

▼ 8. Valószínűségi változók várható értéke, varianciája, szórása és ezek számítása.

Valószínűségszámítás és statisztika számítógép algebrai támogatással	Készült a PTE PMMIK-n a TÁMOP -4.1.2.A/1-11/1-2011-0098 támogatásával
Klincsik Mihály	

▼ 8.1. Bevezetés

Egy diszkrét $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \dots \end{bmatrix}$ valószínűségi változó $E(X)$ **várható értéke** az x_k értékek és

a hozzátartozó p_k valószínűségek szorzatának $\sum_k x_k \cdot p_k$ összege. Tekinthető ez egy **súlyozott átlagnak**, ahol a súlyok a p_k valószínűségek, amelyek összege 1. Folytonos esetben az $f_X(x)$

sűrűségfüggvény x -szeresének, vagyis az $x \cdot f_X(x)$ függvénynek az $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$ integrálja lesz a várható érték. Mivel az összegzés és az integrál is lineáris tulajdonságú, ezért az $E(X)$ függvény X -ben **lineáris**. Ezért változók összegének várható értéke a változók várható értékeinek összege, valamint a változó számszorosának várható értéke a változó várható értékének számszorosa.

A valószínűségi változók másik jellemzője a $\sigma(X)$ **szórás** és ennek négyzete a $Var(X)$ **variancia**. Ez méri azt, hogy mennyire esnek távol a változó értékei a várható értéktől négyzetes átlagban. Ha a szórás nagy, akkor a várható értéktől X értékei messze is lehetnek. A mérnöki gyártás során az a jó, ha az adatok szórása kicsi, mert ekkor a gyártásból megbízhatóan mindig "közel" ugyanolyan termékek kerülnek ki. A variancia kiszámolható, mint a második momentum és az első momentum különbsége. A variancia számításánál használt $E((X - \mu)^2)$ képlet minimális értékét a μ változóban a várható értéknél éri el. A valószínűségi változók standardizáltja egy olyan lineáris transzformáltja a változónak, melynek a transzformáció után a várható értéke 0 és szórása 1. A standardizált változót a normál eloszláshoz kapcsolódó számításoknál intenzíven használjuk, valamint a statisztikai becsléseknél.

Két változó összegének varianciája számításához szükséges a kovariancia ismerete. A kovariancia két változó kapcsolatát méri. Független változók kovarianciája nulla. Fordítva általában ez nem igaz. Független változók összegének varianciáját tagonként vehetjük.

Célunk az alábbi fogalmak, összefüggések és eljárások megismerése, megértése	
Várható érték számítás diszkrét és folytonos valószínűségi változók esetén	Várható érték minimum tulajdonsága
Valószínűségi változók momentuma	Valószínűségi változók standardizáltja
Várható érték linearitása	Változók összegének varianciája
Két független változó szorzatának várható értéke	Két változó kovarianciája. Független változók kovarianciája, összegének varianciája
Variancia számítása momentumokkal	Maple Statistics csomagja <i>Mean</i> , <i>StandardDeviation</i> , <i>Variance</i> , <i>Covariance</i>

▼ 8.2. Az X valószínűségi változó $E(X)$ várható értéke. Diszkrét és folytonos esetek.

8.2.1. Diszkrét valószínűségi változó várható értéke

Legyen a diszkrét X valószínűségi változó értékészlete és a hozzátartozó valószínűségek az alábbi

$$\begin{bmatrix} X & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ P & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{bmatrix}, \text{ ahol } \sum_k p_k = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n + \dots = 1$$

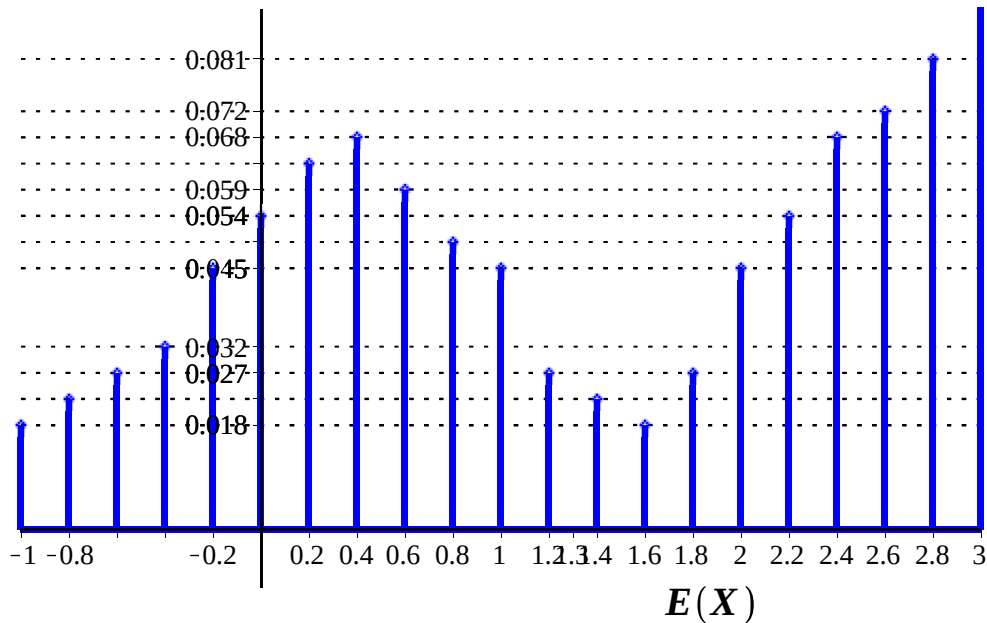
8.2.1.1. DEFINÍCIÓ. Diszkrét változó várható értéke

Az X diszkrét valószínűségi változó $E(X)$ várható értékét a következő súlyozott átlaggal definiáljuk

$$\mu = E(X) = \sum_k x_k \cdot P(X = x_k) = \sum_k x_k \cdot p_k$$

Az összegzések száma lehet véges vagy végtelen az eloszlástól függően. Így a numerikus sorok összegzésére vonatkozó ismereteket is szükséges alkalmaznunk.

Képzeljünk el egy véges diszkrét eloszlást úgy, mint az x -tengely x_i pontjaiban elhelyezett p_i súlyok. A súlyok nagyságát a pálcikák magassága szemlélteti. Az x -tengelyt az $E(X)$ várható értéknél alátámasztva- mint egy kétkarú mérleget- a két oldalon levő súlyok forgató nyomatékai egyensúlyban lesznek. Tehát a két oldala forgató nyomatéka kiegyensúlyozott, ha az alátámasztás helye a várható érték.



Diszkrét eloszlást a várható értéknél alátámasztva egyensúlyban lesz a két oldal
Az egyenletes eloszlás példája azt mutatja, hogy a várható érték valóban egy súlyozott átlag.

8.2.1.2. PÉLDA. Egyenletes eloszlása várható értéke

Számítsuk ki az X egyenletes eloszlás várható értékét, ha X az $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékekhez egyforma $\frac{1}{n}$ valószínűséget rendel, tehát táblázata

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$

Megoldás.

A várható érték az $x_1, x_2, \dots, x_n$ értékek átlaga lesz

$$\mu = E(X) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad . \clubsuit$$

8.2.1.3. PÉLDA. Két szabályos kocka dobásai összegének várható értéke

Számítsuk ki két szabályos kocka dobásnál az összeg várható értékét.

Megoldás

A valószínűségi változóknál láttuk (lásd 7.4.2. példa), hogy ha X jelöli a két szabályos kocka feldobásánál a dobott pontok összegét, akkor X lehetséges értéke 2-től 12-ig változik és a valószínűségek az alábbiak.

> *restart* :

$X := [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12];$

> $px := \frac{1}{36} \cdot [1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$

$X := [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$

$$px := \left[\frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{1}{6}, \frac{5}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36} \right] \quad (1.2.1)$$

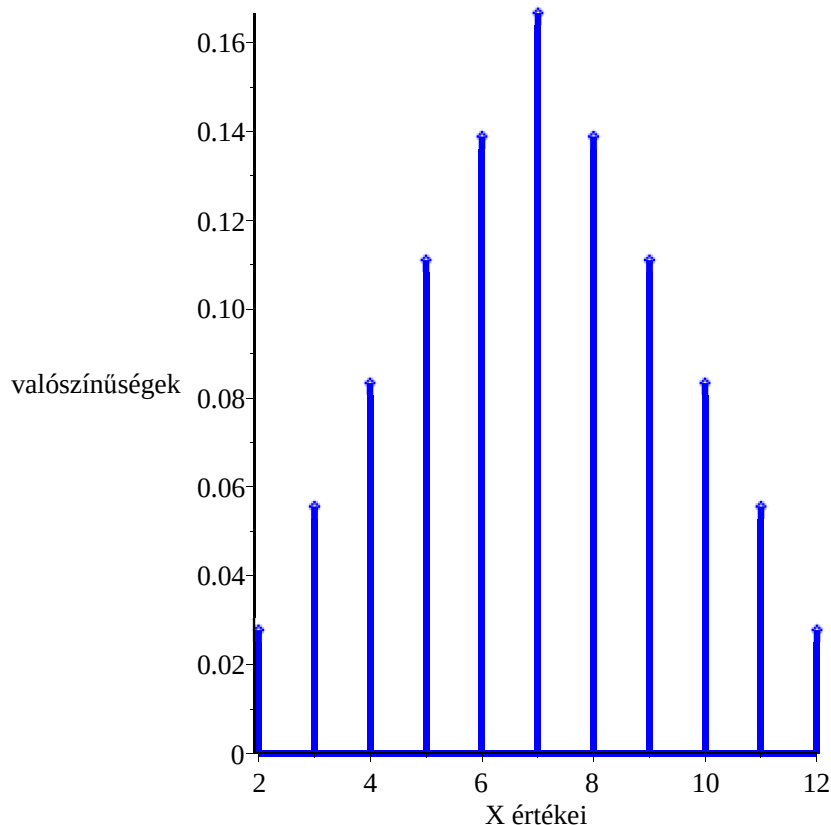
Számítsuk ki a várható értéket a definíció szorzat összegének felírásával!

$$> \sum_{k=1}^{nops(X)} 'X'_k 'px'_k = \sum_{k=1}^{nops(X)} X_k px_k$$

$$\sum_{k=1}^{11} X_k px_k = 7 \quad (1.2.2)$$

A legnagyobb valószínűséggel felvett $x=7$ értéket kaptuk, mert az eloszlás szimmetrikus $x=7$ -re!

> *DynamicSystems:-DiscretePlot(X, px, style = stem, color = blue, thickness = 3, labels = ["X értékei", "valószínűségek"])*



8.2.2. Folytonos valószínűségi változó várható értéke

Legyen az X folytonos valószínűségi változó sűrűség függvénye $y = f_X(x)$.

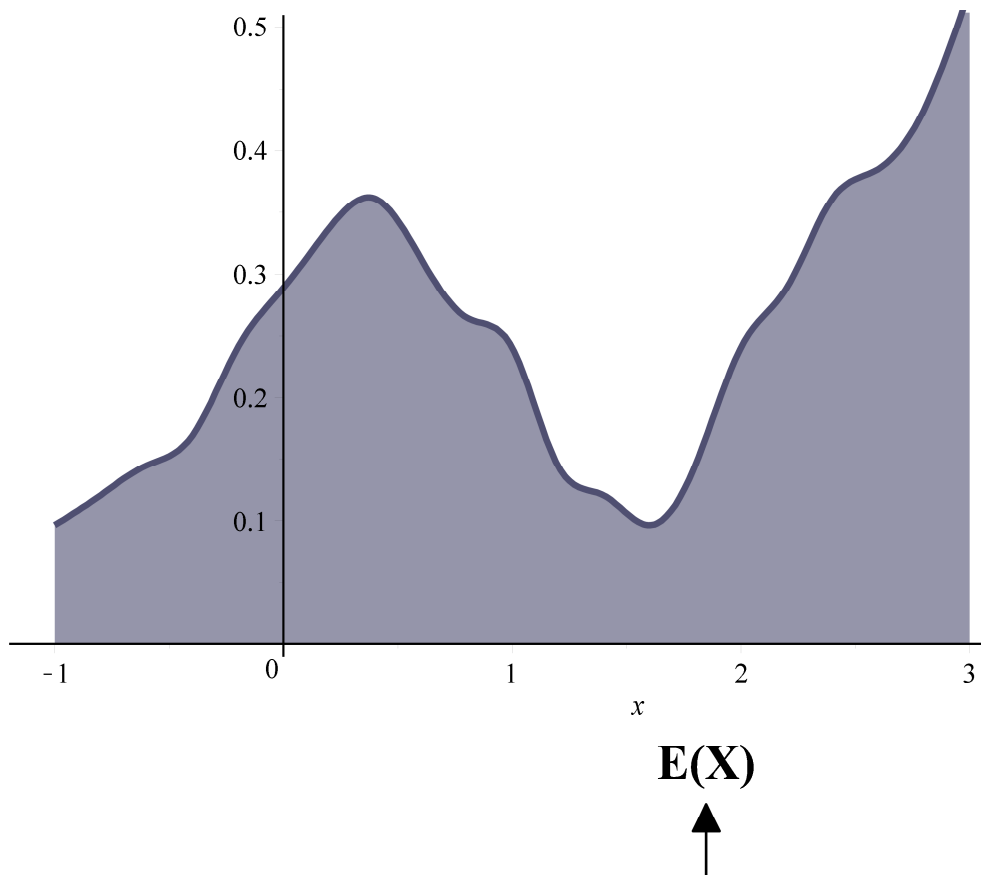
8.2.2.1. DEFINÍCIÓ. Folytonos valószínűségi változó várható értéke

Az $E(X)$ várható értéket folytonos X valószínűségi változó esetén a következő integrállal definiáljuk

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

A felírt integrál véges $[a, b]$ intervallumon vett integrál lesz, ha az $f_X(x)$ sűrűségfüggvény nullától különböző értéket az $[a, b]$ intervallumban vesz fel. Ugyanis ekkor a szorzat nulla az $[a, b]$ intervallumon kívül!

