = 0.2702702703) \quad (1.6.34)$$

Tehát az elsőfajú hiba kb. 27%.

(c) Másodfajú hiba = átveszünk rossz tételt esemény valószínűségének számítása

$$P(\text{másodfajú hiba}) = P(\text{átvesszük a tételt, feltéve hogy a tétel rossz}) = P(\hat{A} | R)$$

Tehát a másodfajú hibát a $P(\hat{A} | R) = \frac{P(\hat{A}R)}{P(R)}$ feltételes valószínűség kiszámításával kaphatjuk meg.

$$> P(\hat{A}R), P(R) := \frac{4}{120}, \frac{9}{120}$$

$$> P(\hat{A}|R) = \frac{P(\hat{A}R)}{P(R)}; \text{másodfajú hiba} = \text{evalf}(\%)$$

$$P(\hat{A}R), P(R) := \frac{1}{30}, \frac{3}{40}$$

$$P(\hat{A}|R) = \frac{4}{9}$$

$$\text{másodfajú hiba} = (P(\hat{A}|R) = 0.4444444444) \quad (1.6.35)$$

Tehát a másodfajú hiba 44.4%

(d) Az első és másodfajú hiba is nagy. Az átvételi terven úgy kell módosítani, hogy a hibák csökkenjenek! Például a mintában kevesebb hibás elemet kell megengedni, az átvételi küszöb során. Ezek a számítások illetve eljárások a statisztikai minőségszabályozás (angolul: Statistical Quality Control) témakörébe tartoznak.

▼ 4.7. Elméleti ellenőrző kérdések

4.7.1. Hogyan definiáljuk a $P(A|B)$ feltételes valószínűséget?

4.7.2. Hogyan kapjuk a valószínűségek szorzás-szabályát?

4.7.3. Egy kétszintű döntési fa ágaihoz milyen súlyokat írunk?

- 4.7.4. Hová írjuk a döntési fánál a szorzat eseményeket és valószínűségeit?
 4.7.5. Mi a közös jellemzője a valószínűségi táblázat és a döntés fa diagramnak?
 4.7.6. Mi a különbség a valószínűségi táblázat és a döntés fa diagram között?

▼ 4.8. Gyakorló feladatok

4.8.1. feladat

Három kockával dobunk. Mekkora annak valószínűsége, hogy az egyik kockával 6-ost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

4.8.2. feladat

Tudósok az egerek tájékozódási képességét és szokásait figyelik labirintusban. A labirintus 5 teremből (amelyeket bekameráztak) és az azokat összekötő folyosókból áll. A termek közül négyben élelem van (sajt és magvak) és egy teremben egy másik egér. A tudósok azt tapasztalták, hogy egy egér az egész napi elfoglaltságai között $\frac{2}{3}$ -ad részben valamelyik teremben tartózkodik

és $\frac{1}{3}$ -részben a folyosón rohangál. Az egér a négy élelmet tartalmazó teremben egyforma

valószínűséggel tartózkodik, míg a másik egérnél kétszer olyan gyakran fordul elő. A tudósok egy adott pillanatban keresik az egeret és nem találják az élelmet tartalmazó 4 teremben.

(a) Mekkora valószínűséggel van a másik egérnél (és nem a folyosón)?

(b) Az egérnek a teljes nap hányadrészét kellene a termekben tölteni, hogy a keresés fenti feltételes valószínűsége $\frac{1}{2}$ legyen?

4.8.3. feladat

Két szabályos 6 oldalú dobókockával dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az összeg 4 vagy 5 vagy 6 lesz, míg B azt, hogy mindkét dobás páros!

Számítsuk ki a $P(A | B)$ és $P(B|A)$ feltételes valószínűségeket!

