

▼ 10. Nevezetes folytonos valószínűségi eloszlások

Valószínűségszámítás és statisztika számítógép algebrai támogatással	Készült a PTE PMMIK-n a TÁMOP -4.1.2.A/1-11/1-2011-0098 támogatásával
Klincsik Mihály	

▼ 10.1. Bevezetés

A nevezetes folytonos eloszlások közül ebben a fejezetben tárgyaljuk az egyenletes (Uniform), exponenciális (Exponential), Erlang és gamma, normál, khi-négyzet és student t-eloszlásokat. Kiszámoljuk az eloszlások várható értékeit és varianciáját, szórását. Példákkal illusztráljuk az adott nevezetes eloszlás alkalmazhatóságát.

Célunk az alábbi fogalmak, összefüggések és eljárások megismerése, megértése	
A folytonos egyenletes eloszlás sűrűség függvényének megadása, az eloszlás függvény, várható érték és variancia számítása	Binomiális és Poisson-eloszlások közelítése normál eloszlással
Az exponenciális eloszlás sűrűség függvényének megadása, az eloszlás függvény, várható érték és variancia számítása	Khi-négyzet eloszlás értelmezése n-szabadság fokkal
Az exponenciális eloszlás származtatása Poisson-eloszlásból	Student T-eloszlás sűrűség függvényének megadása, az eloszlás függvény, várható érték és variancia számítása
Az exponenciális eloszlás memória nélküli tulajdonsága	Maple Statistics csomag <i>RandomVariable</i> eljárásának alkalmazása folytonos változók létrehozására
Erlang-eloszlás megadása exponenciális eloszlással	Folytonos eloszlások megadása a Statistics csomag segítségével: PDF(X,x), CDF(X,x) eljárások
A Gauss- vagy normál eloszlás sűrűség függvényének megadása, az eloszlás függvény, várható érték és variancia számítása	

▼ 10.2. A Maple beépített folytonos valószínűségi eloszlásainak listája és hívása

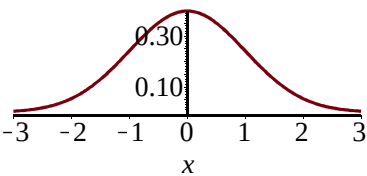
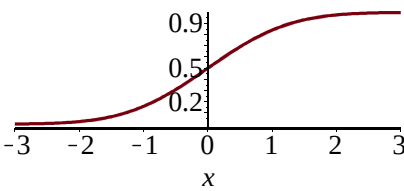
Az alábbi folytonos eloszlásokat tartalmazza a *Statistics* csomag.

Beta	beta eloszlás	Cauchy	Cauchy eloszlás	ChiSquare	khi-négyzet eloszlás
Erlang	Erlang eloszlás	Error	hiba eloszlás	Exponential	exponenciális eloszlás

FRatio Fisher f-eloszlás	Gamma gamma eloszlás	Gumbel Gumbel eloszlás
InverseGaussian inverz gauss eloszlás	Laplace Laplace eloszlás	Logistic logisztikus eloszlás
LogNormal lognormal eloszlás	Maxwell Maxwell eloszlás	Moyal Moyal eloszlás
NonCentralBeta nem centrális beta eloszlás	NonCentralChiSquare nemcentrális khi-négyszet	NonCentralFRatio nemcentrális f-eloszlás
NonCentralStudentT nemcentrális t-eloszlás	Normal normál (vagy gauss) eloszlás	Pareto Pareto eloszlás
Power hatvány eloszlás	Rayleigh Rayleigh eloszlás	StudentT Student-t eloszlás
Triangular háromszög eloszlás	Uniform egyenletes eloszlás	VonMises von Mises eloszlás
Weibull Weibull eloszlás		

Az X változó sűrűség függvény értékét megadja a PDF(X,x) = Probabaility Density Function eljárás az x-helyen, az eloszlás függvény értékét megadja a CDF(X,x) = Cumulative Distribution Function eljárás!

Az eljárások szimbolikus formában is tartalmazzák a megfelelő függvényeket!

N(0,1) sűrűség függvénye > <i>restart : with(Statistics) :</i> > <i>sűrűség_függvény = PDF(Normal(0, 1), x)</i> $\text{sűrűség_függvény} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2} x^2}}{\sqrt{\pi}} \quad (1.2.1)$	N(0,1) eloszlás függvénye > <i>eloszlás_függvény = CDF(Normal(0, 1), x)</i> $\text{eloszlás_függvény} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} x \sqrt{2}\right) \quad (1.2.2)$
N(0,1) sűrűség függvénye > <i>plot(PDF(Normal(0, 1), x), x=-3..3, title = Standard normál eloszlás sűrűség függvénye)</i> Standard normál eloszlás sűrűség függvénye 	N(0,1) eloszlás függvénye > <i>plot(CDF(Normal(0, 1), x), x=-3..3, title = Standard normál eloszlás eloszlásfüggvénye)</i> Standard normál eloszlás eloszlásfüggvénye 

▼ 10.3. Folytonos egyenletes eloszlás

10.3.1. DEFINÍCIÓ. Egyenletes eloszlás

Az X valószínűségi változót az $[a, b]$ intervallumon **egyenletes eloszlásúnak** nevezzük, ha a sűrűség függvény állandó értéket vesz fel az $[a, b]$ intervallumon és egyébként pedig nulla.

Mivel a sűrűségfüggvény grafikonja alatti terület mindig 1, ezért a konstans $\frac{1}{b-a}$ kell, hogy legyen. Tehát

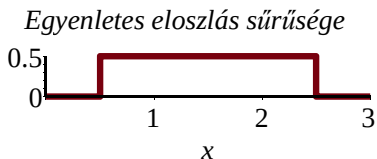
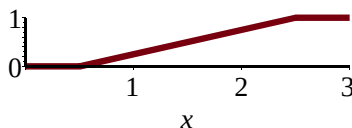
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűség függvénye.

Ha X egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon, akkor erre az $X \sim \text{Uniform}(a, b)$ jelölést használjuk. Az eloszlás két paramétere a és b . Nézzük a változó megadását Maple-ben!

Egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye	Egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye
> <i>restart</i> ; > <i>with(Statistics) : X := Uniform(a, b) :</i> > <i>f := unapply(PDF(X, u), u) : 'f'(u) = f(u)</i> $f(u) = \begin{cases} 0 & u < a \\ \frac{1}{b-a} & u < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.3.1)$	> <i>F := unapply(CDF(X, u), u) : 'F'(u) = F(u);</i> $F(u) = \begin{cases} 0 & u < a \\ \frac{u-a}{b-a} & u < b \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.3.2)$ >

Adjunk értéket az a és b paramétereknek, hogy tudjunk rajzolni.

Egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye	Egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye
> <i>a := 0.5; b := 2.5;</i> <i>plot('f(x)', x = 0 .. 3, thickness = 3, title = Egyenletes eloszlás sűrűsége);</i> <i>a := 0.5</i> <i>b := 2.5</i> 	> <i>plot(F(x), x = 0 .. 3, thickness = 3, title = Egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye);</i> <i>Egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye</i>  >

VÁRHATÓ ÉRTÉK, VARIANCIA EGYENLETES ELOSZLÁSÚ VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓRA

10.3.2. TÉTEL. Egyenletes eloszlás várható értéke és varianciája

Ha $X \sim \text{Uniform}(a, b)$ az $[a, b]$ intervallumon **egyenletes eloszlású** változó, akkor várható érték

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

és varianciája

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Bizonyítás

Mivel a várható érték számítási szabálya $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$, ezért a várható érték Maple segítségével

```
> a := 'a'; b := 'b';  
'E(X) = int(x / (b-a), x = a .. b)'; EX := factor(simplify(rhs(%)));  
Várható érték = Mean(X);
```

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx$$

$$EX := \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b$$

$$\text{Várható érték} = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b \quad (1.3.3)$$

Mivel a variancia számítási szabálya $\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f_X(x) dx$, ezért a variancia

Maple segítségével.

```
> 'int(x^2 / (b-a), x = a .. b) - EX^2'; VarX := factor(simplify(%));  
Variancia = Variance(X);
```

$$\int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - EX^2$$

$$\text{VarX} := \frac{1}{12} (-b + a)^2$$

$$\text{Variancia} = \frac{1}{12} (b-a)^2 \quad (1.3.4)$$

▼ 10.4. Exponenciális eloszlás

Exponenciális eloszlást kapunk, ha egy **Poisson - eloszlás** egymást követő eseményei között eltelt időt vagy távolságot, stb. vizsgálunk! Nézzünk erre egy példát!

10.4.1. PÉLDA. AZ EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁS SZÁRMAZTATÁSA POISSON-ELOSZLÁSBÓL

Egy radioaktív részecskéket számláló **geiger** berendezés által $t = 1$ sec idő alatt megszámlolt N részecske száma Poisson-eloszlást követ, átlagosan $\lambda = 5$ részecskével.

Jelölje X azt a T időt, mely egy adott időpillanatban észlelt részecskétől eltelik a következő részecske észleléséig.

Keressük a részecskék észlelései között eltelt X idő eloszlását, ha ismert, hogy a t idő alatt beérkező részecskék N száma Poisson($\lambda \cdot t$) eloszlású.

Megoldás

Láttuk, hogy független Poisson eloszlások összege is Poisson eloszlás. Ami pontosabban annyit jelent, hogy ha két egymást követő $t_1=1$ sec és $t_2=1$ sec időt vizsgálunk, akkor az összeg $t = t_1 + t_2 = 2$ sec alatt érkező részecskeszám is Poisson-eloszlású, és **átlagosan** $\lambda + \lambda = 2\lambda = 10$ részecskével számolhatunk. Hasonlóan kiterjeszthető a vizsgálat tetszőleges t sec alatt észlelt N részecske számra, melynek várható száma $(\lambda \cdot t)$ lesz. Tehát az N valószínűségi változó

$N \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot t)$, ahol N = a t sec alatt a geiger berendezés által észlelt részecskék száma, és λ az 1 sec alatt átlagosan kibocsájtott részecskék száma.

Mivel a részecskék véletlenszerűen érkeznek, ezért nemcsak számuk, hanem a közöttük eltelt X idő is véletlenszerűen változik.

Míg N diszkrét valószínűségi változó, addig X folytonos véletlen változó.

Egy észleléstől a következő észlelésig eltelt X idő pontosan akkor lesz nagyobb T másodpercnél, ha a berendezés **nem észlel részecskét** T [sec] időn belül.

Figyelembe véve, hogy N eloszlása a $[0, T]$ időintervallumon $\text{Poisson}(\lambda \cdot T)$, ezért a következőket kapjuk:

$$P(X > T) = P(N = 0 \text{ a } [0, T] \text{ időn belül}) = \frac{(\lambda T)^0 e^{-\lambda T}}{0!} = e^{-\lambda T}$$

Ahonnán az eloszlásfüggvényt az ellentét esemény valószínűségként kapjuk

$$P(X < T) = 1 - P(X > T) = 1 - e^{-\lambda T}, \text{ ha } 0 \leq T.$$

Tehát X eloszlása egyértelműen megadható a Poisson-eloszlás λ paramétere ismeretében.

X eloszlását nevezzük **exponenciális eloszlásnak**, mert benne az exponenciális függvény szerepel! Az eloszlás függvény deriváltja a sűrűség függvény, és ezzel definiáljuk az eloszlást!

10.4.2. DEFINÍCIÓ. Exponenciális eloszlás sűrűség függvénye

Az X valószínűségi változót **exponenciális eloszlásúnak** nevezzük, ha $X \geq 0$ nem-negatív értékeket vesz fel és **sűrűség függvénye**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

exponenciális függvényvel adható meg valamilyen $\lambda > 0$ pozitív paraméterrel.

Mutassuk meg, hogy valóban sűrűség függvényt adtunk meg tetszőleges pozitív λ esetén! Ehhez

az $f(x) \geq 0$ és az $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$ feltétel teljesülését kell ellenőrizni!