Képzelnünk el egy véges intervallumon nullától különböző értéket felvevő folytonos eloszlás sűrűség függvényét úgy, mint az x -tengely és az $f_X(x)$ görbe közötti tartományt vékony lemezből készítettük volna el. Az x -tengelyen az $E(X)$ várható értéknél alátámasztva a lemezt a két oldal forgató nyomatéka egyensúlyban lesz. Tehát a lemez két oldalának forgatónyomatéka kiegyensúlyozott, ha az alátámasztás helye a várható érték.



8.2.2.2. PÉLDA. Folytonos egyenletes eloszlású változó várható értéke

Számítsuk ki az $[a,b]$ intervallumon folytonos egyenletes eloszlású X valószínűségi változó $E(X)$ várható értékét.

Megoldás

Az X változó sűrűség függvénye $\frac{1}{b-a}$ konstans az $[a,b]$ intervallumon, egyébként pedig 0, azaz

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

> *restart; f:=x→piecewise($a \leq x$ and $x \leq b$, $\frac{1}{b-a}$, 0) : 'f'(x)=f(x)*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \text{ and } x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Az $y = x \cdot f_X(x)$ szorzat függvény $[a,b]$ -n vett integrálja megadja a várható értéket!

$$> \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx; E(X) = \text{simplify}(rhs(\%))$$

$$\int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a}$$

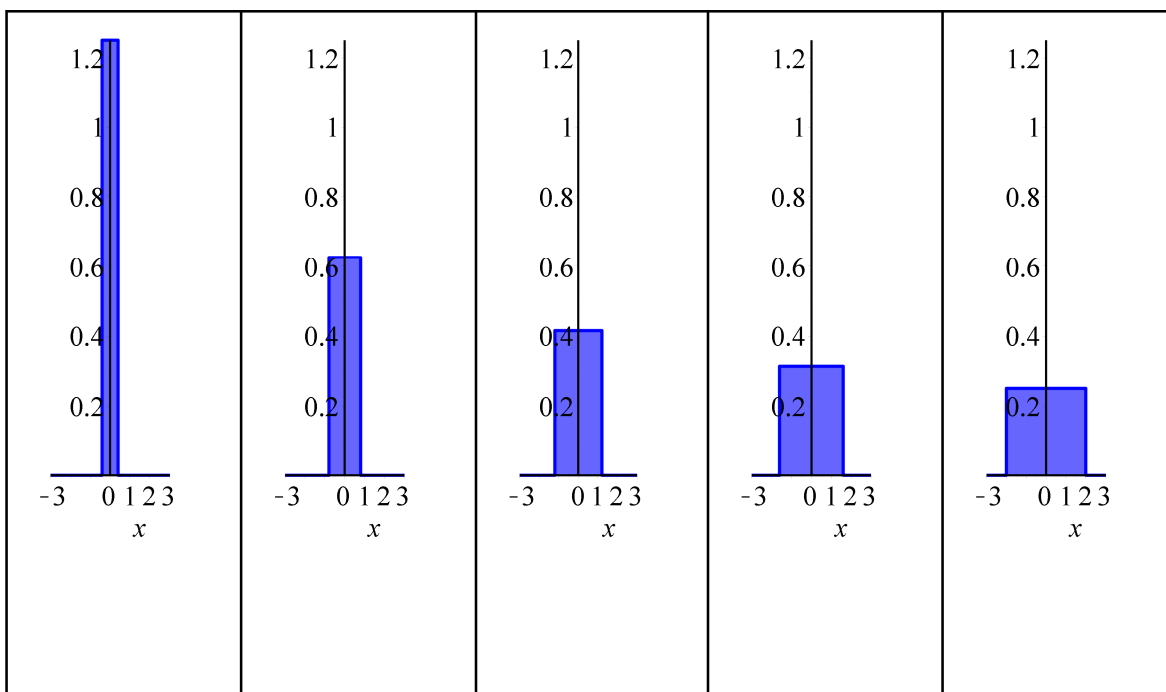
$$E(X) = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b \quad (1.2.4)$$

A várható érték az a és b számok számtani közepe $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Rajzoljunk néhány olyan egyenletes eloszlású sűrűség függvényt, amelyek várható értéke 0.

> $a := -h$; $b := h$:

> $plots:-display(Matrix(1, 5, [seq(plot(f(x), x=-3..3, 0..1.25, filled=true, color=blue), h=0.4..2, 0.4)]))$



▼ 8.3. Az X valószínűségi változó g(X) függvényének E(g(X)) várható értéke. Momentumok.

8.3.1. Diszkrét X valószínűségi változó g(X) függvényének E[g(X)] várható értéke. Momentumok.

8.3.1.1. DEFINÍCIÓ. Diszkrét változó függvényének várható értéke

Ha az X diszkrét valószínűségű változó értékei

$$\begin{bmatrix} X & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ P & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{bmatrix}, \text{ ahol } \sum_k p_k = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n + \dots = 1,$$

akkor az $Y = g(X)$ szintén diszkrét valószínűségi változó, melynek értékei

$$\begin{bmatrix} Y & g(x_1) & g(x_2) & g(x_3) & \dots & g(x_n) & \dots \\ P & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{bmatrix}.$$

Tehát Y értékei a $y_i = g(x_i)$ értékek és a hozzá tartozó valószínűségek ugyanazok, mint $X = x_i$ értékekhez tartozó p_i valószínűségek! Ezért $Y = g(X)$ várható értéke

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_k g(x_k) p_k$$

Ha $g(x) = x^m$ hatvány függvény, akkor az m -ik momentumot kapjuk!

8.3.1.2. DEFINÍCIÓ. Momentumok

Legyen $m \geq 1$ egész szám. Ekkor az $E[X^m] = \sum_{k=1}^n x_k^m p_k = M_m$ számokat az X diszkrét valószínűségi változó **m-edik momentum**ának nevezzük.

Az $m=1$ esetben a várható értéket kapjuk. Tehát $M_1 = E(X)$ az első momentum a várható érték.

Számoljuk ki a két kocka dobás összegének második momentumát!

8.3.1.3. PÉLDA. Két kocka dobáskor az összeg pontok $M_2 = E(X^2)$ második momentum

Legyen X újból két kockadobáskor a dobott pontok összege. Határozzuk meg $Y = X^2$ valószínűségi változó várható értékét!

Megoldás.

> *restart*; $X := [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$;

$$px := \left[\frac{1}{36}, 2 \cdot \frac{1}{36}, 3 \cdot \frac{1}{36}, 4 \cdot \frac{1}{36}, \frac{5}{36}, 6 \cdot \frac{1}{36}, \frac{5}{36}, 4 \cdot \frac{1}{36}, 3 \cdot \frac{1}{36}, 2 \cdot \frac{1}{36}, \frac{1}{36} \right]$$

$$X := [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$$

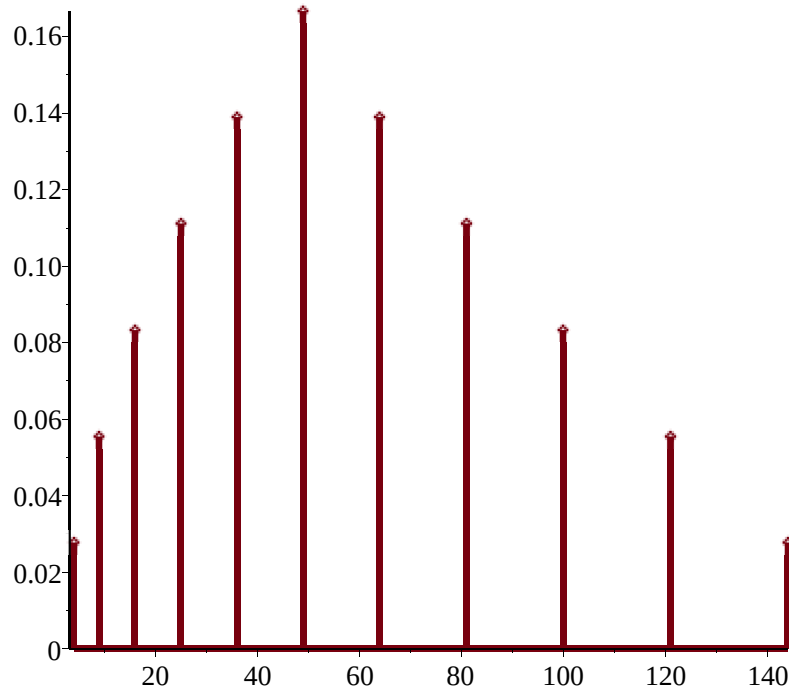
$$px := \left[\frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{1}{6}, \frac{5}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36} \right] \quad (1.3.1)$$

> $Y := \text{evalf}(\text{map}(x \rightarrow x^2, X))$

$$Y := [4., 9., 16., 25., 36., 49., 64., 81., 100., 121., 144.] \quad (1.3.2)$$

Az $y = x^2$ függvény a $[2,12]$ intervallumot leképezi a $[4,144]$ intervallumra kölcsönösen egyértelműen! Így az Y változó eloszlása

> *DynamicSystems:-DiscretePlot*($Y, px, \text{style} = \text{stem}, \text{thickness} = 3$)



$$\begin{aligned}
 &> \sum_{k=1}^{nops(X)} 'Y'_k 'px'_k = \sum_{k=1}^{nops(X)} Y_k px_k \\
 &\sum_{k=1}^{11} Y_k px_k = 54.83333333
 \end{aligned}
 \tag{1.3.3}$$

Az eredeti eloszlás a középpontra szimmetrikus volt, amit az $y = x^2$ leképezés úgy transzformálta, hogy a várható érték a számtani középénél kisebb lett. A valószínűségek távolsága az elején sűrűbb, mert az $(x+1)^2 - x^2 = 2 \cdot x + 1$ négyzetek eltérése x növekedésével növekszik.

$$\begin{aligned}
 &> \text{Átlag} = (Y[1] + Y[nops(Y)]) / 2 \\
 &\text{Átlag} = 74.0000000000
 \end{aligned}
 \tag{1.3.4}$$

8.3.2. Folytonos X valószínűségi változó $g(X)$ függvényének $E[g(X)]$ várható értéke. Momentumok.

Hasonlóan értelmezzük folytonos X változó esetén az $Y = g(X)$ transzformált változó várható értékét!

8.3.2.1. DEFINÍCIÓ. Folytonos X változó $Y = g(X)$ transzformáltjának várható értéke

Ha az X folytonos valószínűségi változó sűrűség függvénye $y = f(x)$, akkor az $Y = g(X)$ várható értéke

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

8.3.2.2. DEFINÍCIÓ. Momentum

Legyen $m \geq 1$ egész szám. Ekkor az $E[X^m] = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x) dx = M_m$ számot az X folytonos valószínűségi változó **m-edik momentumának** nevezzük. Az M_1 első momentum az $E(X)$ várható érték.

8.3.2.3. PÉLDA. Egyenletes eloszlású valószínűségi változó négyzetének $E[X^2]$ várható értéke

Számítsuk ki az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású X valószínűségi változó $E[X^2]$ második momentumát!

Megoldás

Az $[a, b]$ -n egyenletes eloszlású X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

> restart; f := x → piecewise($a \leq x$ and $x \leq b$, $\frac{1}{b-a}$, 0) : 'f(x) = f(x)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \text{ and } x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Az $Y = X^2$ valószínűségi változó várható értékét az $\int_a^b x^2 f(x) dx$ integrállal számoljuk!