4.8.4. feladat

Egy útvonalon 3 egymást követő forgalmi jelzőlámpa állíthatja meg az autósokat. A lámpák piros és zöld jelzéseit figyeljük csak és a sárga jelzést most figyelmen kívül hagyjuk. A kísérlet abból áll, hogy feljegyezzük, hogy egy autóst a lámpák az adott sorrendben megállították vagy tovább engedték.

Egy kimenetel lehet pl. a PZZ , mely azt jelenti, hogy az első lámpa piros, a második és harmadik zöldet jelzett.

Tegyük fel, hogy az egyes kimenetek egyformán valószínűek. Jelölje P_k , hogy a k-adik lámpa piros és Z_k a k-adik lámpa zöld eseményét, ahol $k=1,2,3$ lehet!

(a) Rajzoljuk fel az összes lehetséges kimenetek gráfját!

(b) Döntsük el, hogy függetlenek-e a P_2 , azaz a második lámpa piros és a Z_2 , azaz a második lámpa zöld események egymástól?

(c) Döntsük el, hogy függetlenek-e a P_1 , azaz az első lámpa piros és a P_2 , azaz a második lámpa piros események egymástól?

Szemléltessük a megoldást fa gráf segítségével!

4.8.5. feladat

Tekintsük azt a véletlen kísérletet, hogy két olyan **integrált áramköri chipet tesztelünk**, amelyek ugyanabból a szilikon ostyából valók és azt regisztráljuk minden esetben, hogy az áramkört át vesszük (Á) vagy visszautasítjuk (V). A kísérletnek 4 lehetséges kimenetele lehet: ÁÁ, ÁV, VÁ és VV. Előzetes megfigyelések alapján ismert az alábbi valószínűségi modell

$$P(VV)=0.01, \quad P(VÁ)=0.01, \quad P(ÁV)=0.01 \quad \text{és} \quad P(ÁÁ)=0.97.$$

(a) Határozzuk meg az $A = \{ \text{a második chipet visszautasítjuk} \}$ és a $B = \{ \text{az első chipet visszautasítjuk} \}$ események valószínűségeit!

(b) Számítsuk ki a második chip visszautasításának valószínűségét, feltéve, hogy az első chip visszautasított!

(c) Hogyan változtatta meg az első chip visszautasításának ismerete a második chip visszautasításának valószínűségét?

Szemléltessük a megoldást **mátrix** alakban is és **fa gráf** alakban is!

4.8.6. feladat

Tranzisztor minőségi ellenőrzése közben az alábbi adatokat jegyezték fel, csoportosítva azokat a vállalatok ("A", "B", "C") és a minőségi kategóriák ("Elfogadható", "Határeset", "Nem fogadható el") alapján:

	Minőségi kategóriák		
Vállalatok	Elfogadható	Határeset	Nem fogadható el
A	50%	40%	10%
B	60%	30%	10%
C	55%	25%	20%

A teljes termelés 30%-át az A vállalat, 40%-át a B vállalat adja. Kiválasztunk egy tranzisztort véletlenül. Mekkora a **valószínűsége**, hogy a kiválasztott tranzisztor

(a) az "A" vállalattól való és a minősége elfogadható?

(b) "Elfogadható" minőségű, ha tudjuk, hogy a "C" vállalattól származik?

(c) a "B" vállalattól származik, ha tudjuk, hogy az "határeset" minőségű?

Rajzoljuk fel az eredeti és az inverz fa diagramot a számításokhoz!

4.8.7. feladat

A vevők hűtőszekrény vásárlásait vizsgálva egy bizonyos háztartási gépeket árúsító üzletben a következő eseményeket figyelték:

A = a hűtőszekrényt Európában gyártották;

B = a hűtőszekrény egyben fagyasztó szekrény is;

C = a vevő hitelre vásárolt.

Az alábbi valószínűségeket rögzítették

$$P(A) = 0.75, P(B|A) = 0.9, P(B|A^c) = 0.8$$

$$P(C|A \cdot B) = 0.8, P(C|A \cdot B^c) = 0.6$$

$$P(C|A^c \cdot B) = 0.7, P(C|A^c \cdot B^c) = 0.3$$

(a) Készítse el a fa diagram első, második és harmadik elágazási szintjeit! Az egyes elágazásokra írja fel a megfelelő eseményeket és azok valószínűségeit!