Mivel $\lambda > 0$ és az exponenciális függvény pozitív, ezért az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenség teljesül. Az integrált írjuk fel Maple-ben a paraméter pozitivitási feltételével együtt!

> restart : fX := x -> lambda*exp(-lambda*x);

assume(lambda > 0) : Int(fX(x), x = 0 ..infinity) = int(fX(x), x = 0 ..infinity);

$$fX := x \rightarrow \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1$$

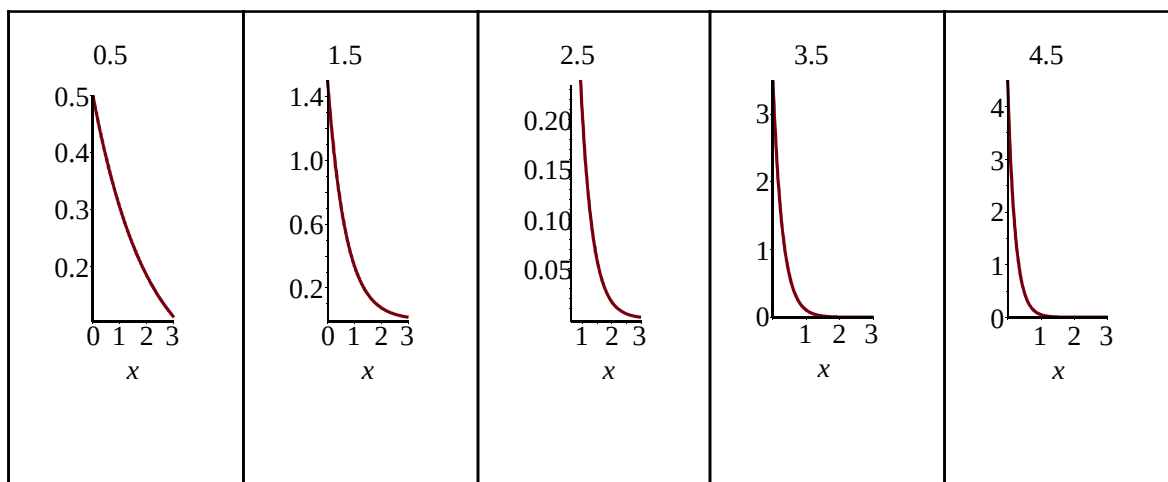
(1.4.1)

Tehát valóban egy sűrűség függvényt kaptunk!

Rajzoljuk fel $\lambda = 0.5$ és $\lambda = 4.5$ paraméterekhez tartozó exponenciális eloszlások sűrűség függvényeit 1 lépésközzel!

> x := 'x':

```
plots[display](Matrix(1, 5, [seq(plot(fX(x), x = 0..3, title = λ), lambda = 0.5..4.5)]));
```



Az exponenciális eloszlás sűrűség függvényeinek változása a λ paraméter növelésével
Az eloszlás függvényt integrálással kapjuk, amely a 10.4.1. példában talált függvény!

$$> FX := x \rightarrow \int_0^x fX(t) dt$$

$$> 'P(X < x)' = FX(x)$$

$$FX := x \rightarrow \int_0^x fX(t) dt$$

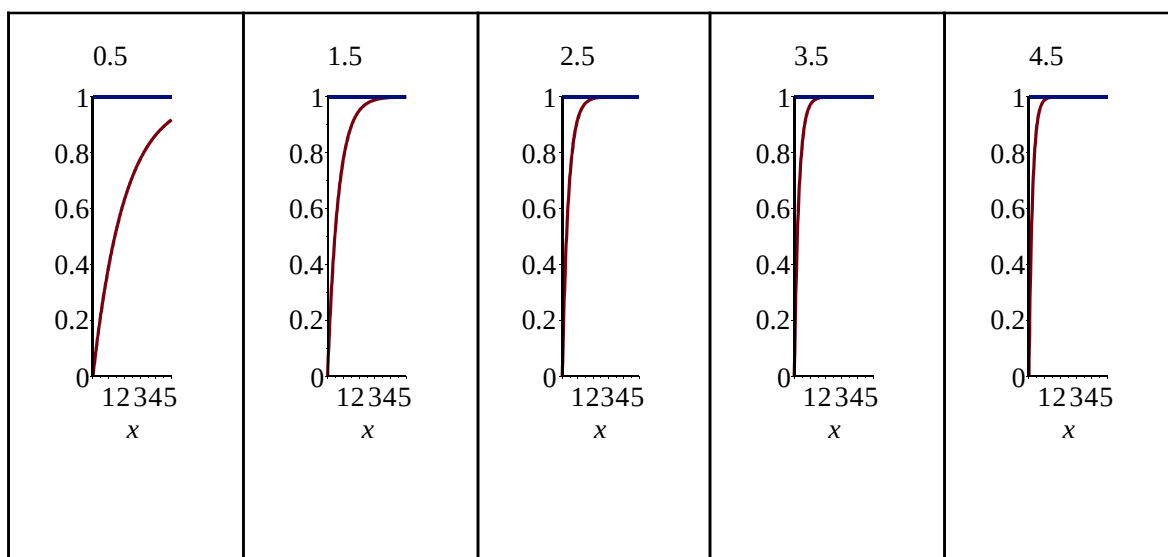
$$P(X < x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

(1.4.2)

Az eloszlás függvényeket λ változtatásával mutatja be az alábbi ábra sorozat!

> x := 'x':

```
plots[display](Matrix(1, 5, [seq(plot([FX(x), 1], x = 0..5, title = λ), lambda = 0.5..4.5)]));
```



Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényeinek változása a λ paraméter növelésével

Figyelem:

A **Statistics** csomagban található **Exponential** nevű eljárás egy olyan exponenciális eloszlású valószínűségi változót ad meg, amelynek paramétere **nem** λ , hanem $\frac{1}{\lambda}$. Ennek oka a **várható**

érték és **szórás** számításában keresendő!

