

▼ 6. Teljes valószínűség- tétel és a Bayes-tétel. A döntési fa inverze

Valószínűségszámítás és statisztika számítógép algebrai támogatással	Készült a PTE PMMIK és a TÁMOP -4.1.2.A/1-11/1-2011-0098 támogatásával
Klincsik Mihály	

▼ 6.1.Bevezetés

Ha ismerjük az A esemény feltételes valószínűségeit olyan $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ eseményekre, amelyek metszete páronként üres és összegük a teljes eseménytér, valamint ismertek a $P(B_i)$ valószínűségek, akkor a döntést $P(A)$ valószínűségére a részinformációk összegzésével kapjuk. Pontosabban a **teljes valószínűség-tétel** alatta a

$$P(A) = P(A | B_1) \cdot P(B_1) + P(A | B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A | B_n) \cdot P(B_n)$$

formulát értjük a fenti feltétellel.

A fordított $P(B_k | A)$ feltételes valószínűség számítására a **Bayes-tétel** adja meg a választ

$$P(B_k | A) = \frac{P(A | B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)} \quad (1 \leq k \leq n \text{ rögzített})$$

Gyakran használjuk az $n = 2$ speciális esetet, amikor $B_1 = B$, $B_2 = \overline{B}$. Ekkor a teljes valószínűség-tétel alakja

$$P(A) = P(A | B) \cdot P(B) + P(A | \overline{B}) \cdot P(\overline{B}).$$

Hasonlóan a Bayes-tétel speciális esete

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})}.$$

Az inverz döntési fát jól szemlélteti a fenti eredményeket. Az inverz fa diagramot úgy kapjuk, ha az eredeti fa két döntési fázisát felcseréljük. A döntési fa inverzének számításaihoz alkalmaznunk kell mind teljes valószínűség-tételt, mind a Bayes-tételt. Az inverz fa első döntési szintjéhez tartozó valószínűségeket a teljes valószínűség-tétellel kapjuk és Bayes-tétellel a második döntési szint feltételes valószínűségeit számoljuk. Egy valószínűségi táblázatban a teljes valószínűség-tétel alkalmazása annyit jelent, hogy a hiányzó sorok (vagy oszlopok) összegét kiszámoljuk. A Bayes-tétel egy valószínűségi táblázatban nem látható, mert az osztások eredményei nincsenek a táblázatban.

Célunk az alábbi fogalmak, összefüggések és eljárások megismerése, megértése	
Teljes valószínűség-tétel	Teljes valószínűség-tétel alkalmazása az inverz fa valószínűségeinek számítására
Bayes-tétel	Teljes valószínűség-tétel alkalmazása a táblázat sorainak vagy oszlopainak összegzésére
Inverz döntési fa diagram készítése: az eredeti döntési fázisok felcserélése, sorok felcserélődnek	Bayes-tétel alkalmazása az inverz fa feltételes valószínűségeinek számítására

▼ 6.2. Teljes valószínűség-tétel és az eredeti döntési fa diagram

6.2.1. TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTEL

Legyen $B_1, B_2, \dots, B_n$ **teljes eseményrendszer**, azaz páronként egymást kizáró események és összegük az Ω eseménytér

$$B_i \cdot B_j = \emptyset \quad (\forall i \neq j) \text{ és } B_1 + B_2 + \dots + B_n = \Omega.$$

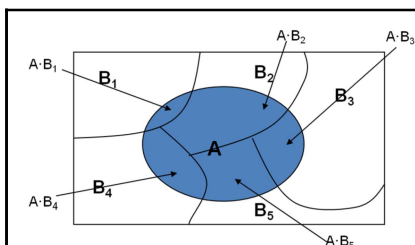
Ekkor tetszőleges A esemény valószínűsége kiszámolható a

$$P(A) = P(A | B_1) \cdot P(B_1) + P(A | B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A | B_n) \cdot P(B_n)$$

szorzatösszeg segítségével.

Bizonyítás

A bal oldali ábra mutatja az Ω eseménytér (téglalap) felosztását egymásba nem nyúló B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ($n = 5$) részekre. Ettől függetlenül van egy A halmaz vagy esemény, amely belemetsz néhány B_i halmazba, de nem feltétlenül mindegyikbe.



Mivel az Ω eseménytér a B_i események összege és az összeg **disztributív** (vagy szétagolható) a szorzásra nézve a halmazok körében, azért

$$\begin{aligned} A &= A \cdot \Omega = A \cdot (B_1 + B_2 + \dots + B_n) = \\ &= A \cdot B_1 + A \cdot B_2 + \dots + A \cdot B_n. \end{aligned}$$

Mivel $B_i \cdot B_j = \emptyset$ események egymást kizárók minden $i \neq j$ esetén ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$), ezért az $A \cdot B_i$ és $A \cdot B_j$ is egymást kizáró, azaz

$$(A \cdot B_i) \cdot (A \cdot B_j) = \emptyset.$$

Tehát a fenti jobb oldali összeg valószínűségét a Kolmogorov-axióma alapján tagonként vehetjük

$$P(A) = P(A \cdot B_1 + A \cdot B_2 + \dots + A \cdot B_n) = P(A \cdot B_1) + P(A \cdot B_2) + \dots + P(A \cdot B_n).$$

Alkalmazzuk itt minden tagra a valószínűségek szorzás-tételét

$$P(A \cdot B_i) = P(A | B_i) \cdot P(B_i) \quad (i \in \{1, 2, \dots, n\}).$$

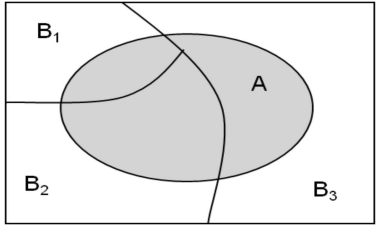
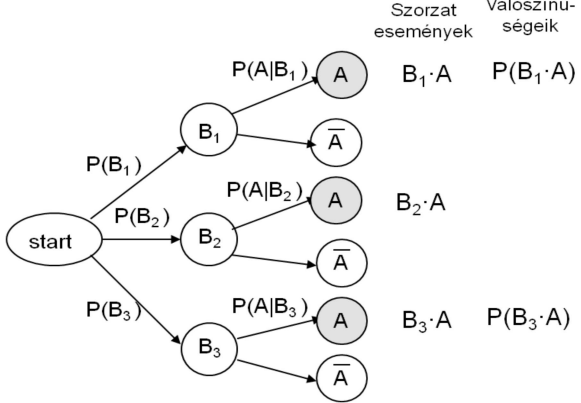
Ezzel megkapjuk a bizonyítandó egyenlőséget

$$P(A) = P(A | B_1) \cdot P(B_1) + P(A | B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A | B_n) \cdot P(B_n). \text{ Q.e.d.}$$

A tétel olyan esetekben hasznos segítség, amikor az összeg tagjait könnyebb kiszámítani, mint közvetlenül az A esemény valószínűségét. A tétel interpretálható úgy is, mint, hogy az A esemény valószínűségét a részeinek valószínűségeiből, mint egy "puzzle"-ből tesszük össze.

6.2.2. Az eljárás szemléltetése fa diagrammal

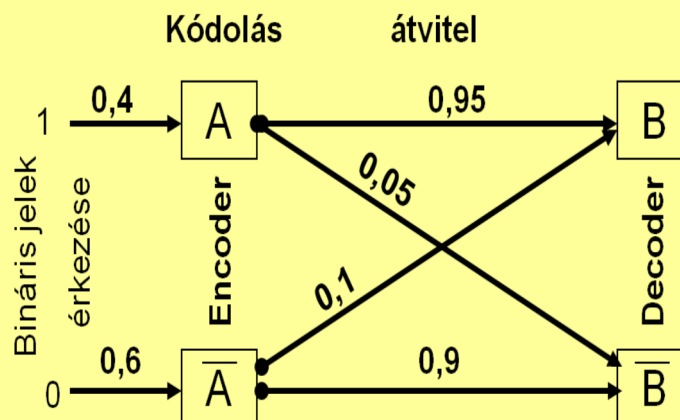
A szemléltetés egyszerűsége kedvéért az eseményteret osszuk fel $n = 3$ részre.

	
Feldaraboltuk az eseményteret idegen részekre a B_1, B_2 és B_3 eseményekkel! Tetszőleges A eseményt ez a darabolás diszjunkt ($B_k \cdot A$) részekre oszt.	A gráf start csúcsából induló élek megfelelnek a darabolásoknak. Az egyes élekre írt $P(B_k)$ valószínűségek, a darabok mértékei az egészhez viszonyítva. A következő döntési szint kétirányú elágazási azt mutatják, hogy az egyes B_k darabok mekkora része van A-ban illetve mekkora része nincs A-ban. Az élekre a $P(A B_k)$ és $P(\bar{A} B_k)$ feltételes valószínűségek kerülnek. A valószínűségek szorzás szabálya alapján a levelekhez vezető úton vett szorzatok $P(A \cdot B_k) = P(A B_k) \cdot P(B_k)$ a szorzat események valószínűségeit adják. Ha a szürkével jelölt sorok valószínűségeit összeadjuk, akkor megkapjuk A valószínűségét! Ez az összegzés éppen a teljes valószínűség-tétel.

A bináris csatorna egyszerű példáján jól nyomon követhetők a számítások.

6.2.3. PÉLDA. Bináris csatorna és valószínűségei

Tekintsük a legegyszerűbb zajos bináris csatorna modellt!



Az ábrán látható események $A = \{ \text{az adó 1 jelet ad} \}$ és $B = \{ \text{a vevő 1 jelet vett} \}$. Ezek

tagadása a 0 jelekre hasonlóan értelmezett megfelelő esemény.

Adott valószínűségek:

$$P(A) = 0.4$$

$$P(\bar{A}) = 0.6$$

$$P(B|A) = 0.95$$

$$P(\bar{B}|A) = 0.05$$

és

$$P(B|\bar{A}) = 0.1$$

$$P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.9$$

Határozzuk meg $P(B)$ valószínűséget! Tehát mekkora az 1 jel vételének valószínűsége?

Megoldás

A megoldás annyira egyszerű, hogy általános iskolában is tárgyalható.

Hogyan kapunk 1 jelet? Kétféleképpen, vagy a 40%-ban beérkező 1 jelek 95%-a lesz 1 vagy a 60%-ban érkező nulla jelek 10%-a torzul vételi oldalon 1 jellé.

Hogyan számoljuk egy százalék további százalékát? Össze kell szorozni a százalék lábakat!

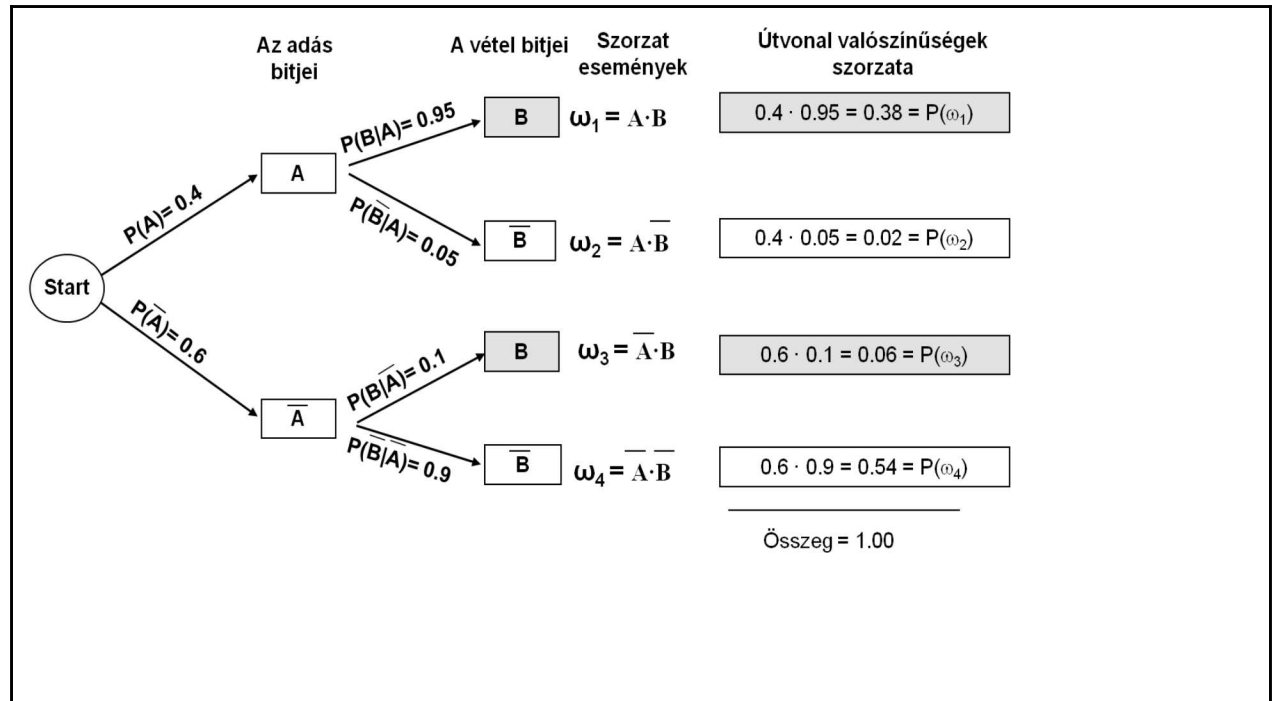
Tegyük ezt

$$P(B) = 0.4 \cdot 0.95 + 0.6 \cdot 0.1 = 0.38 + 0.06 = 0.44.$$

Tehát vételi oldalon 44%-ban érkezik 1 jel és így a 0 jelek 56%-ban lesznek.

Miért növekedett az input oldali 40%-ról 44%-ra az 1 jelek aránya? Azért, mert a 0 input jelek gyakrabban válnak 1 jellé, mint az 1 jelek 0 jellé. Erre mondjuk azt, hogy a csatorna nem szimmetrikus.

Hogy mégis elbonyolítsuk az egyszerűen megválaszolt kérdést felrajzoljuk az eredeti döntési fát.



Az 1 jel vételének valószínűségét a teljes valószínűség-tétel alapján kapjuk

$$P(B) = P(A \cdot B) + P(\bar{A} \cdot B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0.38 + 0.06 = 0.44.$$

A fenti diagramban szürke színnel kiemeltük azokat a sorokat, amelyben a B esemény neve előfordul. Ezen sorok végén található szorzatok összegét kell venni és így kapjuk $P(B)$ értékét. Ez a számítási algoritmus egyszerűvé teszi a teljes valószínűség-tétel alkalmazását és ez vezet

bennünket az inverz fa diagram elkészítéséhez is.

▼ 6.3. Bayes-tétel és az inverz döntési fa diagram

6.3.1. BAYES - TÉTEL

Legyen $B_1, B_2, \dots, B_n$ **teljes eseményrendszer**, azaz páronként egymást kizáró események és összegük az Ω eseménytér

$$B_i \cdot B_j = \emptyset \quad (\forall i \neq j) \text{ és } B_1 + B_2 + \dots + B_n = \Omega.$$

Ha az A esemény pozitív valószínűségű és k rögzített index 1 és n között, akkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

Bizonyítás

Felhasználva a feltételes valószínűség definícióját, a szorzás-szabályt a számlálóban és a teljes valószínűség-tételt a nevezőben kapjuk a Bayes-tétel állítását.

$$P(B_k|A) = \frac{P(A \cdot B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

Q.e.d.

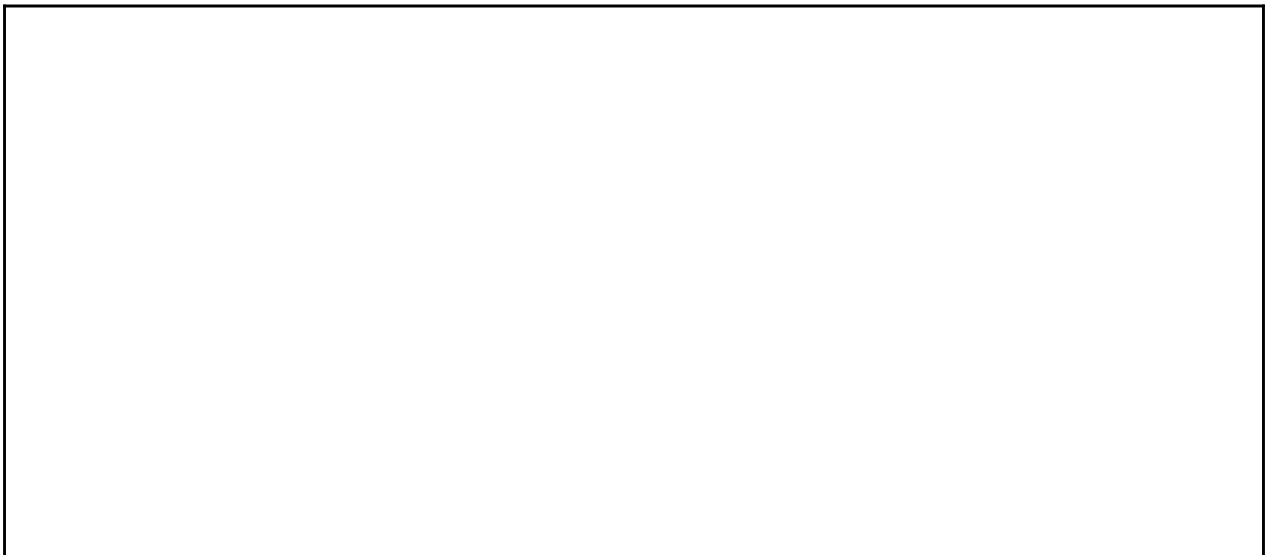
A Bayes-tétel szorosan összefügg az inverz fa diagram ábrázolásával. Az inverz fa diagram megcseréli az eredeti fa diagram oszlopait. Hasonlóan, mint az inverz függvény, amely az értelmezési tartományt és az értékkészletet cseréli fel az invertálható függvényekre. Folytassuk a bináris nem szimmetrikus csatorna 6.2.3. példáját az inverz fa felrajzolásával.

