

▼ 7. Valószínűségi változók és valószínűségi eloszlások

Valószínűségyszámítás és statisztika számítógép algebrai támogatással	Készült a PTE PMMIK-n a TÁMOP -4.1.2.A/1-11/1-2011-0098 támogatásával
Klincsik Mihály	

▼ 7.1. Bevezetés

Korábban már használtuk a valószínűségi vagy véletlen változó fogalmát. Most megadjuk a pontos definíciót. Az olyan X függvényt, amely az Ω eseménytér bármely ω eleméhez egy $X(\omega) \in \mathbb{R}$ valós számot rendel **valószínűségi változónak** nevezzük. Az eseménytér lehet **diszkrét**, melyről leképező függvényeket diszkrét valószínűségi változóknak nevezzük. Az eseménytér lehet **folytonos**, melyről leképező függvényeket folytonos valószínűségi változóknak nevezzük. Valószínűségi változók segítségével egyszerűen adhatunk meg eseményeket, mint például $\{X < a\} = \{\omega \mid X(\omega) < a\}$ nívóhalmazt.

A diszkrét és folytonos esetekre egyformán definiálhatjuk az $F(x)$ eloszlás függvényt

$$F(x) = P(X < x)$$

valószínűséggel.

Az eloszlás függvény monoton nem-csökkenő függvény, mely diszkrét esetben

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k)$$

lépcsős függvény és folytonos esetben

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

alakú integrálfüggvény. Az f integranduszt sűrűség függvénynek nevezzük.

Diszkrét esetben a különböző $\{X = x_k\}$ események felosztják az eseményteret teljes eseményrendszerre. Ezért a különböző x_k értékekhez tartozók valószínűségek összege 1

$$\sum_k P(X = x_k) = 1,$$

ha az összegzést az összes lehetséges x_k értékre elvégezzük. Azt mondjuk, hogy egy diszkrét eloszlást kaptunk. A diszkrét eloszlást megadhatunk két sorból álló táblázattal, melynek első sorában X lehetséges x_k értékei szerepelnek és alatta a hozzá tartozó $P(X = x_k)$ valószínűségek.

Folytonos esetben a sűrűség függvény $f(x) \geq 0$ nem-negatív és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

a teljes számegyenesen vett integrálja 1.

Diszkrét esetben annak valószínűsége, hogy az X valószínűségi változó értéke az $[a, b)$ intervallumba esik

$$P(a \leq X < b) = \sum_{a \leq x_k < b} P(X = x_k) = F(b) - F(a)$$

képlettel számolható.

Folytonos esetben annak valószínűsége, hogy az X valószínűségi változó értéke az $[a, b)$ intervallumba esik

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

képlettel számolható.

Ebben a fejezetben célunk a véletlen kísérletek leírása alapján meghatározni a valószínűségi változó eloszlását, eloszlás függvényét diszkrét esetben, valamint a sűrűség függvényét folytonos esetben.

Ehhez

Célunk az alábbi fogalmak, összefüggések és eljárások megismerése, megértése	
Valószínűségi változó meghatározása : értelmezési tartománya és értékkészlete	Folytonos változó sűrűség függvénye és eloszlásfüggvénye közötti kapcsolat, ezek tulajdonságai és grafikonjai
Eloszlásfüggvény értelmezése és tulajdonságai tetszőleges valószínűségi változó esetén	Valószínűségek számítása diszkrét esetben az eloszlás és az eloszlás függvény alapján
Diszkrét valószínűségi változó megadása táblázattal	Valószínűségek számítása folytonos esetben a sűrűség függvény és az eloszlás függvény alapján
Diszkrét változó eloszlásának meghatározása speciális példákra	
Folytonos valószínűségi változó megadása eloszlás függvénnyel és/vagy sűrűség függvénnyel	
Folytonos változó eloszlásfüggvényének meghatározása speciális példák esetén	
Diszkrét változó eloszlása és eloszlás függvénye közötti kapcsolat, ezek tulajdonságai és grafikonjai	

▼ 7.2. Valószínűségi változó fogalma

Tekintsünk egy véletlen kísérletet, melynek kimeneteleit az (Ω, S, P) valószínűségi mezővel lehet megadni. Gyakoriak az olyan véletlen jelenségek, amikor a kimenetek **valós számok**. Nézzünk néhány példát!

7.2.1. Véletlen kimenetelű események leírása valós számokkal

(i) A kocka dobás kimenetele különböző dobások során 1, 2, 3, 4, 5, 6 lehet
(ii) Üdítő italokat töltő automata által különböző palackokba töltött üdítő ital mennyisége literben
(iii) Egy véletlenszerűen kiválasztott izzólámpa élettartama órában mérve

(iv) Egy bizonyos típusú betongerenda törési szilárdsága $\frac{N}{mm^2}$ egységben mérve
(v) Folyó vízállása méterben mérve ugyanazon a helyen és különböző időpontokban
(vi) Egy telefon társasághoz egy adott időintervallum alatt befutó kapcsolási kérelmek száma
(vii) Kátyúk vagy úthibák száma valamely útszakasz különböző 1 km hosszú szakaszain
(viii) Egy bankban a várakozók vagy sorbanállók száma különböző időpontokban

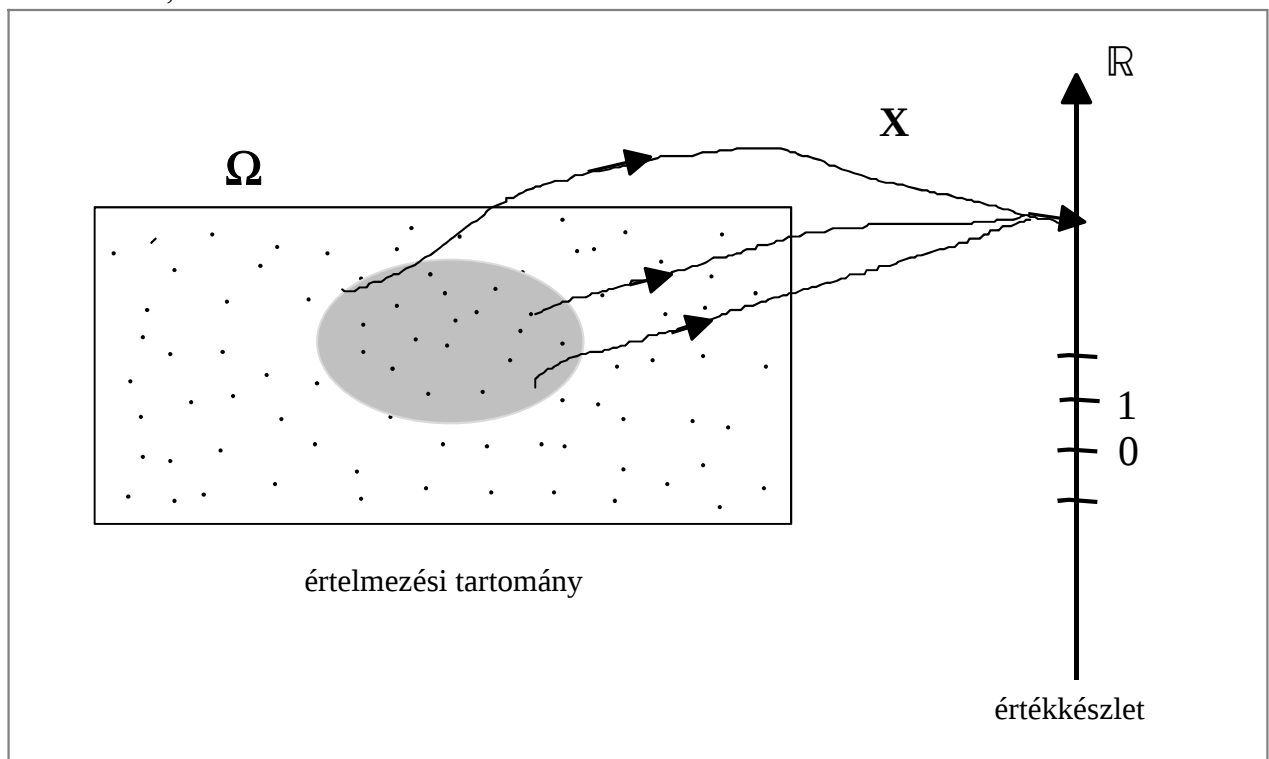
Tehát amikor a véletlen kimeneteket valós számmal jellemezzük, akkor létrehozunk automatikusan egy véletlen változót. Véges diszkrét esetben ez általában így van, de ennél pontosabban kell definiálnunk.

7.2.2. DEFINÍCIÓ. Valószínűségi változó

Az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt **valószínűségi változónak** nevezzük, ha

- (i) minden valós $u \in \mathbb{R}$ esetén a $H = \{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) < u \}$ esemény (X nívó halmaza) az S halmazalgebra eleme, azaz mérhető halmaz a P valószínűségi mértékre nézve
- (ii) $\{ \omega \mid -\infty < X(\omega) < \infty \} = \Omega$.

Az X valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmazát, amely a valós számok egy részhalmaza, **X értékkészletének** nevezzük.



7.2.1. ábra. A valószínűségi változó modellje

7.2.3. Nívó halmazok

Ha az (Ω, S, P) valószínűségi mező minden ω elemi eseményéhez egyértelműen hozzárendelünk egy valós számot, akkor megadtunk egy valószínűségi vagy sztochasztikus változót, feltéve hogy a leképezés minden $\{X < x\} = \{ \omega \mid X(\omega) < x \}$ nívó halmazának van valószínűsége.

A valószínűségi változókat az X, Y, Z nagy betűkkel, míg értékeit a megfelelő x, y, z kisbetűkkel jelöljük.

Az $X(\omega)$ jelölés helyett általában (ha ez nem félreérthető) az X jelölést használjuk, tehát az ω függetlenváltozót elhagyjuk. Így például

- (i) $X = x$ jelöli azon ω elemi események összességét, melyekre az X változó felveszi az x értéket
- (ii) $X < x$ jelöli azon ω elemi események összességét, melyekre az X változó értéke kisebb x -nél
- (iii) $X \leq x$ azon ω elemi események összességét jelöli, amelyekre az X változó értéke kisebb vagy egyenlő x -nél
- (iv) $X > x$ azon ω elemi események összességét jelöli, amelyekre az X változó értéke nagyobb x -nél
- (v) $x \leq X$ azon ω elemi események összességét jelöli, amelyekre az X változó értéke nagyobb vagy egyenlő x -nél
- (vi) $a \leq X < b$ azon ω elemi események összességét jelöli, amelyekre az X változó értéke kisebb b -nél, de a -nál nagyobb egyenlő.

Mivel tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ valós szám esetén az

$$A = \{ \omega \mid X(\omega) < a \} \text{ és } B = \{ \omega \mid X(\omega) \geq a \}$$

események egymás **komplementer** eseményei, azaz $A + B = \Omega$ és $A \cap B = \emptyset$, ezért

$$P(\{ \omega \mid X(\omega) \geq a \}) = 1 - P(\{ \omega \mid X(\omega) < a \}) \Leftrightarrow P(B) = 1 - P(A)$$

7.2.4. Példa. Kocka dobás

Egy szabályos kocka feldobásakor dobott pontszámot jelölje X . Ekkor az X valószínűségi változó **értékkészlete** $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Mivel a mögötte működő mező klasszikus valószínűségi mező, ezért egy esemény valószínűségét az eseményt alkotó elemek számának hányadosa adja az eseménytér elemeinek számával.

$$\text{Így például: } P(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X \leq 3) = \frac{1}{2}, \quad P(X < 3.4) = \frac{1}{2}, \quad P(2 \leq X < 4) = \frac{1}{3}.$$

Tehát az $\{X < x\}$ halmaz minden $x \in \mathbb{R}$ valós szám mellett értelmezhető és nemcsak egész számokra!

▼ 7.3. Eloszlásfüggvény tetszőleges valószínűségi változóra

7.3.1. DEFINÍCIÓ. Eloszlásfüggvény

Az X valószínűségi változó $F(x)$ **eloszlásfüggvényét** az

$$F(x) = P(X \leq x)$$

valószínűséggel értelmezzük tetszőleges x valós szám esetén.

Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az eloszlás függvény?

7.3.2. Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

Az F eloszlásfüggvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik tetszőleges X valószínűségi változó esetén.

(1) $0 \leq F(x) \leq 1$ minden valós x mellett.

(2) $F(x)$ **monoton nem-csökkenő függvény**, azaz ha $a < b$ akkor $F(a) \leq F(b)$.

(3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

(4) $F(x)$ **balról folytonos**, azaz $\lim_{x \rightarrow a^-} F(x) = F(a)$

Megjegyzés

Megmutatható a fordított állítás teljesülése is, hogy

- ha egy $F(x)$ valós függvény rendelkezik az (1)–(4) tulajdonságokkal, akkor megadható hozzá olyan X valószínűségi változó, melynek F az eloszlásfüggvénye.

Bizonyítás

Mutassuk meg pl. a (2) tulajdonság – vagyis a monoton nem-csökkenés – teljesül tetszőleges X valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényére. Az $A = \{X < a\} \subseteq B = \{X < b\}$ részhalmaz reláció igaz, ha $a < b$. Ezért $P(A) \leq P(B)$ teljesül a valószínűség monotonitása miatt. Az eloszlásfüggvény definíciója alapján ez azt jelenti, hogy $F(a) \leq F(b)$. Q.e.d.

Az eloszlás függvény segítségével jellemezhető, azaz megadható **bármely olyan esemény valószínűsége**, melyre a valószínűségi változó értéke egy adott intervallumba esik. Ha ugyanis $a < b$ tetszőleges, akkor

$$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a)$$

Ez azért teljesül, mert

$$\{X < a\} \cup \{a \leq X < b\} = \{X < b\}$$

ahol az összetevők egymást kizáró események.