> *with(Statistics) :*

> $X := \text{Exponential}(\lambda) :$

> $f := \text{unapply}(\text{PDF}(X, u), u) : 'f(u) = f(u)$

$$f(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{e^{-\frac{u}{\lambda}}}{\lambda} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.4.3)$$

VÁRHATÓ ÉRTÉK, VARIANCIA EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁSÚ VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓRA

10.4.3. TÉTEL. Exponenciális eloszlás várható értéke és varianciája

Az $X \sim \text{Exponential}(\lambda)$ az $[a, b]$ intervallumon **egyenletes eloszlás** várható érték

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

és varianciája

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Bizonyítás

Az exponenciális eloszlás várható értéke $E[X] = \frac{1}{\lambda}$

> *assume(lambda > 0) : 'int(x·fX(x), x = 0 ..infinity)';*

EX := factor(simplify(%));

Várható érték Maple-ben Mean(X) eljárással = Mean(X);

$$\int_0^{\infty} x fX(x) dx$$

$$EX := \frac{1}{\lambda}$$

Várható érték Maple-ben Mean(X) eljárással = λ^{-1}

(1.4.4)

Az exponenciális eloszlás varianciája $\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$ és így szórása $\sigma = \frac{1}{\lambda}$. ♣

> *'int(x^2·fX(x), x = 0 ..infinity) - EX^2';*

VarX := factor(simplify(%));

'Variancia Maple-ben' = Variance(X);

$$\int_0^{\infty} x^2 fX(x) dx - EX^2$$

$$\text{Var}X := \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\text{Variance Maple-ben} = \lambda^2 \quad (1.4.5)$$

JÓ TANÁCS!

Mivel $E(X) = \sigma(X)$, vagyis a várható érték és a szórás azonos, ha X exponenciális eloszlású folytonos valószínűségi változó, ezért a statisztikában akkor használjunk ilyen eloszlást, ha ez a feltétel **közelítőleg teljesül!**

10.4.4.PÉLDA Járművek áthaladásai között eltelt időintervallumok

Az alábbi adatok egy közúti forgalomban résztvevő autók között mért követési idők hisztogramját tartalmazzák csoportosítva 6 másodperces idő intervallumoként. Összesen a $[0, 3 \text{ perc}] = [0, 180 \text{ sec}]$ időintervallumot 30 egyenlő részre osztották fel és így kaptak 6 másodperces időközöket.

követési idők gyakoriságai =

[54, 23, 16, 10, 16, 16, 12, 8, 8, 7, 4, 5, 4, 5, 1, 2, 0, 3, 1, 2, 2, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0]

(a) Illesszünk exponenciális eloszlást az adatokra!

(b) Vonjuk össze az egymást követő időközöket kettesével! Vizsgáljuk így az exponenciális eloszlás illesztést!

Megoldás

Vegyük fel a mérési adatokat!

> *restart* :

MeresiAdatok := [54, 23, 16, 10, 16, 16, 12, 8, 8, 7, 4, 5, 4, 5, 1, 2, 0, 3, 1, 2, 2, 2, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0];

Összesen 30 csoport van!

> *N* := *nops*(*MeresiAdatok*)

$$N := 30 \quad (1.4.6)$$

A csoportok felső határait percekben mérve adjuk meg (0.1 perc = 6 másodperc)

> *FelsőHatarok* := [*seq*(0.1 · *i*, *i* = 1..*nops*(*MeresiAdatok*))]

$$\text{FelsőHatarok} := [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 3.0] \quad (1.4.7)$$

A mérési adatok összege az összes adatszám lesz, amely 204.

> *OsszesAdatszam* := *sum*(*MeresiAdatok*[*j*], *j* = 1..*N*)

$$\text{OsszesAdatszam} := 204 \quad (1.4.8)$$

A gyakoriságokat megkapjuk, ha a mérési adatokat elosztjuk a mérési adatszámmal!

> *Gyakorisagok* := *MeresiAdatok* / *OsszesAdatszam*

$$\text{Gyakorisagok} := \left[\frac{9}{34}, \frac{23}{204}, \frac{4}{51}, \frac{5}{102}, \frac{4}{51}, \frac{4}{51}, \frac{1}{17}, \frac{2}{51}, \frac{2}{51}, \frac{7}{204}, \frac{1}{51}, \frac{5}{204}, \frac{1}{51}, \frac{5}{204}, \frac{1}{204}, \frac{1}{204}, \frac{1}{102}, 0, \frac{1}{68}, \frac{1}{204}, \frac{1}{102}, \frac{1}{102}, \frac{1}{102}, 0, 0, \frac{1}{204}, 0, 0, \frac{1}{204}, \frac{1}{204}, 0 \right] \quad (1.4.9)$$

Számoljuk ki az adatok várható értékét vagy átlagát, amelynek **reciproka** a λ .

$$\begin{aligned}
 &> \text{varhato_ertek} := 0.5 \cdot (0 + \text{FelsőHatarok}_1) \cdot \text{Gyakorisagok}_1 + \sum_{j=2}^N 0.5 \cdot (\text{FelsőHatarok}_{j-1} \\
 &\quad + \text{FelsőHatarok}_j) \cdot \text{Gyakorisagok}_j \\
 &> \lambda := \frac{1}{\text{varhato_ertek}} \\
 &\quad \text{varhato_ertek} := 0.5421568625 \\
 &\quad \lambda := 1.844484630
 \end{aligned}
 \tag{1.4.10}$$

