

▼ 5. Események függetlensége. Összetett rendszerek megbízhatósága.

Valószínűesszámitás és statisztika számítógép algebrai támogatással	Készült a PTE PMMIK és a TÁMOP -4.1.2.A/1-11/1-2011-0098 támogatásával
Klincsik Mihály	

▼ 5.1.Bevezetés

Ha az A esemény $P(A)$ valószínűsége megegyezik $P(A|B)$ feltételes valószínűséggel, akkor azt mondjuk, hogy az A esemény független a B eseménytől. Ebből a definícióból nem világos, hogy vajon a függetlenség szimmetrikus tulajdonság-e. Ezért adunk egy ekvivalens másik definíciót $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ formában, amelyből kiderül, hogy a függetlenség egy szimmetrikus tulajdonság.

Ha az A és B események függetlenek, akkor függetlenek lesznek egymástól

- (i) az A (A tagadás) és B események,
- (ii) $\underline{A}$ és B (B tagadás) események,
- (iii) A (A tagadás) és $\underline{B}$ (B tagadás) események

A függetlenségi fogalmak fontos alkalmazási területe a párhuzamosan és sorosan kapcsolt rendszerek eredő megbízhatóságának meghatározása az egyes alrendszerek megbízhatóságának ismeretében.

Egy sorosan kapcsolt rendszer, akkor működik, ha minden részrendszere is működik. Amennyiben a függetlenséget az elromlás események között feltesszük, akkor az eredő megbízhatóság a $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ képlettel számolható, ahol p_i az i -ik részrendszer megbízhatósága ($0 < p_i < 1$). A képlet elemzésével könnyű látni, hogy $p \leq \min(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Tehát a sorosan kapcsolt rendszer megbízhatósága rosszabb lesz a legrosszabb részmodulnál is. Ezért sorosan csak nagyon nagy megbízhatóságú rendszereket kapcsoljunk össze.

Egy párhuzamosan kapcsolt rendszer, akkor nem működik, ha egyik részrendszere sem működik. Amennyiben a függetlenséget az elromlás események között feltesszük, akkor az eredő megbízhatóság a $p = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot \dots \cdot (1 - p_n)$ képlettel számolható, ahol p_i az i -ik részrendszer megbízhatósága ($0 < p_i < 1$). A képlet elemzésével könnyű látni, hogy $p \geq \max(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Tehát a párhuzamosan kapcsolt rendszer megbízhatósága jobb lesz a legjobb részmodulnál is. Ezért párhuzamos kapcsolás javítja a megbízhatóságot. Ha az anyagi erőforrások megengedik, akkor úgy növelhetjük a mérnöki létesítményeink (pl. áram energia ellátás, repülőgépet irányító vezérlést...) működési biztonságát, ha redundánsan beépítünk még ugyanolyan alrendszert párhuzamosan. Mert, ha elromlik az egyik, akkor funkcióját átveszi a másik. Mindezek a megoldások nagyobb költséget igényelnek.

Célunk az alábbi fogalmak, összefüggések és eljárások megismerése, megértése	
Két esemény függetlenségének eredeti definíciója a feltételes valószínűséggel	Sorosan kapcsolt alkatrészekből álló rendszer eredő megbízhatóságát a $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ szorzattal számoljuk
Két esemény függetlenségének másik definíciója a szorzat esemény valószínűségével	Párhuzamosan kapcsolt alkatrészekből álló rendszer eredő megbízhatóságát a $p = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot \dots \cdot (1 - p_n)$ képlettel számoljuk

Események függetlenségének megjelenése a döntés fában: a második döntéshez tartozó súlyok nem feltételes valószínűségek, hanem valószínűségek

A soros kapcsolás lerontja a megbízhatóságot

Események függetlenségének megjelenése a valószínűségi táblázatban: minden cella elem egyenlő a sor és oszlop végén levő valószínűségek szorzatával

A párhuzamos kapcsolás javítja a megbízhatóságot

▼ 5.2. Két esemény függetlensége

5.2.1. DEFINÍCIÓ. Az A esemény független a B eseménytől

Ha teljesül a

$$P(A) = P(A|B)$$

egyenlőség akkor azt mondjuk, hogy az A esemény független B-től.

Szavakkal ez azt jelenti, hogy az A esemény valószínűsége nem változik, akár felteszem, hogy a B esemény bekövetkezett, akár nem teszem fel. Tehát a B esemény bekövetkezése nincs hatással az A esemény valószínűségére.

A fenti definícióból nem világos, hogy ha az A esemény független a B eseménytől, akkor vajon a B esemény is független-e az A eseménytől. A mindennapi szóhasználatban két dolog függetlensége alatt automatikusan szimmetrikus tulajdonságot értünk. Van egy másik értelmezése is az események függetlenségének, amely mutatja a szimmetriát és a következő tétel az alapja.

5.2.2. TÉTEL. Független események szorzatának valószínűségét tényezőnként vehetjük

Az A és B események akkor és csakis akkor függetlenek, ha

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Bizonyítás

Két irányt kell bizonyítani

(i) $\Rightarrow$ Legyen A és B független. Ekkor a függetlenség 5.2.1. definíciója alapján

$$P(A|B) = P(A).$$

A $P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B)$ szorzás szabályba behelyettesítve a függetlenség feltételét

$$P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$$

azonnal kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget.

(ii) $\Leftarrow$ Teljesüljön most a tétel $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ egyenlősége. Meg kell mutatni, hogy az A esemény független a B eseménytől. A feltételes valószínűség 4.3.1. definíciója szerint és a tétel egyenlősége alapján

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

Tehát az A esemény független a B eseménytől az 5.2.1. definíció értelmében. Q.e.d.

A tétel alapján egy újabb függetlenségi definíciót mondhatunk ki, amelyből a függetlenség szimmetria tulajdonsága azonnal látszik.

5.2.3. DEFINÍCIÓ. Két esemény függetlenségének újabb értelmezése

Az A és B eseményeket függetleneknek nevezzük, ha

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

teljesül.

A függetlenség ezen definíciója jobban mutatja, hogy az A és B függetlensége szimmetrikus

tulajdonság. Tehát, ha A független B-től, akkor B is független A-tól.

5.2. PÉLDA. Függetlenség ellenőrzése definíció és táblázat alapján (folytatás)

Két szabályos 6 oldalú dobókockával dobunk. Jelölje A azt az eseményt, hogy az összeg 4 vagy 5 vagy 6 lesz, míg B azt, hogy mindkét dobás páros!

(a) Számítsuk ki a $P(A | B)$ feltételes valószínűséget!

(b) Függetlenek-e egymástól az A és B események?

(c) Hogyan változik az eredmény, ha valamelyik esemény tagadását vesszük?

(d) Ábrázoljuk 2x2-es táblázatban Ω elemeinek A és B halmazokba való szétosztását! Mit jelent a függetlenség a táblázatban!

Megoldás

Korábban a feltételes valószínűséget a definíció alapján kiszámoltuk.

Az $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ Descartes-szorzat $36 = V_6^2$ eleméből meg kell nézni, hogy mennyi elem esik az

$$A \cdot B, A \cdot \overline{B}, \overline{A} \cdot B, \overline{A} \cdot \overline{B}$$

diszjunkt tartományokba.