(b) Számítsa ki a $P(A \cdot B \cdot C)$ valószínűséget!

(c) Számítsa ki a $P(B \cdot C)$ valószínűséget!

(d) Számítsa ki a $P(C)$ valószínűséget!

(e) Számítsa ki a $P(A|B \cdot C)$ valószínűséget, vagyis annak valószínűségét, hogy a hűtőszekrényt Európában gyártották, feltéve hogy fagyasztó részt is tartalmaz és hitelre vásárolták !

4.8.8. feladat

Határozzuk meg a $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B^c)$ és $P(A^c|B)$ valószínűségeket, ha adottak a

$$P(A + B) = \frac{3}{4}, P(A^c) = \frac{2}{3} \text{ és } P(A \cdot B) = \frac{1}{4}$$

4.8.9. feladat

Mutassuk meg, hogy ha $P(B) < P(A)$, akkor $P(B|A) < P(A|B)$!

4.8.10. feladat

Egy mobil telefont gyártó cég 5000 darab elektronikai alkatrészt vesz át naponta további felhasználásra. Egy 5000 darabot tartalmazó szállítmányt megfelelőnek neveznek, ha benne a selejtes darabok száma nem több, mint 20.

Átvételi eljárás:

A napi szállítmányból kivesznek $n=100$ darabot és megállapítják a selejtes darabok számát.

Átvételi terv:

Ha a selejtes darabok száma a 100 elemű mintában kisebb egyenlő, mint 6, akkor a tételt átveszik.

Ha a selejtes darabok száma a 100 elemű mintában nagyobb, mint 6, akkor a tételt visszautasítják.

A szállításról 300 napon keresztül a következő statisztikát rögzítették.

Mintavételi statisztika	Az 5000 tételből a rosszak ill. jók száma		
	Rossz tételek	Jó tételek	Összesen
Átvett tételek	5		250
Visszautasított tételek			
Összesen	20		300

(a) Töltsük ki a táblázat üresen hagyott celláit!

(b) Számítsuk ki az átvételi terv α elsőfajú hibáját! Tehát annak valószínűségét, hogy visszautasítunk jó szállítmányt!

(c) Számítsuk ki az átvételi terv β másodfajú hibáját! Tehát annak valószínűségét, hogy átveszünk rossz szállítmányt!

(d) Vonjunk le következtetéseket az átvételi tervre vonatkozóan!

4.8.11. feladat

Határozzuk meg a $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ és $P(B-A)$ valószínűségeket, ha adottak a $P(A+B) = \frac{8}{9}$,

$P(A \cdot B) = \frac{1}{4}$ és $P(B|A) = \frac{3}{4}$ valószínűségek!

4.8.12. feladat

Két dobozban golyók vannak, amelyek csak színeikben különböznek egymástól. Az első dobozban 5 fehér, 7 zöld és 6 piros, a másodikban 4 fehér, 8 zöld és 2 piros golyó van. Először feldobunk egy szabályos pénzérmét, majd ha fej, akkor az első, ha írás, akkor a második dobozból húzunk ki két golyót egymás után. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a két kivett golyó színe különböző lesz!

4.8.13. feladat

Határozzuk meg a $P(A)$, $P(B)$, $P(A^c|B^c)$ és $P(A^c \cdot B)$ valószínűségeket, ha $P(A+B) = \frac{4}{5}$,

$P(A^c) = \frac{1}{3}$, $P(A \cdot B) = \frac{1}{5}$ adottak!

4.8.14. feladat

Igaz-e az alábbi állítás? Válaszát indokolja!