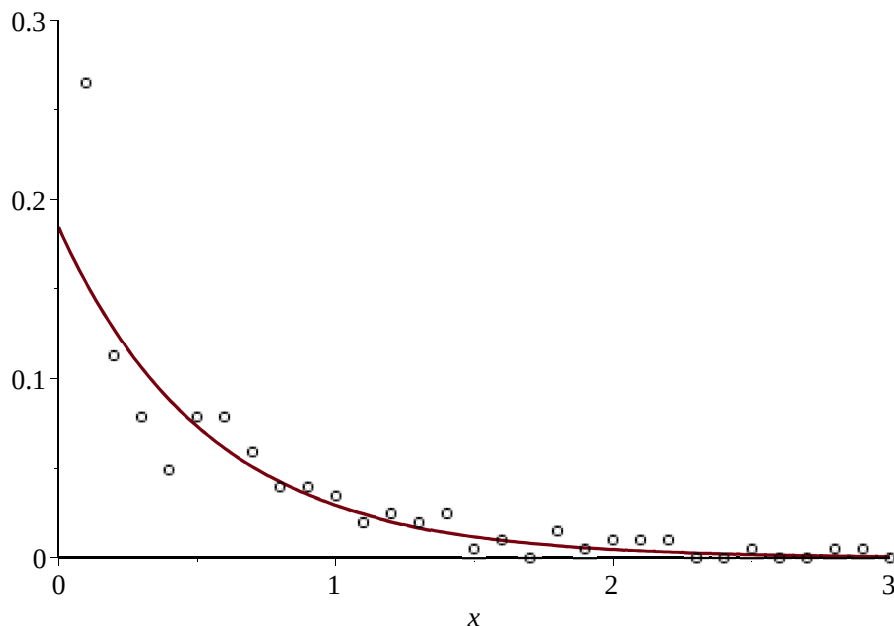
Ezzel a λ paraméterrel képezzük az exponenciális eloszlás sűrűség függvényét!

$$\begin{aligned}
 &> x := 'x'; f := 'f': f_X := x \rightarrow \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot x) : \\
 &> 'f_X(x)' = f_X(x); \\
 &\quad f_X(x) = 1.844484630 e^{-1.844484630 x}
 \end{aligned}
 \tag{1.4.11}$$

Ábrázoljuk a mérési pontok gyakoriságait az y-tengelyen és a mérési idők felső határait az x-tengelyen! Az adat pontokkal egy koordináta rendszerben ábrázoljuk az exponenciális eloszlás sűrűség függvényét 0.1 súlyozással!

> *pontok := evalf([seq([FelsőHatarok[i], Gyakorisagok[i]], i = 1 .. N)]) :*
p1 := plot(0.1 · f_X(x), x = 0 .. 3, 0 .. 0.3) : p2 := plots[pointplot](pontok, style = point,
symbol = circle) : plots[display]({p1, p2}, title
= Követési idők gyakoriságának közelítése exponenciális eloszlással);

Követési idők gyakoriságának közelítése exponenciális eloszlással



Az exponenciális eloszlás sűrűség függvénye jól illeszkedik a mérési pontokra!

(b) Csökkentsük az osztályozást 30 - ról 15 csoportra, azaz kövessék a csoportok 12 másodpercenként egymást. A csökkentést úgy végezzük el, hogy az egymást követő adatokat

kettesével összeadjuk. Figyeljük meg, hogy a módosított adatokkal számolt λ közelítőleg azonos az előzőleg kapott értékkel és az ábra is hasonló!

```
> Redukalt := NULL :
  for i from 1 by 2 to nops(MeresiAdatok) do
    Redukalt := Redukalt, MeresiAdatoki + MeresiAdatoki+1 :
  end do:
  ModositottAdatok := [Redukalt]
  ModositottAdatok := [77, 26, 32, 20, 15, 9, 9, 3, 3, 3, 4, 0, 1, 1, 1]
```

(1.4.12)

A csoportok száma 30 helyett 15 lett!

```
> n := nops(ModositottAdatok)
n := 15
```

(1.4.13)

Az új felső határok módosulnak, mert a lépésköz 0.2 lett!

```
> UjFelsőHatarok := [seq(0.2 · i, i = 1 .. nops(ModositottAdatok))];
  #az új hisztogramok csoportjainak felső határa
  UjFelsőHatarok := [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3.0]
```

(1.4.14)

Az összes adatszám nem változott!

```
> OsszesAdatszam := sum(ModositottAdatokj, j = 1 .. n);
  OsszesAdatszam := 204
```

(1.4.15)

Számoljuk az új gyakoriságokat!

```
> UjGyakorisagok :=  $\frac{\text{ModositottAdatok}}{\text{OsszesAdatszam}}$ 
  UjGyakorisagok :=  $\left[ \frac{77}{204}, \frac{13}{102}, \frac{8}{51}, \frac{5}{51}, \frac{5}{68}, \frac{3}{68}, \frac{3}{68}, \frac{1}{68}, \frac{1}{68}, \frac{1}{68}, \frac{1}{51}, 0, \right.$ 
   $\left. \frac{1}{204}, \frac{1}{204}, \frac{1}{204} \right]$ 
```

(1.4.16)

Az új λ most az új felőhatárokkal és új gyakoriságokkal képezett átlag és $\lambda_2 = \frac{1}{\text{átlag}}$

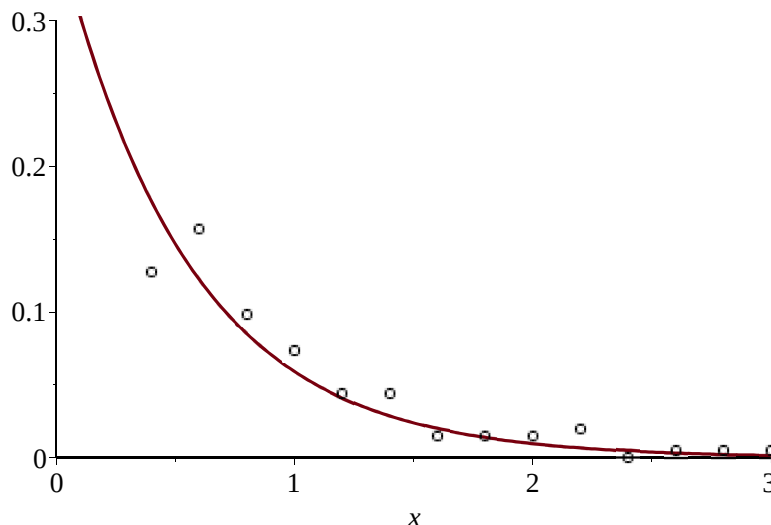
```
> atlag2 := 0.5 (0 + UjFelsőHatarok1) UjGyakorisagok1 +  $\sum_{j=2}^n 0.5 (UjFelsőHatarok_{j-1}$ 
   $+ UjFelsőHatarok_j) UjGyakorisagok_j :$ 
>  $\lambda_2 := \frac{1}{\text{atlag2}}$ 
 $\lambda_2 := 1.814946619$ 
```