> $\int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx$; $\mu := \text{simplify}(\text{rhs}(\%))$

$$\int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a}$$

$$\mu := \frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{3} b a + \frac{1}{3} b^2 \quad (1.3.6)$$

Nézzük az $a = 0$ és $b = 1$ speciális esetet. Ekkor X várható értéke, mint láttuk $E[X] =$

$\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. Az $y = X^2$ függvény a $[0,1]$ intervallumot a $[0,1]$ intervallumra képezi le kölcsönösen

egyértelmű módon. Ekkor az $Y = X^2$ várható értéke $E[X^2] = \frac{1}{3}$ kisebb, mint X várható értéke $E[X]$

$= \frac{1}{2}$.

> $E(X^2) = \text{eval}(\mu, [a=0, b=1])$

$$E(X^2) = \frac{1}{3} \quad (1.3.7)$$



8.4. A várható érték tulajdonságai

8.4.1. TÉTEL. Várható érték linearitása

Ha "a" és "b" tetszőleges valós konstansok, akkor

$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b.$$

BIZONYÍTÁS

(i) Diszkrét eset! Legyenek X lehetséges értékei $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ és a hozzá tartozó valószínűségek

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$ és $\sum_i p_i = 1$. Ekkor az $Y = aX + b$ valószínűségi változó lehetséges értékei

$a x_1 + b, a x_2 + b, a x_3 + b, \dots, a x_n + b, \dots$ és a valószínűségek nem változnak. Így Y várható értéke

$$E(aX + b) = \sum_i (a x_i + b) p_i = a \left(\sum_i x_i p_i \right) + \sum_i b p_i = a E(X) + b,$$

mert $\sum_i p_i = 1$.

(ii) Folytonos eset! Legyen X sűrűség függvénye $y = f(x)$, mely nem -negatív és $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Ekkor az $Y = aX + b$ valószínűségi várható értéke

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (a x + b) f(x) dx = a \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \right) + b \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right) = a E(X) + b,$$

mert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Q.e.d.

8.4.2. TÉTEL. Két változó lineáris kombinációja

Ha X és Y tetszőleges valószínűségi változó és "a", "b" tetszőleges valós konstansok, akkor

$$E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$$

A bizonyítást az olvasóire bízunk.

A független valószínűségi változók szorzatának várható értékét vehetjük tényezőnként.

8.4.3. TÉTEL. Független változók szorzatának várható értéke

Ha X és Y valószínűségi változók **függetlenek**, akkor

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

BIZONYÍTÁS.

(a) diszkrét eset

Az X változó x_i értékéhez tartozó valószínűség legyen $p_i = P(X = x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Az Y változó y_j értékéhez tartozó valószínűség legyen $q_j = P(Y = y_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m$).

Legyen továbbá $r_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j)$ az együttes esemény valószínűsége. Az X és Y változók függetlensége annyit jelent, hogy

$$r_{i,j} = p_i \cdot q_j$$

minden $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ esetén. Az $X \cdot Y$ szorzat várható értéke a definíció alapján

$E(X \cdot Y) =$ /várható érték definíciója alapján/

$$= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_i y_j r_{i,j} \right) = /a függetlenség miatt $r_{i,j} = p_i q_j$ /$$

$$= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_i y_j p_i \cdot q_j \right) = \text{az } i \text{ összegzés és } j \text{ összegzés független/}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^m y_j \cdot q_j \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \right) = E(X) \cdot E(Y).$$

(b) folytonos eset

Legyen az X változó sűrűség függvénye $f_X(x)$ és az Y változóé $f_Y(y)$. A 11.7.3. tétel alapján X és Y változók függetlenek, ha minden x, y esetén $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ teljesül, ahol $f_{XY}(x, y)$ az együttes sűrűségfüggvény. Az $X \cdot Y$ szorzat várható értékét az alábbi képlet adja

$$E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_{XY}(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y) \, dx \, dy =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \, dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y) \, dy \right) = E(X) \cdot E(Y).$$

Q.e.d.

8.4.4. PÉLDA. Internet elméleti és gyakorlati sebessége

Legyen X egy internetes hálózat adatátviteli sebessége *kilobit/sec* mértékegységben. Az X valószínűségi változó és számolt adatátvitel alapján várható értéke $E[X] = 100 \text{ kbit/sec}$. Tegyük fel, hogy Y jelenti a tényleges adatátviteli sebességet, amely $Y = 0.85 X - 5$ függvénye az X valószínűségi változónak. Számítsuk ki Y várható értékét!

Megoldás

Mivel $Y = aX + b$, ezért $E[Y] = E[aX + b] = aE[X] + b$, ahol $a = 0.85$, $b = -5$, így
 $E(Y) = 0.85 \cdot E(X) - 5 = 0.85 \cdot 100 - 5 = 85 - 5 = 80$. Tehát a tényleges adatátviteli sebesség
 $E(Y) = 80 \text{ kbit/s}$. ♣

8.4.5. PÉLDA. Projektek várható időtartama

Egy építési project A és B fázisokból áll! A B fázis követi az A fázist, vagyis a B projectet addig nem lehet indítani, amíg az A project be nem fejeződik. Ha X jelöli az A fázis befejezéséhez szükséges időt, és Y jelöli a B fázis befejezéséhez szükséges időt, akkor a $T = X + Y$ a teljes project befejezéséhez szükséges idő. Mindegyik változó folytonos valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy X várható értéke $E[X] = 25 \text{ nap}$ és Y várható értéke $E[Y] = 30 \text{ nap}$. Számítsuk ki T várható értékét!

Megoldás

Mivel $T = X + Y$, ezért $E[Y] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 25 + 30 = 55 \text{ nap}$ a project befejezésének várható időtartama. ♣

8.4.6. PÉLDA. Szórakozott titkárnő

Egy titkárnő N levelet gépelt le a megfelelő borítékokkal együtt. Ha bármelyik levél egyenlő valószínűséggel kerülhet bármelyik borítékba, akkor mennyi azon levelek várható száma, amelyek a saját borítékjukba kerülnek?

Megoldás.

Jelölje X azon levelek számát, amelyek a megfelelő borítékba kerülnek. Mivel

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

ahol

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i\text{-ik levél a helyére került} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Mindegyik X_i diszkrét valószínűségi változó eloszlása az alábbi

X_i	0	1
$P(X_i)$	$\frac{N-1}{N}$	$\frac{1}{N}$

Ugyanis jó helyre csak egyféleképpen lehet tenni egy levelet, ha a saját borítékjába tesszük. Viszont $(N-1)$ -féle borítékba rakhatjuk úgy, hogy ne kerüljön a saját borítékjába!

Számítsuk ki X_i várható értékét!

$$E(X_i) = 0 \cdot P(X_i = 0) + 1 \cdot P(X_i = 1) = \frac{1}{N}$$

Mivel valószínűségi változók összegének várható értéke a tagok várható értékeinek összege, ezért

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_N) = N \cdot \frac{1}{N} = 1$$

Tehát átlagosan egy levél kerül a saját borítékjába, függetlenül attól, hogy összesen hány levél van! ♣

▼ 8.5. Az X valószínűségi változó $\text{Var}(X)$ varianciája és $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ szórása. Példák.

8.5.1. DEFINÍCIÓ. Variancia és standard szórás

Legyen az X valószínűségi változó várható értéke $\mu = E(X)$. Az X valószínűségi változó **varianciája** vagy szórásnégyzete a

$$\text{Var}(X) = \text{Var}_X = E((X - \mu)^2)$$

képlettel definiált nem nemnegatív szám (ha létezik),
míg a **standard szórás** a variancia pozitív négyzetgyöke

$$\sigma(X) = \sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{E((X - \mu)^2)}$$

Ha az nem félreérthető, akkor a standard szórásra a σ jelölés használjuk a hosszabb $\sigma_X = \sigma(X)$ jelölés helyett.

8.5.2. DEFINÍCIÓ. Diszkrét változó varianciájának számítása

Legyen a diszkrét X valószínűségi változó értékészlete és a hozzá tartozó valószínűségek táblázata

$$\begin{bmatrix} X & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ P & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{bmatrix}, \text{ ahol } \sum_k p_k = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n + \dots = 1$$

Ha X várható értéke $\mu = E(X)$, akkor X **varianciája** vagy **szórásnégyzete**

$$\text{Var}_X = E[(X - \mu)^2] = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \mu)^2 p_k$$

és X **standard szórása**

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}_X}$$

Példaként számoljuk ki két kocka dobás összegének szórását.

8.5.3. PÉLDA. Két kocka dobásnál a pontok összegének szórása

Legyen X újból a két kockadobás esetén a dobott pontok összege. Mutassuk meg, hogy X varianciája

$$\text{Var}_X = \frac{35}{6} \approx 5.833$$

és szórása

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2.415.$$

Megoldás

Tudjuk, hogy a várható érték $\mu=7$, a legnagyobb valószínűséggel felvett érték.

> restart; X := [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]; px := $\frac{1}{36} \cdot [1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$;

$\mu := 7$

X := [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]

$$px := \left[\frac{1}{36}, \frac{1}{18}, \frac{1}{12}, \frac{1}{9}, \frac{5}{36}, \frac{1}{6}, \frac{5}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{36} \right]$$

$\mu := 7$

(1.5.1)

A variancia számítását a definíció alapján végezzük.

> n := nops(X); $\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2 px_k = \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2 px_k$;

$\text{Var}_{X'} := \text{evalf}(\text{rhs}(\%))$

n := 11

$$\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2 px_k = \frac{35}{6}$$

$\text{Var}_X := 5.833333333$

(1.5.2)

A standard szórás a variancia négyzetgyöke.

> $\sigma_{X'} := \sqrt{\text{Var}[X']}$

$\sigma_X := 2.415229458$

(1.5.3)



8.5.4. DEFINÍCIÓ. Folytonos valószínűségi változó varianciája és szórása

Legyen a folytonos X valószínűségi változó sűrűség függvénye $y = f(x)$ és várható értéke $\mu = E(X)$. Ekkor X varianciája

$$\text{Var}_X = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

és szórása

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}_X}$$

Ha az f sűrűségfüggvény értéke az $[a,b]$ intervallumon kívül nulla, akkor integrálni az $[a,b]$ intervallumon kell!

8.5.5. PÉLDA. Egyenletes eloszlású folytonos változó varianciája és standard szórása
Legyen X folytonos egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon! Mutassuk meg, hogy X varianciája

$$Var_X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

és szórása

$$\sigma_X = \frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}$$

Megoldás

Tekintsük az $[a,b]$ intervallumon egyenletes eloszlású X folytonos valószínűségi változót! Számítsuk ki varianciáját és standard szórását definíció alapján!

> restart; $f := x \rightarrow \text{piecewise}\left(a \leq x \text{ and } x \leq b, \frac{1}{b-a}, 0\right)$; $f'(x) = f(x)$; $\mu := (a+b) \frac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \text{ and } x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu := \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b \quad (1.5.4)$$

$$> \int_a^b \frac{(x-\mu)^2}{b-a} dx = \int_a^b \frac{(x-\mu)^2}{b-a} dx; Var_X := \text{factor}(rhs(\%))$$

$$\int_a^b \frac{\left(x - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right)^2}{b-a} dx = \frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} + \frac{1}{2} \frac{(-a-b)(b^2 - a^2)}{b-a} + \left(-\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right)^2$$

$$Var_X := \frac{1}{12} (a-b)^2 \quad (1.5.5)$$

> assume($a < b$) : $\sigma := \text{simplify}(\sqrt{Var[X]})$

> evalf(%)

$$\sigma := -\frac{1}{6} \sqrt{3} (a - b) \\ -0.2886751347 a + 0.2886751347 b \quad (1.5.6)$$

8.5.6. PÉLDA. Diszkrét eloszlás meghatározása és várható értékének, szórásának számítása

Egy ruházati boltban trikókat árulnak, háromféle méretben: S-, M- és L méretűt és kétféle

színben fehéret és kéket. Tegyük fel, hogy az S méretűek $p_S = \frac{1}{4}$ része, az M méretűek $p_M =$

$\frac{3}{5}$ része és az L méretűek $p_L = \frac{1}{3}$ része **fehér** színű! Kiválasztunk 3 sokaságokból véletlenszerűen egy S, egy M és egy L méretű trikót, egymástól függetlenül. Jelölje X a **kék színű** trikók számát a három közül.

(a) Adjuk meg X lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségeket!
 (b) Ábrázoljuk X eloszlását! Mennyi kék trikó lesz a 3 között legnagyobb valószínűséggel
 (c) Számítsuk ki X várható értékét és szórását!

Megoldás

a) Adjuk meg X lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségeket! (5 pont)
 A három trikó közül kék színű lehet 0, 1, 2 vagy 3.