> restart

> $E := \text{Matrix}(6, 6, (x, y) \rightarrow [x, y]) :$

> $\Omega := \text{convert}(E, \text{set})$

> $n := \text{numelems}(\Omega)$

$\Omega := \{[1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [3, 4], [3, 5], [3, 6], [4, 1], [4, 2], [4, 3], [4, 4], [4, 5], [4, 6], [5, 1], [5, 2], [5, 3], [5, 4], [5, 5], [5, 6], [6, 1], [6, 2], [6, 3], [6, 4], [6, 5], [6, 6]\}$

$n := 36$

(1.2.1)

A lehetséges összegeket kiolvassuk az összegek mátrixból és az $A = \{[i, j] \in \Omega \mid i + j = 4, 5, 6\}$ halmaz elemeit ez alapján megadjuk.

> $\text{összegek} = \text{Matrix}(6, 6, (x, y) \rightarrow x + y)$

> $A := \{[1, 3], [2, 2], [3, 1], [1, 4], [2, 3], [3, 2], [4, 1], [1, 5], [2, 4], [3, 3], [4, 2], [5, 1]\}$

> $nA := \text{numelems}(A)$

$$\text{összegek} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$A := \{[1, 3], [1, 4], [1, 5], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [4, 1], [4, 2], [5, 1]\}$

$nA := 12$

(1.2.2)

Mindkét dobás páros esemény elemeit két egymásba ágyazott ciklussal tudjuk generálni!

> $B := \{\text{seq}(\text{seq}([x, y], y = 2..6, 2), x = 2..6, 2)\}$

> $nB := \text{nops}(B)$

$$B := \{[2, 2], [2, 4], [2, 6], [4, 2], [4, 4], [4, 6], [6, 2], [6, 4], [6, 6]\}$$

$$nB := 9$$

(1.2.3)

(b) Függetlenek-e egymástól az A és B események?

Számoljuk ki a $P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$ és $P(A)$ valószínűségeket! Ha egyenlők, akkor A és B függetlenek.

$$> AB := A \cap B; nAB := nops(AB); (P('AB')) := \frac{nAB}{n};$$

$$> (P('B')) := \frac{nB}{n}$$

$$> 'P(A|B)' := \frac{P('AB')}{P('B')}$$

$$> (P('A')) := \frac{nA}{n}$$

$$AB := \{[2, 2], [2, 4], [4, 2]\}$$

$$nAB := 3$$

$$P(AB) := \frac{1}{12}$$

$$P(B) := \frac{1}{4}$$

$$P(A|B) := \frac{1}{3}$$

$$P(A) := \frac{1}{3}$$

(1.2.4)

Tehát A és B függetlenek, mert $P(A|B) = P(A) = \frac{1}{3}$.

Ellenőrizzük az $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ egyenlőség teljesülését is!

$$> feltétel := P('A') \cdot P('B') = P('AB')$$

$$feltétel := \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

(1.2.5)

Tehát az A és B események függetlenek!

(c) Hogyan változik az eredmény, ha valamelyik esemény tagadását vesszük?

Mutassuk meg, hogy pl. A tagadás független B-től!

$$> (P('Ac')) := 1 - P('A')$$

$$> 'P(Ac)' \cdot 'P(B)' = P(Ac) \cdot P(B)$$

$$P(Ac) := \frac{2}{3}$$

$$P(Ac) P(B) = \frac{1}{6}$$

(1.2.6)

$$> Ac := \Omega \text{ minus } A; AcB := Ac \cap B; nAc := nops(Ac); nAcB := nops(AcB)$$

$$> (P('AcB')) := \frac{nAcB}{n}$$

$$Ac := \{[1, 1], [1, 2], [1, 6], [2, 1], [2, 5], [2, 6], [3, 4], [3, 5], [3, 6], [4, 3], [4, 4], [4, 5], [4, 6], [5, 2], [5, 3], [5, 4], [5, 5], [5, 6], [6, 1], [6, 2], [6, 3], [6, 4], [6, 5], [6, 6]\}$$

$$\begin{aligned}
AcB &:= \{[2, 6], [4, 4], [4, 6], [6, 2], [6, 4], [6, 6]\} \\
nAc &:= 24 \\
nAcB &:= 6 \\
P(AcB) &:= \frac{1}{6}
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

Tehát valóban teljesül a $P(A^c \cdot B) = P(A^c) \cdot P(B)$ egyenlőség, amely szerint $\overline{A}$ és B események függetlenek!

Készítsünk egy táblázatot, amelyikben az A és tagadása, B és tagadása halmazok elemeinek száma szerepel, valamint az összeg sorok és oszlopok!

$$\begin{aligned}
&> ABc := A \cap (\Omega \text{ minus } B); nABc := nops(ABc) \\
&\quad ABc := \{[1, 3], [1, 4], [1, 5], [2, 3], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [4, 1], [5, 1]\} \\
&\quad nABc := 9
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

$$\begin{aligned}
&> F := \text{Matrix}([[\text{függetlenség}, 'B', 'Bc', \text{összeg}], ['A', nAB, nABc, nA], ['Ac', nB - nAB, nAc \\
&\quad - nB + nAB, nAc], [\text{összeg}, nB, nAc - nB + nAB + nABc, n]])
\end{aligned}$$

$$F := \begin{bmatrix} \text{függetlenség} & B & Bc & \text{összeg} \\ A & 3 & 9 & 12 \\ Ac & 6 & 18 & 24 \\ \text{összeg} & 9 & 27 & 36 \end{bmatrix} \tag{1.2.9}$$

Ellenőrizzük, hogy a táblázat egy belső cellájába írt szám teljesíti azt a feltételt, hogy egyenlő a sor végén levő szám és az oszlop végén levő számok szorzata, osztva a teljes 36 összeggel. Ez a függetlenség miatt teljesül, mert például

$$\begin{aligned}
P(A \cdot B) &= \frac{|A \cdot B|}{n} = P(A) \cdot P(B) = \frac{|A|}{n} \cdot \frac{|B|}{n} \\
|A \cdot B| &= \frac{|A| \cdot |B|}{n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> \text{for } i \text{ from } 2 \text{ to } 3 \text{ do} \\
&\quad \text{for } j \text{ from } 2 \text{ to } 3 \text{ do} \\
&\quad \quad \text{print} \left(F_{i,j} = \frac{F_{i,4} \cdot F_{4,j}}{F_{4,4}} \right) \\
&\quad \text{end do} \\
&\text{end do}
\end{aligned}$$

$$3 = 3$$

$$9 = 9$$

$$6 = 6$$

$$18 = 18$$

$$\tag{1.2.10}$$

Az egyenlőségek azt jelzik, hogy mindegyik cella elemre teljesülnek a függetlenség feltétele.

Tetszőleges 2x2 táblázatban a fenti tulajdonságot ellenőrizhetjük. Teljesülése esetén az adatokat függetleneknek nevezhetjük.

Ha egy táblázat nem független adatokat mutat, akkor képezhetünk belőle egy másik olyan táblázatot, amely független adatokat mutat és a sor végén és oszlop végén levő adatok megegyeznek az eredeti összegekkel.

▼ 5.3. Tételek események függetlenségére

5.3.1. TÉTEL. Független események tagadásai is függetlenek egymástól

Ha az A és B események **függetlenek**, akkor

- (a) A és $\overline{B}$ események is **függetlenek**;
- (b) $\overline{A}$ és B események is **függetlenek**;
- (c) $\overline{A}$ és $\overline{B}$ események is **függetlenek**.

Bizonyítás

(a) Feltesszük, hogy A és B függetlenek, azaz $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. Meg kell mutatni, hogy $\overline{A}$ és B is függetlenek, azaz $P(\overline{A} \cdot B) = P(\overline{A}) \cdot P(B)$ teljesül.