A fenti formula emlékeztet a Newton–Leibniz–formulára, melyben a határozott integrált a primitív függvény megváltozásával számoljuk. Folytonos változó esetében a sűrűség függvényen keresztül ez a formula pontosan az analízisből ismert *Newton – Leibniz* – formula lesz, mely röviden

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \left(\text{ahol } \frac{d}{dx} F(x) = f(x) \right)$$

ha létezik a határozott integrál és a primitív függvény.

▼ 7.4. Diszkrét valószínűségi változó megadása, eloszlása. Két kocka dobás összege.

7.4.1. DEFINÍCIÓ. Diszkrét változó

Ha az X valószínűségi változó **értékkészlete véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok** valós számból áll, akkor azt mondjuk, hogy **X diszkrét valószínűségi változó**.

Diszkrét valószínűségi változó esetén az Ω eseménytér véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz, ezért bármely $a < b$ szám esetén az $\{\omega \in \Omega \mid a \leq X < b\}$ halmaz az Ω halmaz vagy **üres** vagy **véges** vagy **megszámlálhatóan végtelen** részhalmaza lehet.

Az X diszkrét valószínűségi változó lehetséges $x_1, x_2, x_3, \dots$ értékeit és a hozzájuk tartozó $p_1 = P(X = x_1), p_2 = P(X = x_2), p_3 = P(X = x_3), \dots$ valószínűségeket az alábbi táblázatos formában célszerű megadni

$$\begin{bmatrix} X & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ P & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \sum_k p_k = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n + \dots = 1$$

Ez azt jelenti, hogy az 1 valós számot felbontjuk $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n, \dots$ "súlyokra" vagy "tömegekre", amelyeket elhelyezünk az $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots$ pontokban. Ezáltal egy eloszlást kapunk, azaz az egység szétoztását végeztük el.

7.4.2. PÉLDA. Két kockadobás pontjainak összege

Dobjunk fel két szabályos kockát egymástól függetlenül. Jelölje X a két ponszám összegét!
(a) Adjuk meg az X valószínűségi változó lehetséges értékeit és X értékeihez tartozó

valószínűségeket!

(b) Rajzoljuk fel az $X - p$ síkban az (x_k, p_k) pontokat pálcika diagrammal!

(c) Automatizáljuk a feladat megoldását a Maple *Statistics* csomagja segítségével!

MEGOLDÁS

A feladat megoldása során választ kell adnunk az alábbi **kérdésekre**!

(i) Mi az **eseménytér**, vagyis X értelmezési tartománya?

(ii) Melyek X lehetséges értékei, vagyis **értékkészlete**?

(iii) Mekkora a **mértéke** az egyes $\{X = k\}$ halmazoknak az Ω eseménytérben?

Két kocka dobásnál az Ω eseménytér az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Descartes-szorzat.

> *restart* : $\Omega := [\text{seq}(\text{seq}([i, j], j = 1..6), i = 1..6)]$

$\Omega := [[1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [2, 4], [2, 5], [2, 6], [3, 1], [3, 2], [3, 3], [3, 4], [3, 5], [3, 6], [4, 1], [4, 2], [4, 3], [4, 4], [4, 5], [4, 6], [5, 1], [5, 2], [5, 3], [5, 4], [5, 5], [5, 6], [6, 1], [6, 2], [6, 3], [6, 4], [6, 5], [6, 6]]$ (1.4.1)

Ω elemeinek száma 36 és Ω minden eleme egy két elemű lista. A lista első eleme az első dobás, a második eleme a második dobás értékét jelöli.

> $N := \text{nops}(\Omega)$

$N := 36$

(1.4.2)

Az X leképezés az $\omega = [a, b] \in \Omega$ elemi eseményhez az $X([a, b]) = a + b$ összeget rendeli.

Ezen értelmezés alapján X diszkrét valószínűségi változó, mert Ω véges halmaz.

Képezzük az összegeket, vagyis X lehetséges értékeit Ω -n. Az alábbi mátrix **első oszlopa** az első dobás, **második oszlopa** a második dobás eredményét mutatja, míg a **harmadik oszlop** a két szám összege.

> $\text{Leképezés} := \text{matrix}(N + 1, 3, [[a, b, a + b], \text{seq}([\Omega[i][1], \Omega[i][2], \Omega[i][1] + \Omega[i][2]], i = 1..N)])$

Leképezés :=

a	b	$a + b$
1	1	2
1	2	3
1	3	4
1	4	5
1	5	6
1	6	7
2	1	3
2	2	4
2	3	5
2	4	6
2	5	7
2	6	8
3	1	4
3	2	5
3	3	6
3	4	7
3	5	8
3	6	9
4	1	5
4	2	6
4	3	7
4	4	8
4	5	9
4	6	10
5	1	6
5	2	7
5	3	8
5	4	9
5	5	10
5	6	11
6	1	7
6	2	8
6	3	9

(1.4.3)

A dobott pontok összegének lehetséges értékeit megkaptuk a harmadik oszlopban. Szedjük ki ezeket a fenti mátrixból!

> $\text{\textit{Összegek}} := \text{linalg}[\text{subvector}](\text{\textit{Leképezés}}, 2..N + 1, 3);$

$\text{\textit{Összegek}} := [2, 3, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$ (1.4.4)

Hogy kiszűrjük az azonos értékeket tegyük egy halmazba a kapott értékeket. A halmaz adatstruktúra garantálja, hogy minden érték csak egyszer szerepel.

> $\text{\textit{halmaz}} := \text{convert}(\text{\textit{Összegek}}, \text{set})$

$\text{\textit{halmaz}} := \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ (1.4.5)

Konvertáljuk vissza listává a halmazt és rendezzük növekvőleg!

> $X := \text{sort}(\text{convert}(\text{\textit{halmaz}}, \text{list}))$

$X := [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$ (1.4.6)

Megkaptuk X értékkészletét, mely 11 elemű halmaz: 2-től 12-ig minden egész szám!

(iii) Mi a mértéke az $\{X = k\}$ halmazoknak az Ω eseménytérben, $k = 2, 3, \dots, 12$?

Az X értelmezési tartománya az Ω eseménytér, melynek mind a 36 eleme egyformán valószínű, hiszen a kockák szabályosak. A valószínűségi mező klasszikus mező. Ezért a 36 elemi esemény mindegyikének $\frac{1}{36}$ a valószínűsége. Így $X = k$ lehetséges események valószínűségei az $\frac{1}{36}$

annyiszorosa lesz, ahány különböző módon X felveheti a k értéket.

Nézzük meg, hogy X különböző értékeihez hány elemi esemény tartozik! Soroljuk fel ezeket (az összegekben a sorrend lényeges)!

$$X=2=1+1$$

$$X=3=1+2=2+1$$

$$X=4=1+3=2+2=3+1$$

$$X=5=1+4=2+3=3+2=4+1$$

$$X=6=1+5=2+4=3+3=4+2=5+1$$

$$X=7=1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1$$

$$X=8=2+6=3+5=4+4=5+3=6+2$$

$$X=9=3+6=4+5=5+4=6+3$$

$$X=10=4+6=5+5=6+4$$

$$X=11=5+6=6+5$$

$$X=12=6+6$$

Tehát $X = k$ értékekhez tartozó **valószínűségeket** úgy kapjuk, hogy annyszor $\frac{1}{36}$ -ot veszünk, ahány elemi esemény tartozik $X=k$ értékhez.

> $\text{\textit{px}} := \left[\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36} \right]$
 $\text{\textit{px}} := \left[\frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{1}{6}, \frac{5}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36} \right]$ (1.4.7)

Az X **diszkrét valószínűségi változónak** 11 különböző értéke van Ω -n.

> $\text{\textit{értékek_száma}} := \text{nops}(\text{\textit{px}});$

$$\sum_{i=1}^{11} \text{\textit{px}}_i = \sum_{i=1}^{11} \text{\textit{px}}_i$$

$\text{\textit{értékek_száma}} := 11$

$$\sum_{i=1}^{11} p_{X_i} = 1 \quad (1.4.8)$$

Az összes X értékhez tartozó valószínűségek összege 1, tehát **valószínűségi eloszlással** van dolgunk! Ez azt mutatja, hogy Ω minden eleme pontosan egy

$H_k = \{(a, b) \mid X = a + b = k\}$ halmazhoz tartozik, ahol $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$.

Az Ω eseménytér elemeit X különböző értékei felosztották egy teljes eseményrendszerre

$$\Omega = H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5 \cup H_6 \cup H_7 \cup H_8 \cup H_9 \cup H_{10} \cup H_{11} \cup H_{12} \text{ és } H_k \neq H_i \text{ ha } k \neq i.$$

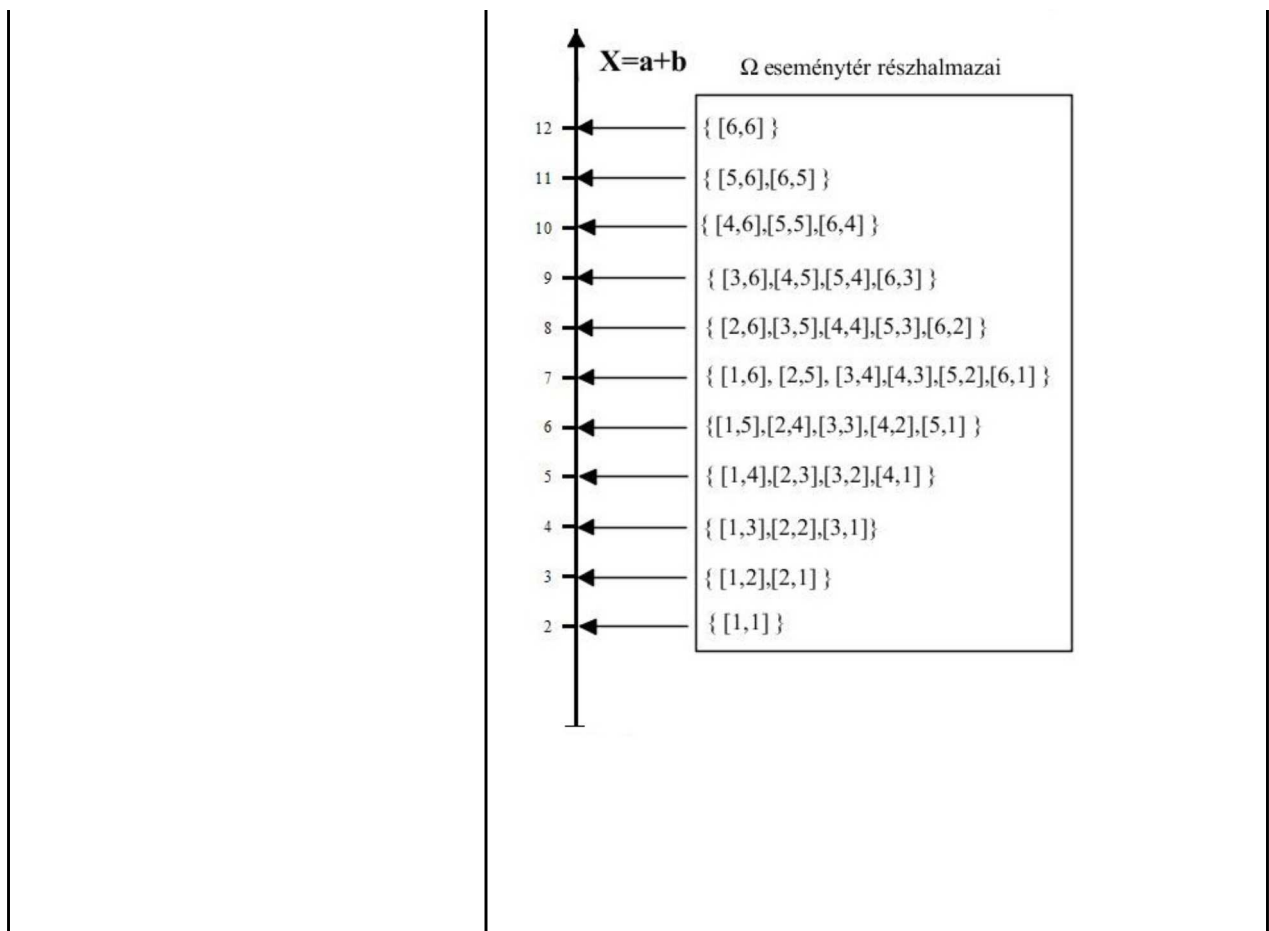
Ezt a felosztást mutatja az alábbi mátrix, melynek értékei a sorok és oszlopok indexeinek összege.

> X lehetséges értékeinek mátrixa = $\text{Matrix}(6, 6, (i, j) \rightarrow i + j)$

$$X \text{ lehetséges értékeinek mátrixa} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \quad (1.4.9)$$

A mátrix X értékeit annyiszor mutatja, ahány különböző dobás kombinációra X felveszi azt az értéket. Az azonos számok X szerint ugyanazon halmazhoz tartoznak és ferde vonalakkal választottuk el őket egymástól. A halmazok méretei egyben az adott X értékek valószínűségeit is mérik. A jobb oldali ábra ugyanezt szemlélteti a leképezések megadásával.

		Második dobás						
		+	1	2	3	4	5	6
Első dobás	1	2	3	4	5	6	7	
	2	3	4	5	6	7	8	
	3	4	5	6	7	8	9	
	4	5	6	7	8	9	10	
	5	6	7	8	9	10	11	
	6	7	8	9	10	11	12	



7.4.1. ábra. Két kockadobás összegének lehetséges értékei és a leképezés
Írjuk fel X eloszlását két sorból álló mátrix elrendezésben!