> *restart : X := [0, 1, 2, 3];*

> *PS, PM, PL := $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$*

X := [0, 1, 2, 3]

PS, PM, PL := $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$ (1.5.7)

X=0, úgy lehet, ha egyik trikó sem kék;

X=1 úgy lehet, ha 1 kék, de a másik kettő nem! Ez 3-féleképpen lehet.

X=2 úgy lehet, ha 2 kék, viszont 1 fehér. Ez is 3 féleképpen lehet.

X=3 csak úgy lehet, ha mindhárom kék.

Vegyük figyelembe a kiválasztások függetlenségét a valószínűségek számításánál!

> *pX := [PS PM PL, PS PM (1 - PL) + PS (1 - PM) PL + (1 - PS) PM PL, PS (1 - PM) (1 - PL) + (1 - PS) PM (1 - PL) + (1 - PS) (1 - PM) PL, (1 - PS) (1 - PM) (1 - PL)];*

> *$\sum_{k=1}^4 pX_k$*

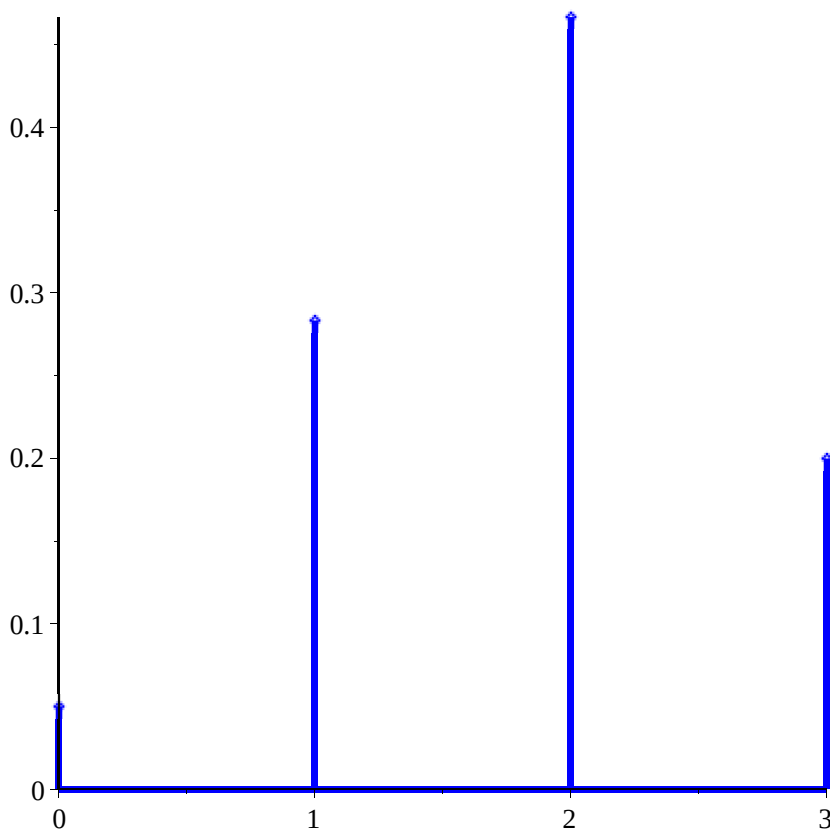
$pX := \left[\frac{1}{20}, \frac{17}{60}, \frac{7}{15}, \frac{1}{5} \right]$

1

(1.5.8)

(b) Ábrázoljuk X eloszlását!

> *DynamicSystems:-DiscretePlot(X, pX, style = stem, color = blue, thickness = 3)*



X legnagyobb valószínűséggel felvett értéke az $X=2$.
 (c) Számítsuk ki X várható értékét és szórását! (3 pont)

$$> E('X') := \sum_{k=1}^4 X_k \cdot pX_k;$$

várható érték = evalf (%)

$$E(X) := \frac{109}{60}$$

$$\text{várható érték} = 1.8166666670$$

(1.5.9)

$$> \sigma('X') := \sqrt{\sum_{k=1}^4 X_k^2 pX_k - E('X')^2}; \text{szórás} = \text{evalf}(\%)$$

$$\sigma(X) := \frac{1}{60} \sqrt{2339}$$

$$\text{szórás} = 0.8060534862$$

(1.5.10)

8.5.7. PÉLDA. Feltételes szorzattér készítés. (lásd 4.5. példát)

Egy urnában 3 egyforma szétcsavarható gömb van, melyekben az 1, 2 illetve 3 sorsszámok egyike található. Mindegyik szám benne van valamelyik gömbben és mindegyik gömbben

pontosan egy szám van. A gömb közül véletlenszerűen kihúzzunk egyet, majd annyiszor dobunk fel egy szabályos pénzérmét, ahányas számú gömböt húztuk ki. Jelölje **X** a pénzérme feldobása után kapott **fej dobások számát!**

- (a) Adjuk meg a feladat Ω eseményterét a halmaz elemeinek felsorolásával! (Számoljunk fa diagram segítségével!)
- (b) Számoljuk ki X lehetséges értékeit az egyes elemi eseményeken!
- (c) Számoljuk ki X értékeihez tartozó valószínűségeket!
- (d) Rajzoljuk fel X eloszlását és eloszlásfüggvényét! Melyik a legvalószínűbb értéke X-nek?
- (e) Számítsuk ki X várható értékét és szórását!

Megoldás

Az 1, 2 és 3 számot tartalmazó gömb mindegyikének kihúzása egyformán valószínű, ezért

$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$. Ezek a fa első döntési fázisának élein levő valószínűségek.

Ha az **1-t tartalmazó gömböt húztuk ki**, akkor a pénzérme $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ valószínűséggel esik F=Fej illetve I=Írás oldalára.

Ha a **2-t tartalmazó gömböt húztuk ki**, akkor a pénzérmét kétszer kell feldobni, így

$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ valószínűséggel lesz FF, FI, IF illetve II a két dobás.

Ha a **3-t tartalmazó gömböt húztuk ki**, akkor a pénzérmét háromszor kell feldobni, így

$\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$ valószínűséggel lesz FFF, FFI, FIF, FII, IFF, IFI, IIF, III a három dobás.

Ezek az értékek a fa második döntési fázisában szereplő élek feltételes valószínűségei..

(a) Tehát $\Omega = \{ F, I, FF, FI, IF, II, FFF, FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII, III \}$ és így elemeinek szám $N=14$.

> **restart : N := 2 + 4 + 8**

N := 14

(1.5.11)

(b) Számoljuk ki X lehetséges értékeit az egyes elemi eseményeken!

Mivel X értéke a megfelelő elemi eseményben a Fej dobás száma, ezért Ω elemein X értéke rendre a következő

$\Omega = \{ F, I, FF, FI, IF, II, FFF, FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII, III \}$

$X = [1, 0, 2, 1, 1, 0, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 0]$

> **X := [0, 1, 2, 3]**

X := [0, 1, 2, 3]

(1.5.12)

(c) Számoljuk ki X értékeihez tartozó valószínűségeket!

A megfelelő élek mentén vett valószínűségek szorzatai adják az egyes elemi események valószínűségét.

Például az $X=0$ eseményhez 3 elemi esemény az $\{I, II, III\}$ tartozik. Ezek valószínűségei rendre

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ és $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}$. Összeadva a valószínűségeket megkapjuk az $X=0$ valószínűségét.

Hasonlóan számoljuk a többi valószínűséget is!

> **$p_X := \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}, \frac{1}{3} \right]$**

(1.5.13)

$$pX := \left[\frac{7}{24}, \frac{11}{24}, \frac{5}{24}, \frac{1}{24} \right] \quad (1.5.13)$$

Ellenőrzizzük azt, hogy vajon minden értéket figyelembe vettünk-e és hogy jól számoltunk-e olyan módon, hogy az összeg 1 kell, hogy legyen!

$$> \sum_{k=1}^4 pX_k \quad 1 \quad (1.5.14)$$

Hogyan lehetne formalizálni az eseménytér képzését? Három klasszikus mezőből tehető össze, ún. feltételes Descartes-szorzáttal!

> $\Omega_1 := F, I$; $\Omega_2 := FF, FI, IF, II$; $\Omega_3 := FFF, FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII, III$

> $\Omega := [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3]$

$\Omega_1 := F, I$

$\Omega_2 := FF, FI, IF, II$

$\Omega_3 := FFF, FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII, III$

$\Omega := [F, I, FF, FI, IF, II, FFF, FFI, FIF, IFF, IIF, IFI, FII, III]$ (1.5.15)

Ugyanúgy kapjuk a PX valószínűségeket is!

> $PX1 := \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; $PX2 := seq\left(\frac{1}{4}, i = 1..4\right)$; $PX3 := seq\left(\frac{1}{8}, i = 1..8\right)$

> $PX := \frac{1}{3} \cdot [PX1, PX2, PX3]$

$PX1 := \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

$PX2 := \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

$PX3 := \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$

$PX := \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24} \right]$ (1.5.16)

> $\sum_{i=1}^{nops(PX)} PX_i$

1 (1.5.17)

Miután megalkottuk a feltételes szorzatteret a valószínűségekkel együtt, csak meg kell számolni, hogy melyik esetben lesz X értéke 0,1,2,3. Számoljuk meg, hogy hány F betű van az eseménytér elemeiben, és adjunk hozzá annyi valószínűséget a gyak nevű gyakoriság listához amennyi szerepel a PX valószínűség listában!

> *with(StringTools) :*

gyak := [0, 0, 0, 0] :

for k **from** 1 **to** nops(Ω) **do**

H := map(convert, Ω , string) :

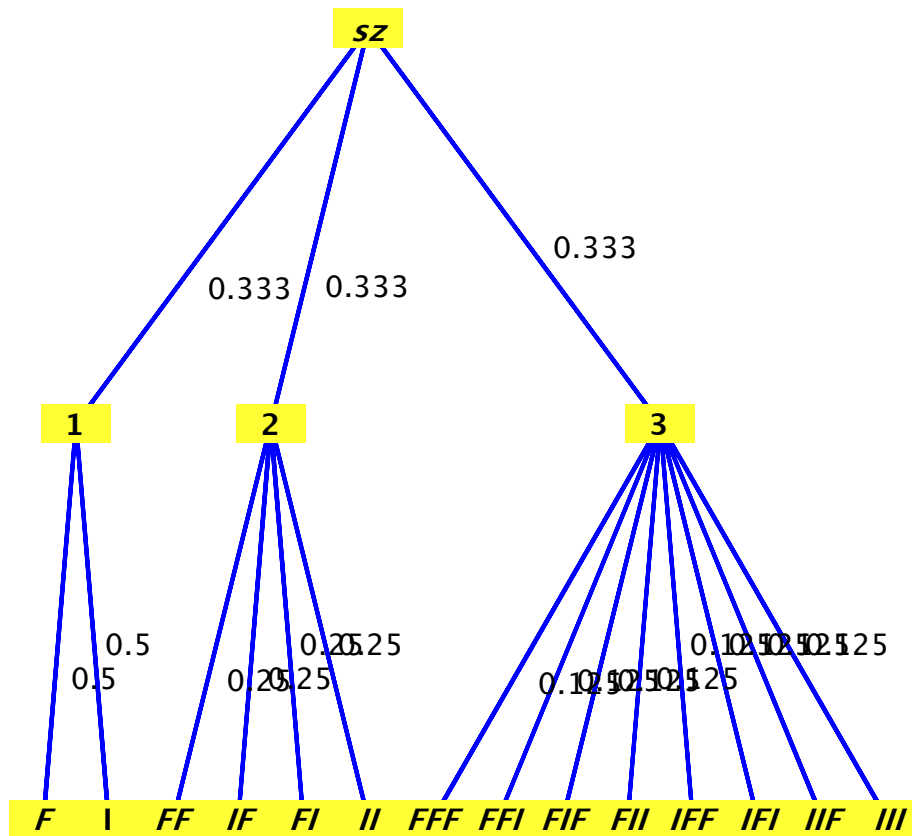
x := CountCharacterOccurrences(H_k , "F");

$gyak_{x+1} := gyak_{x+1} + PX_k:$
end do:
 > gyak

$$\left[\frac{7}{24}, \frac{11}{24}, \frac{5}{24}, \frac{1}{24} \right] \quad (1.5.18)$$

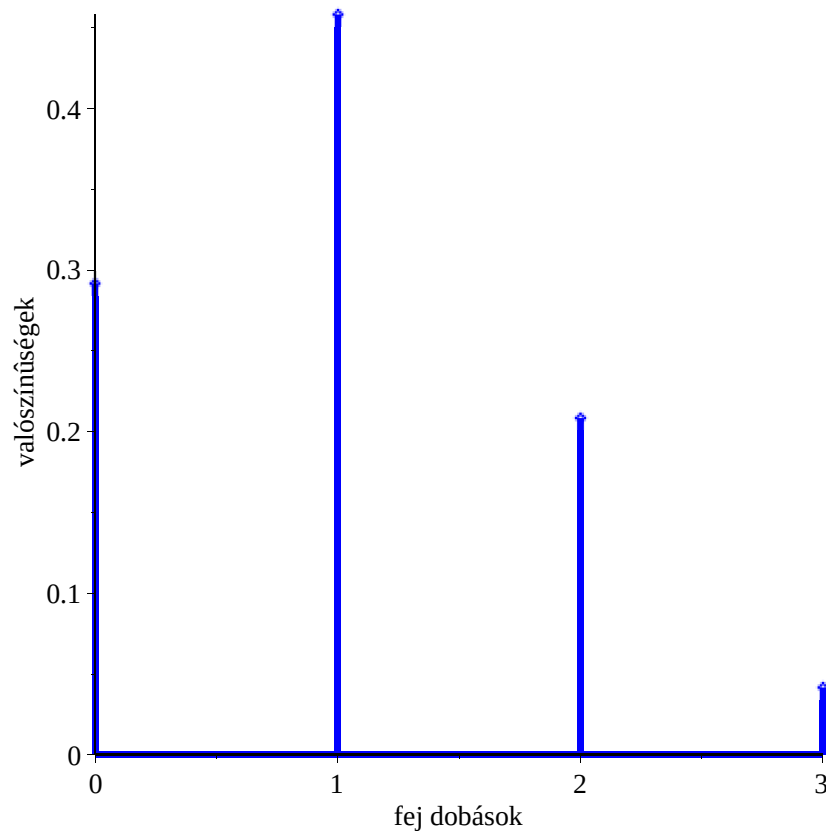
A folyamatot szemléltetjük a fa gráf felrajzolásával!