Alkalmazzuk az események különbségére vonatkozó azonosságot, A, B függetlenségét és a tagadás esemény valószínűségére vonatkozó azonosságot

$$P(\overline{A} \cdot B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cdot B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot (1 - P(A)) = P(\overline{A}) \cdot P(B).$$

Ezzel igazoltuk a tétel (a) állítását.

A tétel (b) részének bizonyítása hasonló, mint az (a) rész bizonyítása csak az A és B szerepet cserélnek.

(c) Meg kell mutatni, hogy ha $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, akkor $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$ teljesül. Használjuk a tagadás esemény valószínűségére vonatkozó azonosságot, a DeMorgan azonosságot, az $A+B$ valószínűségére vonatkozó azonosságot és a függetlenséget

$$P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - P(\overline{A \cdot B}) = 1 - P(\overline{A} + \overline{B}) = 1 - P(A + B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cdot B)) =$$

$$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$$

Ezzel a tétel állítását igazoltuk. Q.e.d.

5.3.2. PÉLDA. Független meghibásodások

Két egymástól függetlenül működő készülék esetén annak valószínűsége, hogy az egyik 1 órán belül üzemzavar miatt megáll 20%, a másik 1 órán belül üzemzavar miatt megáll 15%.

Mi a valószínűsége annak, hogy egyik készülék se áll meg 1 órán belül?

Megoldás

A feladatban szereplő eseményekre vezessünk be jelöléseket!

$A = \{ \text{az első készülék 1 órán belül üzemzavar miatt megáll} \}$

$B = \{ \text{a második készülék 1 órán belül üzemzavar miatt megáll} \}$

A feltételek szerint $P(A) = 0.2$ és $P(B) = 0.15$.

A feladat a $P(\overline{A} \cdot \overline{B})$ valószínűséget kérdezi!

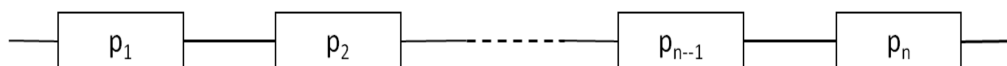
Mivel A és B függetlenek, ezért $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is függetlenek. Tehát

$$P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = (1 - 0.2) \cdot (1 - 0.15) = 0.8 \cdot 0.85 = 0.68.$$

Tehát 68% annak esélye, hogy egyik készülék se áll meg 1 órán belül üzemzavar miatt. ♣

▼ 5.4. Sorosan és párhuzamosan kapcsolt rendszerek megbízhatósága

Tekintsünk n darab sorosan kapcsolt modult vagy részrendszert, amelyek megbízhatósága $p_1, p_2, \dots, p_n$. Ez azt jelenti, hogy az i -ik részrendszer egy adott időintervallumban p_i valószínűséggel működik. A megbízhatóság annál jobb, minél közelebb van p_i értéke 1-hez.



Definiáljuk az alrendszerek működési eseményeit

$A_k = \{ \text{a } k\text{-ik alrendszer működik egy adott idő intervallumon belül} \}$

$$p_k = P(A_k) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Feltétel: az egyes alrendszerek egymástól függetlenül hibásodnak meg és így függetlenek a működések is.

Legyen

$B = \{ \text{a sorosan kapcsolt rendszer egésze az adott idő intervallumon belül működik} \}.$

Kérdés: Hogyan számolhatjuk ki a $P(B)$ valószínűséget az alrendszerek p_k megbízhatóságának ismeretében?

A sorosan kapcsolt rendszer egésze akkor működődik, ha működőképes a rendszer mindegyik alrendszere, azaz

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n.$$

A függetlenség alapján

$$p = P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n.$$

Sorosan kapcsolt rendszer megbízhatósága „rosszabb”, mint a legrosszabb megbízhatóságú alrendszer megbízhatósága

$$p \leq \min\{p_1, p_2, \dots, p_n\}.$$

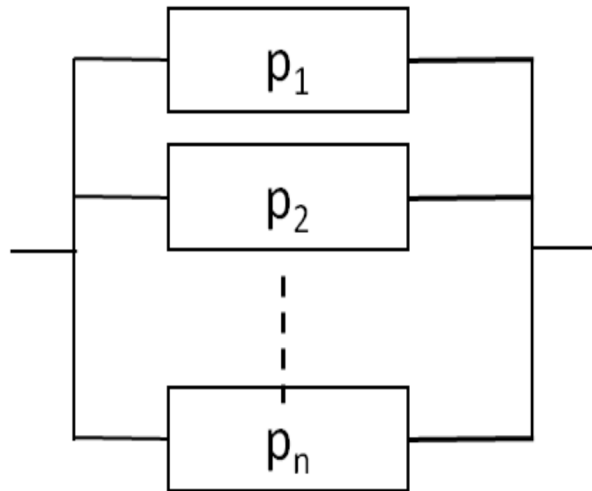
5.4.1. TÉTEL. Sorosan kapcsolt rendszer megbízhatósága

Ha a $p_1, p_2, \dots, p_n$ megbízhatóságú és függetlenül működő alrendszerek **sorosan** kapcsoltak, akkor az eredő p megbízhatóságot a

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

szorzattal számolhatjuk.

Tekintsünk most n darab párhuzamosan kapcsolt modult vagy részrendszert, amelyek megbízhatósága $p_1, p_2, \dots, p_n$.



$A_k = \{ \text{a } k\text{-ik alrendszer működik egy adott idő intervallumon belül} \}$ és $p_k = P(A_k) \quad (k=1, 2, \dots, n).$

Feltétel: az egyes alrendszerek egymástól függetlenül hibásodnak meg és így függetlenek a működések is.

Legyen

$B = \{ \text{a párhuzamosan kapcsolt rendszer egésze az adott idő intervallumon belül működik} \}.$

Kérdés: Hogyan számolhatjuk ki a $P(B)$ valószínűséget az alrendszerek p_k megbízhatóságának ismeretében?

A párhuzamosan kapcsolt rendszer egésze akkor **nem működik**, ha egyik alrendszere **sem működik**, azaz

$$\overline{B} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}.$$

Mivel független események tagadásai is függetlenek, ezért

$$P(\overline{B}) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_n}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_n}).$$

A $P(\overline{A_i})$ tagadás események valószínűségeit helyettesítsük az $(1 - P(A_i))$ valószínűséggel, valamint $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$ azonosság alapján

$$p = P(B) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \dots \cdot (1 - P(A_n)) = 1 - (1 - p_1) \cdot \dots \cdot (1 - p_n).$$

5.4.2. TÉTEL. Párhuzamosan kapcsolt rendszer megbízhatósága

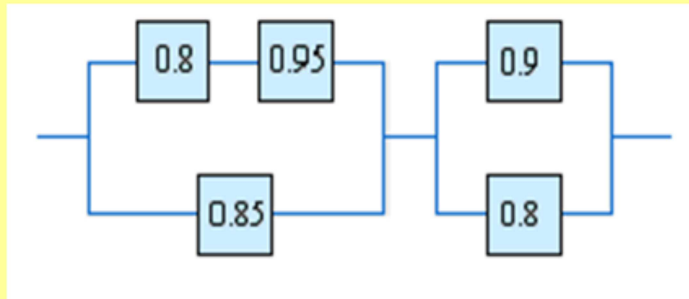
Ha a $p_1, p_2, \dots, p_n$ megbízhatóságú és függetlenül működő alrendszerek **párhuzamosan** kapcsoltak, akkor az eredő p megbízhatóságot a

$$p = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot \dots \cdot (1 - p_n)$$

képlettel számolhatjuk.