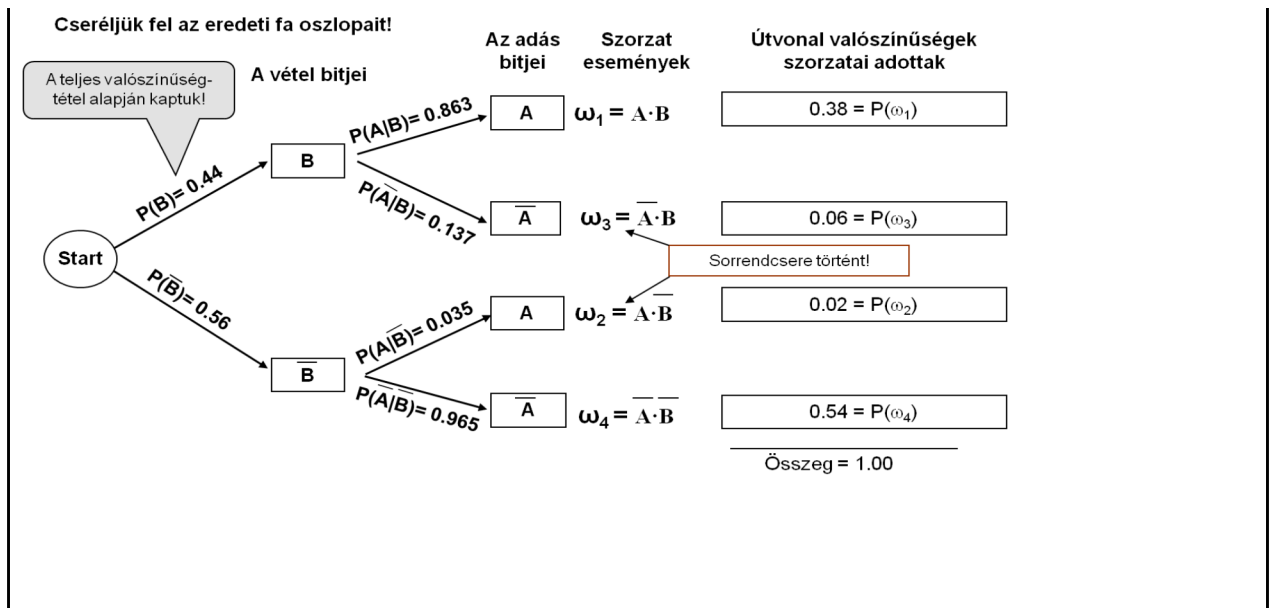
6.3.2. PÉLDA. Bináris csatorna és valószínűségei (6.2.3. példa folytatása)

Határozzuk meg a $P(A|B)$ feltételes valószínűséget, vagyis vevő által vett 1 jelek között milyen arányban vannak olyanok, amelyek 1 input jelből származnak? Ez a vételi oldalon az 1 jel megbízhatósága.

Megoldás

Cseréljük fel az eredeti fa diagram döntési fázisait! Ekkor kapjuk az alábbi fa diagramot, mely szerkezetileg ugyanolyan, mint az eredeti fa.





Most az első döntési fázisban a vett jelek 1 és 0 arányairól döntünk. Ezeket a $P(B) = 0.44$ és a tagadás $P(\bar{B}) = 1 - 0.44 = 0.56$ valószínűségeket kiszámoltuk teljes valószínűség tétellel a 6.2.3. példában.

Ezek kerülnek az első döntési fázis éleire.

A második döntési fázis az adás bitjeiről szól. A szorzat események ugyanazok maradnak, mint az eredeti fánál, hiszen a halmazok között a metszet művelet kommutatív. Az oszlopcsere miatt azonban ügyelni kell arra, hogy a szorzat események sorrendje megváltozik az eredeti sorrendhez képest. Másoljuk be az inverz fa végére a szorzat eseményeket és ezek valószínűségeit az eredeti fa diagramból, mert ezeket kiszámoltuk az eredeti fa készítésénél.

A második döntési fázis feltételes valószínűségeit úgy kapjuk, hogy a sor végén levő szorzat valószínűséget elosztjuk az első döntési fázis valószínűségeivel. Így a feladat kérdésére a válasz

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{0.38}{0.44} = 0.863,$$

amely az inverz fa második döntési fázisának legfelső élén látható.

Jelentése: ha az output oldalon összegyűjtjük az 1 jeleket, akkor annak 86.3%-a olyan, amely 1 input jelből való. Mondhatjuk azt, hogy a vételi oldalon az 1 jelek megbízhatósága 86.3%-os.

Nézzük, hogyan lehet Maple-ben számolni a fa diagram valószínűségeit!

> restart :

$$P(A), P(B|A), P(Bc|Ac) := 0.4, 0.95, 0.9$$

$$P(A), P(B|A), P(Bc|Ac) := 0.4000000000, 0.9500000000, 0.9000000000 \quad (1.3.1)$$

A kiegészítő ágak valószínűségeit a komplementer számítási szabályával kapjuk.

$$> P(Ac), P(Bc|A), P(B|Ac) := 1 - 0.4, 1 - 0.95, 1 - 0.9$$

$$P(Ac), P(Bc|A), P(B|Ac) := 0.6000000000, 0.0500000000, 0.1000000000 \quad (1.3.2)$$

Szorzat-események valószínűségeit a szorzás-szabály adja

$$> (P(AB)) := P(B|A) \cdot P(A); (P(ABc)) := P(Bc|A) \cdot P(A);$$

$$(P(AcB)) := P(B|Ac) \cdot P(Ac); (P(AcBc)) := P(Bc|Ac) \cdot P(Ac)$$

$$P(AB) := 0.3800000000$$

$$P(ABc) := 0.0200000000$$

$$P(AcB) := 0.0600000000$$

$$P(AcBc) := 0.5400000000 \quad (1.3.3)$$

Teljes valószínűség-tétel alkalmazása.

$$\begin{aligned}
 &> P(B) := P(AB) + P(ACB); \\
 &P(BC) := P(ABc) + P(ACBc); \\
 &P(B) := 0.4400000000 \\
 &P(BC) := 0.5600000000
 \end{aligned}
 \tag{1.3.4}$$

Bayes-tételek alkalmazása.

$$\begin{aligned}
 &> P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}; P(AC|B) := \frac{P(ACB)}{P(B)}; \\
 &P(A|B) := 0.8636363636 \\
 &P(AC|B) := 0.1363636364
 \end{aligned}
 \tag{1.3.5}$$

$$\begin{aligned}
 &> P(A|BC) := \frac{P(ABc)}{P(BC)}; P(AC|BC) := \frac{P(ACBc)}{P(BC)}; \\
 &P(A|BC) := 0.0357142857 \\
 &P(AC|BC) := 0.9642857143
 \end{aligned}
 \tag{1.3.6}$$

$$\begin{aligned}
 &> M1 := \text{Matrix}(2, 2, [[P(AB), P(ABc)], [P(ACB), P(ACBc)]] : \\
 &> \text{input} := \text{Vector}([P(A), P(AC)]) : \\
 &> M2 := \langle M1 | \text{input} \rangle : \\
 &> \text{output} := \text{Vector}[\text{row}]([P(B), P(BC), 1]) : \\
 &> M3 := \text{Matrix}([[M2], [\text{output}]]) : \\
 &> \text{fejléc1} := \text{Vector}[\text{row}]([P(B), P(BC), \text{összeg}]) : \\
 &> M4 := \text{Matrix}([[\text{fejléc1}], [M3]]) : \\
 &> \text{fejléc2} := \text{Vector}([P(A), P(AC), \text{összeg}]) : \\
 &A \text{ szorzat események táblázata} = \langle \text{fejléc2} | M4 \rangle
 \end{aligned}$$

A szorzat események táblázata (1.3.7)

$$= \begin{bmatrix} & P(B) & P(BC) & \text{összeg} \\ P(A) & 0.3800000000 & 0.0200000000 & 0.4000000000 \\ P(AC) & 0.0600000000 & 0.5400000000 & 0.6000000000 \\ \text{összeg} & 0.4400000000 & 0.5600000000 & 1 \end{bmatrix}$$

A fenti táblázat tartalmazza a szorzat események valószínűségeit, valamint a sor és oszlop összegeket. A sor összegek adottak voltak, míg az oszlop összegeket egy-egy teljes valószínűség-tétellel kaptuk. ♣

Korábban a 4.5.1. példában elkezdtük a feltételes valószínűség illusztrációja érdekében a repülőgép radarral való észlelését tárgyalni. Felrajzoltuk az eredeti fát. Most olyan kérdést teszünk fel, amely az inverz fa diagram alapján válaszolható meg.

6.3.3. PÉLDA. Repülőgép észlelés radarral (4.5.1. példa folytatása)

Tekintsük újból a radarral való repülőgép észlelés problémáját.

Használjuk a problémával kapcsolatosan korábban definiált eseményeket

$A = \{ \text{repülőgép van a légtérben} \}$, $B = \{ \text{a radar repülőgépet jelez} \}$

Gyakorisági mérések alapján ismertek a

$$P(A) = 0.05, P(B | A) = 0.99, P(B | A^c) = 0.1$$

valószínűségek illetve feltételes valószínűségek, ahol A^c jelöli az A esemény ellentét eseményét, vagyis azt hogy nincs repülő a légtérben.

(a) Határozzuk meg a $P(B)$ valószínűséget, vagyis azt hogy milyen gyakorisággal érzékel repülőt a radar?

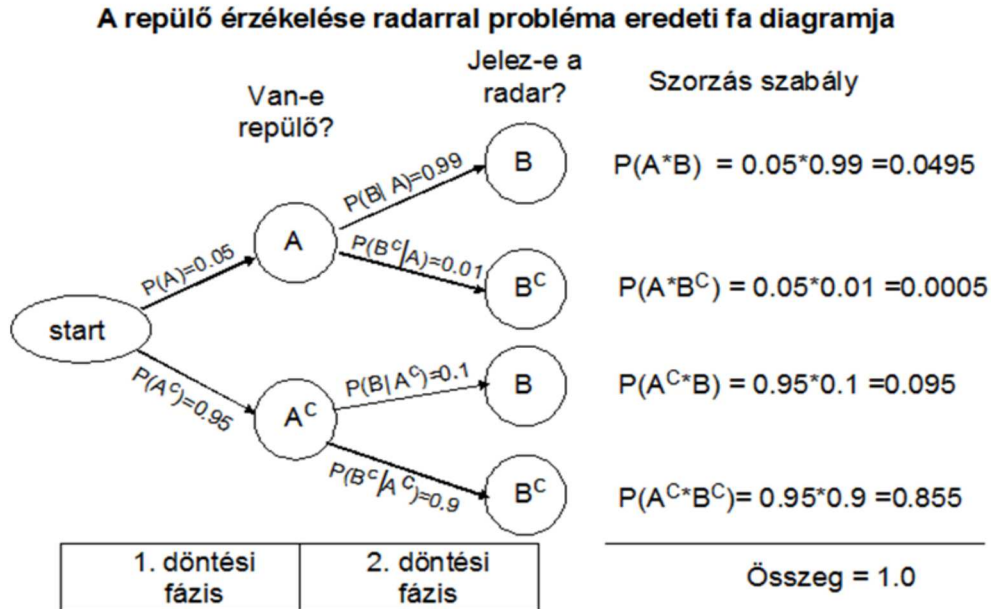
(b) Rajzoljuk fel az inverz fát!

(c) Mekkora a valószínűsége hogy a légtérben van repülőgép feltéve, hogy a radar repülőt

jelzett? Vagyis számoljuk ki a $P(A|B)$ fordított irányú feltételes valószínűséget!

Megoldás

Emlékeztetünk a valószínűségi fa fázisaira: a "légtérben van-e repülőgép" és a "radar riaszt-e" a döntési fázisok, az élekhez tartozó valószínűségekre és a feltételes valószínűségekre, valamint a szorzás szabály alkalmazására! Mindezen információk leolvashatók az alábbi fa diagramról.



(a) A $P(B)$ valószínűséget megkapjuk, ha összeadjuk azokat a szorzat valószínűségeket, amelyekben a B esemény előfordul! Ezek az 1. és a 3. sor végén kapott $P(A \cdot B) = 0.0495$ és $P(A^c \cdot B) = 0.095$ valószínűségek, melyek összege $P(B) = 0.0495 + 0.095 = 0.1445$

Ez a számítás a teljes valószínűség-tétel egy alkalmazása, ha a teljes esemény rendszer az A és A^c események

$$P(B) = P(A \cdot B) + P(B \cdot A^c) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c) = 0.99 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.95 = 0.1445$$

$$\text{> restart : `P(B|A)`, P(A), `P(B|A^c)` := 0.9900000000, 0.0500000000, 0.1000000000} \\ P(B|A), P(A), P(B|A^c) := 0.9900000000, 0.0500000000, 0.1000000000 \quad (1.3.8)$$

$$\text{> (P(B)) := `P(B|A)` P(A) + `P(B|A^c)` (1 - P(A))} \\ P(B) := 0.1445000000 \quad (1.3.9)$$

A kiegészítő esemény $P(B^c)$ valószínűségét úgy kapjuk meg, hogy kivonjuk 1-ből a $P(B)$ valószínűséget!

$$\text{> (P(BC)) := 1 - P(B)} \\ P(BC) := 0.8555000000 \quad (1.3.10)$$

(b) és (c)

A $P(A|B)$ fordított irányú feltételes valószínűséget egyrészt a **Bayes-tétellel** kaphatjuk meg, másrészt az **inverz fa** felrajzolásával.

Mivel a $P(B|A) = 0.99$ feltételes valószínűséget ismerjük, ezért a definíció és a szorzás-szabály alkalmazásával át tudunk térni a fordított irányú feltételes valószínűségekre a következő módon

$$P(\text{repülő van a légtérben} \mid \text{a radar jelez}) = P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) P(A)}{P(B)} = \frac{0.99 \cdot 0.05}{0.1445} = 0.3425$$

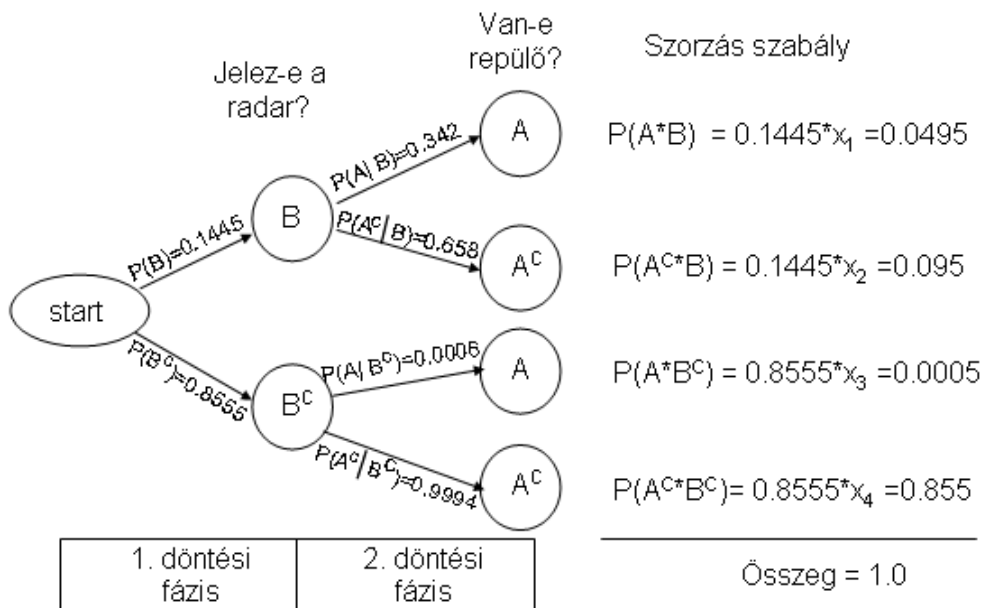
$$> P(A \mid B) := \frac{P(B \mid A) P(A)}{P(B)}$$

$$P(A \mid B) := 0.3425605536$$

(1.3.11)

Ezt a számítást teszi szemléletessé az inverz fa alkalmazása. Továbbá ez alapján nem csak az adott feladat kérdésére kaphatunk választ, hanem eddig fel nem tett kérdésre is!

A repülő érzékelése radarral probléma inverz fa diagramja



Felcseréltük a döntési fázisokat: jelez-e a radar, van-e repülő sorrendre. Így az első oszlopban B és B^c lesz. A B esemény valószínűségét az eredeti fa alapján számoljuk. A két fázis felcserélésével az utolsó oszlopban levő sorok is felcserélődnek az eredetihez képest. Keressük a második döntési fázis éleihez tartozó feltételes valószínűségeket! Mivel a szorzatok adottak, valamint az egyik tényező, ezért osztással kapjuk ezeket az valószínűségeket!

$$> P(AB), P(ABC), P(ACB), P(ACBC) := 0.0495, 0.0005, 0.095, 0.855;$$

$$P(AB), P(ABC), P(ACB), P(ACBC) := 0.0495000000, 0.0005000000, 0.0950000000, 0.8550000000 \quad (1.3.12)$$

$$> \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}; \frac{P(ACB)}{P(B)} = \frac{P(ACB)}{P(B)};$$

$$\frac{P(ABC)}{P(BC)} = \frac{P(ABC)}{P(BC)}; \frac{P(ACBC)}{P(BC)} = \frac{P(ACBC)}{P(BC)}$$

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = 0.3425605536$$

$$\frac{P(ACB)}{P(B)} = 0.6574394464$$

$$\frac{P(ABC)}{P(BC)} = 0.0005844535$$

$$\frac{P(ACBC)}{P(BC)} = 0.9994155465 \quad (1.3.13)$$

A legelső érték éppen a feladat (b) kérdésére adandó válasz. A többi számokhoz keressük meg a megfelelő **kérdést**! Például az utolsó 0.99941.. érték a $P(A^c | B^c)$ valószínűség, vagyis hogy nincs repülőgép, feltéve, hogy a radar nem jelez. ♣

▼ 6.4 Teljes valószínűség-tétel és Bayes-tétel alkalmazásai

Az orvosi tesztek megbízhatóságának vizsgálata a valószínűség jegyzetek kedvenc témája.

6.4.1. PÉLDA. Orvosi teszt megbízhatósága ritka betegség esetén

Egy bizonyosfajta ritka betegség orvosi tesztjével kapcsolatban tegyük fel, hogy az 95%-ban korrekt, azaz

(i) ha egy személy megkapta a betegséget, akkor 95%-os valószínűséggel a teszt pozitív lesz;

(ii) ha egy személy nem kapta meg a betegséget, akkor 95%-os valószínűséggel a teszt negatív lesz.