> with(GraphTheory) :
 csúcsok := [sz, 1, 2, 3, F, "I", FF, IF, FI, II, FFF, FFI, FIF, FII, IFF, IFI, IIF, III] :
 élek := $\left\{ \left[\{sz, 1\}, \frac{1}{3} \right], \left[\{sz, 2\}, \frac{1}{3} \right], \left[\{sz, 3\}, \frac{1}{3} \right], \left[\{1, F\}, \frac{1}{2} \right], \left[\{1, "I"\}, \frac{1}{2} \right], \left[\{2, FF\}, \frac{1}{4} \right], \left[\{2, FI\}, \frac{1}{4} \right], \left[\{2, IF\}, \frac{1}{4} \right], \left[\{2, II\}, \frac{1}{4} \right], \left[\{3, FFF\}, \frac{1}{8} \right], \left[\{3, FFI\}, \frac{1}{8} \right], \left[\{3, FIF\}, \frac{1}{8} \right], \left[\{3, FII\}, \frac{1}{8} \right], \left[\{3, IFF\}, \frac{1}{8} \right], \left[\{3, IFI\}, \frac{1}{8} \right], \left[\{3, IIF\}, \frac{1}{8} \right], \left[\{3, III\}, \frac{1}{8} \right] \right\}$: G := Graph(csúcsok, élek) :
 > DrawGraph(G, style = tree, root = sz, scaling = unconstrained)



(d) Rajzoljuk fel X eloszlását és eloszlásfüggvényét! Melyik a legvalószínűbb értéke X-nek?
 A pálcika diagramhoz megadjuk a szakaszok koordinátáit.

```
> DynamicSystems:-DiscretePlot(X, pX, style = stem, thickness = 3, color = blue, labels
= ["fej dobások", "valószínűségek"], labeldirections = [horizontal, vertical])
```



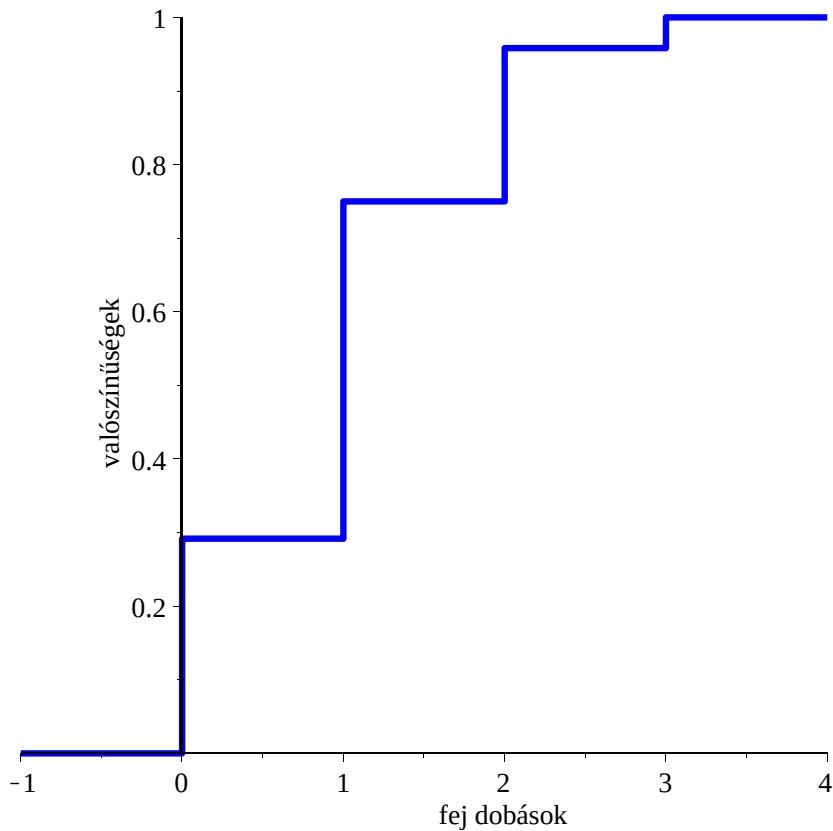
Látható, hogy az eloszlásban legnagyobb valószínűséggel az X=1 eset szerepel.

A valószínűségeket összegezni kell az eloszlásfüggvény rajzolása előtt!

```
> FX := [ 0, seq(  $\sum_{k=1}^j pX_k$ , j = 1..4 ), 1 ] : XX := [ -1, op(X), 4 ];
```

```
DynamicSystems:-DiscretePlot(XX, FX, style = stair, thickness = 3, color = blue, labels
= ["fej dobások", "valószínűségek"], labeldirections = [horizontal, vertical])
```

```
XX := [ -1, 0, 1, 2, 3, 4 ]
```



(c) Számítsuk ki X várható értékét és szórását!

$$> E('X') := \sum_{k=1}^4 X_k pX_k;$$

$$E(X) := 1$$

(1.5.19)

X várható értéke 1, amely megegyezik X legvalószínűbb értékével.

$$> \sigma('X') := \sqrt{\sum_{k=1}^4 X_k^2 pX_k - E('X')^2}; evalf(\%)$$

$$\sigma(X) := \frac{1}{3} \sqrt{6}$$

$$0.8164965809$$

(1.5.20)

A szórás közelítőleg 0.816.

Q.e.d.

▼ 8.6. A variancia és a szórás tulajdonságai

8.6.1. TÉTEL. A variancia számítása momentumokkal $Var(X) = M_2 - M_1^2$.

A varianciát kiszámíthatjuk a következő képlet alapján is

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - E(X)^2 = M_2 - M_1^2,$$

ahol $\mu = E(X)$ a várható érték és M_2 a második, M_1 az első momentum.

BIZONYÍTÁS

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[(X - \mu)^2] = / \text{végezzük el a négyzetre emelést a várható értéken belül!} / \\ &= E[X^2 - 2X \cdot \mu + \mu^2] = / \text{használjuk az } E(\cdot) \text{ várható érték lineáris tulajdonságát!} / \\ &= E(X^2) - 2\mu \cdot E(X) + E(\mu^2) = / \text{helyettesítsük a } \mu = E(X) \text{ értéket a második tagban, és} \\ &\text{konstans várható értéke maga a szám a harmadik tagban} / \\ &= E(X^2) - 2 \cdot \mu \cdot \mu + \mu^2 = / \text{vonjuk össze a második és harmadik tagot} / \\ &= E(X^2) - \mu^2 = M_2 - M_1^2. \quad \text{Q.e.d.}\end{aligned}$$

8.6.2. TÉTEL. Variancia viselkedése lineáris transzformációra

Ha a és b konstansok, akkor $\text{Var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$.

BIZONYÍTÁS

Legyen $\mu = E(X)$ az X várható érték. Ekkor, mint láttuk $E(aX + b) = a\mu + b$. A variancia definíciója alapján

$$\begin{aligned}\text{Var}(aX + b) &= E[(aX + b - E(aX + b))^2] = / \text{írjuk be a várható értéket} / \\ &= E[(aX + b - a\mu - b)^2] = / \text{kiesik 'b' értéke, majd emeljük ki 'a'-t} / \\ &= E[a^2(X - \mu)^2] = / \text{használjuk az } E(\cdot) \text{ várható érték függvény linearitását} / \\ &= a^2 E[(X - \mu)^2] = a^2 \text{Var}(X). \quad \text{Q.e.d.}\end{aligned}$$

A 8.6.2. tétel két speciális esetére ráirányítjuk a figyelmet.

8.6.3. Speciális esetek a 8.6.2. tételben

(1) Ha $a = 0$, akkor $\text{Var}(b) = 0$.

(2) Ha $b = 0$, akkor $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$.

A variancia számítási képletében a várható értéket kicserélve egy tetszőleges "a" változóra érdekes minimum tulajdonságot tudunk bizonyítani!

8.6.4. TÉTEL. A várható érték minimum tulajdonsága

Az $E[(X - a)^2]$ kifejezés a -ra nézve minimumát az $a = \mu = E(X)$ várható érték mellett éri el.

BIZONYÍTÁS

$$\begin{aligned}E[(X - a)^2] &= / \text{emeljük négyzetre} / \\ &= E[X^2 - 2aX + a^2] = / \text{használjuk az } E(\cdot) \text{ várható érték linearitását} / \\ &= E(X^2) - 2aE(X) + a^2 = f(a)\end{aligned}$$

Az $y = f(a)$ másodfokú polinomja az "a" változónak, melyben az a^2 együtthatója 1, ezért minimuma van. A minimumhelyet a derivált zérushelye adja meg.

$$\frac{d}{da} f(a) = 2a - 2E(X) = 0$$

Ahonnán $a = E(X)$. Tehát valóban a várható érték mellett veszi fel a legkisebb értékét az $E[(X - a)^2]$ kifejezés. Q.e.d.

8.6.5. TÉTEL. Független változók lineáris kombinációjának varianciája

Ha X és Y független valószínűségi változók, továbbá c és d konstansok, akkor

$$\begin{aligned} \text{Var}(c \cdot X + d \cdot Y) &= c^2 \text{Var}(X) + d^2 \text{Var}(Y), \\ \text{Var}(c \cdot X - d \cdot Y) &= c^2 \text{Var}(X) + d^2 \text{Var}(Y). \end{aligned}$$

Nem független X és Y valószínűségi változók esetén a megfelelő állítást a 8.8. pontban igazoljuk. Nézzünk néhány példát a tételek alkalmazására.

8.6.6. PÉLDA. A variancia számítása

A folytonos eloszlású X valószínűségi változó exponenciális eloszlású, ha sűrűség függvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & 0 < x \end{cases}, \text{ ahol } 0 < \lambda.$$

Ellenőrizzük, hogy a szórásnégyzet kiszámítható $\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2$ képlettel is!

Megoldás

Definiáljuk a sűrűség függvényt!

> restart; assume(0 < λ); f := x → λ e^{-λx}

$$f := x \rightarrow \lambda e^{-\lambda x} \quad (1.6.1)$$

Kiszámoljuk az X exponenciális eloszlás μ várható értékét!

> ∫₀[∞] x f(x) dx = ∫₀[∞] x f(x) dx; μ := rhs(%)

$$\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mu := \frac{1}{\lambda} \quad (1.6.2)$$

A variancia a definíció alapján $\frac{1}{\lambda^2}$.

> VarX := ∫₀[∞] (x - μ)² f(x) dx

$$\text{VarX} := \frac{1}{\lambda^2} \quad (1.6.3)$$

Számítsuk ki X^2 várható értékét!

> EX2 := ∫₀[∞] x² f(x) dx

$$\text{EX2} := \frac{2}{\lambda^2} \quad (1.6.4)$$

A variancia számításának másik módja ugyanazt adja, mint két utasítással ezelőtti számítás!

> Variancia = EX2 - μ²

$$\text{Variancia} = \frac{1}{\lambda^2} \quad (1.6.5)$$

Ezzel igazoltuk, hogy $E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$. ♣

8.6.7. Példa. Változó konstans szorosának szórása

Jelentse X egy körlapokat gyártó gépsor által készített körlap átmérőjét mm-ben mérve.