5.4.3. PÉLDA. Áramkör megbízhatósága

Egy áramkör 5 egymástól függetlenül működő alkatrészből áll az alábbi ábrának megfelelő elrendezésben



Annak valószínűsége, hogy egy bizonyos időintervallumon belül nem romlik el a megfelelő alkatrész $p_1 = 0.8, p_2 = 0.95, p_3 = 0.85, p_4 = 0.9, p_5 = 0.8$.

Mekkora a valószínűsége annak, hogy a vizsgált időintervallumon belül az egész áramkör működőképes?

Megoldás

A feladatban szereplő eseményekre vezessünk be jelöléseket!

$A_k = \{ \text{a } k\text{-edik készülék a vizsgált időintervallumon belül nem romlik el} \}$, ahol $k=1,2,3,4, 5$ lehet.

$B = \{ \text{az egész áramkör a vizsgált időintervallumon belül működőképes lesz} \}$

A feltételek szerint

$$P(A_1) = p_1 = 0.8, P(A_2) = p_2 = 0.95, P(A_3) = p_3 = 0.85, P(A_4) = p_4 = 0.9 \text{ és } P(A_5) = p_5 = 0.8.$$

Feladat a $P(B) = p$ valószínűség meghatározása.

Az 1. és 2. áramköri elemek sorosan kapcsoltak, ezért ezek eredő megbízhatósága az egyes megbízhatóságok szorzata

$$p_{12} = 0.8 \cdot 0.95 = 0.76.$$

A p_{12} megbízhatóságú blokk és a 3. áramköri elem párhuzamosan kapcsoltak, ezért

$$p_{123}=1-(1-0.76) \cdot (1-0.85)=1-0.24 \cdot 0.15=1-0.036=0.964$$

A 4. és 5. áramköri elemek párhuzamosan kapcsolak, ezért ezek p_{45} eredő megbízhatóságának számításához az egyes megbízhatóságok 1-ből kivont szorzatait kell kivonni 1-ből

$$p_{45}=1-(1-0.9) \cdot (1-0.8)=1-0.1 \cdot 0.2=1-0.02=0.98.$$

A p_{123} és p_{45} blokkok sorosan kapcsolak, ezért ezek p eredő megbízhatósága az egyes megbízhatóságok szorzata

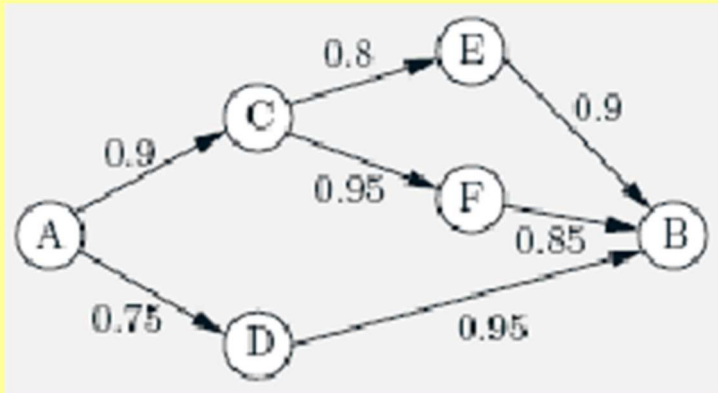
$$p=p_{123} \cdot p_{45}=0.964 \cdot 0.98=0.94472$$

Tehát a teljes áramkör az adott időintervallum 94.47%-ában működőképes. ♣

Összetett rendszerek nagy számú komponens tartalmazhatnak, amelyek bonyolult módon lehetnek összekapcsolva. Ezért a meghibásodott komponensek kiszűrése igen komoly és nehéz feladat. Feltételezzük, hogy az egyes összetevők meghibásodásának eseményei egymástól függetlenek. Ez a feltételezés egyszerűsíti megbízhatósági számításokat.

5.4. PÉLDA

Egy számítógép hálózat az A és B csomópontokat köti össze, a C, D, E és F közbenső csomópontokon keresztül az ábrán látható módon vezetékekkel.



Minden közvetlenül összekötött X és Y csomópont között a vonal egy adott $p_{X,Y}$ valószínűséggel működik. Feltételezzük, hogy a kapcsolati hibák egymástól **függetlenül** fordulnak elő. Az ábrán látható működési valószínűségek adottak

$$p_{A,C}=0.9, p_{A,D}=0.75, p_{C,E}=0.8, p_{C,F}=0.99, p_{D,B}=0.9, p_{E,B}=0.9, p_{F,B}=0.85.$$

KÉRDÉS

Mekkora a valószínűsége, hogy az A és B csomópontok között **van kapcsolat**?

MEGOLDÁS

A hálózatot fel kell bontani sorosan és párhuzamosan kapcsolt alrendszerekre!

Ugyanis a sorosan kapcsolt és a párhuzamosan kapcsolt rendszerek megbízhatóságát az összetevők megbízhatóságaiból egyszerűen kiszámíthatjuk.

SOROSAN KAPCSOLT RENDSZEREK MEGBÍZHATÓSÁGA

Tekintsük az alábbi 3 sorosan kapcsolt rendszert. Jelöljük az egyes elemek megbízhatóságát p_1 , p_2 és p_3 valószínűségekkel. Tehát a k-adik komponens az esetek $100 p_k$ %-ban működik és $100 (1 - p_k)$ %-ban nem működik. Ekkor a soros kapcsolás miatt az egész rendszer akkor működik, ha mindegyik komponens működik. A függetlenség miatt az alábbi levezetés teljesül

$$\begin{aligned} P(\text{a rendszer működik}) &= P(\{ \text{az 1. működik} \} \text{ ÉS } \{ \text{a 2. működik} \} \text{ ÉS } \{ \text{a 3. működik} \}) = \\ &= P(\{ \text{az 1. működik} \}) * P(\{ \text{a 2. működik} \}) * P(\{ \text{a 3. működik} \}) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \end{aligned}$$

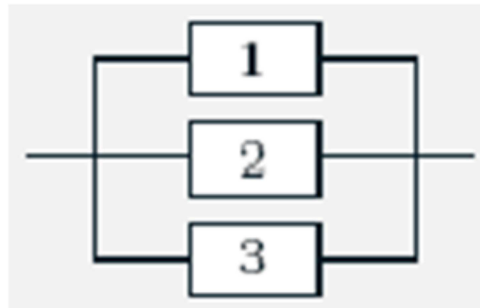


Tehát a sorosan kapcsolt komponensekből álló rendszer megbízhatósága az egyes komponensek megbízhatóságainak **szorzata**.