Egy vizsgán a vizsgázó hallgatók 30%-a A szakos, 40%-a B szakos és 30%-a C szakos. Annak valószínűsége, hogy egy hallgatónak sikerült a vizsgája, az A szakosok esetén 0.4, B szakosok esetén 0.5 és C szakosok esetén 0.6. Ekkor a vizsgázók felének sikerült a vizsgája.

4.8.15. feladat

Igaz-e az alábbi állítás? Válaszát indokolja!

Háromszor egymástól függetlenül feldobunk egy kockát. Tekintsük az alábbi eseményeket $A = \{a \text{ három kockadobás közül legalább az egyik hatos}\}$ és $B = \{a \text{ három dobás értéke mind különböző}\}$.

Ekkor a $P(A|B)$ feltételes valószínűség értéke

$$\frac{1}{2}.$$

4.8.16. feladat

Igaz-e az alábbi állítás? Válaszát indokolja!

Ha az A és B független eseményekre teljesül a $P(A)=P(B)=p$ és $P(A+B)=1$, akkor $p=1$.

4.8.17. feladat

Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B és C eseményekre teljesül az alábbi állítás.

ÁLLÍTÁS.

Ha a $P(A|C) > P(B|C)$ és $P(A|C^c) > P(B|C^c)$, akkor $P(A) > P(B)$.

Az állítás megfordítása általában nem igaz!

4.8.18. feladat

Határozzuk meg a $P(A)$, $P(B)$ és $P(A \cdot B)$ valószínűségeket, ha adottak a $P(A + B) = \frac{23}{25}$,

$P(A|B) = \frac{3}{5}$ és $P(B - A) = \frac{8}{25}$ valószínűségek.

4.8.19. feladat

Igaz-e az alábbi állítás? Válaszát indokolja!

A nők 60%-ának barna, 20%-ának szőke és a maradék 20%-nak vörös a haj színe. A barna hajú nők 5%-ának van kék szeme, míg a szőkék 50%-ának és a vörösek 20%-ának van kék szeme. Egy bulvár lap azt írta, hogy a nők 16%-ának kék szeme van. Igaz-e az állítás?

4.8.20. feladat

Egy rakéta kilövés véletlenül bekövetkezik, ha egy A relé és egy másik B relé is egyszerre meghibásodik. Az A relé meghibásodásának eseménye $P(A)=0.01$ valószínűséggel, míg a B relé meghibásodásának eseménye $P(B)=0.03$ valószínűséggel következik be. Ismert, hogy ha az A relé meghibásodik, akkor a B meghibásodásának valószínűsége 0,06.

(a) Milyen valószínűséggel fordul elő, hogy véletlen rakéta kilövés következik be?

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy az A relé meghibásodik, ha a B relé meghibásodott?

4.8.21. feladat

Igaz-e az alábbi állítás? Válaszát indokolja!

Egy diák $\frac{2}{3}$ valószínűséggel tudja a tesztkérdésre adandó helyes választ. Ha nem tudja, akkor tippel és a helyes tipp esélye $\frac{1}{4}$. Tudjuk, hogy a diák válasza helyes. Ekkor $\frac{1}{9}$ annak az esélye, hogy nem tudta a helyes választ?

4.8.22. feladat

Igaz-e az alábbi állítás? Válaszát indokolja!

Egy diák $\frac{2}{3}$ valószínűséggel tudja a tesztkérdésre adandó helyes választ. Ha nem tudja, akkor tippel és a helyes tipp esélye $\frac{1}{3}$. Tudjuk, hogy a diák válasza nem helyes. Ekkor $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nem tudta a helyes választ?

4.8.23. feladat

Egy diák $\frac{2}{3}$ valószínűséggel tudja a tesztkérdésre adandó helyes választ. Ha nem tudja, akkor tippel és a helyes tipp esélye $\frac{1}{3}$. Tudjuk, hogy a diák válasza helyes. Ekkor $\frac{2}{9}$ annak az esélye, hogy nem tudta a helyes választ?

>