Tegyük fel, hogy a lakosság 0.001 része (tehát átlagosan 1000 emberből egy) kapja el ezt a betegséget.

(a) Rajzoljuk fel a feladat döntés fa diagramját!

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott személy tesztje negatív lesz?

(c) Készítsük el a feladat inverz döntés fa diagramját!

(d) Ha egy személy tesztje pozitív lett, mekkora a valószínűsége, hogy valóban ebben a betegségben szenved az illető?

Megoldás

A kétféle választási lehetőségre vezessünk be egy - egy jelölést!

$A = \{ \text{az illető személy beteg} \}$, $B = \{ \text{az illető személy tesztje negatív} \}$

Vegyük fel az ismert adatokat!

restart :

$P(A) := 0.0010$;

$P(A^c) := 1 - P(A)$;

> $P(B|A)$, $P(B^c|A^c) := 0.950, 0.950$

$P(A) := 0.0010000000$

$P(A^c) := 0.9990000000$

$P(B|A), P(B^c|A^c) := 0.9500000000, 0.9500000000 \quad (1.4.1)$

Számítsuk ki az ellentét eseményeket!

$P(B^c|A) := 1 - P(B|A)$

> $P(B|A^c) := 1 - P(B^c|A^c)$;

$P(B^c|A) := 0.0500000000$

$P(B|A^c) := 0.0500000000 \quad (1.4.2)$

(a) Számítsuk ki a szorzat események valószínűségeit! Ezekből felrajzolhatjuk az eredeti fát.

> $P(AB) := P(B|A) \cdot P(A)$; $P(AB^c) := P(B^c|A) \cdot P(A)$;

$P(A^cB) := P(B|A^c) \cdot P(A^c)$; $P(A^cB^c) := P(B^c|A^c) \cdot P(A^c)$;

$P(AB) := 0.0009500000$

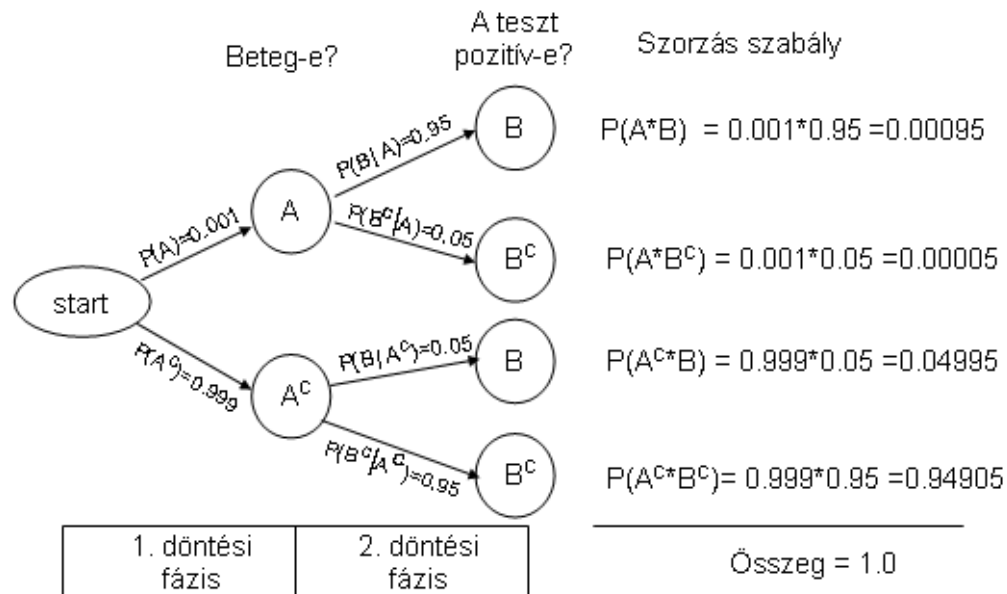
$P(AB^c) := 0.0000500000$

$P(A^cB) := 0.0499500000$

$$P(AcBc) := 0.9490500000$$

(1.4.3)

Betegség és tesztjének eredeti fa diagramja



(b) A B esemény valószínűségét megkapjuk, ha összeadjuk azokat a sorokat, amelyekben előfordul a B esemény.

$$\begin{aligned} &> P(B) := P(AB) + P(AcB); \\ &P(Bc) := 1 - P(B); \end{aligned}$$

$$P(B) := 0.0509000000$$

$$P(Bc) := 0.9491000000$$

(1.4.4)

Tehát egy tetszőleges személy tesztje 0.0509 valószínűséggel lesz negatív.

(c) és (d)

A fordított irányú valószínűségeket osztással kapjuk

$$\begin{aligned} &> P(A|B) := P(AB) / P(B); \\ &P(AC|B) := P(AcB) / P(B); \\ &P(A|Bc) := P(ABc) / P(Bc); \\ &P(AC|Bc) := P(AcBc) / P(Bc); \end{aligned}$$

$$P(A|B) := 0.0186640472$$

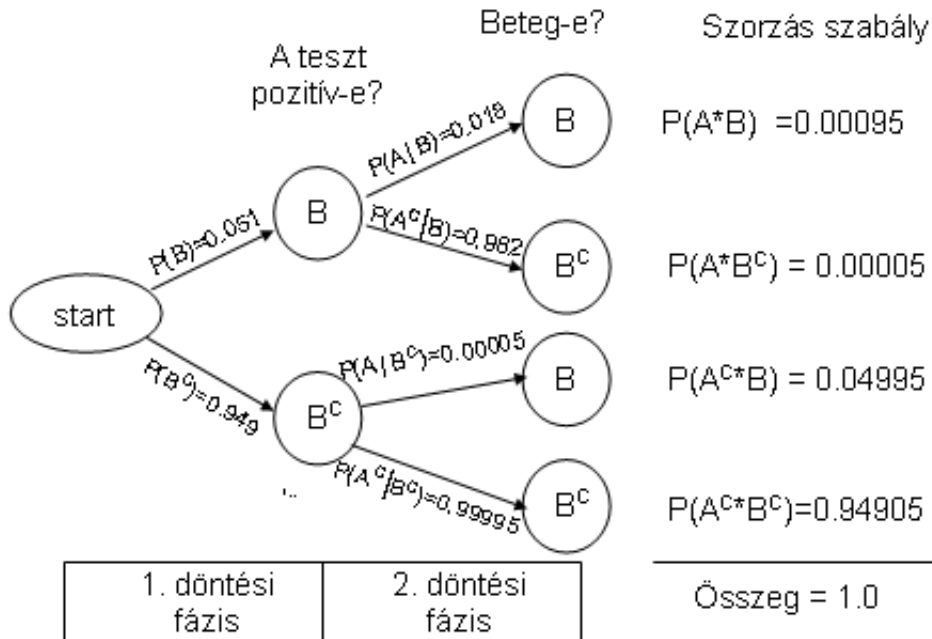
$$P(AC|B) := 0.9813359528$$

$$P(A|Bc) := 0.0000526815$$

$$P(AC|Bc) := 0.9999473185$$

(1.4.5)

Betegség és tesztjének inverz fa diagramja



Tehát 0.01866 annak a valószínűsége, hogy egy illető személy beteg, feltéve, hogy a tesztje pozitív lett!

Tehát meglepően kicsi 1.86% annak a valószínűsége, hogy ha egy teszt pozitív lett, akkor valóban beteg az illető. Ez a nagy hiba onnan ered, hogy a betegség nagyon ritkán fordul elő és a 5%-os teszt tévesztés ehhez képest nagyon rossz érték. ♣

Nézzük újból a bináris adatátviteli csatornát ismétlésekkel.

5.5.3. PÉLDA. Bináris adatátviteli csatorna tévesztései

Egy digitális adatátviteli csatorna az információt bináris sorozatokon keresztül továbbítja. Az adatátvitel során előfordulhatnak véletlen zajok. Nagyszámú adatátviteli megfigyelés alapján ismert, hogy egy "0" adás bit torzul $p = 1 - \alpha$ valószínűséggel "1" vételi bitté és hasonlóan az "1" adás bit ugyanilyen $p = (1 - \alpha)$ valószínűséggel torzul "0" vételi bitté ($0 < \alpha < 1$). Tudjuk továbbá, hogy a beérkező 0 és 1 jelek egymáshoz viszonyított aránya 3:4 (3 aránylik a 4-hez). Feltesszük, hogy az egymást követő jelek tévesztéseinek eseménye egymástól független.

Tudjuk, hogy három egymást követő jel vétele során az $Y = "101"$ bináris sorozatot kaptuk.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy az adás az $X = "101"$ sorozat volt? Adjuk meg a $P(\text{adás} = 101 \mid \text{vétel} = 101)$ feltételes valószínűséget α függvényében!

(b) Rajzoljuk fel az (a) pontban számolt $P(\text{adás} = 101 \mid \text{vétel} = 101)$ feltételes valószínűségét α függvényeként!

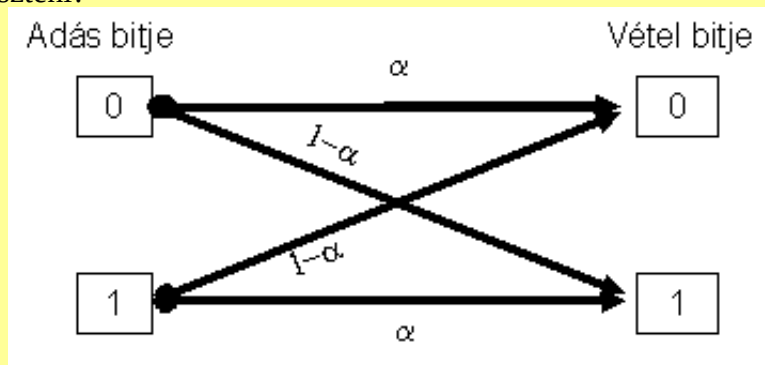
(c) Milyen α átmenet valószínűség mellett lesz a $P(\text{adás} = 101 \mid \text{vétel} = 101)$ feltételes valószínűség értéke 0.9 ?

(d) Számítsuk ki a $P(\text{adás} = 111 \mid \text{vétel} = 101)$ feltételes valószínűségét α függvényében!

(e) Milyen α átmenet valószínűség mellett lesz a $P(\text{adás} = 111 \mid \text{vétel} = 101)$ feltételes valószínűség értéke maximális? Mekkora ez a maximális valószínűség?

(f) Rajzoljuk fel a $P(X_0=000 \mid Y=101)$, $P(X_1=001 \mid Y=101)$, $P(X_2=010 \mid Y=101)$, $P(X_3=011 \mid Y=101)$, $P(X_4=100 \mid Y=101)$, $P(X_5=101 \mid Y=101)$, $P(X_6=110 \mid Y=101)$, $P(X_7=111 \mid Y=101)$ valószínűségek függvényeit α változtatásával közös koordináta-rendszerben!

(g) Az $\alpha=0.9$ megbízhatóság esetén az 101 vételt melyik adással lehet leginkább összetéveszteni?



Bináris adatátviteli csatorna modellje

Megoldás

Eseménytér az adás három bitjének összes variációs lehetősége:

$$\Omega = \{ A_0 = 000, A_1 = 001, A_2 = 010, A_3 = 011, A_4 = 100, A_5 = 101, A_6 = 110, A_7 = 111 \}$$

A vétel három bitjének variációs lehetőségeit jelöljük hasonlóan:

$$V_0 = 000, V_1 = 001, V_2 = 010, V_3 = 011, V_4 = 100, V_5 = 101, V_6 = 110, V_7 = 111$$

A feladat (a) része a $P(A_5 \mid V_5)$ feltételes valószínűséget kérdezi α -függvényében!

A feltételes valószínűség definíciója és a szorzás-szabály alapján

$$P(A_5 \mid V_5) = \frac{P(A_5 V_5)}{P(V_5)} = \frac{P(V_5 \mid A_5) \cdot P(A_5)}{P(V_5)}.$$

Ismerjük a számlálóban szereplő első tényező értékét

$$P(V_5 \mid A_5) = P(\text{vétel}=101 \mid \text{adás}=101) = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3$$

mert mindegyik bit egymástól függetlenül jól megy át!

$$\text{> restart : `P(V5|A5)` := } \alpha^3$$

$$P(V_5 \mid A_5) := \alpha^3 \quad (1.4.6)$$

A $P(A_5)$ jelöli annak valószínűségét vagy relatív gyakoriságát, hogy az adásban milyen gyakran fordul elő az "101" = A_5 sorozat. Mivel a "0" jel gyakorisága $\frac{3}{7}$ és az "1" jel gyakorisága $\frac{4}{7}$,

$$\text{ezért ez } \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7}.$$

$$\text{> } p_0, p_1 := \frac{3}{7}, \frac{4}{7}$$

$$\text{> } (P(A_5)) := p_1 \cdot p_0 \cdot p_1$$

$$p_0, p_1 := \frac{3}{7}, \frac{4}{7}$$

$$P(A_5) := \frac{48}{343} \quad (1.4.7)$$

Az $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ és A_7 események egy teljes eseményrendszert alkotnak. A V_5

esemény valószínűségét a teljes valószínűség-tétel segítségével kaphatjuk meg

$$P(V5) = P(V5|A0) \cdot P(A0) + P(V5|A1) \cdot P(A1) + P(V5|A2) \cdot P(A2) + P(V5|A3) \cdot P(A3) + P(V5|A4) \cdot P(A4) + P(V5|A5) \cdot P(A5) + P(V5|A6) \cdot P(A6) + P(V5|A7) \cdot P(A7)$$

adás --> vétel , valószínűség

$$000 \rightarrow 101, (1 - \alpha) \alpha (1 - \alpha)$$

$$001 \rightarrow 101, (1 - \alpha) \alpha \alpha$$

$$010 \rightarrow 101, (1 - \alpha) (1 - \alpha) (1 - \alpha)$$

$$011 \rightarrow 101, (1 - \alpha) (1 - \alpha) \alpha$$

$$100 \rightarrow 101, \alpha \alpha (1 - \alpha)$$

$$101 \rightarrow 101, \alpha \alpha \alpha$$

$$110 \rightarrow 101, \alpha (1 - \alpha) (1 - \alpha)$$

$$111 \rightarrow 101, \alpha (1 - \alpha) \alpha$$

$$\begin{aligned} &> `P(V5|A0)`, `P(V5|A1)`, `P(V5|A2)`, `P(V5|A3)`, `P(V5|A4)`, `P(V5|A5)`, `P(V5|A6)`, \\ &\quad `P(V5|A7)` := (1 - \alpha) \alpha (1 - \alpha), (1 - \alpha) \alpha \alpha, (1 - \alpha) (1 - \alpha) (1 - \alpha), (1 - \alpha) (1 - \alpha) \alpha, \alpha \alpha (1 - \alpha), \alpha \alpha \alpha, \alpha (1 - \alpha) (1 - \alpha), \alpha (1 - \alpha) \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(V5|A0), P(V5|A1), P(V5|A2), P(V5|A3), P(V5|A4), P(V5|A5), P(V5|A6), P(V5|A7) := & (1 - \alpha)^2 \alpha, (1 - \alpha) \alpha^2, (1 - \alpha)^3, (1 - \alpha)^2 \alpha, (1 - \alpha) \alpha^2, \alpha^3, (1 - \alpha)^2 \alpha, (1 - \alpha) \alpha^2 \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

$$P(\text{Adás} = 000) = p0 * p0 * p0,$$

$$P(\text{Adás} = 001) = p0 * p0 * p1,$$

$$P(\text{Adás} = 010) = p0 * p1 * p0,$$

$$P(\text{Adás} = 011) = p0 * p1 * p1,$$

$$P(\text{Adás} = 100) = p1 * p0 * p0,$$

$$P(\text{Adás} = 101) = p1 * p0 * p1,$$

$$P(\text{Adás} = 110) = p1 * p1 * p0,$$

$$P(\text{Adás} = 111) = p1 * p1 * p1.$$

$$\begin{aligned} > P(A0), P(A1), P(A2), P(A3), P(A4), P(A5), P(A6), P(A7) := p0 \ p0 \ p0, p0 \ p0 \ p1, \\ &\quad p0 \ p1 \ p0, p0 \ p1 \ p1, p1 \ p0 \ p0, p1 \ p0 \ p1, p1 \ p1 \ p0, p1 \ p1 \ p1 \end{aligned}$$

$$P(A0), P(A1), P(A2), P(A3), P(A4), P(A5), P(A6), P(A7) := \frac{27}{343}, \frac{36}{343}, \frac{36}{343}, \quad (1.4.9)$$

$$\frac{48}{343}, \frac{36}{343}, \frac{48}{343}, \frac{48}{343}, \frac{64}{343}$$

$$\begin{aligned} > (P(V5)) := `P(V5|A0)` P(A0) + `P(V5|A1)` P(A1) + `P(V5|A2)` P(A2) \\ &\quad + `P(V5|A3)` P(A3) + `P(V5|A4)` P(A4) + `P(V5|A5)` P(A5) + `P(V5|A6)` P(A6) \\ &\quad + `P(V5|A7)` P(A7) \end{aligned}$$

$$P(V5) := \frac{123}{343} (1 - \alpha)^2 \alpha + \frac{136}{343} (1 - \alpha) \alpha^2 + \frac{36}{343} (1 - \alpha)^3 + \frac{48}{343} \alpha^3 \quad (1.4.10)$$

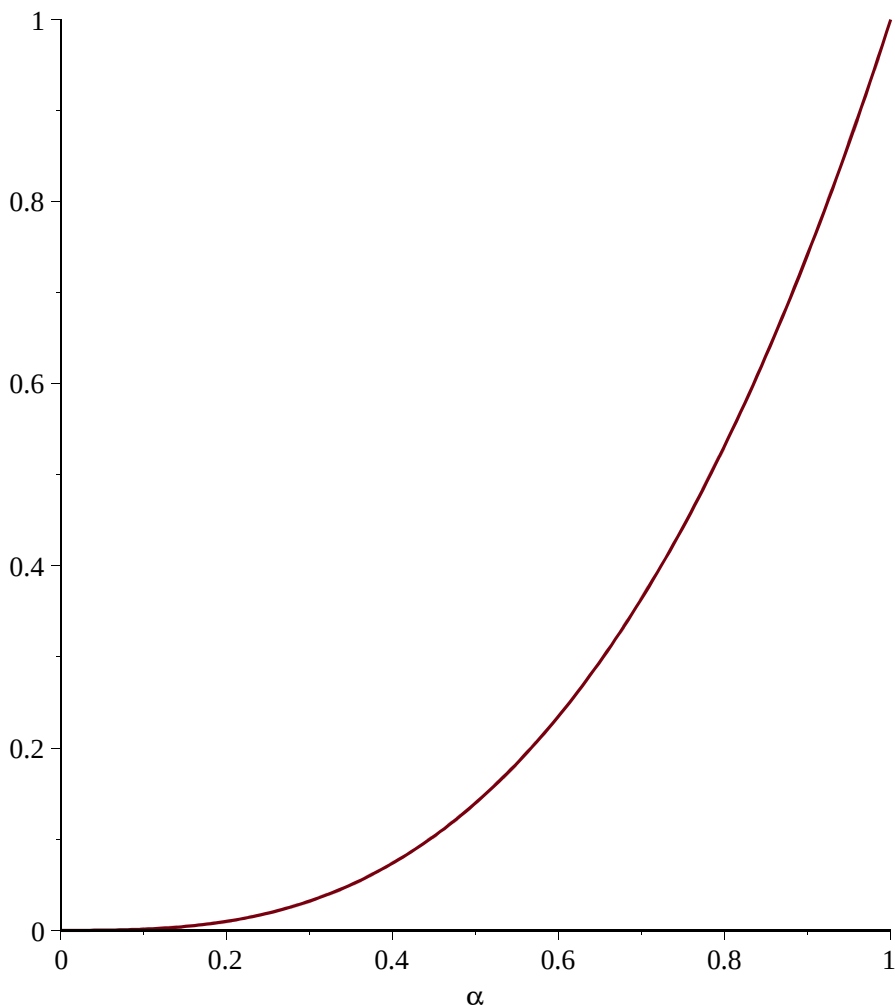
$$> `P(A5|V5)` := \frac{`P(V5|A5)` P(A5)}{P(V5)}; simplify(%)$$

$$\begin{aligned} P(A5|V5) := & \frac{\frac{48}{343} \alpha^3}{\frac{123}{343} (1 - \alpha)^2 \alpha + \frac{136}{343} (1 - \alpha) \alpha^2 + \frac{36}{343} (1 - \alpha)^3 + \frac{48}{343} \alpha^3} \\ & - \frac{48 \alpha^3}{-15 \alpha + 2 \alpha^2 + \alpha^3 - 36} \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

A kapott függvény α -nak racionális tört függvénye, melyben a számláló és nevező is harmadfokú polinom.