PÁRHUZAMOSAN KAPCSOLT RENDSZEREK MEGBÍZHATÓSÁGA

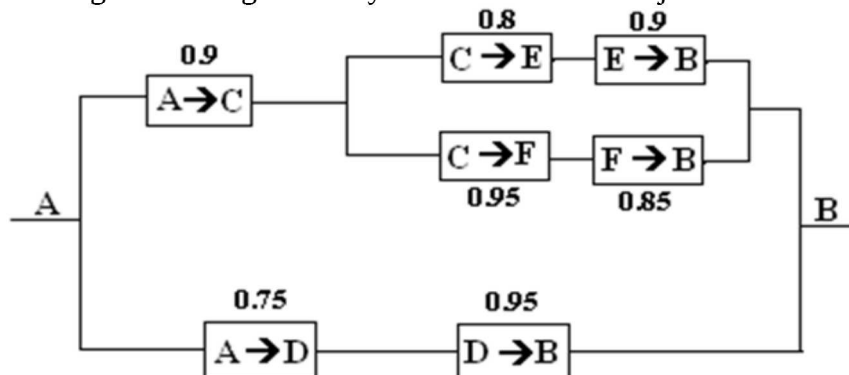
Tekintsük az alábbi 3 párhuzamosan kapcsolt rendszert. Jelölje ugyanúgy az egyes elemek megbízhatóságát p_1 , p_2 és p_3 valószínűségek. Ekkor a párhuzamos kapcsolás miatt az egész rendszer akkor **nem működik**, ha **egyik sem működik**. Nem csak a működések függetlenek, hanem a nem működések is, ezért

$$\begin{aligned}
 P(\text{a rendszer működik}) &= 1 - P(\text{a rendszer nem működik}) = \\
 &= 1 - P(\{ \text{az 1. nem működik} \} \text{ ÉS } \{ \text{a 2. nem működik} \} \text{ ÉS } \{ \text{a 3. nem működik} \}) = \\
 &= 1 - P(\{ \text{az 1. nem működik} \}) * P(\{ \text{a 2. nem működik} \}) * P(\{ \text{a 3. nem működik} \}) = \\
 &= 1 - (1 - p_1) * (1 - p_2) * (1 - p_3)
 \end{aligned}$$



Tehát párhuzamosan kapcsolt komponensekből álló rendszer megbízhatóságát megkapjuk, ha az egyes komponensek megbízhatóságát kivonjuk 1-ből, majd ezeket összeszorozzuk és a szorzatot kivonjuk 1-ből.

Térjünk vissza a probléma megoldásához. A hálózatot az jellemzi, hogy a vezetékek vagyis a kapcsolatok megbízhatósága van adva. Tehát a komponenseket célszerű $X \rightarrow Y$ alakban megadni, hogy mit - mivel köt össze. Ilyen módon az egyes összetevők párhuzamos és soros kapcsolódását próbáljuk kibogozni! A végeredményt az alábbi ábra mutatja.



Vegyük fel az adatokat Maple-ben!

> restart :

$$P_{AC} := 0.9000000000; P_{AD} := 0.7500000000; P_{CE} := 0.8000000000; P_{CF} := 0.9500000000; \\ P_{EB} := 0.9000000000; P_{FB} := 0.8500000000; P_{DB} := 0.9500000000$$

$$P_{AC} := 0.9000000000$$

$$P_{AD} := 0.7500000000$$

$$P_{CE} := 0.8000000000$$

$$P_{CF} := 0.9500000000$$

$$P_{EB} := 0.9000000000$$

$$P_{FB} := 0.8500000000$$

$$P_{DB} := 0.9500000000 \quad (1.4.1)$$

Kezdjük az alábbi két sorosan kapcsolt alrendszer megbízhatóságával:

(C->E) és (E->B) sorba kapcsoltak

(C->F) és (F->B) sorba kapcsoltak.

A kapott számítások a C->B közötti két párhuzamosan kapcsolt komponensek megbízhatóságát adják, ennek megfelelően CB1 és CB2 jelöléseket használjuk.

$$> P[CB1] := P[CE] P[EB]; P[CB2] := P[CF] P[FB]$$

$$P_{CB1} := 0.7200000000$$

$$P_{CB2} := 0.8075000000 \quad (1.4.2)$$

Számítsuk ki a CB1 és CB2 két párhuzamosan kapcsolt alrendszerből CB kapcsolat megbízhatóságát!

$$> P[CB] := 1 - (1 - P[CB1]) (1 - P[CB2])$$

$$P_{CB} := 0.9461000000 \quad (1.4.3)$$

A most kapott CB komponens sorba van kötve az AC komponenssel! Így kapjuk az AB közötti kapcsolat egyik párhuzamos alrendszerének megbízhatóságát. Így az elnevezés AB1 lesz.

$$> P[AB1] := P[AC] P[CB]$$

$$P_{AB1} := 0.8514900000 \quad (1.4.4)$$

Az AB közötti alsó ágon két sorba kapcsolt komponens van. Így kapjuk az AB2 alrendszer megbízhatóságát.

$$> P[AB2] := P[AD] P[DB]$$

$$P_{AB2} := 0.7125000000 \quad (1.4.5)$$

Végül az AB1 és AB2 alrendszerek párhuzamosan kapcsoltak. Számítsuk ki a feladat áltl kért AB működés megbízhatóságát!

$$> P[AB] := 1 - (1 - P[AB1]) (1 - P[AB2])$$

$$P_{AB} := 0.9573033750 \quad (1.4.6)$$

Tehát az A és B közötti hálózat megbízhatósága 0.957, vagyis az esetek 95.7%-ában működik és csak kb. 4.3%-ban nincs kapcsolat az A és B csomópontok között.

Számoljuk ki, hogy egy nap 24 órájából átlagosan mennyi ideig **nincs kapcsolat** az A és B csomópontok között!

$$> 24 (1 - P[AB])$$

$$1.0247190000 \quad (1.4.7)$$

Vagyis naponta összesen 1 óra szünet lehet az A és B csomópontok közötti kapcsolatban. Ezen javítani kétféleképpen lehet: vagy az elemek megbízhatóságát növeljük vagy újabb párhuzamos elemeket iktatunk be. Mindegyik megoldás újabb költségek árán megy. ♣

▼ 5.5. Függelenségi vizsgálatok

5.5.1. PÉLDA. Balesetek bekövetkezése

Egy gyorsforgalmi útszakaszon, annak valószínűsége, hogy baleset következik be egy adott percben **emberi hibából** eredően $p_1=10^{-5} = 0.00001$ és hogy a baleset az adott percben **műszaki hiba** miatt következik be $p_2=10^{-7}=0.0000001$. Feltételezzük, hogy ez a kétféle hiba előfordulása egymástól független.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy adott percben **baleset következik be**?

(b) Ha az egymást követő percekben bekövetkező események (baleset vagy balesetmentesség) kölcsönösen függetlenek akkor, vajon mekkora a valószínűsége, hogy **egy év alatt nem lesz baleset** ezen az útszakaszon? (Számoljuk az évet 365 nappal!)

MEGOLDÁS

Legyen $A = \{ \text{a baleset emberi hibából következett be} \}$ és $B = \{ \text{a baleset műszaki hiba miatt következett be} \}$ a feladatban szereplő két esemény. Ezek valószínűségei adottak $P(A) = p_1 = 10^{-5}$ és $P(B) = p_2 = 10^{-7}$.

> $\text{restart} : (P(A)) := 10^{-5};$

> $(P(B)) := 10^{-7}$

$$P(A) := \frac{1}{100000}$$

$$P(B) := \frac{1}{10000000} \quad (1.5.1)$$

(a) Ki kell számolni az $(A+B)$ összeg esemény valószínűségét. Használjuk a $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ azonosságot!

> $'P(A+B)' := P(A) + P(B) - P(AB);$

$$P(A+B) := \frac{101}{10000000} - P(AB) \quad (1.5.2)$$

A $P(A \cdot B)$ szorzat esemény valószínűségét a függetlenség alapján tudjuk számolni, mert $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(AB) := \frac{1}{100000000000} \quad (1.5.3)$$

> $(P(AB)) := P(A) \cdot P(B);$

$$P(AB) := \frac{1}{100000000000} \quad (1.5.4)$$

A szorzat nagyon kicsi a másik két taghoz viszonyítva, ezért nagyjából $P(A)$ értékét kapjuk az összeg valószínűségére!