(1.4.17)

Képezzük az exponenciális eloszlás sűrűség függvényét és végezzük el az illesztést!

```
> f := 'f' : fX := x →  $\lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 \cdot x} : f_X(x) = f_X(x);$ 
> points := [seq([UjFelsőHataroki, UjGyakorisagoki], i = 1 .. n)]:
  p1 := plot(0.2 · fX(x), x = 0 .. 3, 0 .. 0.3) : p2 := plots[pointplot](points, style = point, symbol
    = circle) : plots[display]({p1, p2}, title = Közelítés összevont csoportok alapján)
   $f_X(x) = 1.814946619 e^{-1.814946619 x}$ 
```

Közelítés összevont csoportok alapján



10.4.5. AZ EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁS EMLÉKEZET (vagy MEMÓRIA) NÉLKÜLI TULAJDONSÁGA

10.4.5. DEFINÍCIÓ. Memóra nélküli tulajdonság vagy a jövő független a múlttól

Azt mondjuk, hogy egy $0 \leq X$ **nem-negatív** értékeket felvevő valószínűségi változó rendelkezik a **memória nélküli tulajdonsággal**, ha

$$P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$$

feltétel teljesül minden $0 \leq s, t$ nem-negatív értékre.

10.4.6. PÉLDA. BERENDEZÉSEK ÉLETTARTAMA

Jelölje X egy működő berendezés (például számítógép) élettartamát, vagyis azt az idő tartamot, amely az üzembe állítás és a berendezés elromlása között eltelik. X értéke, tehát élettartama egyedenként változó, azaz véletlen változónak tekinthető. Ha a berendezés már megélt valamilyen $t > 0$ kort (évet, napot,...), akkor ettől kezdve a további élettartamának eloszlása (s -ben) megegyezik az eredeti élettartamának eloszlásával.

Másképpen fogalmazva, elvárható, hogy egy t ideig már működő berendezés eloszlása azonos legyen egy új berendezés élettartamának eloszlásával.

(Ez az elvárás általában a berendezés alkatrészeire csak szakaszonként érvényes!)

10.4.7. TÉTEL. Az exponenciális eloszlás rendelkezik a 10.4.5. memória nélküli tulajdonsággal

Az exponenciális eloszlású X valószínűségi változó - mint a Poisson - folyamatból származtatott eloszlás - rendelkezik a 10.4.5. **memória nélküli tulajdonsággal**.

Bizonyítás

A feltételes valószínűség definícióját használva

$$P(X > s + t \mid X > t) = \frac{P(\{t + s < X\}, \{t < X\})}{P(t < X)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

Ezt a tulajdonságát nevezzük még az exponenciális eloszlás "örökifjú" tulajdonságának is. Q.e.d.

A **memória nélküli tulajdonság**ot az $F(u) = P(X < u)$ **eloszlás függvény**nel is jellemezhetjük az

előzővel ekvivalens módon.

10.4.8. DEFINÍCIÓ. Memória nélküli tulajdonság leírása eloszlás függvénnyel

Azt mondjuk, hogy az $0 \leq X$ **nem-negatív** értékeket felvevő valószínűségi változó rendelkezik a **memória nélküli tulajdonsággal**, ha

$$P(X < s + t \mid X > t) = P(X < s)$$

feltétel teljesül minden $0 \leq s, t$ nem-negatív értékre.

Megmutatjuk, hogy az exponenciális eloszlásra teljesül a 10.4.8. definícióban adott tulajdonság is.

10.4.9. TÉTEL. Az exponenciális eloszlás rendelkezik a 10.4.8. memória nélküli tulajdonsággal

Az exponenciális eloszlású X valószínűségi változó - mint a Poisson - folyamatból származtatott eloszlás - rendelkezik a 10.4.8. **memória nélküli tulajdonsággal**.

Bizonyítás

Most is a feltételes valószínűség definícióját használva

$$\begin{aligned} P(X - t < s \mid X > t) &= \frac{P(t < X < t + s)}{P(t < X)} = \frac{F(t + s) - F(t)}{1 - F(t)} = \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda(t+s)} - (1 - e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda t}} = 1 - e^{-\lambda s} = F(s) \end{aligned}$$

Amit úgy is interpretálhatunk, hogy az $(X - t)$ "maradék" valószínűségi változónak ugyanaz az eloszlása, mint az eredeti X változónak. Az élettartam segítségével tehát azt mondhatjuk, hogy ha már a berendezés "t" éves, akkor a hátralevő $(X-t)$ élettartamának ugyanaz az eloszlása, mint egy új berendezés X élettartamának eloszlása. Természetesen, ha ez nem teljesül egy berendezésre, akkor ne használjunk rá exponenciális elosztást! Q.e.d.

Megjegyezzük, hogy a folytonos eloszlások közül a memória nélküli tulajdonság csak az exponenciális eloszlásra jellemző. Nevezetesen, ha egy X folytonos eloszlásra teljesül a memória nélküli tulajdonság, akkor X eloszlása exponenciális. A diszkrét valószínűségi változók között ez a tulajdonság csak a geometriai eloszlásra teljesül.

Exponenciális eloszlás további alkalmazási területei

- Egy nagy számítógépes hálózatra bejelentkezett felhasználók egymást követő bejelentkezései között eltelt időtartam
- Telefon kapcsolatokat létrehozó szerverre érkező telefon hívások között eltelt idő
- Sorban állási problémánál az egymást követő vendégek érkezése között eltelt várakozási idő
- Földrengés lökéshullámai között eltelt időtartam.
- Egy mechanikai természetű szerkezet különböző komponenseinek elromlási vagy túlélési idejének valószínűsége

▼ 10.5. Erlang - eloszlás és Gamma - eloszlás*

Legyen X_1 az a várakozási idő, mely $t = 0$ -tól eltelik egy λ paraméterű Poisson-folyamat első érkezéséig!

Legyen X_2 az a várakozási idő, mely az első és a második érkezése között telik el egy λ paraméterű Poisson-eloszlás során!