(b) Rajzoljuk fel az (a) pontban számolt $P(\text{adás} = 101 \mid \text{vétel} = 101)$ feltételes valószínűséget α függvényeként! (2 pont)

> `plot( `P(A5|V5)`,  $\alpha = 0 \dots 1$  )`



A grafikonról leolvasható, hogy a függvény $[0,1]$ -n szigorúan monoton növekvő, értéke $\alpha = 0$ helyen 0 és $\alpha = 1$ helyen 1.

Ami azt jelenti, hogy biztosan hibás átvitel - azaz $\alpha = 0$ - során, nem lesz az "101" sorozatból soha "101" vételi sorozat.

Illetve, ha nincs tévesztés az adatátvitelben, vagyis $\alpha = 1$, akkor az "101" adásból biztosan "101" vétel lesz.

(c) Milyen α átmenet valószínűség mellett lesz a $P(\text{adás} = 101 \mid \text{vétel} = 101)$ feltételes valószínűség

értéke 0.9 ?

Keressük a $P(A5|V5) = 0.9$ harmadfokú egyenlet megoldását α -ra.

> $egyenlet := P(A5|V5) = 0.9$

$$egyenlet := \frac{48}{343} \frac{\alpha^3}{\frac{123}{343} (1-\alpha)^2 \alpha + \frac{136}{343} (1-\alpha) \alpha^2 + \frac{36}{343} (1-\alpha)^3 + \frac{48}{343} \alpha^3} \quad (1.4.12)$$

$$= 0.9000000000$$

A megoldás közelítő értékét az "fsolve" eljárással kapjuk meg.

> $fsolve(egyenlet, \alpha)$

$$0.9634820752 \quad (1.4.13)$$

Tehát a 0 és 1 jel $\alpha = 96,3$ %-os megbízhatósága mellett az '101' jelből 90%-ban '101' lesz.

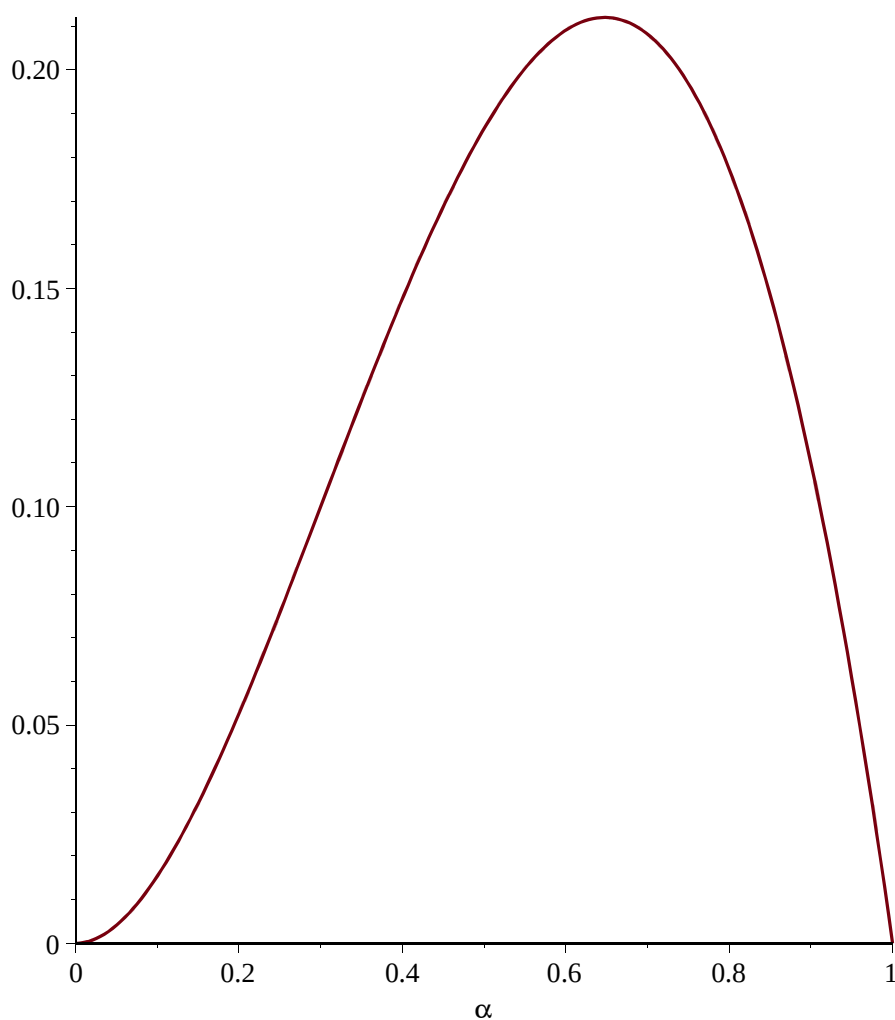
(d) Számítsuk ki a $P(\text{adás} = 111 \mid \text{vétel} = 101)$ feltételes valószínűségét α függvényében!

Keressük a $P(A7 \mid V5) = \frac{P(A7 \mid V5)}{P(V5)} = \frac{P(V5 \mid A7) P(A7)}{P(V5)}$ feltételes valószínűséget, amelyet a Bayes-tétel segítségével számolhatunk ki!

> $P(A7|V5) := simplify\left(\frac{P(V5|A7) P(A7)}{P(V5)}\right)$

$$P(A7|V5) := \frac{64 (-1 + \alpha) \alpha^2}{-15 \alpha + 2 \alpha^2 + \alpha^3 - 36} \quad (1.4.14)$$

> $plot(P(A7|V5), \alpha = 0..1)$



Az ábráról a következő következőket olvashatjuk le:

- (i) Ha minden bit hibásan megy át, vagyis $\alpha = 0$, akkor nincs esély arra, hogy az adás "111" legyen, feltéve, hogy a vétel "101" volt. Ilyenkor ugyanis 1 valószínűséggel az adás "010" kellett, hogy legyen.
- (ii) Ha minden bit hibátlanul megy át, vagyis $\alpha = 1$, akkor sincs esély arra, hogy az adás "111" legyen, feltéve, hogy a vétel "101" volt. Ilyenkor ugyanis 1 valószínűséggel az adás "101" kellett, hogy legyen.
- (iii) Mivel minden valószínűség 0 és 1 közé esik és a függvény 0 értéket vesz fel a két végén, ezért valahol kell lenni legalább egy maximum helynek. A grafikon alapján pontosan egy ilyen hely van.

(e) Milyen α átmenet valószínűség mellett lesz a $P(\text{adás} = 111 \mid \text{vétél} = 101)$ feltételes valószínűség értéke maximális? Mekkora ez a maximális valószínűség? (2 pont)

Deriváljuk a feltételes valószínűséget α függvényeként és keressük meg a derivált zérushelyeit!

> `P(A7|V5)`; derivalt := simplify($\frac{\partial}{\partial \alpha}$ `P(A7|V5)`) = 0; evalf(solve(% , α))

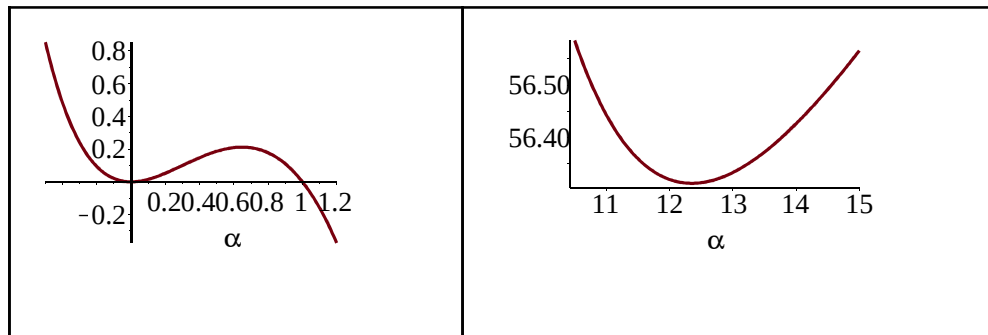
$$\frac{64(-1 + \alpha)\alpha^2}{-15\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 - 36}$$

$$\text{derivalt} := \frac{192\alpha(\alpha^2 - 13\alpha + 8)}{(\alpha^2 - \alpha - 12)(-15\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3 - 36)} = 0$$

0.0000000000, 12.3523499600, 0.6476500450

(1.4.15)

> plots:-display(Matrix(1, 2, [plot(`P(A7|V5)`, α = -0.5..1.2), plot(`P(A7|V5)`, α = 10.5..15)]))



Az ábrákról leolvashatók, hogy $\alpha = 0$ és $\alpha = 12.35$ helyeken is minimuma van a függvénynek.

Mivel azonban $0 < \alpha < 1$, ezért $\alpha = 0.64765$ esetén lesz maximális a valószínűsége annak, hogy az adás 111 volt feltéve, hogy vettük az 101 jelet.

> maximize(`P(A7|V5)`, α = 0..1); maximális érték = evalf(%)

$$\frac{64 \left(\frac{11}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{137} \right) \left(\frac{13}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{137} \right)^2}{-\frac{267}{2} + \frac{15}{2} \sqrt{137} + 2 \left(\frac{13}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{137} \right)^2 + \left(\frac{13}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{137} \right)^3}$$

maximális érték = 0.2120602723

(1.4.16)

(f) Rajzoljuk fel a $P(X_0=000 | Y = 101)$, $P(X_1=001 | Y = 101)$, $P(X_2=010 | Y = 101)$, $P(X_3=011 | Y = 101)$, $P(X_4=100 | Y = 101)$, $P(X_5=101 | Y = 101)$, $P(X_6=110 | Y = 101)$, $P(X_7=111 | Y = 101)$ valószínűségek függvényeit α változtatásával közös koordináta-rendszerben!

Keressük az összes $P(A0 | V5) = \frac{P(A0 V5)}{P(V5)} = \frac{P(V5 | A0) P(A0)}{P(V5)}$, ..., $P(A7 | V5) =$

$\frac{P(A7 V5)}{P(V5)} = \frac{P(V5 | A7) P(A7)}{P(V5)}$ valószínűséget, amelyből $P(A5 | V5)$ valószínűséget az (a) pontban, a $P(A7 | V5)$ valószínűséget a (d) pontban számoltunk ki!

A többit is Bayes-tétel alapján kaphatjuk meg.

> `P(A0|V5)` := simplify($\frac{P(V5|A0) P(A0)}{P(V5)}$);

`P(A1|V5)` := simplify($\frac{P(V5|A1) P(A1)}{P(V5)}$); `P(A2|V5)` :=

simplify($\frac{P(V5|A2) P(A2)}{P(V5)}$); `P(A3|V5)` := simplify($\frac{P(V5|A3) P(A3)}{P(V5)}$);

$$\begin{aligned} \text{'P(A4|V5)'} &:= \text{simplify}\left(\frac{\text{'P(V5|A4)'} \text{'P(A4)'}}{P(V5)}\right); \text{'P(A6|V5)'} := \\ &\text{simplify}\left(\frac{\text{'P(V5|A6)'} \text{'P(A6)'}}{P(V5)}\right) \end{aligned}$$

$$P(A0|V5) := -\frac{27(-1+\alpha)^2\alpha}{-15\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-36}$$

$$P(A1|V5) := \frac{36(-1+\alpha)\alpha^2}{-15\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-36}$$

$$P(A2|V5) := \frac{36(-1+\alpha)^3}{-15\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-36}$$

$$P(A3|V5) := -\frac{48(-1+\alpha)^2\alpha}{-15\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-36}$$

$$P(A4|V5) := \frac{36(-1+\alpha)\alpha^2}{-15\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-36}$$

$$P(A6|V5) := -\frac{48(-1+\alpha)^2\alpha}{-15\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-36} \quad (1.4.17)$$

Mutassuk meg, hogy a teljes összeg 1. Tehát kimerítjük az összes variációs lehetőséget!

$$\begin{aligned} &> \text{teljes_osszeg} := \text{simplify}(\text{'P(A0|V5)'} + \text{'P(A1|V5)'} + \text{'P(A2|V5)'} + \text{'P(A3|V5)'} \\ &\quad + \text{'P(A4|V5)'} + \text{'P(A5|V5)'} + \text{'P(A6|V5)'} + \text{'P(A7|V5)'}) \\ &\quad \text{teljes_osszeg} := 1 \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

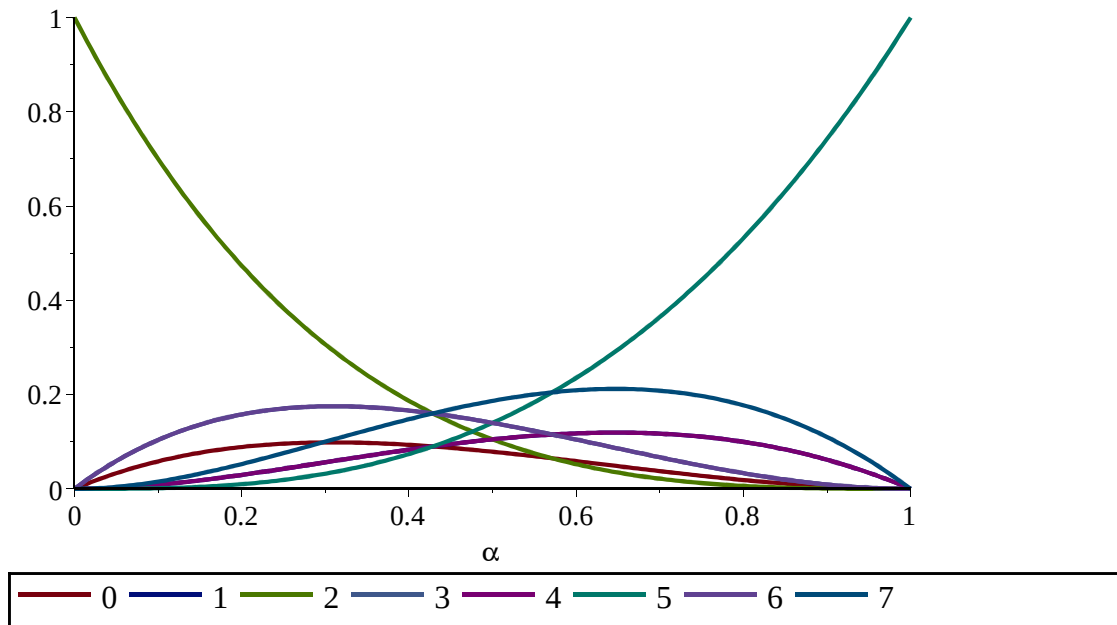
$$> \text{valoszinusegek} := [\text{'P(A0|V5)'}, \text{'P(A1|V5)'}, \text{'P(A2|V5)'}, \text{'P(A3|V5)'}, \text{'P(A4|V5)'}, \\ \text{'P(A5|V5)'}, \text{'P(A6|V5)'}, \text{'P(A7|V5)'}]$$

$$\text{valoszinusegek} := \left[-\frac{27(-1+\alpha)^2\alpha}{-15\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-36}, \frac{36(-1+\alpha)\alpha^2}{-15\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-36}, \right. \quad (1.4.19)$$

$$\left. \frac{36(-1+\alpha)^3}{-15\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-36}, -\frac{48(-1+\alpha)^2\alpha}{-15\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-36}, \frac{36(-1+\alpha)\alpha^2}{-15\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-36}, \right.$$

$$\left. \frac{48}{343} \frac{\alpha^3}{\frac{123}{343}(1-\alpha)^2\alpha + \frac{136}{343}(1-\alpha)\alpha^2 + \frac{36}{343}(1-\alpha)^3 + \frac{48}{343}\alpha^3}, \right. \\ \left. -\frac{48(-1+\alpha)^2\alpha}{-15\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-36}, \frac{64(-1+\alpha)\alpha^2}{-15\alpha+2\alpha^2+\alpha^3-36} \right]$$

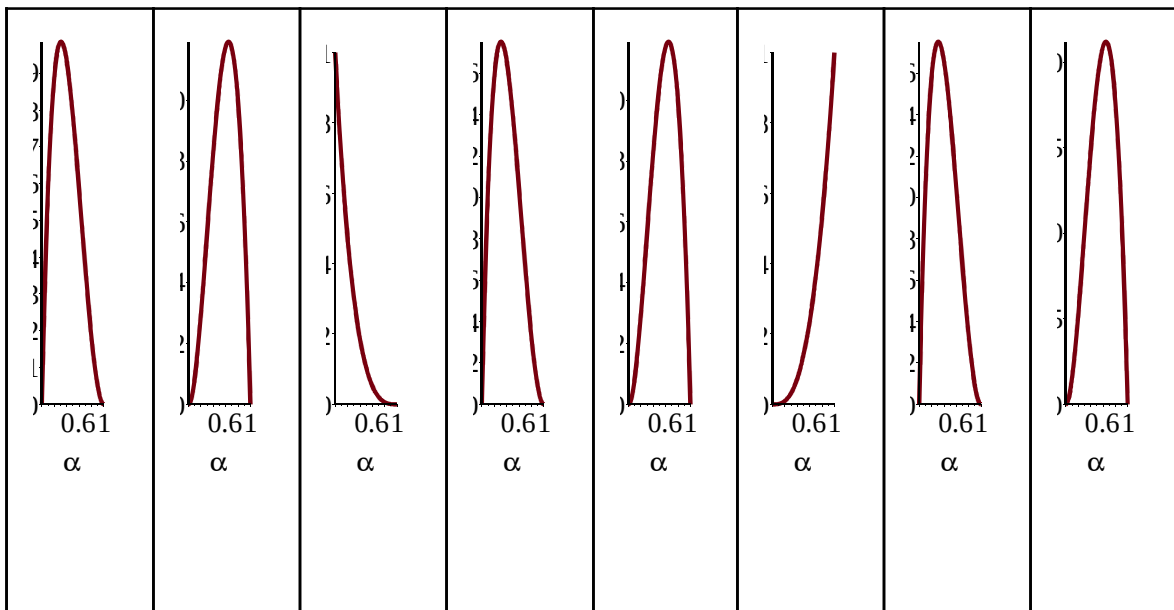
$$> \text{plot}(\text{valoszinusegek}, \alpha = 0..1, \text{thickness} = 2, \text{legend} = ["0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7"])$$



Az összeg 1 annyit jelent, hogy a 8 függvényt pontonként összeadva 1-et kapunk minden α esetén!