> $'P(A+B)'; 'P(A+B)' = \text{evalf}(\%);$

$$\frac{10099999}{100000000000} \\ P(A+B) = 0.0000101000 \quad (1.5.5)$$

(b) Annak valószínűsége, hogy 1 perc alatt nem lesz baleset $= 1 - P(A+B)$. Mivel függetlenek az események, ezért ezt a valószínűséget annyiszor kell összeszorozni önmagával, ahány perc van egy évben

> $(1 - 'P(A+B)')^{365 \cdot 24 \cdot 60} : \text{Egy év alatt nincs baleset} = \text{evalf}(\%);$

$$\text{Egy év alatt nincs baleset} = 0.0049489181 \quad (1.5.6)$$

Tehát kb. 0.5% annak a lehetősége, hogy 1 éven belül nem lesz baleset! Tehát szinte biztos, hogy lesz baleset. ♣

A következő példa azt mutatja, hogyan használják ki az események független ismétlését a vezeték nélküli telefon adatátvitel során a biztonság növelésére.

5.5.2. PÉLDA. Mobil telefonok adatátviteli biztonságának növelése

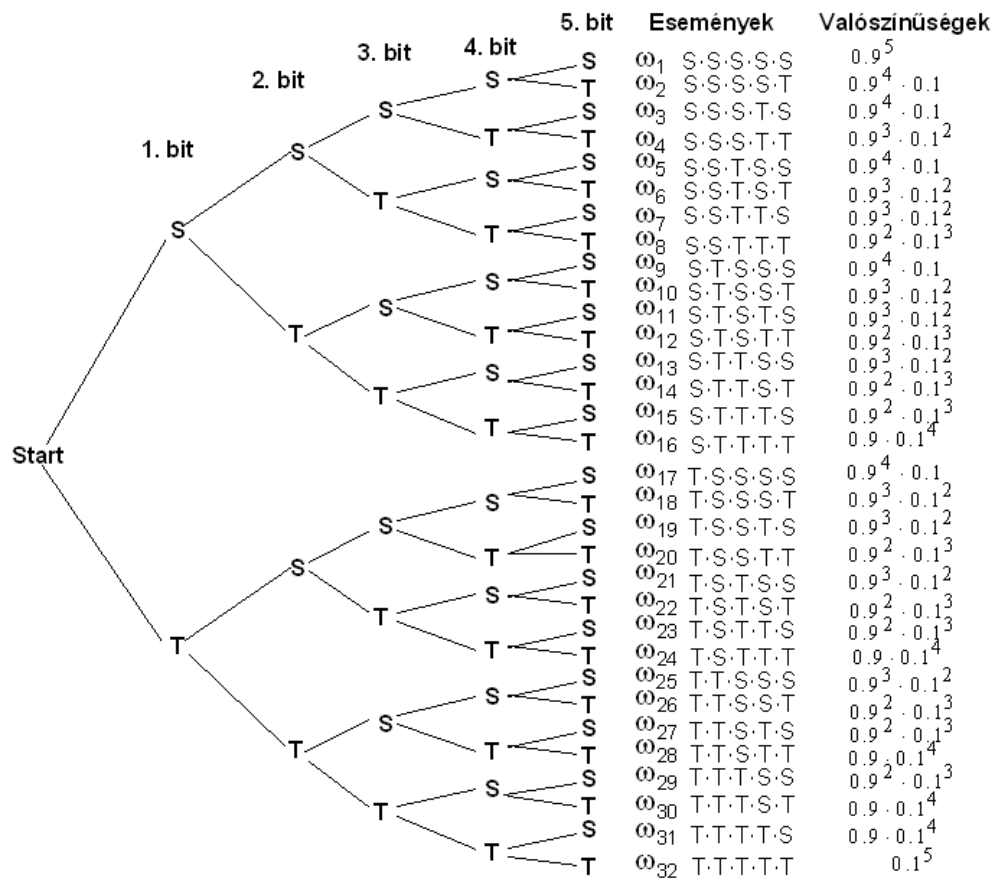
A kommunikáció nagyobb megbízhatósága érdekében egy bit információt a vezeték nélküli telefonok adatátvitel során ötször ismételnék meg egymás után. Tehát egyetlen "nulla" bit információt úgy továbbítanak, mint 5 db nulla "00000" sorozatot és az "egyes" bit információt úgy, mint 5 db egyes "11111" sorozatot. A vevőberendezés az információt **helyesnek** ítéli, ha **ötből három** vagy **annál több bináris információ hibátlan**. Ennek tagadása, az adat átvitel **hibás** volt, ha az öt bitből **legalább 3 bit hibásan** érkezett.

Mekkora a **hibás adatátvitel $P(H)$ valószínűsége**, ha egyetlen bit tévesztésének a valószínűsége $q=0.1$?

MEGOLDÁS

Jelölje A az egy bit fizikai küldésének eseményét, amely lehet 0 vagy 1. Minden bit információ logikai továbbítása során az A eseményt 5-ször ismétljük, egymástól függetlenül. Minden ismétlésnél a bit tévesztésének a valószínűsége ugyanakkora $q=0.1$ és a sikeres átvitel valószínűsége $p=1-q=0.9$. Jelölje S az egy bit **sikeres** átvitelét, és T ennek tagadását a bit **tévesztésének** eseményét. A tévesztés kétféle lehet: vagy 0-ból 1 lesz vagy fordítva 1-ből 0 lesz. Az alábbi fa diagram mutatja az egyes bitek során a **Sikeres adatátvitel** és a **Tévesztéses adatátvitel** lehetőségeinek elágazásait!

S = Sikeres volt az adatátvitel, T = Tévesztés történt az adatátvitel során



Az egyik bit átvitelének sikeressége nincs kihatással a másik bit adatátviteli sikerére. Így az egyes bitek átvitele független az előző bitek átviteleitől. Ezért minden olyan élre, amely S csúcsba vezet 0.9 valószínűséget kell írni és minden olyan élre, amely T csúcsba vezet 0.1 valószínűséget kell írni. Az összes bináris választási lehetőségek száma $2^5 = 32$. Ennyi levele van a fának és a fa gyökerétől ennyi útvonal vezet a levelekhez. Tehát 32 különböző útvonalon juthatunk el a gyökértől valamelyik levélig. Az útvonalak mentén vett élekre írt átmeneti valószínűségek szorzata megadja az adott sorrendben lejátszódó **sikeres vagy tévesztéses adatátvitel** variációjának valószínűségét a függetlenség miatt. Tehát pl.

$$P(\omega_{26}) = P(T \cdot T \cdot S \cdot S \cdot T) = P(T) \cdot P(T) \cdot P(S) \cdot P(S) \cdot P(T) = 0.9^2 \cdot 0.1^3.$$

Adjuk össze azokhoz a sorokhoz tartozó valószínűségeket, amelyekben **3 -nál kevesebb S** betű szerepel, vagyis 3 bit átvitele vagy 4 bit átvitele vagy mind az 5 bit átvitele során tévesztés történt! Ezek alkotják a **hibás adatátvitelt**.

Csak a $T_5 = \{ \omega_{32} \}$ elemi eseményben van 5 db T betű, tehát ekkor mind az 5 bit hibásan ment át. Ilyen esetben, ha "00000" volt a küldött jel, akkor a vett jel "11111". Vagy ha a küldött jel "11111" volt, akkor a vett jel "00000". Ennek valószínűsége $0.1^5 = 0.00001$, a tévesztések függetlensége miatt.

A $T_4 = \{ \omega_{31}, \omega_{30}, \omega_{28}, \omega_{24}, \omega_{16} \}$ eseményt alkotó elemi eseményekben 4 db T betű és 1 db S betű.