> $Eloszlás = linalg[augment](matrix(2, 1, ['X', 'p(X)']), matrix(2, 11, [X, px]))$

$$Eloszlás = \begin{bmatrix} X & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ p(X) & \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{bmatrix} \quad (1.4.10)$$

Az első sor $X=k$ értékeit, míg a második sor az értékekhez tartozó $P(X=k)$ valószínűségeket tartalmazza. A táblázat elfedi a fenti számítást, ebben már csak a végeredmény látható. A feladat tehát az, hogy egy **kísérlettel megadott diszkrét példa** esetén határozzuk meg az eseményteret, X lehetséges értékeit ezen a téren, majd

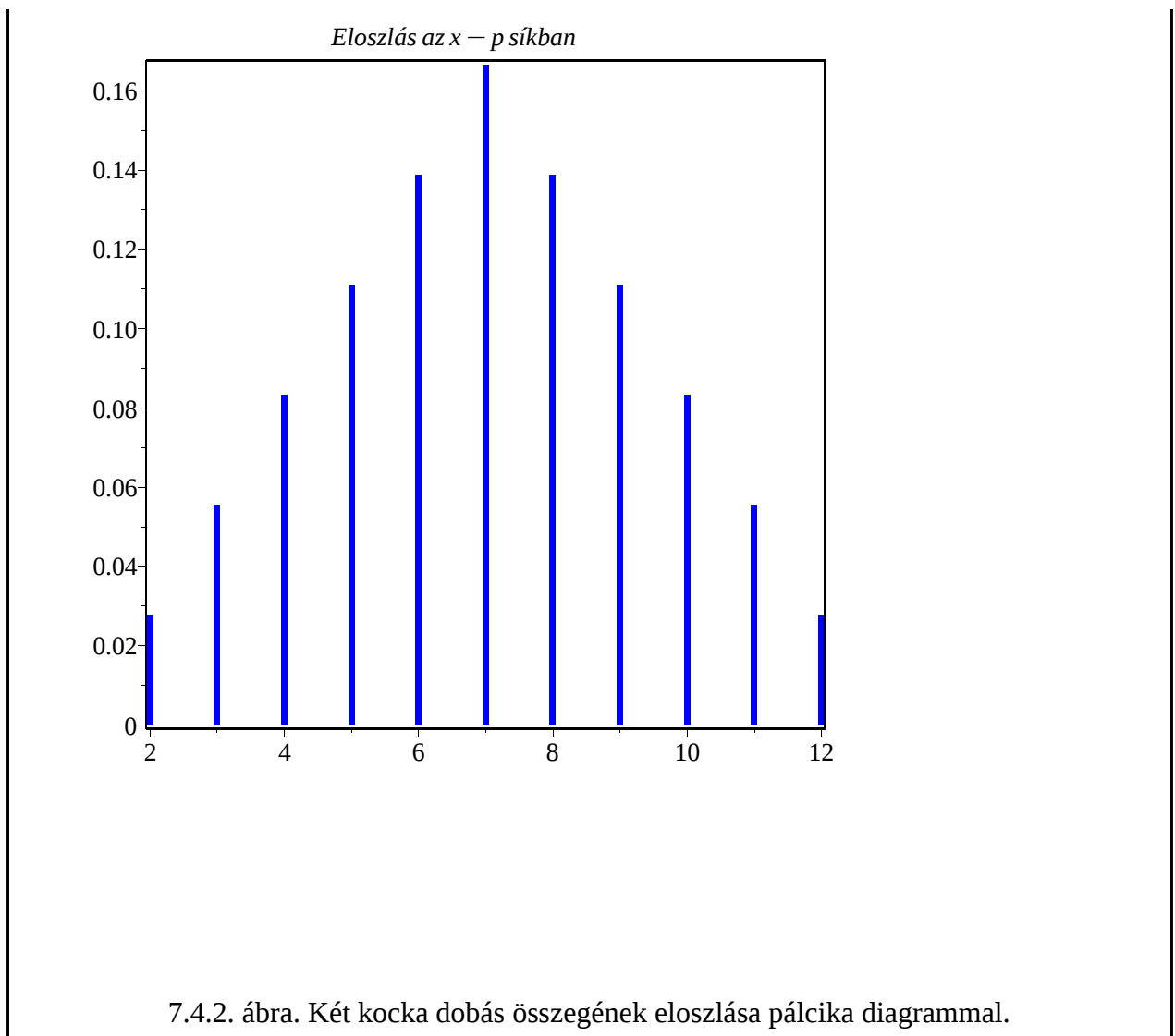
(b) Rajzoljuk fel az $X-p$ síkban a kapott (x_k, p_k) pontokat pálcika diagrammal!

Az $X-P$ sík $(x_i, 0)$ pontjában olyan hosszú pálcikákat rajzolunk, amekkora az egyes x_i -hez tartozó p_i valószínűség. Ezt listák listájának képzésével érjük el. A lista első eleme a $[X, 0]$ és második eleme $[X, p_i]$ ($i=1,2,\dots,11$). A rajzot a **plot** eljárással hozzuk létre.

Két kocka dobás összegének eloszlása

$palcikák := [seq([[X, 0], [X, px_i]], i = 1 .. értékek_száma)] :$

$plot(palcikák, axes = boxed, title = Eloszlás az x - p síkban, color = blue, thickness = 3)$



(c) Automatizáljuk a feladat megoldását a Maple *Statistics* csomagja segítségével! A Maple 16 verzióban műveleteket végezhetünk diszkrét valószínűségi változókkal úgy, hogy a műveletek eredményeként kapott új változó eloszlásának értékeit a Maple képes megadni. Felvesszünk egy A és egy B diszkrét egyenletes eloszlású változót, melynek értékei 1, 2, 3, 4, 5 és 6 lehet. Az A változó értéke az első dobás értékét és B a második kocka dobás eredményét jelöli! Ezt a *Statistics* csomag *RandomVariable* utasításával megtehetjük, ha az eloszlás típusának *DiscreteUniform(1,6)* eloszlást választjuk.

Megoldás a Maple *Statistics* csomagja segítségével

```
> with(Statistics) :
> A := RandomVariable(DiscreteUniform(1, 6));
> B := RandomVariable(DiscreteUniform(1, 6))
      A := _R
      B := _R0
```

(1.4.11)

Adjuk össze a két dobás különböző értékeit. Vagyis alkalmazzuk az összeadás műveletét az A és B dobások között. Jelölje Y az összeget: $Y = A + B$.

```
> Y := A + B
```

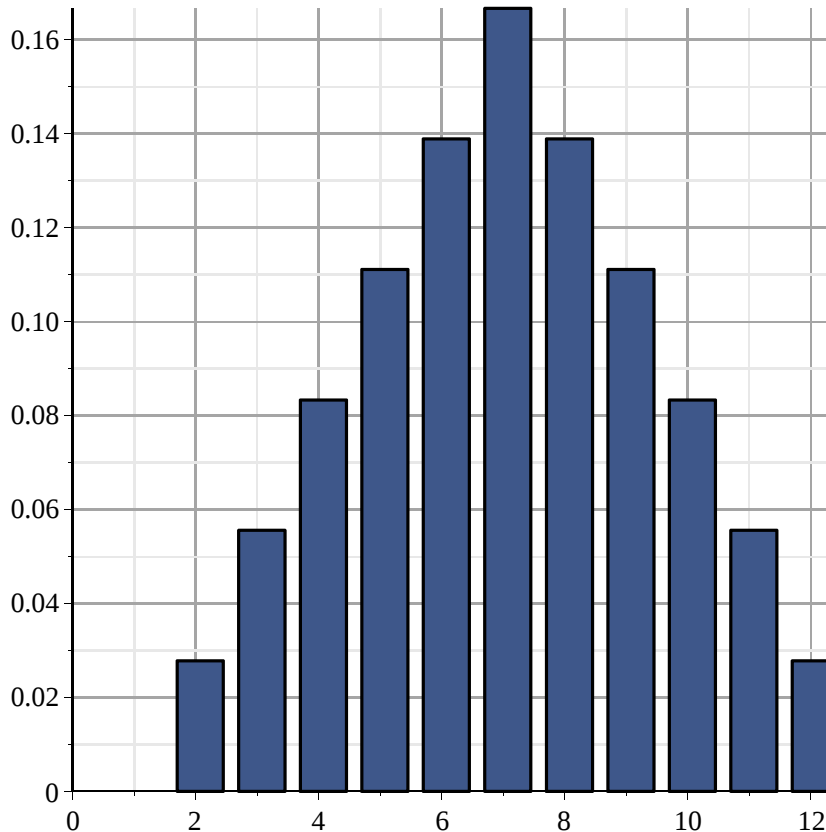
> *valószínűségek* := [seq(Probability($Y = k$), $k = 2 \dots 12$)];

$Y := _R + _R0$

$$\text{valószínűségek} := \left[\frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{1}{6}, \frac{5}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36} \right] \quad (1.4.12)$$

Látható, hogy diszkrét esetben az X változó k értékéhez tartozó valószínűséget a $Probability(X=k)$ eljárás kiszámolja. Az összeg eloszlását felrajzolhatjuk a *Statistics* csomag *ColumnGraph* eljárásával is.

> *ColumnGraph(valószínűségek, gridlines, offset = 1.7)*



7.4.3. ábra. Két kocka dobás összegének eloszlása oszlop diagrammal.

Tehát két egyenletes eloszlású diszkrét változó összegének eloszlása diszkrét "háromszög" alakú.

▼ 7.5. Folytonos valószínűségi változó. Két véletlen pont távolsága.

7.5.1.DEFINÍCIÓ. Folytonos eloszlás és a sűrűség függvény

Az $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi változót és a neki megfelelő eloszlást **folytonosnak** nevezzük, ha egyrészt X értékészlete nem megszámlálhatóan végtelen (azaz nagyobb számosságú, mint megszámlálható és így kontinuum), továbbá az $F(x) = P(X < x)$ **eloszlásfüggvényhez**

megadható olyan valós $f(x)$ függvény, amely (esetleg véges sok pont kivételével) folytonos és

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = P(X < x)$$

Megmutatható, hogy ekkor a folytonos X valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye (véges sok pont kivételével) **differenciálható** függvény a teljes számegyenesen. Az $f(x)$ függvényt az X **sűrűség függvényének** nevezzük.

7.5.2. PÉLDA. KÉT VÉLETLEN PONT TÁVOLSÁGA $[0, 1]$ INTERVALLUMBAN

Az egységnyi hosszúságú $[0, 1]$ intervallumban véletlenszerűen választunk egymástól függetlenül 2 pontot. Jelölje X a két pont távolságát. Mivel a pontokat véletlenszerűen választjuk, ezért X értéke véletlenszerűen változhat 0 és 1 között.

- (a) Mekkora a valószínűsége, hogy a két pont távolsága **kisebb** $\frac{3}{4}$ -nél, azaz $P\left(X < \frac{3}{4}\right) = ?$
- (b) Határozzuk meg az X változó $F(x)$ eloszlásfüggvényét és $f(x)$ sűrűségfüggvényét!
- (c) Rajzoljuk fel X eloszlás függvényének és sűrűség függvényének grafikonját!

MEGOLDÁS

1. Megoldás. Matematikai levezetés kis segítséggel.

A kézi megoldást kissé megtámogatjuk a Maple grafikus és szimbolikus képességeivel, de alapvetően nem térünk el a papír-ceruzás változattól.

Jelölje a illetve b a két véletlen pont 0-tól mért távolságát. Ekkor $X = |b - a|$. Összegezve az összes $(a; b)$ párt az $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ eseményteret kapjuk, mely az első síknegyedben levő egységnégyzet.

Az $A = \left\{ (a, b) \in \Omega \mid |b - a| < \frac{3}{4} \right\}$ esemény valószínűségét az egyenlőtlenségnek megfelelő halmaz területének és az egységnégyzet területének hányadosa adja.

Rajzoljuk fel az A halmaz pontjait az egységnégyzetben a "plots" csomag "inequal" eljárását használva!

Ehhez az abszolútértéket fel kell bontani két részre:

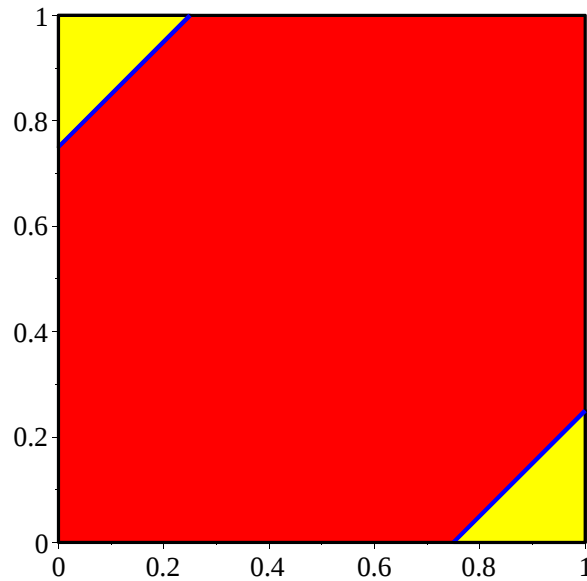
(i) ha $(b - a) > 0$, akkor az abszolútérték elhagyható $|b - a| = b - a$,

(ii) ha $(b - a) < 0$, akkor $|b - a| = -(b - a)$.

A rajzoláshoz a $(b - a) < \frac{3}{4}$ és $-(b - a) < \frac{3}{4}$ két egyenlőtlenséget kell megadni, hogy a közbezárt tartományt kapjuk. (Kézi számolásnál a halmazt két halmaz uniójából kell összetenni!)

> restart :

> plots[inequal] $\left(\left\{ b - a < \frac{3}{4}, -(b - a) < \frac{3}{4} \right\}, a = 0..1, b = 0..1, optionsfeasible = (color = red), optionsopen = (color = blue, thickness = 2), optionsclosed = (color = green, thickness = 3), optionsexcluded = (color = yellow), scaling = constrained \right)$



7.5.1. ábra. Az $X = |b - a|$ valószínűségi változó $X < \frac{3}{4}$ eseménye

Mekkora a pirossal befestett terület? Megkapjuk a választ, ha az egységnégyzet 1 területéből kivonjuk a kettő sárga színű derékszögű háromszög területét! Mekkora a sárga háromszögek befogója? Ehhez a $b = a - \frac{3}{4}$ egyenes metszéspontját kell megkeresni az a -tengellyel illetve a $b = a + \frac{3}{4}$ egyenes metszéspontját a b -tengellyel! Ezek az $a = \frac{3}{4}$ illetve $b = \frac{3}{4}$ helyek. Így a sárga derékszögű háromszögek egybevágó egyenlőszárúak és befogóik $\frac{1}{4}$ hosszúak. A két háromszöget egy négyzetté egybetolhatjuk.