Az ábráról nehéz felismerni, hogy melyik függvény melyik, ezért rajzoljuk fel animációval is!

```
> rajzok := Matrix( 1, 8, [ seq( plot( valoszinusegek_k, alpha = 0..1, thickness = 2 ), k = 1..8 ) ] ) :
> plots[display](rajzok)
```



(g) Az $\alpha=0.9$ megbízhatóság esetén az 101 vételt melyik adással lehet leginkább összetéveszteni?

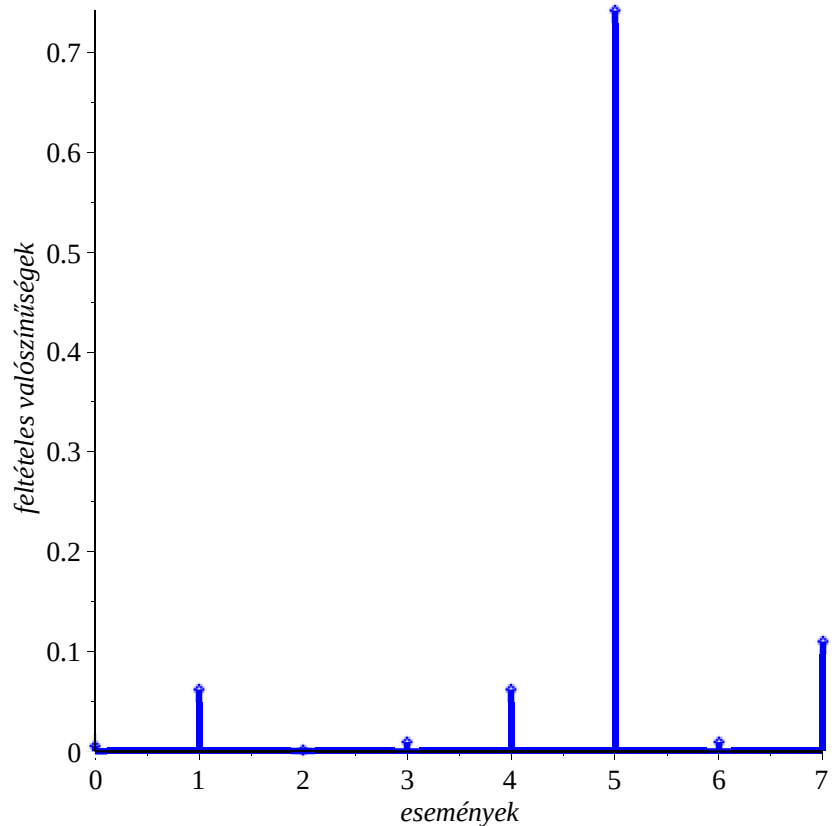
```
> eloszas := subs( alpha = 0.9000000000, [ 'P(A0|V5)', 'P(A1|V5)', 'P(A2|V5)', 'P(A3|V5)',
      'P(A4|V5)', 'P(A5|V5)', 'P(A6|V5)', 'P(A7|V5)' ] )
```

.....

```
eloszlas := [0.0051536553, 0.0618438634, 0.0007635045, 0.0091620538,  
0.0618438634, 0.7421263600, 0.0091620538, 0.1099446460]
```

(1.4.20)

```
> DynamicSystems:-DiscretePlot([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], eloszlas, style = stem, color = blue,  
thicknes = 3, labels = [események, feltételes valószínűségek], labeldirections  
= [horizontal, vertical])
```



Legnagyobb a valószínűsége annak, hogy az adás is "101" volt (72,4%), de az utána következő legnagyobb valószínűség kb. 11%-kal az "111" adás. Ezzel lehet legjobban összetéveszteni! ♣

▼ 6.5. Piaci részesedés. Markov-lánc

Egy bizonyos fajta terméket kétféle cég gyárt, nevezzük A és B Kft.-nek. A boltokban csak az A és a B cég által készített termék valamelyike közül választhatnak a vásárlók. Megvizsgálták a vásárlók vásárlási szokásait heti ciklusokban. Azt tapasztalták, hogy azok az emberek akik az A cég által készített terméket vásárolták, azok 80%-ban hűek maradtak a következő héten is, de a vásárlók kb. 20%-a áttért a B cég termékének vásárlására. Viszont akik a B cég termékét vásárolták, azok 60%-a maradt hű és a 40%-a átváltott az A cég termékének vásárlására a következő héten.

Vásárlási szokások		Következő hét	
		A	B
Előző hét	A	0.8	0.2
	B	0.4	0.6

A vásárlók hetenkénti áttérési szokásai az A és B gyártó termékei között

Tegyük fel, hogy kezdetben az A és B gyártók piaci részesedése a vásárlók között 50%-50% .

(a) Számítsuk ki, hogy 1 hét múlva milyen lesz a vásárlók megoszlása a két cég termékei között?

(b) Vezessünk le rekurzív összefüggést az n-edik hétről az (n+1)-edik hétre való átmenet során a részesedés számítására!

(c) Mekkora lesz egy év (azaz 52 hét) múlva az egyes gyártók részesedése?

(d) Legyen kezdetben a piaci részesedés 10% -90%. Számítsuk ki, hogy ilyen kezdeti feltételek mellett a részesedéseket egy év múlva!

Milyen változást tapasztalunk az előzőekhez képest?

Megoldás

Az n-edik héten az A cég piaci részesedését jelölje $P(A_n)$ és a B cég részesedését $P(B_n)$. Mivel nincs más cég csak az A és B, ezért

$$P(A_n) + P(B_n) = 1 \quad \text{minden } n=1, 2, 3, \dots\text{-re.}$$

Tudjuk, hogy kezdetben $P(A_0) = 0.5$ és $P(B_0) = 0.5$ teljesül.

(a) Ki kell számítani a $P(A_1)$ és $P(B_1)$ valószínűségeket!

A feladatban adottak a következő feltételes valószínűségek

$P(\text{valaki első hét után is A terméket vesz, feltéve, hogy a 0-ik héten is azt vett}) = P(A_1 | A_0) = 0.8$

$P(\text{valaki első hét után B terméket vesz, feltéve, hogy a 0-ik héten A terméket vett}) = P(B_1 | A_0) = 0.2$

$P(\text{valaki első hét után is B terméket vesz, feltéve, hogy a 0-ik héten is azt vett}) = P(B_1 | B_0) = 0.6$

$P(\text{valaki első hét után A terméket vesz, feltéve, hogy a 0-ik héten B terméket vett}) = P(A_1 | B_0) = 0.4$

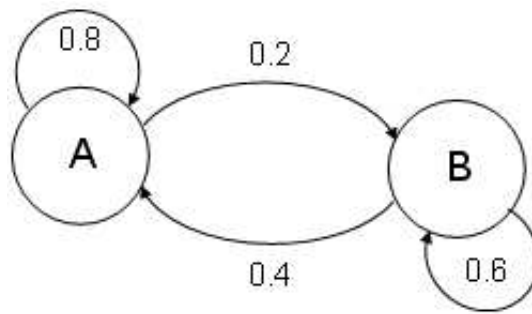
A teljes valószínűség -tétel alapján

$$P(A_1) = P(A_1 | A_0) P(A_0) + P(A_1 | B_0) P(B_0) = 0.8 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.5 = 0.4 + 0.2 = 0.6$$

$$P(B_1) = P(B_1 | A_0) P(A_0) + P(B_1 | B_0) P(B_0) = 0.2 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.5 = 0.1 + 0.3 = 1 - 0.6 = 0.4$$

Tehát az A részesedése 10%-kal nőtt és B részesedése 10%-kal csökkent. egy hét leforgása alatt.

Az egyes hetek közötti átmenetet mutatja az alábbi gráf, amelyet a Markov-láncok elméleténél használnak.



A gráf azt szemlélteti, hogy ha valaki az A cég termékét vásárolta, akkor a következő héten 0.8 valószínűséggel a következő héten is azt vásárolja, de 0.2 valószínűséggel a B termékét veszi. Ha valaki B terméket vesz, akkor a következő héten 0.6 valószínűséggel marad B vásárlásánál és 0.4 valószínűséggel áttér az A vásárlására.

(b) Alkalmazzuk most is a teljes valószínűség -tételt, melyet a fenti gráf is szemléltet

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)P(B_n) = 0.8P(A_n) + 0.4P(B_n)$$

$$P(B_{n+1}) = P(B_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(B_{n+1}|B_n)P(B_n) = 0.2P(A_n) + 0.6P(B_n)$$

A levezetés során felhasználtuk az egyes hetek közötti áttérések táblázatában adott valószínűségeket! A számításokat mátrix - vektor formában is elrendezhetjük

$$\begin{bmatrix} P(A_{n+1}) \\ P(B_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \end{bmatrix}$$

> restart : M := Matrix([[0.8, 0.4], [0.2, 0.6]])

> P0 := Vector([0.5, 0.5])

$$M := \begin{bmatrix} 0.8000000000 & 0.4000000000 \\ 0.2000000000 & 0.6000000000 \end{bmatrix}$$

$$P0 := \begin{bmatrix} 0.5000000000 \\ 0.5000000000 \end{bmatrix} \quad (1.5.1)$$

Képezzük a mátrix vektor szorzatot!

P1 := M.P0

$$P1 := \begin{bmatrix} 0.6000000000 \\ 0.4000000000 \end{bmatrix} \quad (1.5.2)$$

A második hét után a részesedések!

> P2 := M.P1

$$P2 := \begin{bmatrix} 0.6400000000 \\ 0.3600000000 \end{bmatrix} \quad (1.5.3)$$

Hogyan lehet úgy számolni, hogy az előző hét értékeit ne számoljuk ki? Erre az M hatványaival tudunk válaszolni: $P_n = M^n P_0$. Képezzük a hatványokkal az első 10 hét megoszlását!

> seq(M^n . P0, n = 1 ..10)

$$\begin{bmatrix} 0.6000000000 \\ 0.4000000000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6400000000 \\ 0.3600000000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6560000000 \\ 0.3440000000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6624000000 \\ 0.3376000000 \end{bmatrix}, \quad (1.5.4)$$

$$\begin{bmatrix} 0.6649600000 \\ 0.3350400000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6659840000 \\ 0.3340160000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6663936000 \\ 0.3336064000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6665574400 \\ 0.3334425600 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 0.6666229760 \\ 0.3333770240 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6666491904 \\ 0.3333508096 \end{bmatrix}$$

(c) Hatvány segítségével számoljuk ki az 52-ik hét után a piaci részesedéseket!

> $P52 = (M^{52}) \cdot P0$

$$P52 = \begin{bmatrix} 0.6666666667 \\ 0.3333333333 \end{bmatrix} \quad (1.5.5)$$

Tehát kb. $P(A_{52}) = \frac{2}{3}$ és $P(B_{52}) = \frac{1}{3}$.

(d) Legyen a kezdeti részesedés 10%-90%. Nézzük meg az 52-ik hét után a részesedést

> $P0 := \text{Vector}([0.2, 0.8]); P52 = (M^{52}) \cdot P0$

$$P0 := \begin{bmatrix} 0.2000000000 \\ 0.8000000000 \end{bmatrix} \\ P52 = \begin{bmatrix} 0.6666666667 \\ 0.3333333333 \end{bmatrix} \quad (1.5.6)$$

Tehát az 52-ik hét után a részesedés ugyanaz lett, mint amikor 50%-50% kezdeti eloszlás után. Vagyis a kezdeti eloszlástól függetlenül mindig ugyanannyi lesz a piaci részesedés eloszlása hosszú idő elteltével. ♣

▼ 6.6. A hazardjátékos csődjének modellje. Markov-lánc.

A **játékkaszinók**ban általában olyan szerencsejátékkal találkozhatunk, amelyek a bank számára kedvezőek és a játékosok számára veszteségesek. Ezt persze tudják a játékosok is és a kaszinó tulajdonosok is, mégis az átmeneti siker reményében sokan vállalják a **hazardjátékot**. Megvizsgáljuk, hogy független játékok egymásutáni sorozatában egy játékos mekkora valószínűséggel veszíti el az összes pénzét, vagyis **megy csődbe** attól függően, hogy mekkora az induló **tőkéje** és mekkora **haszonra** szeretne szert tenni. Ezt a játékot vagy modellt az irodalom a **hazardjátékos csődjének** nevezi.

6.6.1. PÉLDA. Tegyük fel, hogy olyan játékot játszunk egy játékbarlangban, amelyben a játékos nyerésének valószínűsége $p < \frac{1}{2}$. A $p < \frac{1}{2}$ azt jelent, hogy a kaszinótulajdonos vagyis a bank számára **kedvező** a játék. Vannak olyan játékok, amelyekre p értéke egészen közel van $\frac{1}{2}$ -hez, vagyis igazságosnak látszik.

Játékszabály

- (a) Legyen a játékos induló pénze vagy tőkéje $T_0 = A$ \$.
- (b) A játékos egy játszmában p valószínűséggel nyer és ekkor kap 1 \$-t a banktól. Ilyen esetben a játékos pénze az első játék után $T_1 = A + 1$ \$ lesz.
- (c) A játékos egy játszmában $q = (1-p)$ valószínűséggel veszít és ekkor fizet 1 \$-t a banknak. Ilyen esetben a játékos pénze az első játék után $T_1 = A - 1$ \$ lesz.
- (d) A játékot addig játsszák, amíg a játékos pénze el nem ér egy M \$ ($>T_0$) előre meghatározott

nagy összeget, vagy el nem veszíti az összes pénzét, azaz **csődbe** megy.

KÉRDÉSEK

- (1) Mekkora a valószínűsége, hogy a játékos **csődbe** megy?
- (2) Mekkora a valószínűsége, hogy a játékos **nyer**?

MEGOLDÁS

A kérdésekre adandó válaszok függenek **p**, **A** és **M** konkrét értékétől. Vagyis a **csődbe** vagy a **nyerés** esélye függ attól,

- (i) hogy mekkora az induló tőkéje a játékosnak (**A** \$)
- (ii) mekkora az az összeg, amit nyerni szeretne (**M** \$)
- (iii) és egy játék lejátászása során mekkora eséllyel nyer a játékos (**p**)?

A játék alapösszefüggéseit a teljes valószínűség-tétel és a függetlenség felhasználásával kapjuk. Jelölje T_n a játékos tőkéjét az n -edik játék után. Adott a kezdeti tőke $T_0 = A$. Az n -edik játék után a játékos $T_n = k$ tőkéjének nagyságát közvetlenül az $(n-1)$ -ik játék utáni T_{n-1} tőke határozza meg, mert a kettővel és még korábban lejátszott játékoktól közvetlenül nem függ a mostani nyeremény. Tudjuk, hogy a játékos csak 1\$-t veszíthet vagy nyerhet. Ezért $T_n = k$ csak kétféleképpen lehet, ha nyert a játékos az $(n-1)$ -ik játék után, akkor $(k-1)$ \$ pénze volt, ha veszített a játékos, akkor $(k+1)$ \$ pénze volt. Így a teljes valószínűség-tételt kétféle választásai lehetőséggel felírva kapjuk

$$P(T_n = k) = P(T_n = k | T_{n-1} = k-1) \cdot P(T_{n-1} = k-1) + P(T_n = k | T_{n-1} = k+1) \cdot P(T_{n-1} = k+1)$$

ahol $k = 2, 3, \dots, M-2$ lehet. A $P(T_n = k | T_{n-1} = k-1) = p$ állandó, mert ez a játékos nyerési esélye.

A $P(T_n = k | T_{n-1} = k+1) = q = 1-p$ is állandó és ez a játékos veszítésének esélye.

Kapjuk az alábbi rekurzív összefüggést az egymást követő pénzek alakulására

$$P(T_n = k) = p \cdot P(T_{n-1} = k-1) + q \cdot P(T_{n-1} = k+1) \quad (k=2, 3, \dots, M-2) \quad (1)$$

A $k=0$ és $k=M$ két szélső esetre külön képletek érvényesek:

a $P(T_n = 0) = P(T_{n-1} = 0) + q \cdot P(T_{n-1} = 1)$, mert $T_n = 0$ úgy lehet, ha előtte 1\$ pénzünk volt és q valószínűséggel elvesztettük, vagy előtte is 0\$-unk volt és akkor 1 valószínűséggel annyi is maradt, mert a játék befejeződött!