Legyen X_3 az a várakozási idő, mely a második és harmadik érkezése között telik el egy λ paraméterű Poisson-eloszlás során!

.....

Legyen

X_n az a várakozási idő, mely az (n-1)-ik és az n-edik érkezése között telik el egy λ paraméterű Poisson-eloszlás során!

Az $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változók mindegyike exponenciális eloszlású azonos λ paraméterrel!

10.5.1. DEFINÍCIÓ. Erlang-eloszlás értelmezése exponenciális eloszlások összegével
A

$$T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

összeg megadja azt a várakozási időt, amely eltelik a $t=0$ időponttól az n-ik érkezésig. Ennek eloszlását nevezzük **Erlang-eloszlásnak**, melynek paraméterei

$$(\lambda, n) \text{ és a } T_n \sim \text{Erlang}(\lambda, n)$$

jelölést használjuk.

Az exponenciális eloszlás speciális Erlang-eloszlás, amikor $n=1$: $\text{Exponential}(\lambda) = \text{Erlang}(\lambda, 1)$.

Az Erlang eloszlás speciális Gamma-eloszlás, amikor az **n egész** szám: $\text{Erlang}(\lambda, n) = \text{Gamma}(\lambda, n)$.

10.5.2. TÉTEL. Gamma-eloszlás és sűrűség függvénye

Azt mondjuk, hogy T_r **Gamma eloszlású** (λ, r) paraméterekkel, vagy jelöléssel: $T_r \sim \text{Gamma}(\lambda, r)$, ha

- (i) a paraméterekre $0 < \lambda, 0 < r$ és
- (ii) T_r lehetséges értéke $[0, \infty)$, azaz $T_r > 0$ és
- (iii) sűrűség függvénye

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, \quad 0 < x,$$

ahol $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ ($z > 0$) a faktoriális általánosítása nem egész értékekre, mert

$\Gamma(n) = (n-1)!$, ha $n = 1, 2, 3, \dots$ egész szám.

Ha az **n egész szám**, akkor a **Gamma eloszlás** Erlang-eloszlás lesz.

> **restart :**

with(Statistics) :

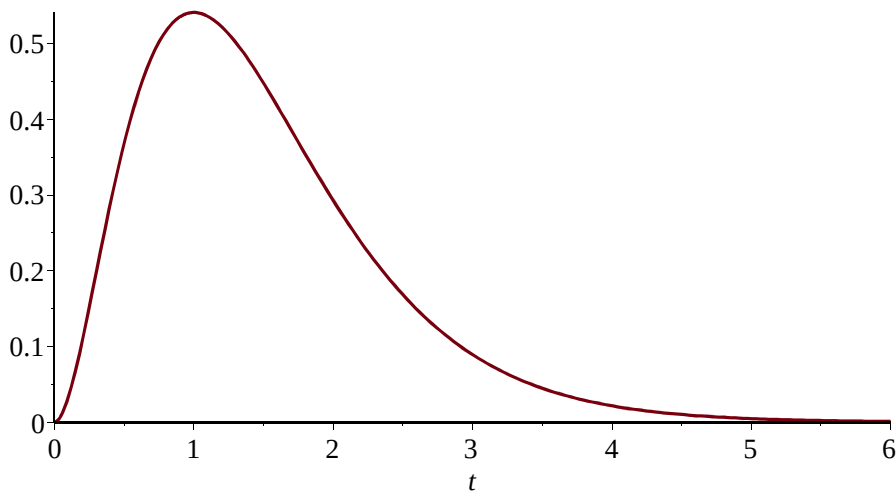
$X := \text{RandomVariable}(\text{Gamma}(1/\text{lambda}, r)) :$

$\text{Gamma sűrűség függvénye} = \text{PDF}(X, t);$

$$\text{Gamma sűrűség függvénye} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{(t\lambda)^{r-1} e^{-t\lambda} \lambda}{\Gamma(r)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.5.1)$$

Nézzük az $r=3$ és $\lambda=2$ esetet!

> **$\text{plot}(\text{subs}(r=3, \text{lambda}=2, \text{PDF}(X, t)), t=0..6)$**



Gamma-eloszlások sűrűség függvénye > <i>surusegek := [seq(subs(lambda = 2, PDF(X, u)), r = 1..8, 2)];</i> <i>surusegek :=</i> $\begin{cases} 0 & u < 0 \\ 2 e^{-2u} & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (1.5.2)$ $\begin{cases} 0 & u < 0 \\ 4 u^2 e^{-2u} & \text{otherwise} \end{cases},$ $\begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{4}{3} u^4 e^{-2u} & \text{otherwise} \end{cases},$ $\begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{8}{45} u^6 e^{-2u} & \text{otherwise} \end{cases}$	Gamma-eloszlások sűrűség függvénye > <i>plot(surusegek, u = 0..12, title = Gamma eloszlások sűrűség függvénye);</i> <i>Gamma eloszlások sűrűség függvénye</i> >
---	--

10.5.3. TÉTEL. Gamma-eloszlás várható értéke és varianciája

Az $X \sim \text{Gamma}(\lambda, r)$ változó várható értéke és varianciája

$$E(X) = \frac{r}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{r}{\lambda^2}.$$

Bizonyítás

A számításokat a beépített Mean és Variance eljárásokkal végezzük!

> *with(Statistics):*
X := RandomVariable(Gamma(1/lambda, r)):

$e1 := \mu = \text{Mean}(X);$
 $e2 := \sigma^2 = \text{Variance}(X);$

$$e1 := \mu = \frac{r}{\lambda}$$

$$e2 := \sigma^2 = \frac{r}{\lambda^2} \quad (1.5.3)$$

Ha ismerjük a μ várható értéket és a σ szórást, akkor ezek segítségével kiszámolhatjuk a λ és r paramétereket!

> $\text{solve}(\{e1, e2\}, \{r, \lambda\});$

$$\left\{ r = \frac{\mu^2}{\sigma^2}, \lambda = \frac{\mu}{\sigma^2} \right\} \quad (1.5.4)$$

10.5.4. PÉLDA. Exponenciális eloszlások összege Erlang-eloszlás

Mutassuk meg, hogy két független és azonos λ paraméterű exponenciális eloszlás összege Erlang -eloszlás $r=2$ és λ paraméterekkel.