Ezért az A halmaz területe vagy $m(A)$ mértéke

$$m(A) = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Mivel az egységnégyzet területe 1, azaz $m(\Omega) = 1$, ezért

$$P(A) = P\left(X < \frac{3}{4}\right) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{15}{16}.$$

(b) és (c) együtt

Határozzuk meg X **eloszlásfüggvényét** és **sűrűségfüggvényét**! Rajzoljuk fel X eloszlás függvényének és sűrűség függvényének grafikonját!

Az $F(x) = P(X < x)$ eloszlás függvény meghatározásához az

$$A_x = \{(a; b) \mid |b - a| < x\}$$

esemény területét kell számolni tetszőleges valós x esetén. Az $x = \frac{3}{4}$ eset számolását az (a) részben elvégeztük.

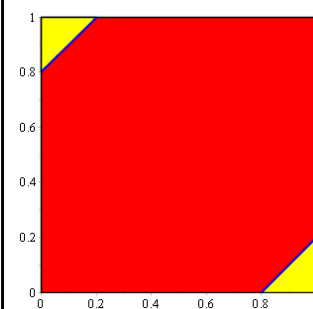
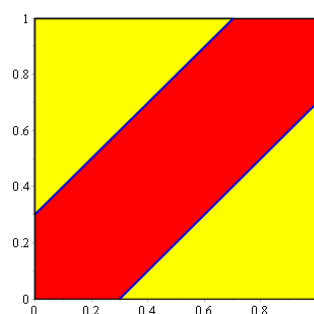
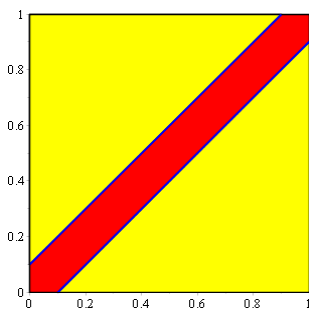
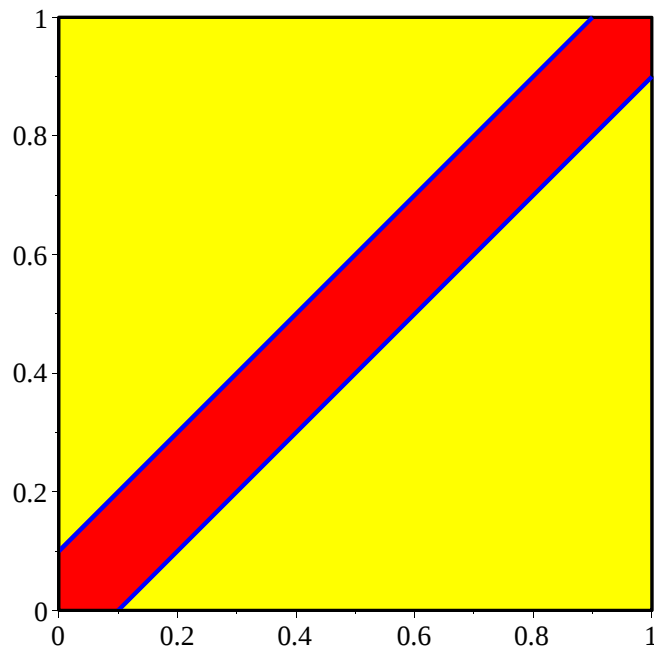
Az $x \leq 0$ esetben A_x a lehetetlen esemény, mert a két pont távolsága nem lehet negatív. A lehetetlen esemény valószínűsége 0, ezért $F(x) = 0$, ha $x \leq 0$.

Az $1 \leq x$ esetben A_x a biztos esemény, mert a két pont távolsága mindig 1-nél nem nagyobb. A biztos esemény valószínűsége 1, ezért $F(x) = 1$, ha $1 \leq x$.

Rajzoljuk fel **animációval** a területeket, ha x változik 0.1 -től 1-ig és a lépték legyen 0.1!

A területek animációja

```
teruletek := seq(plots[inequal]( {b < a + x, a - x < b}, a = 0..1, b = 0..1, optionsfeasible
= (color = red), optionsopen = (color = blue, thickness = 2), optionsclosed = (color
= green, thickness = 3), optionsexcluded = (color = yellow)), x = 0.1..1, 0.1) :
> plots[display]([teruletek], insequence = true, scaling = constrained)
```



7.5.2. animáció. Az $X = |b - a|$ valószínűségi változó $X < x$ eseményének animációja x -változtatásával

A felrajzolt piros terület mértéke $F(x) = 1 - (1 - x)^2$, ha $0 < x < 1$. Ezt az (a) részben számolt

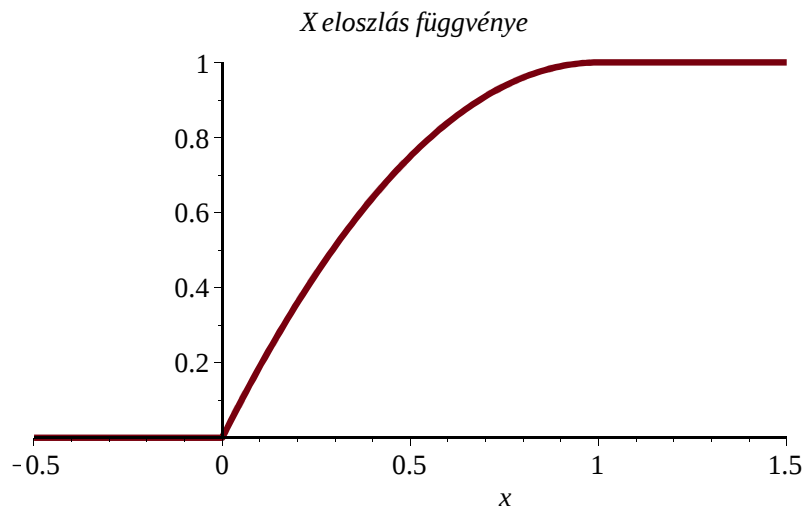
valószínűségnek megfelelően kapjuk, mert a sárga derékszögű háromszögek együtt egy $(1 - x)$ oldal hosszúságú négyzetet adnak.

Így az F eloszlás függvény értékét szakaszonként lehet megadni!

Az eloszlás függvény és grafikonja

> $F := \text{unapply}(\text{piecewise}(x \leq 0, 0, x \leq 1, 1 - (1 - x)^2, 1), x) : 'F(x)' = F(x)$
 > $\text{plot}(F(x), x = -0.5 .. 1.5, \text{scaling} = \text{constrained}, \text{title} = X \text{ eloszlás függvénye}, \text{thickness} = 3)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - (1 - x)^2 & x \leq 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.5.1)$$



7.5.3. ábra. Az $X = |b - a|$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

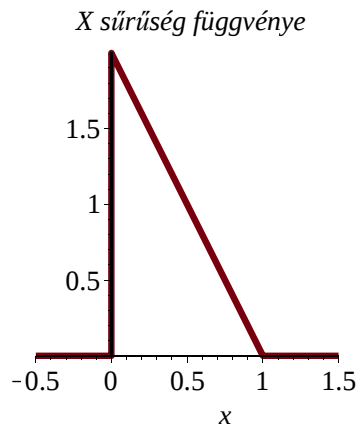
Tehát X eloszlás függvénye $x = 0$ -ig nulla, ezután egy parabola ív mentén szigorúan monoton nő 0 -tól 1 -ig, majd $x > 1$ után értéke 1 lesz.

Az $f(x)$ sűrűségfüggvényt az $F(x)$ eloszlásfüggvény **deriváltja** adja meg $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$.

A sűrűség függvény és grafikonja

> $f := \text{unapply}\left(\frac{d}{dx} F(x), x\right) : 'f(x)' = f(x);$
 $\text{suruseg} := \text{plot}(f(x), x = -0.5 .. 1.5, \text{thickness} = 3, \text{scaling} = \text{constrained}, \text{title} = X \text{ sűrűség függvénye}) : \text{suruseg}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \text{undefined} & x = 0 \\ 2 - 2x & x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$



7.5.4. ábra. Az $X = |b - a|$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

Mivel konstans függvény deriváltja nulla, ezért a sűrűség függvény nullától különböző értéket csak a $[0, 1]$ intervallumban vesz fel. A $[0, 1]$ intervallumban a függvény lineárisan csökken. Figyeljük meg, hogy a sűrűségfüggvény görbéje alatti terület (mely egy háromszög) 1 lesz.

2. Megoldás. A MAPLE Statistics csomagjának alkalmazásával

Az X valószínűségi változót és a hozzátartozó jellemzőket is megadhatjuk a Maple Statistics csomagja segítségével! Ha az "A" és "B" valószínűségi változók folytonos egyenletes eloszlásúak a $[0, 1]$ intervallumon, akkor az $X = |B - A|$ éppen a keresett valószínűségi változó! Ezt írjuk le Maple -nyelven.

```
> with(Statistics) : A := RandomVariable(Uniform(0, 1)) :
  B := RandomVariable(Uniform(0, 1)) :
  X := |B - A|
```

$$X := | -_R2 + _R1 | \quad (1.5.2)$$

A "CDF" nevű eljárás az eloszlásfüggvényt, a "PDF" pedig a sűrűség függvényt adja meg!

```
> Eloszlás függvény = CDF(X, x), Sűrűség függvény = simplify(PDF(X, x))
```

$$\text{Eloszlás függvény} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases}, \text{Sűrűség függvény} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2 - 2x & x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases} \quad (1.5.3)$$

Ezek a függvények a fentiekben számolt függvények!

A kapott eloszlás ismert, mely beletartozik a háromszög vagy angolul **Triangular-eloszlások** családjába. Nevét onnan kapta, hogy a sűrűségfüggvény alakja egy háromszög. Egyértelmű definiálásához egyrészt meg kell adni a függvény tartóját az x -tengelyen levő $[a, b]$ intervallumot ($a < b$). Ekkor az x -tengely $[a, b]$ szakasza a háromszög egyik egyik oldala, vagyis a csúcspontok $A(a, 0)$ és $B(b, 0)$. Másrészt a harmadik C csúcs rögzítéséhez elegendő egy c érték választása, melyre $a \leq c \leq b$ teljesül. Akkor a háromszög $C(c, m)$ csúcsa olyan $m > 0$

magasságban van, melyre teljesül a görbe alatti terület 1 feltétel. Ehhez $\frac{(b-a) \cdot m}{2} = 1$

egyenletet kell megoldani m -re. Ennek az eloszlásnak a *Triangular*(a, b, c) a hivatkozási kódja. Ellenőrizzük a kapott képletek összehasonlításával, hogy jelen esetben az $X \sim \text{Triangular}(0, 1, 0)$ eloszlással van dolgunk!

```
> Y := RandomVariable(Triangular(0, 1, 0));
```

eloszlásfüggvény = CDF (Y, x), sűrűségfüggvény = PDF (Y, x)

Y := _R5

$$\text{eloszlásfüggvény} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - (1 - x)^2 & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}, \text{sűrűségfüggvény} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2 - 2x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \end{cases} \quad (1.5.4)$$

Ezzel szinte igazoltuk azt az állítást, hogy két $[a, b]$ -n egyenletes eloszlású folytonos változó különbségének abszolút értéke speciális háromszög eloszlású.

3. Megoldás. Kísérletezés Maple Statistics csomagja segítségével. Monte Carlo-módszer.

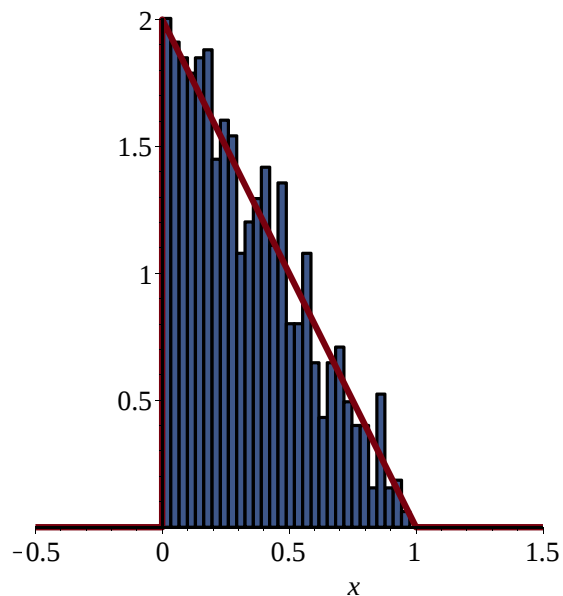
Talán az egyik legfontosabb részhez érkeztünk el és ez a **kísérletezés**. Ennek segítségével derül fény a titokra. Minden olvasóban felmerül a kérdés. Vajon miért fordulnak elő az $X = |A - B|$ távolságban gyakrabban a nullához közeli értékek, mint az 1-hez közeli? Nézzük csak az utasításokat!