A $P(T_n = M) = p \cdot P(T_{n-1} = M-1) + P(T_{n-1} = M)$, mert $T_n = M$ úgy lehet, ha előtte $(M-1)$ \$ pénzünk volt és p valószínűséggel nyertünk, vagy előtte is M \$-unk volt és akkor 1 valószínűséggel annyi is maradt, mert a játék befejeződött!

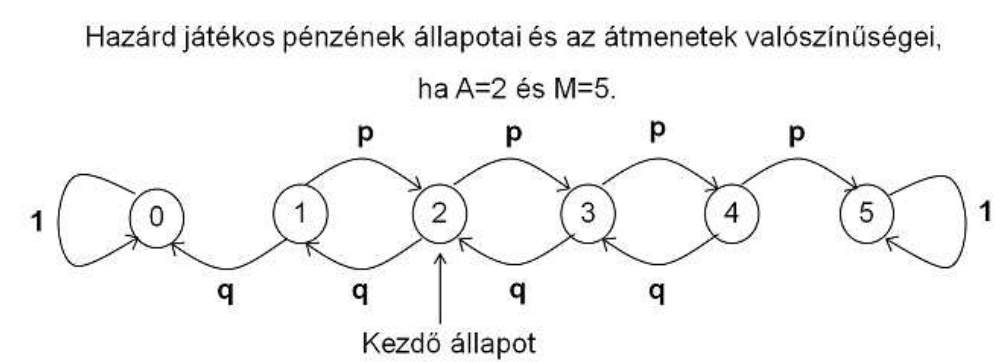
Mivel a 0\$ állapot után a játékos már játszhat, hiszen nincs tétje, ezért 1\$-ja csak úgy lehet, ha előtte 2\$-ja volt és veszített:

$$P(T_n = 1) = q \cdot P(T_{n-1} = 2).$$

Mivel az M \$ állapot elérése után már nem játszik a játékos, ezért $(M-1)$ \$-ja csak úgy lehet, ha előtte $(M-2)$ \$-ja volt és nyert:

$$P(T_n = M-1) = p \cdot P(T_{n-1} = M-2)$$

Ezzel teljes a leírása az átmeneteknek. A lehetséges nyeremények $\{0, 1, 2, 3, \dots, M\}$ halmazával, mint csúcspontokkal és a fent leírt átmenetekkel, mint élekkel rajzolhatunk egy irányított gráfot. Az élekhez súlyokat rendelhetünk, amelyek az egyes átmenetek valószínűségei. A gráf a következőképpen néz ki $M=5$ és $A=2$ esetben.



A gráf azt szemlélteti, hogy ha a 2-s pénzügyi állapotból indulunk, akkor p valószínűséggel nyerünk és átkerülünk a 3-s állapotba. Viszont $q=1-p$ valószínűséggel veszíthetünk és ekkor átkerülünk az 1-s állapotba. A nyerési láncolatokat az állapotok fölött rajzoltuk meg, míg a veszítési láncolatokat alatta láthatók. Ha egyszer a 0 vagy az $M=5$ állapotba kerülünk, akkor vége a játéknak. Onnan nem vezet kifelé nyíl. Az ilyen gráffal leírható véletlen folyamatokat MARKOV-láncnak nevezzük.

Az

$$X^n = [P(T_n = 0), P(T_n = 1), P(T_n = 2), \dots, P(T_n = M)] = [x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,M}]$$

valószínűségi vektor kapcsolatát az előző játék valószínűségi vektorával

$$X^{n-1} = [x_{n-1,0}, x_{n-1,1}, \dots, x_{n-1,M}]$$

mátrix -vektor alakban az $X^n = X^{n-1} \cdot C$ egyenlettel lehet leírni, ahol C az ún. $(M+1) \times (M+1)$ -es **átmenet mátrix** és alakját $M=5$ esetben szemléltetjük

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A C mátrix (i,j) -ik eleme megadja annak valószínűségét, hogy egy játék után a játékos tőke j \$ lesz, feltéve hogy a játékos tőkéje a játék előtt i \$ volt, azaz

$$C_{i,j} = P(T_{n+1} = j | T_n = i)$$

A mátrix minden sorában az elemek összege 1, és csak a főátlóban és vele párhuzamosan találhatók nem nulla elemek. .

A kezdő vektor az $X^0 = [0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ lesz, ahol az egyetlen 1 a $k = A+1$ helyen áll, mert kezdetben 1 valószínűséggel A \$-ja van a játékosnak és a többi pénz valószínűsége 0.

A csőd szimulációja számítógéppel

A fenti vektor sorozat számítására írtunk egy Maple programot, amely kiszámolja a vektorokat és megjeleníti azokat animációval, mint egy diszkrét eloszlást..

Legyen a nyerés esélye $p=0.4$, a vesztes esélye $q=0.6$. A kezdeti tőke $A=2$ \$ és célunk 3 \$ nyerése. Tehát megállunk, ha tőkénk eléri az $M=5$ \$-t.

> restart :

> $p := 0.4$

$p := 0.4000000000$

(1.6.1)

Az átmeneti transzformáció C mátrixa, most 6x6-os.

> $C := \text{Matrix}([[1, 0, 0, 0, 0, 0], [1 - p, 0, p, 0, 0, 0], [0, 1 - p, 0, p, 0, 0], [0, 0, 1 - p, 0, p, 0], [0, 0, 0, 1 - p, 0, p], [0, 0, 0, 0, 0, 1]])$

$C := [[1, 0, 0, 0, 0, 0],$
 $[0.6000000000, 0, 0.4000000000, 0, 0, 0],$
 $[0, 0.6000000000, 0, 0.4000000000, 0, 0],$
 $[0, 0, 0.6000000000, 0, 0.4000000000, 0],$
 $[0, 0, 0, 0.6000000000, 0, 0.4000000000],$
 $[0, 0, 0, 0, 0, 1]]$ (1.6.2)

Kezdeti állapot azt mutatja, hogy 1 valószínűséggel a pénzünk 2 \$ és a többi vagyon valószínűsége 0. Elegendő 20 játékot lejátszani és a végállapotok alakulása kivehető az animáció végén.

> $X := \text{Vector}_{\text{row}}([0, 0, 1, 0, 0, 0])$

> $\text{eselyek} := \text{plot}([\text{seq}([[t - 1, 0], [t - 1, X_t]], t = 1..6)], \text{color} = \text{red}, \text{thickness} = 3) :$

for k to 20 do

$X := X.C;$

$\text{rajz} := \text{plot}([\text{seq}([[t - 1, 0], [t - 1, X_t]], t = 1..6)], \text{color} = \text{red}, \text{thickness} = 3);$

$\text{eselyek} := \text{eselyek}, \text{rajz}$

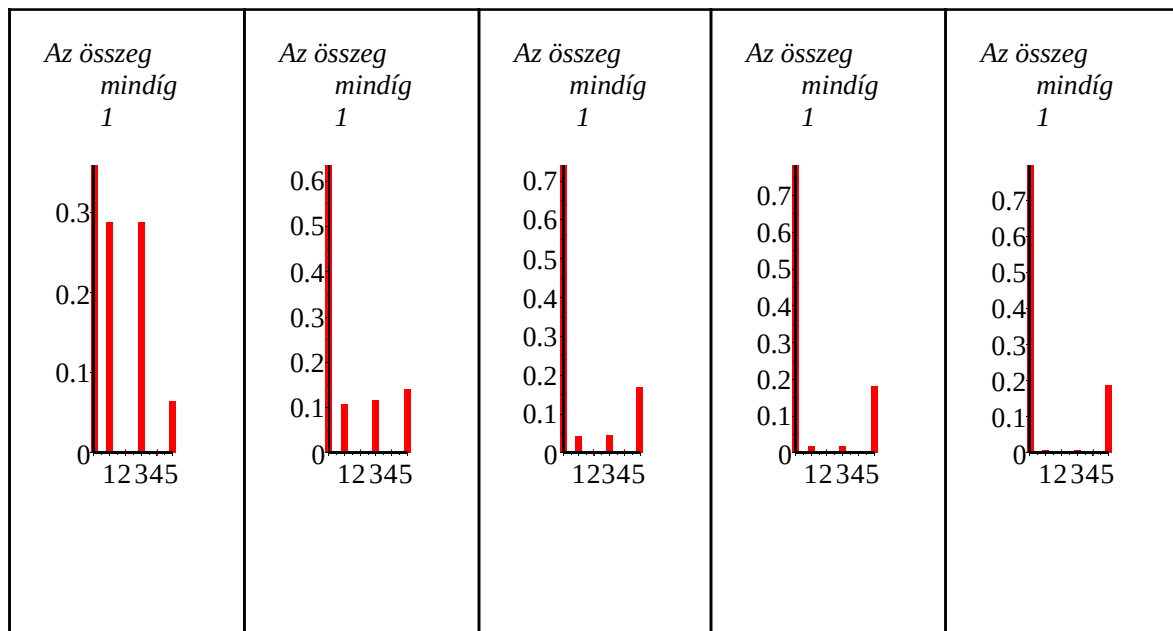
end do :

> $\text{Végső állapot} = X$

> $\text{plots}[\text{display}](\text{Matrix}(1, 5, [\text{seq}(\text{eselyek}_i, i = 1..5)]), \text{title} = \text{Az összeg mindig 1})$

$X := [\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}]$

$\text{Végső állapot} = [0.8037043516, 0.0000000000, 0.0069401341, 0.0000000000,$
 $0.0028594925, 0.1864960219]$



Lehet látni, hogy ha $p=0.4$, $A = 2$ \$ és $M=5$ \$, akkor a csőd esélye kb. 80.3 %-os és a nyereség esélye kb. 18.6%-os, 20 játék lejátszása után.

Az olvasóra bízunk **p** és **A** értékének változtatását, hogy kísérletezve fedezze fel a végállapotok valószínűségeinek alakulását.

Azt lehet még látni, hogy

- (1) a közbenső állapotok valószínűségei mind 0-ák lesznek;
- (2) a csőd és a nyerés valószínűségeinek összege mindig 1 lesz, vagyis a játék 1 valószínűséggel vagy csőddel vagy nyeréssel ér véget.

Hogyan lehet kiszámítani a végállapotban kapott kb. 80.3% veszítési esélyt, illetve a kb 18.6% nyerési esélyt? Erre adunk választ a következő levezetésekkel!

Jelölje s_k annak feltételes valószínűségét, hogy a **játékos csődbe megy**, feltéve, hogy induló tőkéje $T_0 = k$ (\$) volt, azaz

$$s_k = P(a \text{ játékos csődbe megy} \mid T_0 = k)$$

Példaként említjük meg, hogy a szimulációban kapott 0.803 érték az s_2 lesz, ahol $M = 5$, $p=0.4$ és $A=2$. Az $s_2 = 0.803$ olyan **véghelyzetként** vagy **határértékként** adódik, amikor már X komponensei nem változnak.

Sok játék lejátszása után látjuk a szimulációból, hogy az X vektorban levő valószínűségek kiosztása kicsit változik, bekövetkezik a stacionér vagy mozdulatlan állapot. A stacionér állapotban kapott x_0 meghatározását kérdezi a feladat, amely s_A értékét adja, feltéve, hogy induláskor az x_A valószínűség 1 volt.

A feladat valójában csak az egyetlen s_A érték meghatározását kérdezi, de könnyebben megy a teljes $S = [s_0, s_1, s_2, \dots, s_M]$ értékrendszer egyidejű számítása. Nyilvánvaló, hogy $s_0 = 1$ és $s_M = 0$, ugyanis

(i) ha a játékosnak nincs induló tőkéje **A=0**, akkor már az indulásnál csődbe ment. Nem tud játszani! Tehát a csődbe menés valószínűsége biztos, vagyis 1.

(ii) ha a játékos induló tőkéje **A=M**, akkor sem kell játszania, mert elérte a kívánt összeget (lásd (d) játékszabály)! Mondhatni, hogy annyi pénze van, hogy nem is kell neki játszani. Tehát a csődbe menés valószínűsége 0, hiszen nem játszik és induláskor meg van a maximálisan elérhető összege.

Keressünk összefüggést a megmaradt $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{M-1}$ valószínűségek között. Induljunk ki a $T_0 = k$ állapotból. Egy játék lejátszása után p valószínűséggel lesz a játékosnak $(k+1)$ pénze, mert ekkora a nyerési esélye. Továbbá $q=1-p$ valószínűséggel lesz $(k-1)$ pénze, mert ekkora valószínűséggel veszít. Amikor a tőkéje eléri $(k-1)$ állapotot, akkor innen a csődbe jutás valószínűsége ugyanannyi, mintha ez lett volna az induló tőke.

Hasonlóan, amikor a tőkéje eléri $(k+1)$ állapotot, akkor innent a csődbe jutás valószínűsége ugyanannyi, mintha ez lett volna az induló tőke. Így a csődbe jutás egyenlete a következő lesz

$$P(\text{csőd} \mid T_0 = k) = p \cdot P(\text{csőd} \mid T_0 = k + 1) + q \cdot P(\text{csőd} \mid T_0 = k - 1)$$

Az egyenletet felírva az s_k értékekkel

$$s_k = p s_{k+1} + q s_{k-1} \quad (k=1, 2, 3, \dots, M-1) \quad (2)$$

rekurzív összefüggést kapjuk. (Vigyázat ez a rekurzív egyenlet nem ugyanaz, mint az (1) rekurzív egyenlet!)

Az egyenletrendszerben az S vektor koordinátái az ismeretlenek. Az s_k koordináták értelme pedig: sok játék után ekkora a valószínűsége annak, hogy csődbe megy a játékos, feltéve hogy az induló pénze k \$ volt.

Oldjuk meg stacionér egyenletet az S vektorra, az $M=5$ és $p=0.4$ speciális esetben.

> restart : p := 0.4000000000

$$p := 0.4000000000$$

(1.6.3)

Felállítjuk a stacionér egyenletrendszer 6 egyenletét!

$$> \text{rekurzio} := s_k = p s_{k+1} + (1 - p) s_{k-1}$$

$$> \text{rendszer} := \text{seq}(\text{rekurzio}, k = 1 \dots 4)$$

$$\text{rekurzio} := s_k = 0.4000000000 s_{k+1} + 0.6000000000 s_{k-1}$$

$$\begin{aligned} \text{rendszer} := s_1 &= 0.4000000000 s_2 + 0.6000000000 s_0, s_2 = 0.4000000000 s_3 \\ &+ 0.6000000000 s_1, s_3 = 0.4000000000 s_4 + 0.6000000000 s_2, s_4 = 0.4000000000 s_5 \\ &+ 0.6000000000 s_3 \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

Ki kell használnunk, hogy $s_0 = 1$ és $s_5 = 0$ teljesül.

$$> \text{stacioner} := \text{subs}(\{s_0 = 1, s_5 = 0\}, \{\text{rendszer}\})$$

$$\begin{aligned} \text{stacioner} := \{s_1 &= 0.4000000000 s_2 + 0.6000000000, s_2 = 0.4000000000 s_3 \\ &+ 0.6000000000 s_1, s_3 = 0.4000000000 s_4 + 0.6000000000 s_2, s_4 = 0.6000000000 s_3\} \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

Megoldjuk a 4 egyenletből álló egyenletrendszert a 4 db s_1, s_2, s_3, s_4 ismeretlenre!

$$\begin{aligned} > \text{solve}(\text{stacioner}, \{s_1, s_2, s_3, s_4\}) \\ \{s_1 &= 0.9241706161, s_2 = 0.8104265403, s_3 = 0.6398104265, s_4 = 0.3838862559\} \end{aligned} \quad (1.6.6)$$

A szimulációnál láttuk, hogy ha $p = 0.4$, $M=5$ és $A=2$, akkor a csőd valószínűsége az $s_2 = 0.803$ volt 20 játék után. Továbbá, ha p és M marad, de $A = 4$, akkor $s_4 = 0.377$ a csőd valószínűsége. Ezek közelítőleg egyeznek a most kiszámolt értékekkel. Azért közelítőleg, mert a szimulációban csak 20 játékot játszottunk. Tehát eddigi levezetéseink helyesek voltak.

Vezessünk le olyan általános képletet, amellyel a most kapott értékek kiszámolhatók tetszőleges p , A és M esetén!

A levezetés első lépése az, hogy megadunk egy képletet s_1 értékére. Majd amikor s_1 meg van, akkor megadjuk tetszőleges s_k értékét is.

Tekintsük a stacionér egyenletrendszer k -adik egyenletét

$$s_k = p s_{k+1} + q s_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots, M-1)$$

Írjuk be az $1 = p + q$ összefüggést s_k együtthatója helyébe $(p + q) s_k = p s_{k+1} + q s_{k-1}$.