Tegyük fel, hogy mérések alapján megállapították X szórását $\sigma(X) = 0.3 \text{ mm}$. Határozzuk meg a körlapok területének szórását!

Megoldás

Mivel a kör kerülete $Y = \pi X$ képlettel számolható, ahol X az átmérő, akkor az 5.2. tétel alapján $\text{Var}(Y) = \text{Var}(\pi X) = \pi^2 \text{Var}(X)$. A szórásokat négyzetgyökvonással kapjuk $\sigma(Y) = \pi \sigma(X)$.

> $(\sigma(Y)) := \pi \cdot 0.3; \text{evalf}(\%)$

$$\sigma(Y) := 0.3 \pi$$

$$0.9424777962$$

(1.6.6)

Tehát a terület szórása $\sigma(Y) = 0.9426 \text{ mm}$. ♣

8.6.8. Példa. A várható érték minimum tulajdonsága

A folytonos X exponenciális eloszlású valószínűségi változó $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & 0 < x \end{cases}$ (ahol

$0 < \lambda$) sűrűségfüggvénye segítségével rajzoljuk fel az
 $g(a) = E[(X - a)^2]$

függvényt, majd ellenőrizzük, hogy $g(a)$ minimumát az $a = \mu$ várható értékre éri el!

Megoldás

Definiáljuk a sűrűség függvényt!

> *restart; assume*($\lambda > 0$); $f := x \rightarrow \lambda e^{-\lambda x}$

$$f := x \rightarrow \lambda e^{-\lambda x}$$

(1.6.7)

Képezzük a $g(a) = E[(X - a)^2] = \int_0^{\infty} (x - a)^2 f(x) dx$ függvényt és számoljuk ki!

> $g := a \rightarrow \int_0^{\infty} (x - a)^2 f(x) dx;$

' $g'(a) = \text{expand}(g(a));$

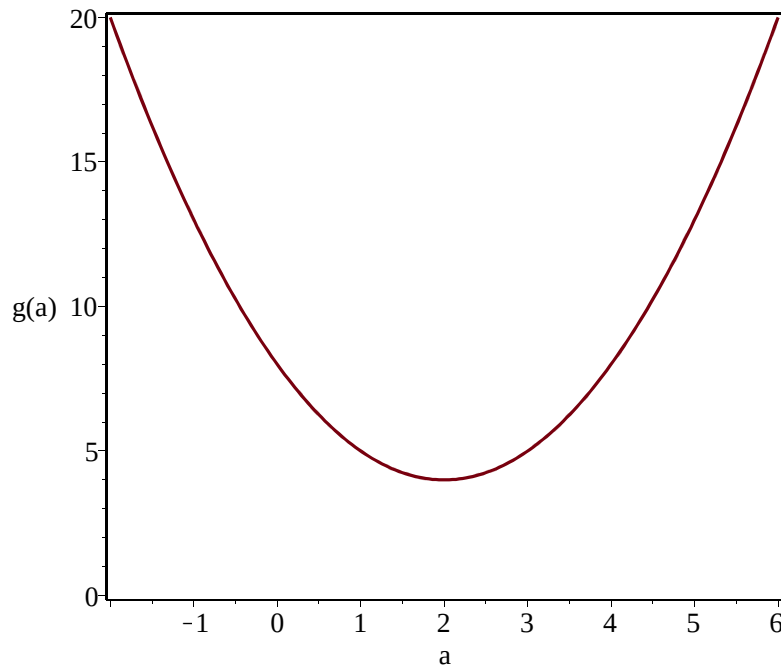
$$g := a \rightarrow \int_0^{\infty} (x - a)^2 f(x) dx$$

$$g(a) = a^2 - \frac{2a}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}$$

(1.6.8)

Ez "a"-ra nézve egy másodfokú polinom, melynek grafikonja egy parabola (ezt $\lambda = 1$ helyettesítésre rajzoljuk fel)

> *plot*(*subs*($\lambda = \frac{1}{2}, g(a)$), $a = -2..6, 0..20$, *axes = boxed*, *labels = ["a", "g(a)"]*)



Teljes négyzetté alakítással a minimumhelyet megkapjuk!

> 'g'(a) = student[completesquare](g(a), a)

$$g(a) = \left(a - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} \quad (1.6.9)$$

Amikor a négyzet 0, akkor lesz g(a) minimális. A négyzet $a = \frac{1}{\lambda}$ mellett lesz nulla! Ez az érték egyben X várható értéke is

$$> \mu := \int_0^{\infty} x f(x) dx$$

$$\mu := \frac{1}{\lambda} \quad (1.6.10)$$

▼ 8.7. Valószínűségi változó standardizáltja

8.7.1. DEFINÍCIÓ. Standardizált

Ha az X valószínűségi változó várható értéke μ és standard szórása σ , akkor X **standardizáltja** alatt az

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

transzformált valószínűségi változót értjük.

A várható érték lineáris tulajdonsága miatt X^* várható értéke 0: $E(X^*) = 0$, és varianciája (és

így szórása is) 1, $Var(X^*) = 1$.

A következő példában felajzoljuk egy binomiális eloszlás standardizáltjának eloszlását!

6.2. PÉLDA. Binomiális eloszlás standardizáltja

Az $n=10$ és $p = \frac{1}{3}$ paraméterű **binomiális** eloszlású X diszkrét valószínűségű változó standardizáltját állítsuk elő és mutassuk meg, hogy a standardizált várható értéke 0 és szórása 1. Rajzoljuk fel X és X^* eloszlását!

Megoldás

X lehetséges $x_k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ értékeit és a $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ ($k=0..10$) valószínűségeket egy-egy listába tesszük!

> *restart*; $n, p := 10, \frac{1}{3}$;

$X := [\text{seq}(k, k = 0..n)]; pX := \left[\text{seq}\left(\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0..n\right) \right]$
 $n, p := 10, \frac{1}{3}$

$X := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$

$$pX := \left[\frac{1024}{59049}, \frac{5120}{59049}, \frac{1280}{6561}, \frac{5120}{19683}, \frac{4480}{19683}, \frac{896}{6561}, \frac{1120}{19683}, \frac{320}{19683}, \frac{20}{6561}, \frac{20}{59049}, \frac{1}{59049} \right] \quad (1.7.1)$$

X várható értéke $E(X) = n \cdot p$.

> $\sum_{k=0}^n k \cdot pX_{k+1} = \sum_{k=0}^n k pX_{k+1}; \mu := \text{rhs}(\%)$

$$\sum_{k=0}^{10} k pX_{k+1} = \frac{10}{3}$$

$$\mu := \frac{10}{3} \quad (1.7.2)$$

X szórása $\sigma_X = \sqrt{n p (1-p)}$

$$> \sqrt{\sum_{k=0}^n (k - \mu)^2 pX_{k+1}} = \sqrt{\text{factor}\left(\sum_{k=0}^n (k - \mu)^2 pX_{k+1}\right)}; \sigma := \text{evalf}(\text{rhs}(\%))$$

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{10} (k - \mu)^2 pX_{k+1}} = \frac{2}{3} \sqrt{5}$$

$$\sigma := 1.490711985 \quad (1.7.3)$$

Így $X^* = \frac{X - n p}{\sqrt{n p (1-p)}}$ a standardizáltja az X binomiális eloszlású valószínűségi változónak, amelyet a következő $(n+1)$ elemű listával adhatunk meg :

$$\begin{aligned}
 &> x_standard := \text{map}\left(x \rightarrow \frac{x - \mu}{\sigma}, X\right) \\
 x_standard &:= [-2.236067977, -1.565247584, -0.8944271908, -0.2236067977, \\
 &\quad 0.4472135955, 1.118033989, 1.788854382, 2.459674775, 3.130495169, \\
 &\quad 3.801315562, 4.472135955]
 \end{aligned}
 \tag{1.7.4}$$

Ellenőrizzük, hogy az X^* standardizált várható értéke 0 és szórása 1!

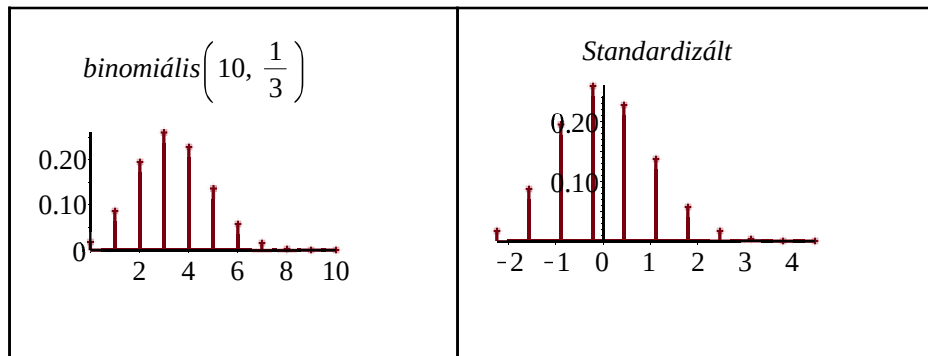
$$\begin{aligned}
 &> \sum_{k=1}^{n+1} 'x_standard'_k 'pX'_k = \sum_{k=1}^{n+1} x_standard_k pX_k; \\
 &> \sum_{k=1}^{n+1} ('x_standard'_k - 0)^2 'pX'_k = \sum_{k=1}^{n+1} (x_standard_k - 0)^2 pX_k; \\
 &\quad \sum_{k=1}^{11} x_standard_k pX_k = 2.3509 \cdot 10^{-10} \\
 &\quad \sum_{k=1}^{11} x_standard_k^2 pX_k = 1.0000000000
 \end{aligned}
 \tag{1.7.5}$$

Tehát várható érték leszámítva a kerekítést gyakorlatilag nulla és a szórás értéke egy.

```

> with(DynamicSystems) :
> plots:-display(Matrix(1, 2, [DiscretePlot(X, pX, style = stem, title = binomiális(10, 1/3)),
    DiscretePlot(x_standard, pX, style = stem, title = Standardizált)]));

```



Az X és X^* eloszlásában a valószínűség értékek nem változtak, csak az x -tengelyen való elhelyezkedésük változott!

▼ 8.8. Két valószínűségi változó kovarianciája: $\text{Cov}(X, Y)$

8.8.1 DEFINÍCIÓ. Két változó kovarianciája

Legyen X és Y két valószínűségi változó, amelyek várható értéke $\mu_X = E(X)$ és $\mu_Y = E(Y)$.

Ekkor az X és Y kovarianciáján a

$$\text{Cov}(X, Y) = E\left((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right)$$

szorzat várható értékét értjük.

A kovariancia számítására is van egy egyszerűsített képlet, mint ahogyan a varianciára.

8.8.2. TÉTEL. A kovariancia számítása

Az X és Y valószínűségi változók kovarianciája kiszámítható
$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

képlettel.

Megjegyzés.

Tehát a kovariancia számításához az $X \cdot Y$ szorzat valószínűségi változó várható értékéből ki kell vonni az X és Y várható értékek szorzatát!

Bizonyítás.

Az E várható érték linearitása miatt

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E\left((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right) = / \text{végezzük el a szorzást a disztributív szabály alapján} / \\ &= E(XY - X\mu_Y - \mu_X Y + \mu_X \mu_Y) = / \text{használjuk a várható érték lineáris tulajdonságát} / \\ &= E(XY) - E(X)\mu_Y - \mu_X E(Y) + \mu_X \mu_Y = E(XY) - E(X)E(Y). \text{ Q.e.d.}\end{aligned}$$

8.8.3. Következmény. A kovariancia tulajdonságai

- (a) szimmetria tulajdonság: $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- (b) homogenitás: $\text{Cov}(aX, Y) = a \text{Cov}(X, Y)$ (szorzó konstans kiemelhető)
- (c) összefüggés a variancia és a kovariancia között: $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$, vagyis egy X valószínűségi változó önmagával vett kovarianciája éppen X varianciája

▼ 8.9. Összeg varianciája: $\text{Var}(X+Y)$

8.9.1. TÉTEL

Az X és Y valószínűségi változók összegének varianciájára teljesül a következő egyenlőség
$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

BIZONYÍTÁS

$$\begin{aligned}\text{Var}(X + Y) &= E\left((X + Y - (\mu_X + \mu_Y))^2\right) = / \text{a várható értékeket vigyünk a megfelelő változókhoz} / \\ &= E\left((X - \mu_X + Y - \mu_Y)^2\right) = / \text{emeljük négyzetre a kéttagú összeget} / \\ &= E\left((X - \mu_X)^2 + 2(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) + (Y - \mu_Y)^2\right) = / \text{használjuk az } E(\cdot) \text{ várható} \\ &\text{érték linearitását} / \\ &= E\left((X - \mu_X)^2\right) + 2E\left((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right) + E\left((Y - \mu_Y)^2\right) = / \text{a variancia és} \\ &\text{kovariancia definíciója alapján} / \\ &= \text{Var}(X) + 2 \text{Cov}(X, Y) + \text{Var}(Y) \quad \text{Q.e.d.}\end{aligned}$$

8.9.2. TÉTEL

Ha az X és Y valószínűségi változók függetlenek egymástól, akkor

- (a) $\text{Cov}(X, Y) = 0$
- és

(b) $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$

BIZONYÍTÁS

(a) A 8.4.3. tétel szerint, ha X és Y függetlenek, akkor $E(XY) = E(X)E(Y)$ teljesül mind diszkrét és mind folytonos változók esetén. A kovariancia számításának 8.8.2. tétele alapján tetszőleges X és Y változók esetén $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Tehát

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$$

(b) A 8.9.1. tétel és a jelen tétel (a) része alapján

$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2 Cov(X, Y) = Var(X) + Var(Y)$
teljesül független X és Y változók esetén. Tehát független változók összegének varianciáját tagonként vehetjük. Q.e.d.