Gyakoriság hisztogram 1000 véletlen adat alapján

```
> N := 1000
> mintaA := Sample(A, N) : mintaB := Sample(B, N) :
> távok := [seq(|mintaAk - mintaBk|, k = 1 .. N) ] :
> H := Histogram(távok) :
> plots[display]([suruseg, H], title = Gyakoriság hisztogram és a sűrűség függvény)
```

N := 1000

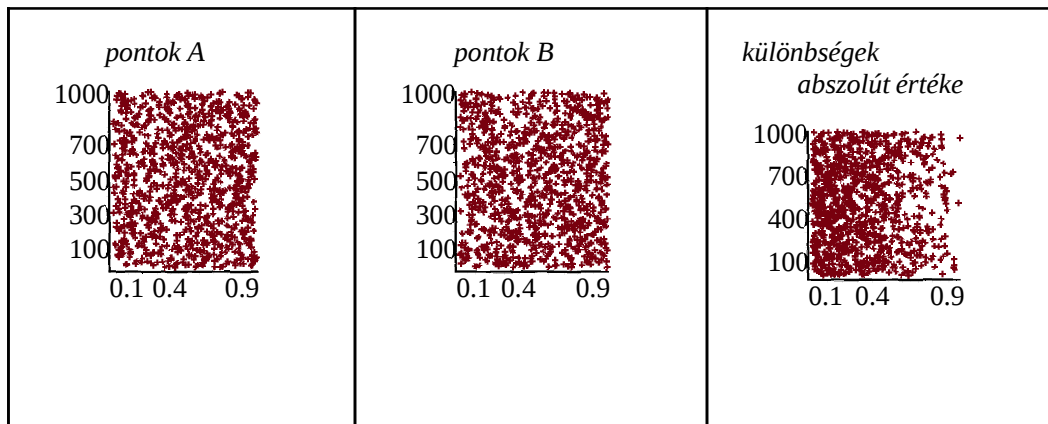
Gyakoriság hisztogram és a sűrűség függvény



7.5.5. ábra. Hisztogram két $[0,1]$ -n egyenletes eloszlású minta különbségének abszolút értékére

Egyenletes eloszlású pontokból hogyan lesz háromszög eloszlás?

```
> pontokA := plot( [seq( [mintaA[k], k], k = 1 ..N ) ], style = point, symbol = cross, title
= `pontok A` ) :
pontokB := plot( [seq( [mintaB[k], k], k = 1 ..N ) ], style = point, symbol = cross, title
= `pontok B` ) :
pontoktávok := plot( [seq( [távok[k], k], k = 1 ..N ) ], style = point, symbol = cross, title
= `különbségek abszolút értéke` ) :
> plots[display](matrix(1, 3, [pontokA, pontokB, pontoktávok]))
```



7.5.6. ábra. 1000 pont egyenletes eloszlással az első és második ábrán, és ezek különbségének abszolútértéke a harmadikon

Generáltunk 1000 véletlen számot **egyenletes eloszlásban** a $[0,1]$ intervallumon az A változóra is és a B változóra is! A pontokat láthatjuk az első és második ábrán kissé **szokatlan módon**. Ugyanis a függőleges tengelyen vannak 1-től 1000-ig a pontok sorszámai és a hozzátartozó $[0, 1]$ -ben levő értékek a vízszintes tengelyen. Általában ezeket fordított tengely kiosztásban ábrázolják. A vízszintes tengelyeket felosztottuk $\Delta = 0.1$ léptékkel függőleges csíkokra. Azt láthatjuk – megszámlálás nélkül is – hogy az egyes intervallumokba eső pontok száma **nagyjából azonos**. Ez azt jelenti, hogy az eloszlások egyenletesek. A $[0, 1]$ intervallum bármelyik részén a pontok egyenletesen vannak szétterítve. Nincs olyan **sűrűsödési hely**, ahol sokkal több pont szerepelne.

A **harmadik ábrán** a pontok úgy keletkeztek, hogy az első ábra k – ik pontjának értékét kivontuk a második ábra k – ik pontjának értékéből, majd ennek az abszolút értékét rajzoltuk fel az előzőekkel azonos módon. Az látható, hogy a függőleges sávokba eső pontok száma a kapott **pontfelhőben** nem egyenletes. Legtöbb pont a $[0; 0.1]$ első részintervallumban található, míg a legkevesebb az utolsó $[0.9; 1]$ részintervallumban. Az hogy egyenletesen csökken ezek száma a $[0, 1]$ intervallum részein belül, azt a **gyakoriság hisztogram** jobban mutatja. Anélkül, hogy egzakt matematikai módon bizonyítanánk, hogy az új eloszlás háromszög alakú ezt **megsejthetjük** az ábrák alapján!

A most végrehajtott eljárást nevezik **Monte Carlo-módszernek**! Véletlen számok generálásával és azokon végrehajtott műveletek segítségével kapunk újabb véletlen számokat. Ezek eloszlását grafikus módszerek alapján sejtjük meg. Ez hozzá segít a tévedések kiszűréséhez. Egy kutató mérnök kezében ez egy óriási eszköz. A valóságban ugyanis egy bonyolult módon működő mérnöki berendezés működését úgy ellenőrizhetjük, hogy véletlen bemeneteket generálunk, majd a kimeneteket megmérjük. A kimeneten jelentkező statisztikai feldolgozások hozzájárulnak a "fekete doboz" belső berendezés pontosabb **leírásának** megfejtéséhez!

▼ 7.6. Diszkrét változó eloszlás függvénye. Két kocka dobás összege.

Az X **diszkrét valószínűségi** változó $P(X < x) = F(x)$ eloszlás függvényének alakja **lépcsős függvény**, amely véges lépcsőfokszám esetén a nulla magasságról indul és növekedve jut fel az 1 magasságra!

Ha az X diszkrét változó értékei és a hozzá tartozó valószínűségek a következők

$$\begin{bmatrix} X & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ P & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{bmatrix}$$

akkor $F(x) = P(X < x)$ számításához azokat a p_k valószínűségeket kell összegezni, melyekre az $x_k < x$ teljesül. Ha az x_k értékek **növekvőleg rendezettek**, akkor a számítás a következőképpen részletezhető

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k = \begin{cases} 0 & x \leq x_1 \\ p_1 & x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2 & x_2 < x \leq x_3 \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n & x_n < x \leq x_{n+1} \\ \dots & \dots \end{cases}$$

A lépcsős függvény balról folytonos. A következőkben felrajzoljuk a **diszkrét változó eloszlásfüggvényét** a 7.4.2. példára! Az X és Fx listák a valószínűségi változó x_k **értékeit** és a

$\sum_{s=1}^k p_s$ **halmozott valószínűségeket** tartalmazza ($k=1,2,3,\dots$).

7.6.1. példa (7.4.2. példa folytatása)

Készítünk egy programot a két kocka dobásakor a pontok összegére kapott valószínűségi **eloszlásfüggvény** szemléltetésére!

Megoldás

$X := [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12];$

$px := \left[\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36} \right]; N := nops(px)$

$X := [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$

$px := \left[\frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{1}{6}, \frac{5}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36} \right]$

$N := 11$

(1.6.1)

Ki kell számítanunk a px valószínűségek halmozott értékeit és ezt kell ábrázolni!

$Fx := \left[seq \left(\sum_{i=1}^n px_i, n = 1..N \right) \right]$

$Fx := \left[\frac{1}{36}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{5}{18}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{13}{18}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{35}{36}, 1 \right]$

(1.6.2)

Elkészítjük az X és Fx listákkal a lépcsős függvény lépcsőit!

> $lépcsők := [[[X_1 - 1, 0], [X_1, 0]], seq([[X_k, Fx_k], [X_{k+1}, Fx_k]], k = 1..N - 1), [[X_N, 1],$

$$\begin{aligned}
 & [X_N + 1, 1]] \\
 \text{lépcsők} := & \left[\left[[1, 0], [2, 0] \right], \left[\left[2, \frac{1}{36} \right], \left[3, \frac{1}{36} \right] \right], \left[\left[3, \frac{1}{12} \right], \left[4, \frac{1}{12} \right] \right], \left[\left[4, \frac{1}{6} \right], \left[5, \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{1}{6} \right] \right], \left[\left[5, \frac{5}{18} \right], \left[6, \frac{5}{18} \right] \right], \left[\left[6, \frac{5}{12} \right], \left[7, \frac{5}{12} \right] \right], \left[\left[7, \frac{7}{12} \right], \left[8, \frac{7}{12} \right] \right], \left[\left[8, \frac{13}{18} \right], \right. \\
 & \left. \left[9, \frac{13}{18} \right] \right], \left[\left[9, \frac{5}{6} \right], \left[10, \frac{5}{6} \right] \right], \left[\left[10, \frac{11}{12} \right], \left[11, \frac{11}{12} \right] \right], \left[\left[11, \frac{35}{36} \right], \left[12, \frac{35}{36} \right] \right], \\
 & \left. \left[[12, 1], [13, 1] \right] \right]
 \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

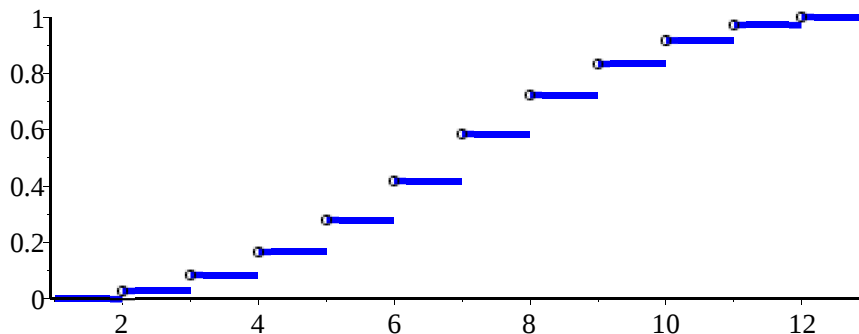
> körök := [seq([X[k], Fx[k]], k = 1..N)]

$$\begin{aligned}
 \text{körök} := & \left[\left[2, \frac{1}{36} \right], \left[3, \frac{1}{12} \right], \left[4, \frac{1}{6} \right], \left[5, \frac{5}{18} \right], \left[6, \frac{5}{12} \right], \left[7, \frac{7}{12} \right], \left[8, \frac{13}{18} \right], \left[9, \frac{5}{6} \right], \right. \\
 & \left. \left[10, \frac{11}{12} \right], \left[11, \frac{35}{36} \right], [12, 1] \right]
 \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

Az eloszlás függvény grafikonja lépcsős függvény diszkrét esetben

> rajz1 := plot(lépcsők, color = blue, thickness = 3, title
= Két kockadobás összegének eloszlás függvénye) :
rajz2 := plot(körök, color = black, style = point, symbol = circle) :
plots[display]([rajz1, rajz2])

Két kockadobás összegének eloszlás függvénye



7.6.1. ábra. Két kockadobás összegének eloszlás függvényének lépcsői

Az eloszlásfüggvényről leolvasható, hogy az ugrás mértéke eleinte növekszik, majd a vége felé csökken. Az ugrási pontokban a jobb oldali magasabb értékekben köröket rajzoltunk érzékeltetve, hogy a függvény balról folytonos!

7.7. Folytonos változó sűrűségfüggvénye és eloszlásfüggvénye

7.7.1. Kapcsolat folytonos eloszlás sűrűsége és eloszlásfüggvénye között

Folytonos X valószínűségi változó esetén definíció szerint van olyan (véges sok pont kivételével) folytonos $f(x)$ sűrűségfüggvény, amelyre

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$

Ekkor az F eloszlásfüggvény minden pontban **folytonos** és **véges sok pont kivételével differenciálható**, továbbá deriváltjára

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x).$$

Így folytonos X valószínűségi változóra

$$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Ahonnán következik, hogy $P(X = x) = 0$ minden valós x -re! Ezért folytonos eloszlás esetén az $F(x) = P(X < x) = P(X \leq x)$

egyaránt megfelelő definíció az eloszlásfüggvényre. Az egységes értelmezés (diszkrét és folytonos) miatt maradunk a határozott kisebb jelnél.

7.7.2. Példa (7.5.2. példa folytatása)

Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a $[0, 1]$ intervallumban véletlenül választott két pont egymástól $\frac{1}{4}$ -nél nagyobb, de $\frac{3}{4}$ -nél kisebb távolságra esik $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right)$!

Megoldás

A 7.5.2 példában megtaláltuk az F eloszlás függvényt és az f sűrűség függvényt!

Az $f(x)$ sűrűség függvény és a $F(x)$ eloszlás függvény kapcsolata:

$$f(x) = F'(x), F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

> $F := \text{unapply}(\text{piecewise}(x \leq 0, 0, x \leq 1, 1 - (1 - x)^2, 1), x) : 'F(x)' = F(x);$
 > $f := \text{unapply}(\text{piecewise}(x \leq 0, 0, x \leq 1, 2 - 2x, 0), x) : 'f(x)' = f(x);$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - (1 - x)^2 & x \leq 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2 - 2x & x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.7.1)$$

A keresett $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right)$ valószínűséget egyrészt az eloszlásfüggvény két értékének különbsége adja:

$$\begin{aligned} > 'F\left(\frac{3}{4}\right)' - 'F\left(\frac{1}{4}\right)' = F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) \\ & \quad F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

Másrészt ugyanezt megkapjuk, ha kiszámítjuk a sűrűségfüggvény görbe alatti területet az adott

intervallumon integrállal!

$$> \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x) \, dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x) \, dx$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2 - 2x & x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} dx = \frac{1}{2} \quad (1.7.3)$$

Tehát a keresett valószínűség $\frac{1}{2}$, amelyet szemléltetünk a sűrűségfüggvény alatti megfelelő terület befestésével.