T4 eleminek száma 5 és a valószínűségek összege $= 5 \cdot 0.9 \cdot 0.001^4 = 0.00045$.

A T3 = { $\omega_{29}, \omega_{27}, \omega_{26}, \omega_{23}, \omega_{22}, \omega_{20}, \omega_{15}, \omega_{14}, \omega_{12}, \omega_8$ } eseményt alkotó elemi eseményekben 3 db T betű és 2 db S betű van. Ezek száma 10 és a valószínűségek összege $= 10 \cdot 0.9^2 \cdot 0.001^3 = 0.0081$.

A H hibás adatátvitel eseményébe a legalább 3 tévesztés elemi eseményeit kell összegyűjteni, azaz

$$H = T5 + T4 + T3 = \{ \omega_{32}, \omega_{31}, \omega_{30}, \omega_{28}, \omega_{24}, \omega_{16}, \omega_{29}, \omega_{27}, \omega_{26}, \omega_{23}, \omega_{22}, \omega_{20}, \omega_{15}, \omega_{14}, \omega_{12}, \omega_8 \}$$

A T5, T4, T3 események páronként egymást kizárók, ezért összegük valószínűsége a tagok valószínűségeinek összege. Tehát a fenti valószínűségeket össze kell adni, hogy megkapjuk a $P(H) = 0.00001 + 0.00045 + 0.0081 = 0.00856$.

hibás adatátvitel valószínűségét.

A végeredményt a következőképpen interpretálhatjuk:

Az adatátvitel megbízhatósága **p=0.9** lenne, ha 1 bit küldéséhez csak egy bitet használnánk.

Helyette azt választottuk, hogy 5-ször küldjük el ugyanazt a bitet. Ezáltal lassúbb lesz ugyan a kommunikáció, de az **adatbiztonság** $1 - P(H) = 0.9914$ -re **növekedett!** Ha a kommunikációs csatorna gyors, akkor ez a mesterséges lassítás az ember által nem érzékelhető és ugyanakkor az adatátvitel pontossága hihetetlenül megnőtt. ♣

▼ 5.6. Elméleti ellenőrző kérdések

5.6.1. Hogyan értelmezzük két esemény függetlenségét a feltételes valószínűséggel?

5.6.2. Hogyan értelmezzük két esemény függetlenségét a szorzat eseményük valószínűségével?

5.6.2. Mit mondhatunk az A (A tagadás) és B események függetlenségéről, ha A és B események függetlenek?

5.6.3. Mit mondhatunk az A és $\overline{B}$ (B tagadás) események függetlenségéről, ha A és B események függetlenek?

5.6.4. Mit mondhatunk az $\overline{A}$ (A tagadás) és $\overline{B}$ (B tagadás) események függetlenségéről, ha A és B események függetlenek?

5.6.5. Hogyan számolhatjuk ki sorosan kapcsolt alkatrészek eredőjének megbízhatóságát, az egyes elemek megbízhatóságából, ha az elemek egymástól függetlenül romlanak el?

5.6.6. Hogyan számolhatjuk ki párhuzamosan kapcsolt alkatrészek eredőjének megbízhatóságát, az egyes elemek megbízhatóságából, ha az elemek egymástól függetlenül romlanak el?

5.6.7. Hogyan számolhatjuk ki sorosan és párhuzamosan kapcsolt alkatrészekből álló összetett rendszer eredőjének megbízhatóságát, az egyes elemek megbízhatóságából, ha az elemek egymástól függetlenül romlanak el?

▼ 5.7. Gyakorló feladatok

5.7.1. feladat

Tekintsük egy szabályos kocka két független feldobását és az ehhez kapcsolódó alábbi 3 eseményt

$A = \{ \text{az első dobás } 1, 2 \text{ vagy } 3 \}$

$B = \{ \text{az első dobás } 3, 4 \text{ vagy } 5 \}$

$C = \{ \text{a két dobás összege } 9 \}$!

Mutassuk meg, hogy az A , B és C eseményekre

(a) teljesül a $P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ egyenlőség,

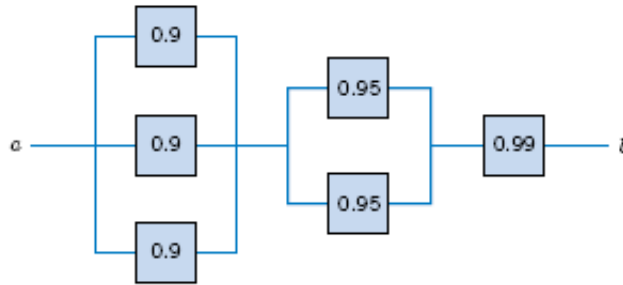
(b) viszont páronként nem függetlenek.

Tehát három esemény függetlenségéhez nem elegendő megkövetelni, hogy a 3 tényező szorzat valószínűségét tényezőnként vehetjük.

5.7.2. feladat

Az alábbi áramkör csak akkor működik, ha balról jobbra haladva van olyan útvonal, amelyben

működő alkatrészek vannak. Az egyes alkatrészek megbízhatóságát az ábrán látjuk.



Az alkatrészek meghibásodása egymástól független. Mekkora a valószínűsége, hogy működik a teljes áramkör?

5.7.3. feladat

Határozzuk meg a $P(A)$, $P(B)$, $P(B|A)$ és $P(A \cdot B)$ valószínűségeket, ha

$P(A + B) = \frac{5}{6}$, $P(\overline{B}) = \frac{2}{5}$, $P(\overline{A} \cdot B) = \frac{1}{3}$ adottak. Függetlenek-e az A és B események?

5.7.4. feladat

Határozzuk meg a $P(A)$, $P(B)$ $P(AB)$ valószínűségeket, ha adottak $P(A|B) = \frac{1}{5}$, $P(A|B^c) = \frac{1}{3}$

és $P(B^c|A^c) = \frac{1}{2}$ feltételes valószínűségeket! Függetlenek-e az A és B események?

5.7.5. feladat

Tekintsük azt a kísérletet, hogy egy 4 -oldalú szabályos gúlát kétszer dobunk fel egymás után. Tegyük fel, hogy az összes lehetséges 16 kimenetel egyformán valószínű, azaz mindegyik valószínűsége $\frac{1}{16}$.

(a) Függetlenek-e az $A_i = \{ \text{az első dobás eredménye } i \}$ és $B_j = \{ \text{a második dobás eredménye } j \}$ események egymástól?

(b) Függetlenek-e az $A = \{ \text{az első dobás eredménye } 1 \}$ és $B = \{ \text{a két dobás eredményének összege } 5 \}$ események egymástól?

(c) Függetlenek-e az $A = \{ \text{a két dobás maximuma } 2 \}$ és $B = \{ \text{a két dobás minimuma } 2 \}$ események egymástól?

5.7.6. feladat

Egy mobil telefont gyártó cég 5000 darab elektronikai alkatrészt vesz át naponta további felhasználásra. Egy 5000 darabot tartalmazó szállítmányt megfelelőnek neveznek, ha benne a selejtes darabok száma nem több, mint 20.

Átvételi eljárás:

A napi szállítmányból kivesznek $n=100$ darabot és megállapítják a selejtes darabok számát.

Átvételi terv:

Ha a selejtes darabok száma a 100 elemű mintában kisebb egyenlő, mint 6, akkor a tételt átveszik.

Ha a selejtes darabok száma a 100 elemű mintában nagyobb, mint 6, akkor a tételt visszautasítják.

A szállításról 300 napon keresztül a következő statisztikát rögzítették.