Megjegyzés. Független X és Y változók összegének szórására a

$$\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2}$$

képlet teljesül.

8.9.3. PÉLDA. Az átlag várható értéke és varianciája

Legyenek az $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ valószínűségi változók **függetlenek** és várható értékük és szórásuk azonos $E(X_i) = M$ és $Var(X_i) = \sigma^2$.

Mutassuk meg, hogy az

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

átlag valószínűségi változó várható értéke $E(Y_n) = M$ és varianciája $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$. Ami azt jelenti, hogy n növekedésével Y_n varianciája csökkenve nullához tart!

Megoldás. A várható érték lineáris tulajdonsága alapján

$$E(Y_n) = \frac{\sum_{i=1}^n E(X_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n M}{n} = \frac{n M}{n} = M$$

A variancia tulajdonsága és a változók függetlensége alapján

$$Var(Y_n) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n Var(X_i)}{n^2} = \frac{n \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} . \clubsuit$$

Megjegyzés.

Ha $n \rightarrow \infty$, akkor az átlag varianciája nullához tart. Gyártósoron készült termékek közül kivett n elemű minta mért értékeire tipikusan teljesülnek a feltételek: az értékek függetlenek, azonos várható értékűek és szórásúak. Az átlagolásnak a hibákat kiegyenlítő hatása abban nyilvánul meg, hogy a **szórás** az n minta elemszám növekedésével **csökken**. Tehát a pontosabb becslés érdekében minél nagyobb számú mintát célszerű átvizsgálni. Ezt korlátozza, hogy minden mintavétel, azaz mérés pénzbe kerül. Tehát egy kompromisszumot kell kötni a ráfordítás és a számítás pontossága között.

▼ 8.10. Elméleti ellenőrző kérdések

8.10.1. Hogyan értelmezzük egy diszkrét változó várható értékét?

8.10.2. Hogyan értelmezzük egy folytonos változó várható értékét?

8.10.3. Hogyan értelmezzük egy változó M_m m – ik momentumát?

8.10.4. Mit jelent a várható érték lineáris tulajdonsága?

8.10.5. Hogyan lehet kiszámolni független változók szorzatának várható értékét?

8.10.6. Hogyan értelmezzük a valószínűségi változók varianciáját?

8.10.7. Mi a kapcsolat egy változó varianciája és szórása között?

8.10.8. Hogyan számoljuk egy diszkrét változó varianciáját az eloszlás ismeretében?

8.10.9. Hogyan számoljuk egy folytonos változó varianciáját a sűrűség függvény ismeretében?

- 8.10.10. Milyen módon számoljuk egy változó varianciáját a momentumokkal?
 8.10.11. Hogyan számoljuk egy változó konstans szorosának varianciáját?
 8.10.12. Hogyan számoljuk egy diszkrét változó varianciáját?
 8.10.13. Mit értünk a várható érték minimum tulajdonsága alatt?
 8.10.14. Hogyan standardizáljuk az X valószínűségi változót?
 8.10.15. Hogyan értelmezzük két valószínűségi változó kovarianciáját?
 8.10.16. Hogyan számoljuk ki két valószínűségi változó kovarianciáját?
 8.10.17. Mivel egyenlő a $\text{Cov}(X, X)$ kovariancia?
 8.10.18. Hogyan számoljuk az X és Y változók összegének varianciáját, ha két változó nem függetlenek?
 8.10.19. Hogyan lehet kiszámolni független változók összegének varianciáját?
 8.10.20. Mivel egyenlő két független változó kovarianciája?

8.11. Gyakorló feladatok

8.11.1. feladat

Legyen az X diszkrét valószínűségi változó eloszlása adott az alábbi táblázattal

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n	x_n	Σ
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n	p_n	1

(a) Mutassuk meg, hogy a $\text{Var}(X) = \sigma^2(X) = E(X^2) - E^2(X) \geq 0$ egyenlőtlenség ekvivalens

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot p_k}$$

egyenlőtlenséggel.

(b) Vezessük le az (a) pontban szereplő egyenlőtlenséget a Cauchy-Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

diszkrét verziója alapján az $a_k = x_k \cdot \sqrt{p_k}$ és $b_k = \sqrt{p_k}$ választással.

8.11.2. feladat

Legyen az X folytonos valószínűségi változó sűrűség függvénye $f(x) \geq 0$.

(a) Mutassuk meg, hogy a $\text{Var}(X) = \sigma^2(X) = E(X^2) - E^2(X) \geq 0$ egyenlőtlenség ekvivalens

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) \, dx}$$

egyenlőtlenséggel.

(b) Vezessük le az (a) pontban szereplő egyenlőtlenséget a Cauchy-Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot h(x) \, dx \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) \, dx} \cdot \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(x) \, dx}$$

folytonos verziója alapján a $g(x) = x \cdot \sqrt{f(x)}$ és $h(x) = \sqrt{f(x)}$ választással.

8.11.3. feladat

Egy szabályos kockát kétszer dobunk fel. Jelölje X a kapott két szám szorzatát! Adja meg X eloszlását! Számolja ki X várható értékét és varianciáját!

8.11.4. feladat

Tekintsük az $f(x)$ függvényt, ahol x tetszőleges valós szám!

(a) Mutassuk meg, hogy $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ lehet egy X folytonos eloszlású valószínűségi változó

sűrűség függvénye! Rajzoljuk fel az $y=f(x)$ függvény grafikonját!

(b) Számítsuk ki az X valószínűségi változó $E(X)$ várható értékét és szórását!

8.11.5. feladat

Legyen X egyenletes eloszlású folytonos valószínűségi változó az $[a,b]$ intervallum fölött!

Mutassuk meg, hogy az $f_X(x)$ sűrűség függvény egyértelműen megadható, ha ismert X várható értéke és szórása.

8.11.6. feladat

Egy nagy létszámú évfolyamból $n=20$ tanuló tesz vizsgát egyszerre. Tudjuk, hogy a 20 tanuló között

2 olyan tanuló van, akiknek a vizsgája 0.4 valószínűséggel lesz sikeres;

4 olyan tanuló van, akiknek a vizsgája 0.6 valószínűséggel lesz sikeres

5 olyan tanuló van, akiknek a vizsgája 0.7 valószínűséggel lesz sikeres;

7 olyan tanuló van, akiknek a vizsgája 0.8 valószínűséggel lesz sikeres;

2 olyan tanuló van, akiknek a vizsgája 0.9 valószínűséggel lesz sikeres;

(a) Várhatóan hány tanuló vizsgája lesz sikeres a 20 tanuló közül?

(b) Mekkora a sikeres vizsga esélyének szórása?

8.11.7. feladat

Három üzenetet küldünk egymástól függetlenül egy kommunikációs csatornán keresztül, amelyek mindegyike $p = 0.2$ valószínűséggel torzulhat. Jelölje X a torzult üzenetek számát, amely lehet 0, 1, 2 vagy 3.

(a) Számolja ki az X valószínűségi változó értékeihez tartozó valószínűségeket!

$P(X=0) = P(\text{minden üzenet hibátlanul ment át}) =$

$P(X=1) = P(\text{pontosan 1 üzenet torzult}) =$

$P(X=2) = P(\text{pontosan 2 üzenet torzult}) =$

$P(X=3) = P(\text{minden üzenet torzult}) =$

(b) Számolja ki a várható torzult üzenetek számát!

(c) Számolja ki X szórásnégyzetét!

8.11.8. feladat

Két pontot választunk találmányra egy egységnyi hosszúságú szakaszon. Jelölje X a két pont számtani közepét!

(a) Határozzuk meg X várható értékét!

(b) Számítsuk ki X standard szórását!

8.11.9. feladat

Egy X folytonos eloszlású valószínűségi változó sűrűség függvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ A \cdot \sin(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg A értékét, hogy f sűrűség függvény legyen!

(b) Határozzuk meg X várható értékét!

(c) Számítsuk ki X standard szórását!

8.11.10. feladat

Egy áruházban 1000 termék közül néhány csomagolásába nyereményeket rejtettek el. Mégpedig 1

db 1000 Ft-ost, 5 db 500 Ft-ost és 10 db 100 Ft-ost. Legyen az X valószínűségi változó értéke az egy termékre jutó nyereség összege. Mennyi lesz X várható értéke?

8.11.11. feladat

Számítsuk ki X várható értékét és szórását, ha sűrűség függvénye

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

8.11.12. feladat

Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen a következő

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-\frac{x}{2}}, & \text{ha } 0 \leq x \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

- (a) Számítsuk ki "a" értékét!
- (b) Számítsuk ki X várható értékét és szórását!
- (c) Számítsuk ki $Y = \frac{X}{2} - 1$ várható értékét és szórását!
- (d) Határozzuk meg X standardizáltját!

8.11.13. feladat

Két pontot választunk találmányra egy egységnyi hosszúságú szakaszon. Jelölje X a két pont távolságát!

- (a) Határozzuk meg X várható értékét!
- (b) Számítsuk ki X standard szórását!

8.11.14. feladat

A $[0,1]$ intervallumban választunk véletlenszerűen és egymástól függetlenül két számot, egy A -t és egy B -t. Képezzük az $X = 2 \cdot A - B$ új valószínűségi változót.

- (a) Adja meg az X változó eloszlás függvényét és rajzolja fel grafikonját!
- (b) Határozza meg az X változó sűrűség függvényét és rajzolja fel grafikonját
- (c) Generáljon A és B értékre $N=1000$ véletlen számot, majd számolja ki a $(2 \cdot A - B)$ számokat!
- (d) A (c) pontban számolt értékek hisztogramját rajzolja fel az X változó sűrűség függvényével azonos koordináta-rendszerben!
- (e) Számolja ki X várható értékét és szórását!

8.11.15. feladat

Egy szabályos kockát kétszer dobunk fel egymástól függetlenül. Jelölje az első dobás eredményét X_1 , a másodikét X_2 . A nagyobbik dobás kétszereséből vonjuk ki a kisebbik dobás értékét és a kapott véletlen számot jelölje az X változó, vagyis

$$X = 2 \cdot \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2).$$

/Ha a két dobás értéke azonos, akkor a maximum és a minimum a közös érték!/

- (a) Adja meg az X változó lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségeket!
- (b) Rajzolja fel az X változó eloszlását pálcika diagrammal!
- (c) Melyik X érték a legvalószínűbb?
- (d) Számolja ki X várható értékét!
- (e) Számolja ki X szórását!

8.11.16. feladat

A $[0, 1]$ intervallumban véletlenszerűen választunk egy 'A' számot (vagyis 'A' egyenletes eloszlású $[0,1]$ -n). Jelölje X a választott 'A' szám négyzetgyökét, azaz $X = \sqrt{A}$.

- (a) Adja meg az X valószínűségi változó $F_X(x)$ eloszlás függvényét és rajzolja fel grafikonját!

- (b) Adja meg az X változó $f_X(x)$ sűrűség függvényét és rajzolja fel grafikonját!
 (c) Határozza meg X várható értékét és szórását!
 (d) Mutassa meg, hogy az $Y = X^2$ változó - vagyis X négyzete - egyenletes eloszlású!

8.11.17. feladat

Feldobunk egy szabályos kockát és egy szabályos tetraédert egymástól függetlenül. Az utóbbinak 4 lapja van, amelyekre egyforma eséllyel esik.

Jelölje X a kocka dobás eredményét és Y a tetraéder dobás eredményét!

Legyen $Z = X + Y$ valószínűségi változó a két dobás eredményének összege.