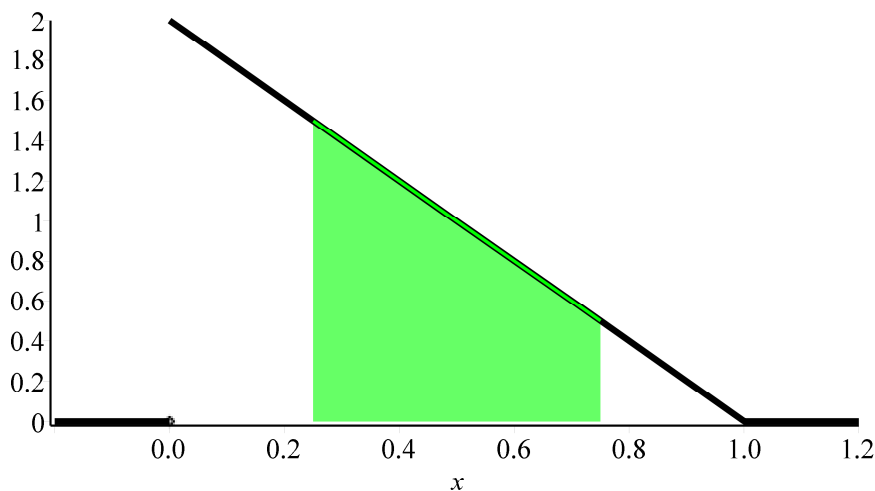
A sűrűség függvény alatti terület és a valószínűség

> gorbe := plot(f(x), x = -0.2 .. 1.2, scaling = constrained, discontinuous = true, axes = framed, title = A két pont távolsága sűrűség függvénye görbéje alatti terület, color = black, thickness = 3)

terulet := plot(f(x), x = 1/4 .. 3/4, scaling = constrained, filled = true, color = green) :

plots[display]([gorbe, terulet], tickmarks = [7, 10])

A két pont távolsága sűrűség függvénye görbéje alatti terület



7.7.1. ábra. Az $\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}$ esemény valószínűsége és a sűrűségfüggvény alatti terület

7.7.3. TÉTEL. A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Az X folytonos valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvényére teljesülnek az alábbi feltételek

- (a) $0 \leq f(x)$ és
 (b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

BIZONYÍTÁS.

(a) Mivel $f(x)$ véges sok pont kivételével folytonos, ezért a $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$ függvény mindenütt folytonos és véges sok pont kivételével differenciálható, továbbá $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$. Mivel $F(x)$ monoton nem csökkenő, ezért $F(x)$ deriváltja, azaz $f(x)$ nemnegatív!

(b) Ha $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ zárt intervallumon, akkor a Newton-Leibniz-tétel alapján

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b \frac{d}{dx} F(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Mivel f véges sok pont kivételével folytonos, ezért ez igaz bármely $[a, b]$ intervallumra. Ebből pedig

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) = 1 - 0 = 1. \quad \text{Q.e.d.}$$

Igazolható, hogy ha egy $f(x)$ függvényre teljesülnek a 7.7.3. tétel (a)-(b) feltételei, akkor van olyan X folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(x)$ és eloszlásfüggvénye $F(x)$.

7.7.4. Példa. Exponenciális eloszlás

Tekintsük az $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ a e^{-ax} & 0 < x \end{cases}$ függvényt $a > 0$ paraméterrel!

(a) Mutassuk meg, hogy f valószínűségi sűrűségfüggvény tetszőleges $a > 0$ esetén! A megfelelő eloszlást **exponenciális eloszlás**nak nevezzük.

(b) Határozzuk meg az $F(x)$ eloszlásfüggvényt!

(c) Számítsuk ki a $P\left(\frac{1}{2} \leq X < 1\right)$ és a $P(X > 3)$ valószínűségeket!

Megoldás.

(a) Ellenőrizzük a sűrűségfüggvényre vonatkozó feltételeket! Az $0 \leq f(x)$ teljesül, mert $a > 0$ és az exponenciális függvény pozitív.

> *restart : assume(0 < a) : f := x → piecewise(x ≤ 0, 0, 0 < x, a e^{-ax}) : 'f(x)' = f(x)*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ a e^{-ax} & 0 < x \end{cases} \quad (1.7.4)$$

Ellenőrizzük, hogy a görbe alatti terület 1.

> $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

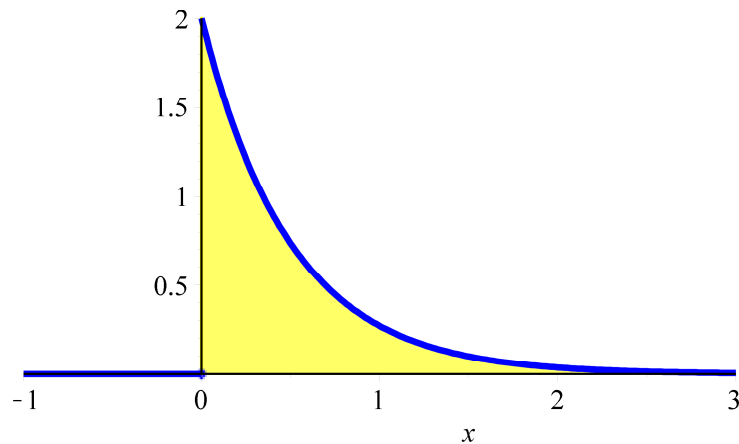
$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ a e^{-ax} & 0 < x \end{cases} dx = 1 \quad (1.7.5)$$

Rajzoljuk fel a kiszámolt görbe alatti területet az $a = 2$ paraméter esetén!

Az exponenciális eloszlás sűrűség függvénye

```
> gorbe := plot(subs(a = 2, f(x)), x = -1 .. 3, scaling = constrained, title
= Exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye, color = blue, thickness = 3, discount = true) :
terulet := plot(subs(a = 2, f(x)), x = -1 .. 3, scaling = constrained, filled = true, color = yellow) :
plots[display]([terulet, gorbe])
```

Exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye



7.7.2. ábra. Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye $a = 2$ paraméter mellett.

(b) Az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálfüggvénye a $[-\infty, x]$ intervallumon!

Az exponenciális eloszlás eloszlás függvénye

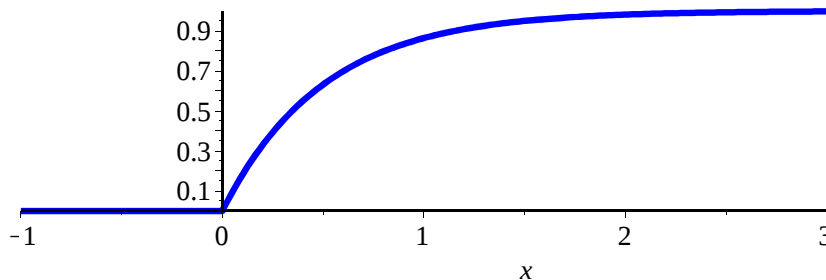
```
> F := x -> ∫-∞x f(t) dt : 'F(x)' = F(x)
```

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ -e^{-a \cdot x} + 1 & 0 < x \end{cases}$$

(1.7.6)

```
> plot(subs(a = 2, F(x)), x = -1 .. 3, scaling = constrained, title
= Exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye, color = blue, thickness = 3)
```

Exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye



7.7.3. ábra. Exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye $a = 2$ paraméter mellett.

Az eloszlás nevét onnan kapta, hogy a sűrűség függvény exponenciálisan csökken a $[0, \infty)$ intervallumon, míg az eloszlásfüggvény exponenciálisan növekszik.

(c) A valószínűségeket az **eloszlásfüggvénnyel** is és a **sűrűségfüggvénnyel** is kiszámolhatjuk.

$$> X := 'X' : P\left(X \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right);$$

$$P\left(X \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = -e^{-a\sim} + e^{-\frac{1}{2} a\sim} \quad (1.7.7)$$

$$> P\left(\frac{1}{2} \leq X \text{ and } X < 1\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$$

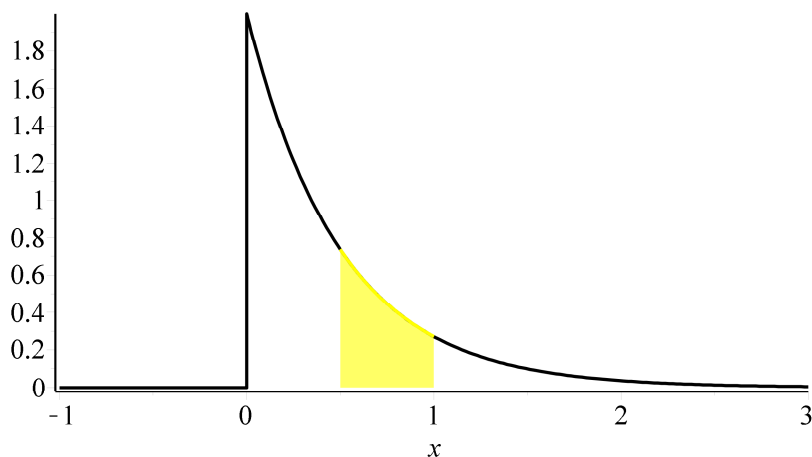
$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \text{ and } X < 1\right) = -e^{-a\sim} + e^{-\frac{1}{2} a\sim} \quad (1.7.8)$$

A kapott valószínűség a sűrűségfüggvény görbéje alatti terület!

A sűrűség függvény alatti terület valószínűséget mutat

```
> gorbe := plot(subs(a = 2, f(x)), x = -1..3, scaling = constrained, axes = framed, title
= A valószínűség a sűrűségfüggvény alatti területtel szemléltethető, color = black) :
terulet := plot(subs(a = 2, f(x)), x = 1/2..1, scaling = constrained, axes = framed, filled = true,
color = yellow) :
plots[display]([gorbe, terulet])
```

A valószínűség a sűrűségfüggvény alatti területtel szemléltethető



7.7.4. ábra. A $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$ valószínűség a sűrűségfüggvény alatti terület.

Valószínűségek meghatározása eloszlás függvénnyel

```
> gorbe := plot(subs(a = 2, F(x)), x = -1..3, scaling = constrained, title
= A valószínűség az eloszlásfüggvény két értéke közötti eltéréssel szemléltethető, color = black, axes
= normal, thickness = 3) :

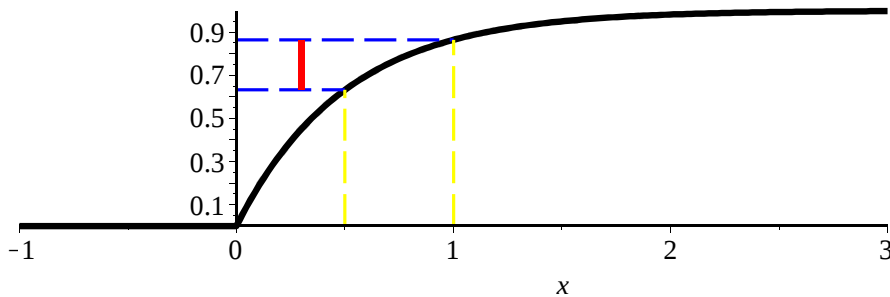
viz := plot([ [0, subs(a = 2, F(1))], [1, subs(a = 2, F(1))], [ [0, subs(a = 2, F(1/2))], [1/2,
subs(a = 2, F(1/2))] ], scaling = constrained, axes = normal, color = blue, linestyle = 3) :

fugg := plot([ [1, 0], [1, subs(a = 2, F(1))], [ [1/2, 0], [1/2, subs(a = 2, F(1/2))] ], scaling
= constrained, axes = normal, color = yellow, linestyle = 3) :

elteres := plot([ [0.3, subs(a = 2, F(1/2))], [0.3, subs(a = 2, F(1))]] , scaling = constrained, axes
= normal, color = red, thickness = 3) :
```

`plots[display]([gorbe, viz, fugg, elteres])`

A valószínűség az eloszlásfüggvény két értéke közötti eltéréssel szemléltethető



7.7.5. ábra. A $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right)$ valószínűség az eloszlásfüggvény megváltozása.

Az előzőekhez hasonlóan az $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 3\}$ esemény $P(A)$ valószínűségét kiszámolhatjuk

(a) a sűrűségfüggvény $[3, \infty)$ intervallumon vett integrálásával: $P(X > 3) = \int_3^{\infty} f(x) dx$

(b) az eloszlás függvény értékével és a tagadás eseményre kapott $P(A^c) = 1 - P(A)$ képlet alapján:

$$P(X > 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3).$$

$$> P(3 < X) = \int_3^{\infty} f(x) dx;$$

$$P(3 < X) = \frac{1}{(e^{a\sim})^3} \quad (1.7.9)$$

$$> P(3 < X) = F(\infty) - F(3)$$

$$P(3 < X) = e^{-3a\sim} \quad (1.7.10)$$

A két érték azonos, ha alkalmazzuk a hatványozás azonosságait.

▼ 7.8. Elméleti ellenőrző kérdések

7.8.1. Milyen elemeket tartalmaz egy valószínűségi változó **értelmezési tartománya** illetve **értékkészlete**?

7.8.2. Hogyan értelmezzük egy valószínűségi változó **eloszlásfüggvényét**?

7.8.3. Milyen **tulajdonságokkal** rendelkezik egy általános valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye**?

7.8.4. Mikor mondjuk egy valószínűségi változóról, hogy **diszkrét**?

7.8.5. Mikor mondjuk egy valószínűségi változóról, hogy **folytonos**?

7.8.6. Hogyan definiáljuk a diszkrét valószínűségi változó **eloszlását**? Mik a jellemzői?

7.8.7. Hogyan definiáljuk a folytonos valószínűségi változó **sűrűségfüggvényét**? Mik a jellemzői?

7.8.8. Milyen jellemző **tulajdonságai** vannak egy diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvényének?

7.8.9. Milyen jellemző **tulajdonságai** vannak egy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvényének !

7.8.10. Milyen kapcsolat van egy folytonos valószínűségi változó sűrűség függvénye és eloszlás függvénye között?

▼ 7.9. Gyakorló feladatok

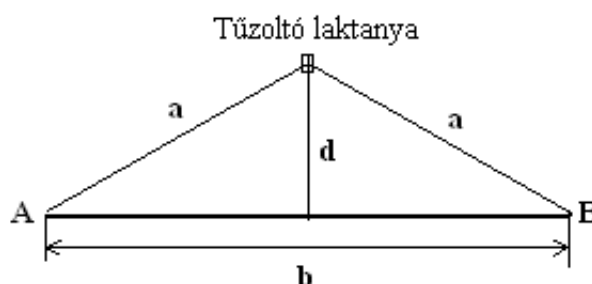
7.9.1. feladat

A következő **függvényekben** határozza meg az 'a' konstans értékét úgy, hogy a függvények kielégítsék a valószínűségi eloszlásfüggvény összes követelményét! Határozza meg mindegyik esetben a megfelelő sűrűségfüggvényt is és rajzolja fel ezek grafikonját!