Rendezzük az egyenletet

$$q s_k - q s_{k-1} = p s_{k+1} - p s_k$$

Emeljük ki a baloldalon q és jobb oldalon p értékét:

$$q (s_k - s_{k-1}) = p (s_{k+1} - s_k)$$

Osszunk le p -vel

$$s_{k+1} - s_k = \left(\frac{q}{p} \right) (s_k - s_{k-1})$$

Az $e_k = s_k - s_{k-1}$ sorozat egy mértani sorozat lesz, melynek kvóciense az $r = \frac{q}{p} > 1$ érték. A mértani sorozat k -adik elemére vonatkozó képletet használva

$$s_{k+1} - s_k = r^k (s_1 - s_0) \quad (k=1, 2, \dots, M-1) \quad (*)$$

Számoljuk ki az $s_M - s_0 = 0 - 1 = -1$ értéket úgy, hogy teleszkópikus összeget képezünk, vagyis hozzáadjuk és levonjuk az egymást követő s_k értékeket

$$s_M - s_0 = (s_M - s_{M-1}) + (s_{M-1} - s_{M-2}) + \dots + (s_2 - s_1) + (s_1 - s_0)$$

Felhasználva a (*) egyenleteket

$$-1 = (r^{M-1} + r^{M-2} + \dots + r + 1) (s_1 - s_0)$$

Ahonnán a mértani sorozat összeg képletét is használva

$$s_1 - s_0 = - \frac{1}{r^{M-1} + r^{M-2} + \dots + r + 1} = - \frac{r-1}{r^M - 1} \quad (**)$$

$$s_1 = 1 - \frac{r-1}{r^M - 1} = \frac{r^M - r}{r^M - 1}.$$

Az s_1 értéke segítségével meghatározzuk az összes többi s_k értéket $k=2, 3, \dots, M-1$ esetén. Az $s_k - s_0$ különbséget alakítsuk át ugyanúgy teleszkópikus összegé, ahogyan tettük az előbb

$$s_k - s_0 = (s_k - s_{k-1}) + (s_{k-1} - s_{k-2}) + \dots + (s_2 - s_1) + (s_1 - s_0) = \\ (r^{k-1} + r^{k-2} + \dots + r + 1) (s_1 - s_0)$$

Felhasználva az $(s_1 - s_0)$ különbségre kapott (**) egyenlőséget

$$s_k - s_0 = - (r^{k-1} + r^{k-2} + \dots + r + 1) \frac{r-1}{r^M - 1} = - \frac{r-1}{r^M - 1} * \frac{r^k - 1}{r-1} = - \frac{r^k - 1}{r^M - 1}$$

Mivel $s_0 = 1$, ezért

$$s_k = 1 - \frac{r^k - 1}{r^M - 1} = \frac{r^M - 1 - (r^k - 1)}{r^M - 1} = \frac{r^M - r^k}{r^M - 1}$$

A kapott végképlet igaz lesz az előzőekben számolt $k=0, 1$ és M esetekben is! (Ellenőrizzük!)
Tehát annak feltételes valószínűsége, hogy a játékos csődbe megy, feltéve, hogy a kezdő tőkéje $k=A$ volt

$$P(\text{csőd} \mid \text{induló pénz} = A) = \frac{r^M - r^A}{r^M - 1}, \text{ ahol } A = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Szemléltessük a csőd esélyeit $M=5, p=0.4$ esetre, az A induló tőke függvényében!

$$M := 5; p := 0.4000000000; q := 1 - p; r := \frac{q}{p}$$

$$M := 5$$

$$p := 0.4000000000$$

$$q := 0.6000000000$$

$$r := 1.5000000000$$

(1.6.7)

Az S függvénye lesz a k tőkének!

$$> S := k \rightarrow \frac{r^M - r^k}{r^M - 1}$$

$$S := k \rightarrow \frac{r^M - r^k}{r^M - 1}$$

(1.6.8)

A különböző alaptőkével való indulás után a csőd esélyét egy olyan listák listájába tesszük, amelyet pálcika diagrammal tudunk szemléltetni.

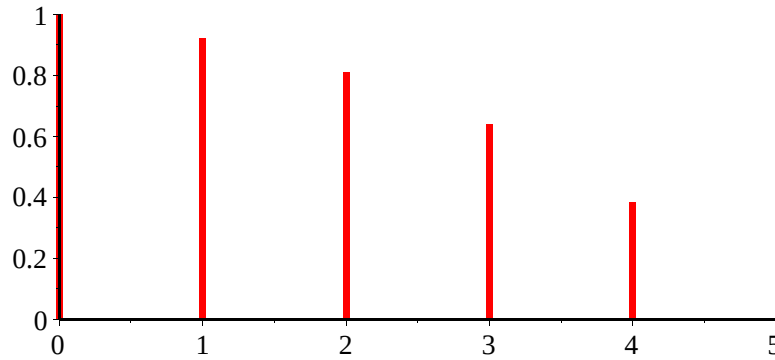
$eselyek := [seq([[k, 0], [k, S(k)]], k = 0 .. M)]$

$> plot(eselyek, color = red, thickness = 3, title$

$= M=5\$ nyeréséhez a veszítés esélyei az alaptőke függvényében)$

$eselyek := [[[0, 0], [0, 1.0000000000]], [[1, 0], [1, 0.9241706161]], [[2, 0], [2, 0.8104265403]], [[3, 0], [3, 0.6398104265]], [[4, 0], [4, 0.3838862559]], [[5, 0], [5, 0.0000000000]]]$

M=5\$ nyeréséhez a veszítés esélyei az alaptőke függvényében



A (2) kérdés megválaszolásához hasonló levezetés szükséges. Jelöljük t_k -val annak a valószínűségét, hogy a játékos nyer M\$-t, vagyis abba hagyja a játékot, feltéve hogy az induló pénze A=k\$. A levezetés eredménye

$$t_k = \frac{r^k - 1}{r^M - 1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, M)$$

Számítsuk ki az $s_k + t_k$ összegeket

$$s_k + t_k = \frac{r^M - r^k}{r^M - 1} + \frac{r^k - 1}{r^M - 1} = \frac{r^M - 1}{r^M - 1} = 1$$

Az összefüggés azt mondja ki, hogy akármilyen induló tőkével játszunk is, a játék valamilyen véges lépésen belül úgy ér véget, hogy vagy csődbe megyünk vagy megnyerjük az M\$ kitűzött célt! A közbenső nyeremények valószínűsége 0.

▼ 6.7. Elméleti ellenőrző kérdések

- 6.7.1. Milyen feltételek mellett igaz a teljes valószínűség-tétel?
- 6.7.2. Mit állít a teljes valószínűség-tétel?
- 6.7.3. Milyen feltételek mellett igaz a Bayes-tétel?
- 6.7.4. Mit állít a Bayes-tétel?
- 6.7.5. Hogyan jelenik meg a teljes valószínűség-tétel az inverz fában?
- 6.7.6. Hogyan jelenik meg a teljes valószínűség-tétel egy valószínűség táblázatban?
- 6.7.7. Hogyan jelenik meg a Bayes-tétel az inverz fában?

▼ 6.8. Gyakorló feladatok

6.8.1. feladat

Egy felhasználóhoz 3 szerveren (A, B és C) keresztül érkehetnek e-mail üzenetek. Az e-mail forgalom 30%-a az A szerveren, 45%-a a B szerveren és a maradék a C szerveren bonyolódik. Az A, B és C szerver adatátvitelének hibázási valószínűségei rendre a következők: $p_a=0.01$, $p_b=0.02$ illetve $p_c=0.03$.

- (a) Mekkora valószínűséggel érkezik hibátlanul egy e-mail üzenet?
- (b) Rajzoljuk fel az e-mailek szerverhez tartozásának és a szerverek hibázásának döntési fa diagramját!
- (c) Rajzoljuk fel a probléma inverz döntési fáját! (3 p.)
- (d) A hibás üzenetek hány százaléka származik az A szervertől? (1 p.)
- (e) A hibátlanul érkezett üzenetek hány százaléka származik a C szervertől? (1 p.)

(f) A hibás üzenetek hány százaléka származik a B szervertől?(1 p.)

A válaszokhoz használjuk az eredeti és az inverz döntés fa diagramját! Adjuk meg az együttes események táblázatát!

6.8.2. feladat

Egy vállalat 3-féle festéket gyárt vasfelületek korrózióvédelmére. Az összes festék 30%-a A típusú, 25%-a B típusú és a maradék C típusú festék. Megfigyelték, hogy 1 év múlva az A típusú festékekkel kezelt vas felületen az esetek 10%-ában megjelentek rozsdafoltok, míg a B festék esetén ugyanez az esetek 5%-ában és a C festéknél 20%-ban fordult elő.

(a) Szemléltessük a festékek típusa és annak rozsdásodása közötti döntési fa diagramot!

(b) Mekkora annak valószínűsége, hogy egy lefestett felületen nem jelennek meg rozsdafoltok egy év múlva?

(c) Mekkora a valószínűséggel kezelték a felületet C típusú festékekkel, ha a felületen nincsenek rozsdafoltok 1 év múlva?

(d) Mekkora a valószínűséggel kezelték a felületet B típusú festékekkel, ha a felületen megjelentek rozsdafoltok?

(e) Rajzoljuk fel az inverz fa diagramot a számításokhoz!

(f) Adjuk meg a döntésekhez tartozó értékeket táblázat segítségével is!

6.8.3. feladat

Egy étteremben 3 féle menü A, B és C közül lehet választani. Egy nap az ebédelők 40%-a választotta az A menüt, 35%-a B-t és a többi a C menüt.

Az A menüt választók 95%-a elégedett volt az étellel, míg a B menü választók 90%-a és a C menüt választók 80%-a volt elégedettek (E).

(a) Szemléltessük a menük - elégedettség megoszlást a döntési fa diagram segítségével!

(b) Az ebédelők hányadrésze volt megelégedve az étellel?

(c) Készítsük el az inverz fa diagramot!

(d) Melyik menüt választók aránya volt a legkisebb az elégedettek között?

(e) A nem elégedettek között, melyik menüt választók voltak legnagyobb arányban?

6.8.4. feladat

Egy orvos vizsgálta a vérnyomás és a szívritmus rendellenességek közötti kapcsolatot a betegein. A betegek vérnyomását alacsony (A), normál (N) és magas (M) kategóriákba sorolta. Azt tapasztalta, hogy a betegek 14%-ának magas és 22%-ának alacsony a vérnyomása. Továbbá

akiknek normális a vérnyomása, azok $\frac{1}{8}$ -ának van szívritmus rendellenessége (R). A magas

vérnyomásúak $\frac{1}{3}$ -ának szabályos (Sz) a szívritmusa. Az alacsony vérnyomásúak $\frac{3}{5}$ -ének van

szívritmus rendellenessége.

(a) Szemléltessük a betegek vérnyomás típusainak és a szívritmus rendellenességgel kapcsolatos döntési fa diagramot!

(b) A betegek hány százaléka rendelkezik normál vérnyomással és szabályos szívritmussal?

(c) A betegek hány százalékának van szívritmus zavara?

(d) A szabályos szívritmussal rendelkezők között milyen vérnyomás típusba tartozók vannak legnagyobb százalékban?

(e) A szívritmus rendellenességgel rendelkezők között melyik vérnyomás típussal vannak legkevesebben?

(e) Rajzoljuk fel az inverz fa diagramot a számításokhoz!

(f) Adjuk meg a döntésekhez tartozó értékeket táblázat segítségével is!

6.8.5. feladat

Egy pirotechnikai eszközöket gyártó cég területén a robbanás (R) eseményét előidéző okok a következők lehetnek

- elektromos hiba (E)
- gyártógép meghibásodása (G)

- emberi figyelmetlenség (F)
- szándékos robbantás (S)

Természetesen, ha a fenti okok valamelyike fennáll, akkor sem biztos, hogy a robbanás bekövetkezik. Ezért megbecsülték, hogy a fenti okok teljesülése esetén a tényleges robbanás (R) bekövetkezésének valószínűsége rendre 0.25, 0.2, 0.4 és 0.75.

Robbanás előtt azt tapasztalták, hogy a gyárban a szándékos robbantás (S) esélye a legkisebb (p), a figyelmetlenség (F) bekövetkezésének esélye háromszor akkora, mint szándékos robbantásé ($3 \cdot p$), a gyártó gép meghibásodásának (G) esélye ugyanakkora, mint a figyelmetlenségnek és az elektromos hiba (E) esélye kétszer akkora, mint a géphibának.

- Milyen gyakran következik be a gyárban a szándékos robbanás eseménye?
- Rajzoljuk fel az egyes robbanási okok - robbanás bekövetkezésének döntési fa diagramját a megfelelő valószínűségekkel együtt!
- Mennyire biztonságos a gyár? A nem robbanás esemény valószínűsége hányszorosa a robbanás esemény valószínűségének?
- Tudjuk, hogy robbanás következett be. Az emberi figyelmetlenség valószínűsége hányszorosa a gyártógép meghibásodásának?
- Tudjuk, hogy robbanás következett be. Az elektromos hiba valószínűsége hányszorosa a szándékos robbantásának?
- Rajzoljuk fel a döntési fa inverzét a megfelelő valószínűségekkel együtt!
- Adjuk meg a robbanási okok - tényleges robbanás együttes valószínűségeit tartalmazó 4×2 méretű táblázatot, az összegekkel!

6.8.6. feladat

Egy műholdas szatelit meghibásodhat többféle okból, melyek közül kettő a számítógépes hiba (S) és a motor hiba (M). Egy szatelit fellövése során ismertek a következők:

- Motor működési hiba 0.008 valószínűséggel fordulhat elő.
 - Számítógép működési hiba 0.001 valószínűséggel fordulhat elő.
 - Ha a motor meghibásodik, akkor a szatelit leállás valószínűsége 0.98.
 - Ha a számítógép meghibásodik, akkor a szatelit leállás valószínűsége 0.45.
 - Minden más egyéb komponens (K) meghibásodása esetén a szatelit 0.01 valószínűséggel áll le.
- Mekkora a szatelit leállás valószínűsége?
 - Rajzoljuk fel az alkatrész meghibásodás - szatelit leállás döntés fa diagramot a megfelelő valószínűségekkel együtt!
 - Tudjuk, hogy a szatelit leállt. Mekkora a valószínűsége, hogy a leállást motor hiba okozta?
 - Tudjuk, hogy a szatelit működik. Mekkora a valószínűsége, hogy a számítógép mégis meghibásodott?
 - Rajzoljuk fel a döntési fa inverzét!
 - Adjuk meg az alkatrész meghibásodás - szatelit leállás jellemzők együttes valószínűségeit tartalmazó 3×2 méretű táblázatot, az összegekkel!

6.8.7. feladat

Egy vállalat három összeszerelő szalagot A-, B- és C-t, alkalmaz egy bizonyos alkatrész elkészítéséhez.

Azok az alkatrészek, amelyeket az A gyártósor készített, azok 5%-a javításra szorul, míg a B gyártósoron 8% és a C gyártósoron 10% szorul javításra (J).

Tegyük fel, hogy az összes termék 50%-át az A, 30%-át a B és 20%-át a C gyártósor készítette.

- A teljes termelés hány százalékát nem kell javítani?
 - A javításra szoruló alkatrészek közül melyik gyártósor részesedik legnagyobb arányban?
 - A jó alkatrészek közül melyik gyártósoron készített alkatrészek vannak legkisebb arányban?
- (d) Rajzolja fel az eredeti és az inverz fa diagramot a számításokhoz!

(e) Készítse el a szorzat események valószínűségeinek táblázatát!

6.8.8. feladat

Egy városban élő embereket súlyuk alapján a túlsúlyos (T), normál (N) és sovány (S) kategóriákba sorolják. Tudjuk, hogy a teljes lakosság 25%-a túlsúlyos, 55%-a normál és a többiek soványak. Ismert, hogy a túlsúlyos emberek 40%-ának magas a vérnyomása (M), míg ugyanez az arány a normál súlyúaknál 15% és a soványaknál 10%.

- (a) Mekkora a magas vérnyomásúak aránya a lakosság között?
- (b) Rajzoljuk fel az emberek súly és magas vérnyomás szerinti döntési fa diagramját a megfelelő valószínűségekkel együtt!
- (c) Tudjuk, hogy valakinek magas a vérnyomása. Mekkora a valószínűsége, hogy normál súlyú?
- (d) Rajzoljuk fel a döntési fa inverzét a megfelelő valószínűségekkel!
- (e) Azok között, akiknek nincs magas vérnyomása, melyik súly kategóriába tartozók aránya a legnagyobb?
- (f) Adjuk meg a test súly kategóriák - vérnyomás jellemzők együttes valószínűségeit tartalmazó 3x2 méretű táblázatot, az összegekkel!

6.8.9. feladat

Egy vállalat a sorozatgyártás során keletkező selejtes termékek kiszűréséhez ellenőrköt alkalmaz, akik figyelik a selejtes termékek megjelenését és félreteszik azokat. Egy ellenőr 99% eséllyel helyesen azonosítja a selejtes termékeket, míg 0.5% az esélye annak, hogy egy jó terméket helytelenül minősíti selejtesnek.

A vállalat szerint egy gyártósor selejtes terméket az esetek 0.9% -ában állít elő.

- (a) Az ellenőr a termékek hány százalékát minősíti "**Selejtes**" -nek ?
- (b) Az ellenőr által selejtesnek minősített termékek közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, mekkora a valószínűsége, hogy a termék **valójában Jó**?
- (c) Az ellenőr által jónak minősített termékek közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, mekkora a valószínűsége, hogy a termék **valójában Selejtes**?

Készítsük el az eredeti és az inverz **fa diagramot** a számításokhoz!

Használjuk az alábbi jelöléseket az előforduló eseményekre!

$J := \{ \text{a termék jó} \}$, $S = \{ \text{a termék selejtes} \}$

$EJ = \{ \text{az ellenőr szerint a termék jó} \}$, $ES = \{ \text{az ellenőr szerint a termék selejtes} \}$

6.8.10. feladat

Egy autógumi üzletben 3-féle autógumit árulnak. A gumik 40%-a **Bridstone (B)**, 35%-a **Continental (C)** és 25%-a **GoodYear (G)** típusú termék. Mindegyik típusból van téli (**T**) és nyári (**N**) gumi. A Bridstone 70%-a nyári, a Continental 60%-a nyári, míg a GoodYear 55%-a téli gumi. Kiválasztunk véletlenszerűen egy autógumit.

- (a) Rajzoljuk fel a probléma döntési fáját!
- (b) A gumik hány százaléka ki téli gumi?
- (c) Rajzoljuk fel a probléma inverz döntési fáját!
- (d) Mekkora valószínűséggel választottunk Bridstone gumit, feltéve, hogy a kiválasztott gumi nyári
- (e) Mekkora valószínűséggel választottunk GoodYear gumit, feltéve, hogy a kiválasztott gumi téli
- (f) Mekkora valószínűséggel választottunk Continental gumit, feltéve, hogy a kiválasztott gumi nyári

A válaszokhoz használjuk az eredeti és az inverz döntés fa grafikonját!

6.8.11. feladat

Egy vállalat 3-féle X, Y és Z nyersanyagot rendel több különböző cégtől. A szállító cégek 70%-a pontosan betartja a szállítási határidőt, míg a szállítók 30%-a

Késve szállítja a nyersanyagokat. A vállalat a pontosan szállítóktól 30%-20%-50% arányban, míg a késve szállítóktól 40%-40%-20% arányban rendeli az X, Y és Z nyersanyagot.

- (a) Szemléltessük a rendelési-szállítási folyamatot a döntés fa felrajzolásával!
- (b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy Y nyersanyag késve érkezik meg?