- (a) Adjon meg egy olyan mátrixot, amelyből kiolvashatók Z lehetséges értékei és a hozzá tartozó valószínűségek!
 (b) Adja meg Z lehetséges értékeit növekvő sorrendben egy listában!
 (c) Adja meg Z értékeihez tartozó $p_Z = P(Z=k)$ valószínűségeket a p_Z listában! Ellenőrizze a számítás helyességét összeadással!
 (d) Szemléltesse Z eloszlását pálcika diagrammal!
 (e) Számolja ki Z várható értékét!
 (f) Számolja ki Z szórását!

8.11.18. feladat

Egy X folytonos valószínűségi változó sűrűség függvénye az alábbi

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ c \cdot x \cdot (1 - x) & 0 \leq x \text{ and } x \leq 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- (a) Adjuk meg a képletben szereplő 'c' konstans értékét!
 (b) Ábrázoljuk X sűrűség függvényét!
 (c) Határozzuk meg X eloszlás függvényét és ábrázoljuk!
 (d) Számítsuk ki X várható értékét és szórását!

8.11.19. feladat

Egy 6 oldalú szabályos dobó kockát háromszor dobunk fel egymástól függetlenül. Az egyes kimenetek értékeit jelölje X_1, X_2, X_3 valószínűségi változó!

Legyen Y a 3 dobás értéke közül a minimális dobás értéke, azaz $Y = \min(X_1, X_2, X_3)$

- (a) Adjuk meg az Y véletlen változó lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségeket!
 (b) Ábrázoljuk Y eloszlását pálcika diagrammal!
 (c) Számítsuk ki Y várható értékét és szórását!
 (d) Mutassuk meg, hogy $P(Y \geq k) = P(X_1 \geq k)^3$, tehát Y túlélési függvénye X_1 túlélési függvényének a harmadik hatványa! (2pont)

Megjegyzés: (d) alapján ki tudjuk számolni az (a) feladatban Y eloszlásához tartozó valószínűségeket!

8.11.20. feladat

Egy vállalat kétféle szélességű deszkát gyárt: 9 cm és 12 cm széles kivitelekben. A 9 cm széles deszkák

$p_1 = 0.15$ része selejtes, a 12 cm szélesek $p_2 = 0.2$ része selejtes! Kiválasztunk egy elkészült 9 cm és egy 12 cm széles deszkát, egymástól függetlenül.

Jelölje X a két deszka közül a selejtmentes deszkák számát.

- (a) Adjuk meg X lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségeket!
 (b) Ábrázoljuk X eloszlását!
 (c) Számítsuk ki X várható értékét és szórását!

8.11.21. feladat

Egy vállalat 2 cm és 3 cm hosszúságú csavarokat gyárt. A 2 cm hosszú csavarok $p_1 = 0.1$ része

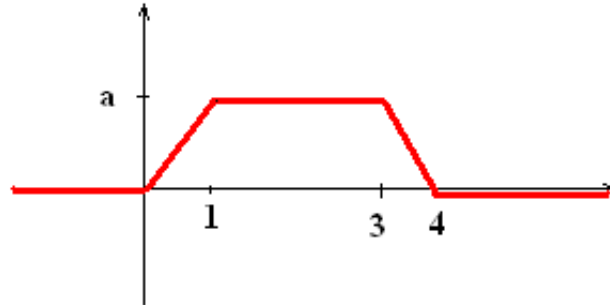
selejtes, a 3 cm hosszúak $p_2 = 0.05$ része selejtes! Kiválasztunk egy elkészült 2 cm és egy 3 cm hosszú csavart, egymástól függetlenül.

Jelölje X a két csavar közül a selejtmentes csavarok számát.

- (a) Adjuk meg X lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségeket!
- (b) Ábrázoljuk X eloszlását!
- (c) Számítsuk ki X várható értékét és szórását!
- (d) Adjuk meg X lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségeket!

8.11.22. feladat

Az X folytonos valószínűségi változó $f(x)$ **sűrűség** függvényét láthatjuk az alábbi ábrán.

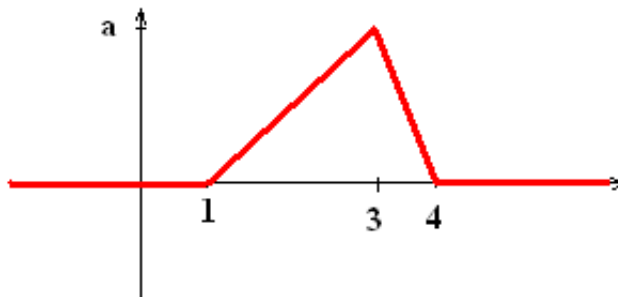


A függvény a $[0,1]$ és $[3,4]$ intervallumokon lineáris és az $[1,3]$ intervallumon a konstans "a" értéket veszi fel.

- (i) Határozzuk meg az "a" paraméter értékét, majd rajzoljuk fel az $f(x)$ sűrűségfüggvényt!
- (ii) Határozzuk meg az $F(x)$ eloszlásfüggvényt és rajzoljuk fel grafikonját!
- (iii) Számítsuk ki $P(X < 1 \text{ vagy } X > 3)$ valószínűség értékét!
- (iv) Mekkora X várható értéke és szórása?

8.11.23. feladat

Az X folytonos valószínűségi változó $f(x)$ **sűrűség** függvényét láthatjuk az alábbi ábrán.



A függvény az $[1,3]$ és a $[3,4]$ intervallumokon lineáris és értéke "a" az $x=3$ helyen, az egyéb intervallumon nulla.

- (i) Határozzuk meg az "a" paraméter értékét, majd rajzoljuk fel az $f(x)$ sűrűségfüggvényt!
- (ii) Határozzuk meg az $F(x)$ eloszlásfüggvényt és rajzoljuk fel grafikonját!
- (iii) Számítsuk ki $P(\{X < 2\} \text{ vagy } \{X > 3\})$ valószínűség értékét!
- (iv) Mekkora X várható értéke és szórása?

8.11.24. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Ha az X és Y véletlen változókra $\text{Var}(X)=\text{Var}(Y)=1$ és $\text{Var}(X+Y)=2$, akkor kovarianciájuk nulla $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

8.11.25. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Ha az X és Y véletlen változókra $\text{Var}(X)=\text{Var}(Y)=\text{Var}(X+Y)=1$, akkor kovarianciájuk

$$\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{2}.$$

8.11.26. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Legyen az X valószínűségi változó sűrűség függvénye $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ha } -1 < x < 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$. Ekkor

$$X \text{ várható értéke } E(X) = \frac{2}{3}.$$

8.11.27. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Ha az X és Y független nulla várható értékű valószínűségi változók és $E(X^2)=8$ és $E(Y^2)=17$, akkor a $Z = X - Y$ különbség változó szórása 3.

8.11.28. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Tetszőleges X valószínűségi változóra teljesül az $E^2(X) \leq E(X^2)$ egyenlőtlenség, azaz X várható értékének négyzete kisebb vagy egyenlő, mint X^2 várható értéke.

8.11.29. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Ha az X és Y valószínűségi változókra $\text{Var}(X)=\text{Var}(Y)=\text{Var}(X+Y)=\sigma^2$, akkor kovarianciájukra

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{\sigma^2}{2}.$$

8.11.30. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Tetszőleges X valószínűségi változóra teljesül az $|E(X)| \leq \sqrt{E(X^2)}$ egyenlőtlenség, vagyis X várható értékének abszolút értéke kisebb egyenlő, mint X^2 várható értékének négyzetgyöke.

8.11.31. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Ha $Z_1 \sim N(0,1)$ és $Z_2 \sim N(0,1)$ független standard normál eloszlású valószínűségi változó, vagyis Z_1 és Z_2 változók várható értéke 0, szórása 1, akkor az $X_1 = Z_1 + Z_2$ összeg és $X_2 = Z_1 - Z_2$ különbség kovarianciája nulla, azaz $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

8.11.32. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Tetszőleges X és Y valószínűségi változó kovarianciájára $\text{Cov}(2 \cdot X, 2 \cdot Y) = 2 \cdot \text{Cov}(X, Y)$.

8.11.33. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Az $X = 1 \pm 1 \pm 1$ összegben változtatjuk a két helyen szereplő '+' illetve '-' előjelek értékét.

Mindegyik lehetséges előjel egyformán valószínű. Az X összeg várható értékére ilyen módon 1 adódik.

8.11.34. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Tetszőleges X valószínűségi változó és 'a', 'b' konstansok esetén teljesül a $\text{Cov}(X, a \cdot X + b) =$

$a \cdot \text{Var}(X)$ egyenlőség, vagyis az X és az $(a \cdot X + b)$ változók kovarianciája megegyezik X varianciájának a -szeresével.

8.11.35. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Tetszőleges X és Y valószínűségi változóra teljesül a $\text{Cov}(X, Y) \leq \text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)$ egyenlőtlenség, azaz X és Y kovarianciája nem nagyobb, mint a varianciák szorzata.

8.11.36. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Tetszőleges X és Y valószínűségi változóra teljesül a $\text{Cov}(X, Y) \geq -\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)$ egyenlőtlenség, azaz X és Y kovarianciája nagyobb vagy egyenlő, mint a varianciák szorzatának mínusz egyszerese.

8.11.37. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Ha az X és Y független véletlen változókra $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$, $\text{Var}(X+Y) = 2$, akkor $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$.

8.11.38. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Ha az X és Y véletlen változókra $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$, $\text{Var}(X+Y) = 2$, akkor X és Y függetlenek.

8.11.39. feladat

Az X és Y valószínűségi változók függetlenek és szórásuk $\sigma(X) = 4$ ill. $\sigma(Y) = 3$. Ekkor az $X+Y$ összeg szórása 5, azaz $\sigma(X+Y) = 5$.

8.11.40. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Tetszőleges X valószínűségi változó esetén $\text{Var}(2 \cdot X) = 2 \cdot \text{Var}(X)$, vagyis a $2 \cdot X$ valószínűségi változó varianciája az X változó varianciájának 2-szerese.

8.11.41. feladat

Döntsük el, hogy az alábbi állítás igaz vagy hamis!

Tetszőleges X valószínűségi változó esetén $\text{Var}(-2 \cdot X) = 4 \cdot \text{Var}(X)$, vagyis a $-2 \cdot X$ valószínűségi változó varianciája az X változó varianciájának 4-szerese.

8.11.42. feladat

Jelölje X az ötös lottó joker számában előforduló 0 számjegyek számát. A jokerszám hatjegyű és a számok sorrendje lényeges. A számjegyeit visszatevéses módszerrel véletlenszerűen húzzák ki egymástól függetlenül.

(a) Adja meg X lehetséges értékeit és a hozzá tartozó valószínűségek táblázatát!

(b) Rajzolja fel X eloszlását pálcika diagrammal és eloszlásfüggvényét!

(c) Mennyi a nulla joker jegyek számának várható értéke?

(d) Számolja ki a nulla joker jegyek számának szórását!

8.11.43. feladat

Dobjunk fel egy szabályos pénz érmét háromszor egymás után, egymástól függetlenül! Jelölje X az első fej dobás sorszámát a három dobás közül!

(a) Adjuk meg a három dobás Ω eseményterét és számoljuk ki X lehetséges értékeit az egyes elemi eseményeken!

(b) Számoljuk ki X lehetséges értékeihez tartozó valószínűségeket! Melyik X érték a legvalószínűbb?

(c) Rajzoljuk fel az eloszlást és az eloszlásfüggvényt!

(d) Számítsuk ki X várható értékét és szórását!

(e) Számítsuk ki X eloszlását, ha a pénzérme úgy torzított, hogy az írás dobás kétszer olyan valószínű, mint a fej!

8.11.44. feladat

Dobjunk fel egy szabályos kockát kétszer egymás után, egymástól függetlenül! Jelölje X az első

hatos dobás sorszámát a két dobás közül! Ha nincs hatos dobás, akkor legyen X értéke 0.

(a) Adjuk meg a két dobás Ω eseményterét és számoljuk ki X lehetséges értékeit az egyes elemi eseményeken!

(b) Számoljuk ki X lehetséges értékeihez tartozó valószínűségeket! Melyik X érték a legvalószínűbb?

(d) Rajzoljuk fel az eloszlást és az eloszlásfüggvényét!

(e) Számítsuk ki X várható értékét és szórását!

(f) Számítsuk ki X eloszlását, ha a kocka úgy torzított, hogy ha az 1, 2, 3, 4, 5 dobások valószínűsége ugyanaz a " p " érték, de a hatos dobás valószínűsége $4 \cdot p$! Ekkor melyik X érték lesz a legvalószínűbb?

8.11.45. Feladat

A $[0,1]$ intervallumban véletlenszerűen választunk egy A számot ($0 \leq A \leq 1$). Jelölje X a kapott A és $(1 - A)$ intervallumok közül a hosszabbikat, azaz $X = \max(A, 1 - A)$.

(a) Adja meg az X változó eloszlás függvényét és sűrűség függvényét!

(b) Számolja ki X várható értékét!

>