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0 & x < 5 \\ a & 5 \leq x \end{cases} & \text{(b)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0 & x < 5 \\ \frac{1}{2} & 5 \leq x < 7 \\ a & 7 \leq x \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-ax} & 0 < x \end{cases} & \text{(d)} \quad F(x) &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ a \arcsin(\sqrt{x}) & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \end{cases} \\
 \text{(e)} \quad F(x) &= a \arctan(x)
 \end{aligned}$$

7.9.2. feladat

A tűz egy erdő bármely pontján egyforma valószínűséggel keletkezhet. A **tűzoltó laktanya** az erdő **AB** szélétől **d**>0 távolságra van és az A illetve B sarkoktól egyenlő **a**>0 távolságra. Az erdő **AB** szélé tekinthető egy **b**>0 hosszúságú egyenes szakasznak. (Lásd az ábrát!) Határozzuk meg a valószínűségi eloszlás- és sűrűség függvényét annak az **X** valószínűségi változónak, amely a tűzoltó laktanya és az **AB** vonalon keletkezett tűz helye közötti távolság. Rajzoljuk fel az eloszlás- és sűrűségfüggvény grafikonjait!



7.9.3. feladat

Egy szennyező forrás által okozott környezetszennyezés jól leírható az

$$f(r) = \begin{cases} 0 & r \leq 0 \\ a e^{-ar} & 0 < r \end{cases}$$

sűrűség függvénnyel, ahol **r** a szennyezés forrás centrumától mért távolság. Határozzuk meg azt a sugarat, amely körön belül a szennyeződés 95%-a található!

7.9.4. feladat

Egy diáknak ahhoz, hogy otthonról az iskolába busszal beérjen 20 és 25 perc közötti idő szükséges egyenletes eloszlásban. Ha a diák pontosan 7:38-kor megy el otthonról, akkor mekkora a valószínűsége, hogy a tanítás 8:00-ás kezdetére beér az iskolába?

▼ Feladatok diszkrét eloszlásokra

7.9.5. Feladat

Dobjunk fel két szabályos kockát. Jelölje X a dobott pontok szorzatát!

- (a) Adja meg az X valószínűségi változó lehetséges értékeit és X értékeihez hozzá tartozó P valószínűségeket!
- (b) Rajzolja fel az $X - p$ síkban a kapott pontokat!
- (c) Rajzolja fel a diszkrét eloszlást pálcika diagrammal!
- (d) Rajzolja fel a diszkrét eloszlásfüggvény lépcsőit!

7.9.6. Feladat

Dobjunk fel két szabályos kockát. Jelölje X a dobott pontok közül a nagyobbikat (egyenlő dobás esetén bármelyiket)!

- (a) Adja meg az X valószínűségi változó lehetséges értékeit és X értékeihez hozzá tartozó P valószínűségeket!
- (b) Rajzolja fel az $X - p$ síkban a kapott pontokat!
- (c) Rajzolja fel a diszkrét eloszlást pálcika diagrammal!
- (d) Rajzolja fel a diszkrét eloszlásfüggvény lépcsőit!

7.9.6. feladat

Egy nem szabályos kocka hat oldala úgy torzított, hogy az egyes dobások valószínűsége

$$P(X = k) = \frac{k}{21}, \text{ ahol } k=1,2,3,4,5,6.$$

- (a) Mutassa meg, hogy a megadott számok valóban diszkrét eloszlást határoznak meg!
- (b) Rajzolja fel az eloszlás pálcika diagramját!
- (c) Rajzolja fel az eloszlásfüggvény lépcsős függvényét!

7.9.7. feladat

Jelölje X az ötös lottó joker számában előforduló 0 számjegyek számát. A jokerszám hatjegyű és a számok sorrendje lényeges. A számjegyeit visszatevéses módszerrel véletlenszerűen húzzák ki egymástól függetlenül a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ számjegyek közül.

- (a) Adja meg X lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségek táblázatát!
- (b) Rajzolja fel X eloszlását pálcika diagrammal!
- (c) Rajzolja fel X eloszlásfüggvényét!

7.9.8. feladat

Három ember között sorsolnak ki 1000, 2000 és 3000 Ft-ot. A 3 sorsolás egymástól független és bármelyik személy ugyanakkora valószínűséggel nyerhet. Jelölje az X valószínűségi változó egy kiszemelt személynek jutó ezresek számát, azaz

$$X = k, \text{ ha a kiszemelt személy } k \text{ darab } 1000 \text{ Forintot nyer } (k=1,2,3,4,5,6 \text{ lehet})$$

- (a) Rajzolja fel X eloszlását!
- (b) Írja fel X eloszlásfüggvényét és rajzoljuk fel grafikonját!
- (c) Határozza meg annak valószínűségét, hogy $X < 3$ illetve $X < 3.5$!

7.9.9. feladat

Egy urnában 5 darab golyó van, 1-től 5-ig sorszámozva. Véletlenszerűen kihúzunk 2 golyót egyszerre. Jelölje az X valószínűségi változó a kihúzott golyókon levő pontok különbségének abszolút értékét!

- (a) Adja meg X lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségek táblázatát!
- (b) Rajzolja fel X eloszlását és eloszlásfüggvényét! Használja a munkalapban található eljárásait!

7.9.10. Feladat

Az X diszkrét valószínűségi változó $0 < p < 1$ paraméterű **Bernoulli** eloszlású, ha

$$p_0 = P(X=0) = (1-p) \text{ és } p_1 = P(X=1) = p$$

Az eloszlás "**Bernoulli**(p)" néven szerepel a Statistics csomagban.

(a) Mutassa meg, hogy az így értelmezett számok egy diszkrét valószínűségi eloszlást határoznak meg.

(b) Rajzolja fel $p=0.2$ esetén az X diszkrét változó eloszlásfüggvényét és eloszlását!

7.9.11. Feladat

Az X diszkrét valószínűségi változó (n, p) paraméterű **binomiális** eloszlású ($n \in \mathbb{N}$ és $0 < p < 1$), ha

$$p_k = P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

ahol $k=0, 1, 2, 3, \dots, n$. Az eloszlás "**Binomial**(n, p)" néven szerepel a Statistics csomagban.

(a) Mutassa meg, hogy az így értelmezett számok egy diszkrét valószínűségi eloszlást határoznak meg.

(b) Rajzolja fel az $n=10$ és $p=0.2$ esetén az X diszkrét változó eloszlásfüggvényét és eloszlását!

(c) Mekkora valószínűséggel esik az X változó értéke a $[4 ; 7]$ intervallumba a (b) esetben?

7.9.12. Feladat

Legyen $0 < p < 1$ és $q = 1 - p$.

(a) Mutassa meg, hogy a $(q^k p, k=0,1,2,3,\dots)$ sorozat egy diszkrét eloszlást határoz meg! Ezt az eloszlást nevezzük **geometriai eloszlásnak**. Az eloszlás "**Geometric**(p)" néven szerepel a Statistics csomagban.

(b) Rajzolja fel az eloszlást és az eloszlásfüggvényt!

7.9.13. Feladat

Legyenek adottak az n, N és s természetes számok, ahol $s < N$ és $n < N$. Tekintsük a

$$p_k = P(X=k) = \frac{\binom{s}{k} \cdot \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

számokat, ahol $k=0,1,2,\dots, \min(n,s)$.

(a) Mutassa meg a $(p_k, k=0,1,2,3,\dots, \min(n,s))$ számok egy diszkrét eloszlást határoznak meg!

Ezt az eloszlást nevezzük **hipergeometriai eloszlásnak**. Az eloszlás "**Hypergeometric**(N,s,n)" néven szerepel a Statistics csomagban.

(b) Rajzolja fel az eloszlást és az eloszlásfüggvényt $N=20, n=8, m=5$ paraméterek esetén!

7.9.14. Feladat

Legyen a $\lambda > 0$ pozitív szám. Tekintsük a

$$p_k = P(X=k) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}$$

számokat, ahol $n=0,1,2,\dots$. Az eloszlás "**Poisson**(λ)" néven szerepel a Statistics csomagban.

(a) Mutassa meg a $(p_n, n=0,1,2,3,\dots)$ végtelen sorozat egy diszkrét eloszlást határoz meg! Ezt az eloszlást nevezzük λ paraméterű **Poisson- eloszlásnak**.

(b) Rajzolja fel az eloszlást és az eloszlásfüggvényt $\lambda = 0.5, 1, 2$ és 5 értékekre!

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy $X \leq 5$, ha $\lambda = 2$?

7.9.15. Feladat

Legyen a $0 < p < 1$ és r természetes szám. Tekintsük a

$$p_k = P(X=k) = \binom{k+r-1}{k} \cdot (1-p)^r p^k$$

számokat, ahol $k=0,1,2,\dots$. Az eloszlás "**Negative Binomial**(r,p)" néven szerepel a Statistics csomagban.

(a) Mutassa meg a $(p_n, n=0,1,2,3,\dots)$ végtelen sorozat egy diszkrét eloszlást határoz meg! Ezt az eloszlást nevezzük r és p paraméterű **negatív binomiális- eloszlásnak**.

(b) Rajzolja fel az eloszlást és az eloszlásfüggvényt néhány paraméter értékre!

7.9.16. Feladat

Egy szabályos tetraédert feldobunk háromszor egymástól függetlenül. A szabályos tetraédernek 4 egybevágó szabályos háromszög lapja van, melynek most a lapjain 1, 2, 3 vagy 4 pont van.

Jelölje X a kapott három dobásból a különböző pontok számát.

Például, ha a dobás sorozat $(4;1;1)$ lett, akkor $X=2$, mert kétféle különböző pontszámot dobunk, egyszer 4-et és kétszer 1-t!

(a) Adja meg az X változó lehetséges értékeit és az ezekhez tartozó p_X valószínűségek listáját!

(b) Rajzolja fel az X változó eloszlásának pálcika diagrammját és eloszlás függvényét!

(c) Melyik X érték a legvalószínűbb?

7.9.17. Feladat

Egy szabályos dobókockát feldobunk háromszor egymástól függetlenül.

Jelölje X a kapott három dobásból a különböző pontok számát.

Például, ha a dobás sorozat $(6;1;6)$ lett, akkor $X=2$, mert két különböző pontszámot kaptunk, kétszer 6-t és egyszer 1-t!

(a) Adja meg az X változó lehetséges értékeit és az ezekhez tartozó p_X valószínűségek listáját!

(b) Rajzolja fel az X változó eloszlásának pálcika diagrammját és eloszlás függvényét!

(c) Melyik X érték a legvalószínűbb?

7.9.18. Feladat

Egy dobozban három golyó van megszámozva 1, 2 és 3 számokkal. Kihúzzunk véletlenszerűen egyet a golyók közül, majd egy szabályos pénz érmét annyiszor dobunk fel, ahányas számot húztuk a golyók közül. Tehát, ha például a 3-as számú golyót húztuk ki, akkor a pénzérmét 3-szor dobjuk fel egymás után! Jelölje X a pénzfeldobás(ok) után kapott fej dobások számát összesen!

(a) Adjuk meg X lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségeket!

(b) Ábrázoljuk X eloszlását pálcika diagrammal!

(c) Hány fej dobás fordul elő leggyakrabban, ha sokszor ismétljük a kísérletet?

(d) Számítsuk ki X várható értékét és szórását!

7.9.19. Feladat

Egy 6 oldalú szabályos dobó kockát háromszor dobunk fel egymástól függetlenül. Az egyes kimenetek értékeit jelölje X_1 , X_2 és X_3 valószínűségi változó!

Legyen Y a 3 dobás értéke közül a maximális dobás értéke, azaz $Y = \max(X_1, X_2, X_3)$

(a) Adjuk meg az Y véletlen változó lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségeket!

(b) Ábrázoljuk Y eloszlását pálcika diagrammal!

(c) Számítsuk ki Y várható értékét és szórását!

(d) Mutassuk meg, hogy $P(Y \leq k) = P(X_1 \leq k)^3$, tehát Y eloszlás függvénye X_1 eloszlás függvényének a harmadik hatványa!

Megjegyzés: (d) alapján ki tudjuk számolni az (a) feladatban Y eloszlásához tartozó valószínűségeket!

7.9.20. Feladat

Egy 6 oldalú szabályos dobó kockát háromszor dobunk fel egymástól függetlenül. Az egyes kimenetek értékeit jelölje X_1 , X_2 és X_3 valószínűségi változó!

Legyen Y a 3 dobás értéke közül a minimális dobás értéke, azaz $Y = \min(X_1, X_2, X_3)$

(a) Adjuk meg az Y véletlen változó lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségeket!

(b) Ábrázoljuk Y eloszlását pálcika diagrammal!

(c) Számítsuk ki Y várható értékét és szórását!

(d) Mutassuk meg, hogy $P(k \leq Y) = P(k \leq X_1)^3$, tehát Y túlélési függvénye X_1 túlélési függvényének a harmadik hatványa!

Megjegyzés: (d) alapján ki tudjuk számolni az (a) feladatban Y eloszlásához tartozó valószínűségeket!

7.9.21. Feladat

Egy szabályos dobókockát feldobunk egyszer. Ha a dobás 4, 5 vagy 6, akkor jelölje X a dobás értékét. Ha a dobás értéke 1, 2 vagy 3 lett, akkor feldobjuk a kockát még egyszer és ilyen esetben jelölje X a két dobás értékének összegét!

(a) Adjuk meg X lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségeket!

(b) Ábrázoljuk X eloszlását pálcika diagrammal!

(c) Számítsuk ki X várható értékét és szórását!