- (c) Készítsük el az inverz fa diagramot!
- (d) Milyen arányban rendeli a cég az X, Y és Z nyersanyagot?
- (e) Egy szállítmányról látjuk, hogy Z nyersanyagot tartalmaz. Mekkora a valószínűsége, hogy pontosan érkezett?

6.8.12. feladat

Egy cég 3-féle X, Y és Z alapanyag segítségével kétféle terméket A-t és B-t állít elő. A cég elhatározta, hogy a teljes termelésének 60%-át az "A" termék gyártására fordítja. Az "A" termékben az X, Y és Z alapanyagok 20%-20%-60% arányban, míg a B termékben 30%-30%-40% arányban vannak jelen.

- (a) Szemléltessük a termékek termelésének megoszlását és összetételét a döntés fa felrajzolásával!

- (b) Milyen arányban kell a cégnek előkészíteni az X, Y és Z alapanyagokat?
- (c) Készítsük el az inverz fa diagramot!
- (d) Az összesen beépített X alapanyag mekkora hányada épül be az A termékbe?
- (e) Az összes beépített Z alapanyag hány százaléka van a B termékben?

6.8.13. feladat

Egy üzletbe 3 őstermelő (A, B és C őstermelő) szállít tojásokat. A tojások méretük szerint lehetnek közepes(K) és nagy (N) méretűek.

Az egy nap alatt szállított tojások 40%-át az A termelő, 35%-át a B termelők és a maradékot a C termelő szállította. Az A termelő által szállított tojások 60%-a Közepes méretű, a B termelő által szállított tojások 30%-a Nagy méretű és a C termelő által szállított tojások 20%-a Nagy méretű.

- (a) Rajzoljuk fel az egyes termelők és a tojások méreteinek döntési fa diagramját a vizsgált napra vonatkozóan! (3 p.)
- (b) Az összesen beszállított tojások hány százaléka Nagy méretű?
- (c) Rajzoljuk fel a probléma inverz döntési fáját!
- (d) Az összes Nagy méretű tojások hány százalékát szállította az A termelő?
- (e) Az összes Közepes méretű tojások hány százalékát szállította a B termelő?
- (f) Az összes Közepes méretű tojások hány százalékát szállította a C termelő?

A válaszokhoz használjuk az eredeti és az inverz döntés fa grafikonját!

6.8.14. feladat

Egy étteremben 3 féle menü A, B és C közül lehet választani. Egy nap az ebédelők 40%-a választotta az A menüt, 35%-a B-t és a többi a C menüt.

Az A menüt választók 95%-a elégedett volt az étellel, míg a B menü választók 90%-a és a C menüt választók 80%-a volt elégedettek (E).

- (a) Szemléltessük a menük - elégedettség megoszlást a döntési fa diagram segítségével!
- (b) Az ebédelők hányadrésze volt megelégedve az étellel?
- (c) Készítsük el az inverz fa diagramot!
- (d) Melyik menüt választók aránya volt a legkisebb az elégedettek között?
- (e) A nem elégedettek között, melyik menüt választók voltak legnagyobb arányban?

6.8.15. feladat

Egy biztosító társaság az embereket az autóvezetési technikával kapcsolatban az alábbi 3 csoport valamelyikébe sorolja: jól (J), átlagosan (Á) és rosszul (R) kockáztató típusok. A biztosító adatai alapján a jól, közepesen és rosszul kockáztató emberek egy év alatt balesetet (B) szenvednek, rendre 0.05, 0.15 és 0.3 valószínűséggel. A lakosság 20%-a jól, 50%-a átlagosan és 30%-a rosszul kockáztató típusú.

- (a) Szemléltessük a kockáztatás-baleseti megoszlás döntési fa diagramját!
- (b) A lakosság hányadrésze szenved balesetet egy év alatt?
- (c) Készítsük el az inverz fa diagramot!
- (d) Melyik kockázati típusba tartozók aránya a legkisebb, a balesetet szenvedők között?
- (e) Melyik kockázati típusba tartozók aránya a legnagyobb, a balesetet nem szenvedők között?

6.8.16. feladat

Egy utazási iroda 3 helyre szervez társas utakat A, B és C uti céllal. Felmérések alapján az A, B és C társasutazáson résztvevő emberek, rendre 95%-ban, 90%-ban és 85%-ban elégedettek (E) voltak. Az emberek 30%-a választotta az A uticélt, 50%-a B-t és 20%-a a C uticélt.

(a) Szemléltessük az uticélt - elégedettség megoszlást a döntési fa diagram segítségével!

(b) A társaság hányadrésze volt megelégedve a szolgáltatással?

(c) Készítsük el az inverz fa diagramot!

(d) Melyik uticélt választók aránya volt a legkisebb az elégedettek között?

(e) A nem elégedettek között, melyik uticéllal utazók voltak legnagyobb arányban?

6.8.17. feladat

A hallgatók túlterheltségének mérésére kifejlesztettek egy új fajta tesztet. A teszt 95%-ban pontos, ha egy hallgató nem túlterhelt, de csak 85%-ban pontos, ha egy diák valóban túlterhelt. Ismert, hogy az összes diák 99.5%-a túlterhelt.

(a) Készítsük el a feladat döntési fa diagramját!

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott diák tesztje pozitív lesz, azaz a teszt szerint túlterhelt?

(c) Készítsük el a feladat inverz fa diagramját!

(d) Számítsuk ki a $P(TT^c | TN)$ feltételes valószínűség értékét! Vagyis mekkora valószínűséggel nem túlterhelt az a diák, akinek a tesztje negatív lett?

6.8.18. feladat

Egy körmérkőzéses sakk versenyen egy személy nyerési esélye a játékosok egyik felével szemben 0.3 (nevezzük őket 1. típusúaknak), a játékosok negyedével szemben 0.4 (hívjuk őket 2. típusúaknak) és a maradék játékosokkal szemben a nyerési esélye 0.5 (nevezzük őket 3. típusúaknak).

(a) Rajzoljuk fel a feladathoz tartozó döntési fát!

(b) Az illető személy lejátszik egy játékot, egy véletlenül kiválasztott ellenféllel. Mekkora a nyerés esélye?

(c) Rajzoljuk fel a feladat inverz fáját!

(d) Tegyük fel, hogy az illető győzött egy kiválasztott személy ellen. Mekkora a valószínűsége, hogy az ellenfél 1. típusú?

6.8.19. feladat

Egy szabályos 4 oldalú dobókockával dobunk. Ha az eredmény 1 vagy 2 lett, akkor még egyszer feldobjuk a kockát, egyébként megállunk. Mekkora a valószínűsége, hogy a dobott pontok összege legalább 4 lesz?

6.8.20. feladat

Egy cég alkalmassági felvételt tart egy munkára a potenciális jelöltekkel. Tegyük fel, hogy a jelentkezők $q\%$ -a alkalmas és $(1-q)\%$ -a nem alkalmas a munka elvégzésére. A cég megpróbálja kideríteni, hogy ki alkalmas és ki nem az állásra egy 20 **igaz-hamis** kérdésből álló teszt segítségével. Az alkalmas jelöltek válasza egy kérdésre **p** valószínűséggel helyesen, míg az állásra nem alkalmas jelöltek ugyanazon **p** valószínűséggel hibásan válaszolnak egy kérdésre. A különböző kérdésekre adott válaszok egymástól függetlenek.

A vállalat egy személyt alkalmasnak minősít az állásra, ha legalább 15 kérdésre helyesen válaszolt, egyébként pedig alkalmatlannak minősíti az illetőt.

Adjunk formulát annak valószínűségére, hogy a 20 kérdés milyen megbízhatósággal azonosít valakit, hogy alkalmas vagy nem alkalmas a munkára.

Számoljuk ki a fenti valószínűségeket, ha $q = 0.2$ és $p = 0.7$!

6.8.21. feladat

A hazard játékban a játékos nyerési esélye legyen $p = 0.45$. A játékos induló tőkéje $A = 5$ \$.

Mekkora legyen a játékos számára reálisan kitűzhető M \$ nyerési összeg, amely mellett a játékos **nyerési esélye**

(a) 50%

(b) 25%

(c) 10%.

(d) Mennyi a nyerési esélye a játékosnak, ha $M = 20\$$ összeg nyerését tűzi ki célként? (Azaz csak akkor áll meg, ha megnyeri a $20\$$ -t vagy elveszíti az összes pénét.)

(e) Szimulációval mutassuk ki a fenti számítások helyességét!

6.8.22. feladat

Egy tantárgy előadásának látogatottsága nagyon alacsony szintű. A mérges professzor elhatározta, hogy addig nem tart előadást, ameddig az n hallgatóból nincs jelen az előadáson legalább $k \leq n$ hallgató. Mindegyik hallgató egymástól függetlenül látogatja az előadást

p_j valószínűséggel, ha az időjárás JÓ és

p_R valószínűséggel, ha az időjárás ROSSZ.

(a) Tudjuk, hogy az előadás napján rossz idő van. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy ezen a napon a professzor megtartja az előadását!

(b) Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a professzor előadást tart, feltéve, hogy jó idő van.

(c) Legyen $p_j = 0.6$ és $p_R = 0.8$! Számoljuk ki a fenti értékeket! Tegyük fel, hogy az esetek 70%-ában az időjárás jó!

Mekkora a valószínűsége, hogy egy napon előadást tart a profeszor?

(d) Ha a profeszor egy napon előadást tart, akkor milyen valószínűséggel rossz az időjárás?

Használjuk a döntés fát és az inverz fát a számításokhoz!

6.8.23. feladat

365 darab tranzisztort minőségi ellenőrzése közben az alábbi adatokat jegyezték fel, csoportosítva azokat a vállalatok ("A", "B", "C") és a minőségi kategóriák ("Elfogadható", "Határeset", "Nem fogadható el") alapján:

	Minőségi kategóriák		
Vállalatok	Elfogadható	Határeset	Nem fogadható el
A	128	10	2
B	97	5	3
C	110	5	5

Kiválasztunk egy tranzisztort véletlenül. Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott tranzisztort

(a) az "A" vállalattól való és a minősége elfogadható?

(b) "Elfogadható" minőségű, ha tudjuk, hogy a "C" vállalattól származik?

(c) a "B" vállalattól származik, ha tudjuk, hogy az "határeset" minőségű?

Rajzoljuk fel az eredeti és az inverz fa diagramot a számításokhoz!

6.8.25. feladat

Igaz vagy hamis a következő állítás? Válaszát indokolja!

Egy diák $2/3$ valószínűséggel tudja a tesztkérdésre adandó helyes választ. Ha nem tudja, akkor tippel és a helyes tipp esélye $1/3$. Tudjuk, hogy a diák válasza nem helyes. Ekkor 1 valószínűséggel nem tudta a helyes választ?

6.8.26. feladat

Angliában egy adott helyen a jó időjárás esélye 20% , míg a rossz időjárás a megfigyelések 80% -ára teljesül. Ha egy adott nap az időjárás jó, akkor annak valószínűsége, hogy a következő nap is jó idő lesz az 0.25 . Ha egy adott napon rossz idő van, akkor annak valószínűsége, hogy a következő nap is rossz idő lesz 0.75 .

Ha ma jó idő van, akkor mekkora a valószínűsége annak, hogy tegnap is jó idő volt?

Ha ma rossz idő van, akkor mekkora a valószínűsége annak, hogy tegnap is rossz idő volt?

Használjuk az eredeti és az inverz fa diagramot a számításokhoz!

6.8.27. feladat

Egy vizsgán minden kérdésre 4 választási lehetőség közül kell kiválasztani a helyes választ! (ún.

multiple-choice teszt) Tegyük fel, hogy ha egy diák tudja a helyes választ, akkor 1 valószínűséggel a jót választja, míg ha találgat, akkor $\frac{1}{4}$ valószínűséggel válaszol helyesen. Tételezzük fel továbbá, hogy egy jó tanuló a kérdések 90%-ára tudja a választ, egy gyenge tanulónál ugyanez 50%.

(a) Ha egy jó tanuló egy kérdésre helyesen válaszolt, akkor mekkora a valószínűsége, hogy találgatással találta el a helyes választ? ($1/37$)

(b) Ha egy gyenge tanuló egy kérdésre helyesen válaszolt, akkor mekkora a valószínűsége, hogy találgatással találta el a helyes választ? ($1/5$)

Használjuk az eredeti és az inverz fa diagramot a számításhoz!

6.8.28. feladat

Bizonyos fajta megfázás orvoslására az esetek $\frac{1}{3}$ -ánál C vitamint, $\frac{1}{2}$ részénél antibiotikumot míg $\frac{1}{6}$ részben látszatgyógyszert (ún. placebo) alkalmaznak. A megfázást a C-vitamin az alkalmazott esetek $\frac{1}{4}$ részében meggyógyította, míg ugyanez az arány $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{5}$ volt az antibiotikum és a látszatgyógyszerek esetében.

(a) Ha egy ember nem gyógyult ki a megfázásából, mekkora a valószínűsége annak, hogy ennek a C-vitamin volt az oka?

(b) Ha egy illető kigyógyult a megfázásából, akkor mi a valószínűsége annak, hogy ez a gyógyulás a látszatgyógyszernek köszönhető?

Használjuk az eredeti és az inverz fa diagramot a számításokhoz!

6.8.29. feladat

Egy zenekutató megpróbálja meghatározni, hogy egy újonnan felfedezett barokk dalnak ki a zeneszerzője. Úgy gondolja, hogy egyforma valószínűséggel lehet a szerző Archangelo Spumani és a kevésbé ismert bátyja, Pistachio. A kérdés eldöntésének kulcsa a zeneszerzők által alkalmazott A-dúr és F-moll hangnemek gyakorisága. Ismert, hogy Archangelo az esetek 60%-ban A - dúrban, míg Pistachio az esetek 80%-ban F-mollban komponált.

Ha a zenekutató által felfedezett zeneművet F-mollban írták, akkor mi a valószínűsége, hogy azt Archangelo komponálta? Illetve Pistachio komponálta?

Használjuk az eredeti és az inverz fa diagramot a számításokhoz!

6.8.30. feladat

Egy hivatal által szervezett pikniken 200 résztvevőből 150 fő evett csak egy fogást – krumpli salátát – 30 fő evett két fogásos és 20 fő evett három fogásos ételt (ezek között is szerepelt a krumpli saláta). Később a résztvevők közül sokan megbetegedtek, és felfedezték, hogy ennek oka a krumpli saláta volt. Az orvos úgy tapasztalta, hogy a résztvevők 0.3 valószínűséggel betegedtek meg.

(a) Ha valaki megbetegedett, akkor mekkora a valószínűsége, hogy 1, 2 vagy 3 fogást evett?

(b) Ha valaki nem betegedett meg, akkor mekkora a valószínűsége, hogy 1, 2 vagy 3 fogást evett?

Használjuk az eredeti és az inverz fa diagramot a számításokhoz!

6.8.31. feladat

Egy szociológiai kísérlet abban áll, hogy 4 lepecsételt boríték mindegyikébe egy-egy megoldandó problémát tettek. Ezután megkérték a résztvevőket, hogy válasszanak egy borítékot és próbálják megoldani a problémát 10 percen belül.

Kísérletek alapján tudjuk, hogy a legnehezebb problémát 0.1 valószínűséggel meg tudják oldani a résztvevők. A többi problémára vonatkozóan a valószínűségek rendre 0.3, 0.5 és 0.8.

Tudjuk, hogy a csoportnak sikerült megoldani a problémát a megadott időn belül. Mekkora a valószínűsége, hogy a legnehezebb problémát kapták? Használjuk az eredeti és az inverz fa diagramot a számításhoz!

6.8.32. feladat

Három urnánk van. Minden urna tartalmaz 1 fehér golyót. Ez mellett az I. urna 1 fekete golyót, a II. urna 2 fekete golyót és a III. urna 3 fekete golyót tartalmaz. Egy urnát kiválasztunk taláломra és a kiválasztott urnából kihúzzunk egy golyót.

A három urna kiválasztásának a valószínűségei rendre $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{3}$.

Ha tudjuk, hogy fehér golyót húztunk, akkor mekkora a valószínűsége, hogy egy adott urnából való a golyó! Használjuk az eredeti és az inverz fa diagramot a számításhoz!

6.8.33. feladat

Tekintsünk egy közúti szállítással foglalkozó céget vagy rendszert! A cég a vállalt szállítási kötelezettségeinek időnként a csúcsforgalom miatt nem tud eleget tenni. Ilyenkor a szállítási feladat meghíúsul, azt mondjuk, hogy a rendszer leáll. A cég a szállítással kapcsolatos feladatait 3 csoportba sorolja: alacsony, közepes és magas szintű szállítási kötelezettségek. Ezek a szállítás sürgősségével függnek össze. Az alábbi táblázat tartalmazza az egyes kötelezettségi szintek gyakoriságai alapján számolt valószínűségeket és a rendszer leállásának feltételes valószínűségeit, az egyes kötelezettségi szintnek megfelelő feltételek mellett

Kötelezettségi szint	P(szint)	P(a rendszer leáll szint)
Alacsony	0.6	0
Közepes	0.3	0.1
Magas	0.1	0.5

(a) Határozzuk meg a rendszer leállásának valószínűségét! Rajzoljuk fel a feladat fa diagramját, amelyen tüntessük fel a rendszer működését is, mint a leállás ellentét eseményét!

(b) Ha azt észlelték, hogy a rendszer leállt, akkor ezt a leállást mekkora valószínűséggel idézte elő egy közepes szintű kötelezettség? Rajzoljuk fel a feladat inverz fa diagramját!

6.8.34. feladat

Tekintsünk **három** szabályos pénzérmét, amelyek teljesen egyformák méretre és külsőre, azonban az egyik pénzérme mindkét oldalán FEJ található, a második érme egyik oldala FEJ, a másik oldala ÍRÁS, míg a harmadik érme mindkét oldalán ÍRÁS van. Kódoljuk a kezdőbetűk felhasználásával a **FEJ-FEJ** oldalú érmét **FF** -fel, a **FEJ-ÍRÁS** oldalú érmét **FI** -vel és az **ÍRÁS-ÍRÁS** oldalú érmét **II**-vel. A három érme közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, de nem tudjuk, hogy melyiket választottuk. Majd a kiválasztott érmét feldobjuk és azt látjuk, hogy az érme felső felén FEJ van. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az érme alsó felén is FEJ található?