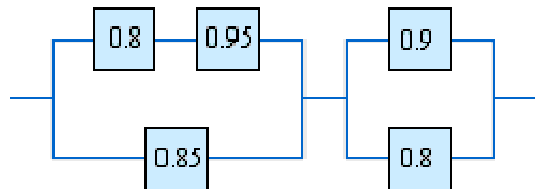
Mintavételi statisztika	Az 5000 tételből a rosszak ill. jók száma		
	Rossz	Jó tételek	Összesen

	tételek		
Átvett tételek	5		250
Visszautasított tételek			
Összesen	20		300

- (a) Töltsük ki a táblázat üresen hagyott celláit!
 (b) Számítsuk ki az átvételi terv α elsőfajú hibáját! Tehát annak valószínűségét, hogy visszautasítunk jó szállítmányt!
 (c) Számítsuk ki az átvételi terv β másodfajú hibáját! Tehát annak valószínűségét, hogy átveszünk rossz szállítmányt!
 (d) Vonjunk le következtetéseket az átvételi tervre vonatkozóan!

5.7.7. feladat

Az alábbi áramkör csak akkor működik, ha balról jobbra haladva van olyan útvonal, amelyben működő alkatrészek vannak. Az egyes alkatrészek megbízhatóságát az ábrán láthatjuk.



Az alkatrészek meghibásodása egymástól független. Mekkora valószínűséggel működik a teljes áramkör?

5.7.8. feladat

Határozzuk meg a $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ és $P(B-A)$ valószínűségeket, ha adottak az $P(A+B) = \frac{7}{9}$,

$$P(A \cdot B) = \frac{1}{3} \text{ és } P(B|A) = \frac{3}{4} \text{ valószínűségek!}$$

Függetlenek-e az A és B események?

5.7.9. feladat

Két dobozban golyók vannak, amelyek csak színeikben különböznek egymástól. Az első dobozban 5 fehér, 7 zöld és 6 piros, a másodikban 4 fehér, 8 zöld és 2 piros golyó van. Mindkét dobozból találomra és egymástól függetlenül kihúzunk egy-egy golyót. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a két kiválasztott golyó színe különböző lesz!

5.7.10. feladat

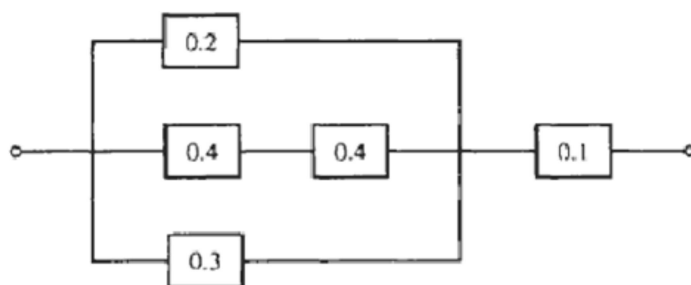
Határozzuk meg a $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ és $P(A^c \cdot B)$ valószínűségeket, ha $P(A+B) = \frac{3}{4}$,

$$P(A^c) = \frac{2}{3}, P(A \cdot B) = \frac{1}{4} \text{ adottak!}$$

Függetlenek-e az A és B események?

5.7.11. feladat

Az alábbi hálózatban látható elemek reléket jelölnek. A hálózat csak akkor működik, ha balról jobbra haladva van olyan útvonal, amelyben működő relék vannak. Az egyes relé meghibásodási valószínűségeit az ábrán látjuk.



A relék meghibásodása egymástól független. Mekkora a valószínűsége, hogy működik a teljes hálózat?

5.7.12. feladat

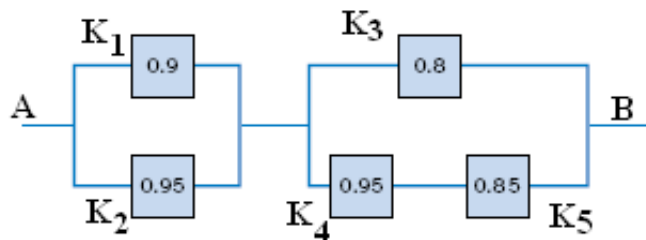
Határozzuk meg a $P(A)$, $P(B)$, $P(A | B)$ és $P(B-A)$ valószínűségeket, ha adottak a $P(A+B) = \frac{8}{9}$,

$P(A \cdot B) = \frac{1}{4}$ és $P(B|A) = \frac{3}{4}$ valószínűségek!

Függetlenek-e az A és B események?

5.7.13. feladat

Egy berendezés az A és B csomópontjait köti össze a K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 közbelső kapcsolók, az ábrán látható módon.



Az egyes kapcsolók egymástól függetlenül az ábrán adott valószínűséggel működnek

$$p_{K_1} = 0.9, p_{K_2} = 0.95, p_{K_3} = 0.8, p_{K_4} = 0.95, p_{K_5} = 0.85.$$

Mekkora a valószínűsége, hogy a teljes berendezés működőképes?

5.7.14. feladat

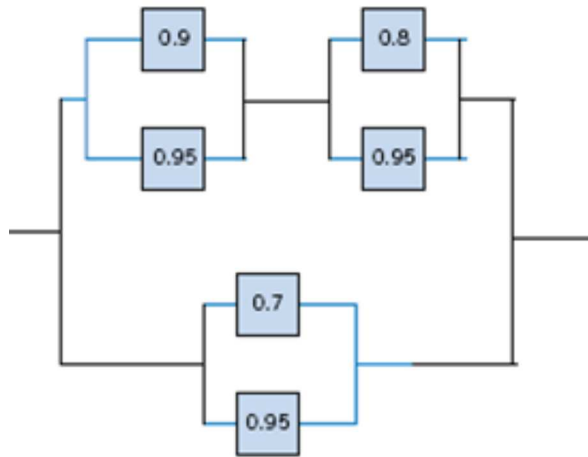
Határozzuk meg a $P(A)$, $P(B)$, $P(A^c | B^c)$ és $P(A^c \cdot B)$ valószínűségeket, ha $P(A+B) = \frac{4}{5}$,

$P(A^c) = \frac{1}{3}$, $P(A \cdot B) = \frac{1}{5}$ adottak!

Függetlenek-e az A és B események?

5.7.15. feladat

Az alábbi hálózatban látható elemek relét jelölnek. A hálózat csak akkor működik, ha balról jobbra haladva van olyan útvonal, amelyben működő relék vannak. Az egyes relé működési valószínűségeit az ábrán látjuk



A relék meghibásodása egymástól független. Mekkora a valószínűsége, hogy működik a teljes hálózat?

5.7.16. feladat

Mutassuk meg, hogy ha A és B független események, akkor

$$P(A + B) = 1 - (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)).$$

5.7.17. feladat

Egy rakéta kilövés véletlenül bekövetkezik, ha egy A relé és egy másik B relé is egyszerre meghibásodik. Az A relé meghibásodásának eseménye $P(A)=0.01$ valószínűséggel, míg a B relé meghibásodásának eseménye $P(B)=0.03$ valószínűséggel következik be. Ismert, hogy ha az A relé meghibásodik, akkor a B meghibásodásának valószínűsége 0,06.

- Milyen valószínűséggel fordul elő, hogy véletlen rakéta kilövés következik be?
- Mekkora a valószínűsége, hogy az A relé meghibásodik, ha a B relé meghibásodott?
- Független-e az A és B relé meghibásodása egymástól?

5.7.18. feladat

Igaz-e az alábbi állítást? Válaszát indokolja!

Ha az A és B események függetlenek, akkor $P(A|B) = P(A|\overline{B})$.