7.9.22. Feladat

Egy urnában 5 darab golyó van, 1-től 5-ig sorszámozva. Véletlenszerűen kihúzunk 2 golyót egyszerre. Jelölje az X valószínűségi változó a kihúzott golyókon levő pontok összegét!

(a) Adjuk meg X lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségek táblázatát!

(b) Rajzoljuk fel X eloszlását és eloszlásfüggvényét! Használjuk a munkalap utolsó szekciójában található két eljárást!

(c) Számoljuk ki X várható értékét!

(d) Számoljuk ki X szórását!

▼ Feladatok folytonos eloszlásokra

7.9.23. feladat

Az egységnyi hosszúságú $[0,1]$ intervallumon véletlenszerűen választunk egy X számot!

Legyen Y a keletkezett két szakasz hosszának szorzata, azaz

$$X = x \cdot (1 - x)$$

(a) Határozza meg Y eloszlásfüggvényét és rajzolja fel grafikonját!

(b) Határozza meg Y sűrűségfüggvényét és rajzolja fel grafikonját!

(c) Számolja ki annak valószínűségét, hogy a két szám szorzata legalább $\frac{1}{4}$, azaz

$$P\left(Y \geq \frac{1}{4}\right) !$$

(d) A "Statistics" csomag segítségével generáljon az X változóra $N=1000$ véletlen értéket, majd számolja ki az ezekhez tartozó N darab Y értéket! Rajzolja fel a kapott Y értékek gyakoriság hisztogramját a sűrűség függvénnyel azonos koordináta-rendszerben! Figyelje meg az illeszkedést!

7.9.24. feladat

Az egységnyi hosszúságú $[0, 1]$ intervallumon véletlenszerűen választunk egy X számot.

Legyen Y a keletkezett két szakasz hosszának négyzetösszege, azaz

$$Y = X^2 + (1 - X)^2$$

(a) Határozza meg Y eloszlásfüggvényét és rajzolja fel grafikonját!

(b) Határozza meg Y sűrűségfüggvényét és rajzolja fel grafikonját!

(c) Számolja ki annak valószínűségét, hogy a négyzetösszeg legalább $\frac{3}{4}$, azaz $P\left(Y \geq \frac{3}{4}\right)$?

(d) A "Statistics" csomag segítségével generáljon generáljon az X változóra $N=1000$ véletlen értéket, majd számolja ki az ezekhez tartozó N darab Y értéket! Rajzolja fel a kapott Y értékek gyakoriság hisztogramját a sűrűség függvénnyel azonos koordináta-rendszerben! Figyelje meg az illeszkedést!

7.9.25. feladat

Az egységnyi hosszúságú $[0,1]$ intervallumon választunk egymástól függetlenül és

véletlenszerűen u és v két számot. Legyen az X valószínűségi változó a két szám **számtani közepe**

$$X = \frac{u + v}{2}$$

- (a) Adja meg X eloszlásfüggvényét és rajzolja fel grafikonját!
- (b) Adja meg X sűrűségfüggvényét és rajzoljuk fel grafikonját!
- (c) Határozza meg annak valószínűségét, hogy a két szám átlaga legalább $1/4$ legyen!
- (d) A "Statistics" csomag segítségével generáljon az u és v értékekre $N=1000$ véletlen számot, majd számolja ki az ezekhez tartozó N darab X értéket! Rajzolja fel a kapott X értékek gyakoriság hisztogramját a sűrűség függvényel azonos koordináta-rendszerben! Figyelje meg az illeszkedést!

7.9.26. feladat

Az egységnyi hosszúságú $[0,1]$ intervallumon egymástól függetlenül és véletlenszerűen választunk u és v két számot. Legyen az X valószínűségi változó a két szám szorzata

$$X = u \cdot v$$

- (a) Adja meg X eloszlásfüggvényét és rajzolja fel grafikonját!
- (b) Adja meg X sűrűségfüggvényét és rajzoljuk fel grafikonját!
- (c) Határozza meg annak valószínűségét, hogy a két szám szorzata legalább $1/4$ legyen!
- (d) A "Statistics" csomag segítségével generáljon az u és v értékekre $N=1000$ véletlen számot, majd számolja ki az ezekhez tartozó N darab X értéket! Rajzolja fel a kapott X értékek gyakoriság hisztogramját a sűrűség függvényel azonos koordináta-rendszerben! Figyelje meg az illeszkedést!

7.9.27. feladat

Origó körüli egység sugarú kör kerületén véletlenszerűen választunk egy $P(a;b)$ ($a^2 + b^2 = 1$) pontot. Legyen az X valószínűségi változó a P pont abszcisszája, vagyis

$$X(a, b) = a$$

- (a) Határozza meg X eloszlásfüggvényét és rajzolja fel grafikonját!
- (b) Számítsa ki X sűrűségfüggvényét és rajzolja fel grafikonját!
- (c) Határozza meg annak valószínűségét, hogy a pont abszcisszája 0 és $1/2$ közé esik!
- (d) A "Statistics" csomag segítségével generáljon az a és b értékekre $N=1000$ véletlen számot, majd számolja ki az ezekhez tartozó N darab X értéket! Rajzolja fel a kapott X értékek gyakoriság hisztogramját a sűrűség függvényel azonos koordináta-rendszerben! Figyelje meg az illeszkedést!

7.9.28. feladat

A $[0,1] \times [0,1]$ egységnégyzet csúcspontjait jelölik az $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$ és $D(0,1)$ pontok. Véletlenszerűen választunk az AB oldalon egy $P(a,0)$ pontot és a CD oldalon egy másik $Q(b,1)$ pontot egymástól függetlenül. Jelölje X a PQ szakasz távolságát!

- (a) Határozza meg és rajzolja fel az X véletlen változó eloszlásfüggvényét!
- (b) Adja meg és rajzolja fel X sűrűségfüggvényét!
- (e) A "Statistics" csomag segítségével generáljon $N=1000$ véletlen számot a P és Q pontokra, majd számolja ki az $X=|PQ|$ távolságokat! Rajzolja fel az X -re kapott értékek hisztogramját és X sűrűség függvényét közös koordináta-rendszerben! Milyen az illeszkedés?

7.9.29. Feladat

Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye **logisztikus**, ha

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-a)}{b}}}{b \cdot \left(1 + e^{-\frac{(x-a)}{b}}\right)^2}.$$

- (a) Mutassuk meg, hogy $b > 0$ esetén $f(x)$ valóban rendelkezik a sűrűségfüggvényekre tett mindegyik kikötéssel! Az eloszlás "**Logistic(a, b)**" néven szerepel a Statistics csomagban.

- (b) Számítsuk ki az $F(x)$ eloszlásfüggvényt!
 (c) Rajzoljuk fel mind az $f(x)$, mind a $F(x)$ függvényeket!
 (d) Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy X értéke a $[-1,1]$ intervallumba esik, ha $a = 0$ és $b = 1$!
 (e) Mekkora legyen az " $c > 0$ " szám, ha X értéke 0.9 valószínűséggel esik a $[-c, c]$ intervallumba?

7.9.30. Feladat

$$\text{Tekintsük az } f(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & b < x \end{cases} \text{ függvényt!}$$

- (a) Igazoljuk, hogy $f(x)$ egy sűrűségfüggvény! A megfelelő X valószínűségi változót az $[a,b]$ intervallumon **egyenletes eloszlás**ának nevezzük! Az eloszlás "**Uniform(a, b)**" néven szerepel a Statistics csomagban.
 (b) Számítsuk ki az eloszlásfüggvényt!
 (c) Rajzoljuk fel a sűrűség- és eloszlásfüggvényt!

7.9.31. Feladat

$$\text{Tekintsük az } f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{ függvényt!}$$

- (a) Igazoljuk, hogy $f(x)$ egy sűrűségfüggvény tetszőleges m és $\sigma > 0$ esetén! A megfelelő X valószínűségi változót (m, σ) paraméterű **GAUSS vagy normál eloszlás**ának nevezzük! Az eloszlás "**Normal(m, σ)**" néven szerepel a Statistics csomagban.
 (b) Számítsuk ki az eloszlásfüggvényt!
 (c) Rajzoljuk fel a sűrűség- és eloszlásfüggvényt különböző m és $\sigma > 0$ esetén!

7.9.32. Feladat

$$\text{Tekintsük az } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{(\ln(x)-m)^2}{2\sigma^2}}}{x\sigma\sqrt{2\pi}} & 0 < x \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \text{ függvényt!}$$

- (a) Igazoljuk, hogy $f(x)$ egy sűrűségfüggvény tetszőleges m és $\sigma > 0$ esetén! A megfelelő X valószínűségi változót **lognormál eloszlás**ának nevezzük (m, σ) paraméterekkel! Az eloszlás "**LogNormal(m, σ)**" néven szerepel a Statistics csomagban.
 (b) Számítsuk ki az eloszlásfüggvényt!
 (c) Rajzoljuk fel a sűrűség- és eloszlásfüggvényt különböző m és $\sigma > 0$ esetén!

7.9.33. Feladat

$$\text{Legyen } n > 0 \text{ és } \lambda > 0. \text{ Tekintsük az } f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} & 0 \leq x \\ 0 & x < 0 \end{cases} \text{ függvényt, ahol}$$

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-u} du \text{ az ún. Gamma-függvény, amely pozitív egész } n \text{ esetén}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

(a) Igazoljuk, hogy $f(x)$ egy sűrűségfüggvény tetszőleges $n>0$ és $\lambda>0$ esetén! A megfelelő X valószínűségi változót (λ, n) **paraméterű Gamma eloszlás**ának nevezzük! Az eloszlás "**Gamma(λ, n)**" néven szerepel a Statistics csomagban.

(b) Számítsuk ki az eloszlásfüggvényt!

(c) Rajzoljuk fel a sűrűség- és eloszlásfüggvényt különböző $n>0$ és $\lambda>0$ esetén!

7.9.34. Feladat

$$\text{Tekintsük az } F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c} & a \leq x \end{cases} \quad \text{függvényt, ahol } b>0 \text{ és } c>0!$$

(a) Igazoljuk, hogy $F(x)$ egy eloszlásfüggvény tetszőleges $b>0$ és $c>0$ esetén! A megfelelő X valószínűségi változót **Weibull eloszlás**ának nevezzük! Az eloszlás "**Weibull(b, a)**" néven szerepel a Statistics csomagban.

(b) Számítsuk ki a sűrűségfüggvényt!

(c) Rajzoljuk fel a sűrűség- és eloszlásfüggvényt különböző $a, b>0$ és $c>0$ esetén!

7.9.35. Feladat

$$\text{Tekintsük az } F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ e^{-\left(\frac{b}{x-c}\right)^a} & x > c \end{cases} \quad \text{függvényt, ahol } a > 0, b > 0 \text{ és } c > 0!$$

(a) Igazoljuk, hogy $F(x)$ egy eloszlásfüggvény tetszőleges $a>0, b>0$ és $c>0$ esetén! A megfelelő X valószínűségi változót **Frechet eloszlás**ának nevezzük! Az eloszlás **nem szerepel** a Statistics csomagban!

(b) Számítsuk ki a sűrűségfüggvényt!

(c) Rajzoljuk fel a sűrűség- és eloszlásfüggvényt különböző $a, b>0$ és $c>0$ esetén!

7.9.36. Feladat

$$\text{Tekintsük az } f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \\ \sqrt{\frac{a}{2 \cdot \pi (x-c)^3}} e^{-\frac{1}{2} \frac{a(x-c-b)^2}{b^2(x-c)}} & x > c \end{cases} \quad \text{függvényt, ahol}$$

a, b és c pozitív paraméterek.

(a) Igazoljuk, hogy $f(x)$ egy sűrűségfüggvény tetszőleges $a>0, b>0$ és $c>0$ esetén! A megfelelő X valószínűségi változót (a, b, c) **paraméterű inverz Gauss-eloszlás**ának nevezzük! Az eloszlás "**InverseGaussian(b, a)**" néven szerepel a Statistics csomagban.

(b) Számítsuk ki az eloszlásfüggvényt!

(c) Rajzoljuk fel a sűrűség- és eloszlásfüggvényt különböző $a > 0, b > 0$ és $c > 0$ esetén!

7.9.37. Feladat

$$\text{Tekintsük az } f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{\lambda^2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} & x > 0 \end{cases} \quad \text{függvényt, ahol}$$

λ pozitív paraméter.

(a) Igazoljuk, hogy $f(x)$ egy sűrűségfüggvény tetszőleges $\lambda > 0$ esetén! A megfelelő X valószínűségi változót λ **paraméterű Rayleigh-eloszlás**ának nevezzük! Az eloszlás "**Rayleigh**"

(λ)" néven szerepel a Statistics csomagban.

(b) Számítsuk ki az eloszlásfüggvényt!

(c) Rajzoljuk fel a sűrűség- és eloszlásfüggvényt különböző $\lambda > 0$ esetén!

7.9.38. Feladat

$$\text{Tekintsük az } f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\lambda^3} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} & x > 0 \end{cases} \text{ függvényt, ahol}$$

λ pozitív paraméter.

(a) Igazoljuk, hogy $f(x)$ egy sűrűségfüggvény tetszőleges $\lambda > 0$ esetén! A megfelelő X valószínűségi változót λ **paraméterű Maxwell-eloszlás**únak nevezzük! Az eloszlás "**Maxwell (λ)**" néven szerepel a Statistics csomagban.

(b) Számítsuk ki az eloszlásfüggvényt!

(c) Rajzoljuk fel a sűrűség- és eloszlásfüggvényt különböző $\lambda > 0$ esetén!

7.9.39. Feladat

A $[0,1]$ intervallumban véletlenszerűen választunk egy A számot ($0 \leq A \leq 1$). Jelölje X a kapott A és $(1 - A)$ intervallumok közül a hosszabbikat, azaz $X = \max(A, 1 - A)$

Adja meg az X változó eloszlás függvényét és sűrűség függvényét!

>