Megoldás

A bizonyítást a Maple beépített eljárásai segítségével végezzük el.

> $X1 := \text{RandomVariable}\left(\text{Exponential}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right);$
 $X2 := \text{RandomVariable}\left(\text{Exponential}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right);$
 $S := X1 + X2;$
 $S := _R3 + _R4 \quad (1.5.5)$

> Az összeg sűrűség függvénye = $\text{PDF}(S, u);$

$r := 2; \text{Erlang-eloszlás sűrűség függvénye } r=2 \text{ paraméterrel} = \text{PDF}\left(\text{Erlang}\left(\frac{1}{\lambda}, r\right), u\right);$

$$\text{Az összeg sűrűség függvénye} = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ u \lambda^2 e^{-u\lambda} & 0 < u \end{cases}$$

$$\text{Erlang-eloszlás sűrűség függvénye } r=2 \text{ paraméterrel} = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ u \lambda^2 e^{-u\lambda} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.5.6)$$

Hasonlóan három független és azonos paraméterű exponenciális eloszlás összege Erlang -eloszlás $r=3$ paraméterrel.

> $X3 := \text{RandomVariable}\left(\text{Exponential}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right); S := S + X3$
> $\text{PDF}(S, u); r := r + 1;$
 $\text{Erlang-eloszlás sűrűség függvénye} = \text{PDF}\left(\text{Erlang}\left(\frac{1}{\lambda}, r\right), u\right)$
 $S := _R3 + _R4 + _R9$

$$r := 3$$

$$\text{Erlang-eloszlás sűrűség függvénye} = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ \frac{1}{2} u^2 \lambda^3 e^{-u\lambda} & 0 < u \end{cases} \quad (1.5.7)$$

Folytatva az összegzést kapjuk az Erlang-eloszlás előállítását exponenciális eloszlással! ♣

▼ 10.6. Gauss-féle normál eloszlás

C. F. Gauss (1777-1855) nyomán fejlesztették ki a normál eloszlást, amelyet kezdetben a mérések hiba analizisére alkalmaztak. A normál eloszlás **sűrűség függvényét** a (μ, σ) paraméterek segítségével tudjuk megadni.

> restart :

$$f := (x, \mu, \sigma) \rightarrow \frac{\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right)}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} :$$

$$f'(x, \mu, \sigma) = f(x, \mu, \sigma);$$

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \quad (1.6.1)$$

10.6.1. DEFINÍCIÓ. Normál eloszlás sűrűség függvénye

Az $X \sim N(\mu, \sigma)$ szimbólum azt jelöli, hogy az X folytonos eloszlású valószínűségi változó **normál eloszlású** és sűrűség függvénye

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}}{\sigma \sqrt{2 \pi}},$$

ahol a (μ, σ) paraméterekre teljesülnek a $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ feltételek.

A sűrűség függvényben szereplő két paraméter jelentése: μ a várható érték, (vagy lokalizációs paraméter), és $\sigma > 0$ a standard szórás (vagy a görbe alakját meghatározó paraméter).

10.6.2. TÉTEL. $X \sim N(\mu, \sigma)$ várható értéke μ és szórása σ

Ha $X \sim N(\mu, \sigma)$, akkor várható értéke $E(X) = \mu$ és a szórása $\sigma(X) = \sigma$.

Bizonyítás

Igazoljuk előbb, hogy az $f_{\mu, \sigma}(x)$ függvény valóban sűrűség függvény. Az $f_{\mu, \sigma}(x) > 0$ pozitivitási feltétel következik az exponenciális függvény és σ pozitivitásából. Az integrál 1 érték következik

az

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ ún. Euler-Poisson-féle integrálból, melyben a primitív függvény nem elemi függvény.

> $\text{Int}(f(x, \mu, \sigma), x = -\infty.. \infty) = \text{int}(f(x, \mu, \sigma), x = -\infty.. \infty)$ assuming $\sigma > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = 1 \quad (1.6.2)$$

A várható értékhez az $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}}{\sigma \sqrt{2 \pi}} dx$ integrált kell kiszámolni!

> $\text{Int}(x \cdot f(x, \mu, \sigma), x = -\infty.. \infty) = \text{int}(x \cdot f(x, \mu, \sigma), x = -\infty.. \infty)$ assuming $\sigma > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} x e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = \mu \quad (1.6.3)$$

A szórásnégyzet értékéhez a $\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}}{\sigma \sqrt{2 \pi}} dx$ integrált kell kiszámolni!

> $\text{Int}((x - \mu)^2 \cdot f(x, \mu, \sigma), x = -\infty.. \infty) = \text{int}((x - \mu)^2 \cdot f(x, \mu, \sigma), x = -\infty.. \infty)$ assuming $\sigma > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} (x - \mu)^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = \sigma^2 \quad (1.6.4)$$

Ezzel igazoltuk, hogy az $f_{\mu, \sigma}(x)$ sűrűség függvény képletében μ a várható érték és σ a szórás. **Q.e. d.**

10.6.3. PÉLDA. A sűrűség függvény jellemzése a paraméterek változtatásával

(i) Rajzoljuk fel a normál eloszlás sűrűség függvényének grafikonját állandó μ és változó σ mellett!

(ii) Rajzoljuk fel a normál eloszlás sűrűség függvényének grafikonját állandó σ és változó μ mellett!

Megoldás

Írunk egy olyan eljárást, amely a várható érték körül szimmetrikus $6 \cdot \sigma$ hosszú intervallumon kirajzolja az "ún" harang görbét!

> **NormalSuruseg** := **proc**(mu, sigma)
local x, f, intervallum, P;

```

f := (x, mu, sigma) → exp( - ((x-mu) / sigma)2 / 2 ) / (sigma·sqrt(2· Pi) ) :
intervallum := mu - 3· sigma .. mu + 3· sigma;
P := plot( f(x, mu, sigma), x = intervallum, color = blue );
plots[display]( [ P ] );
end:

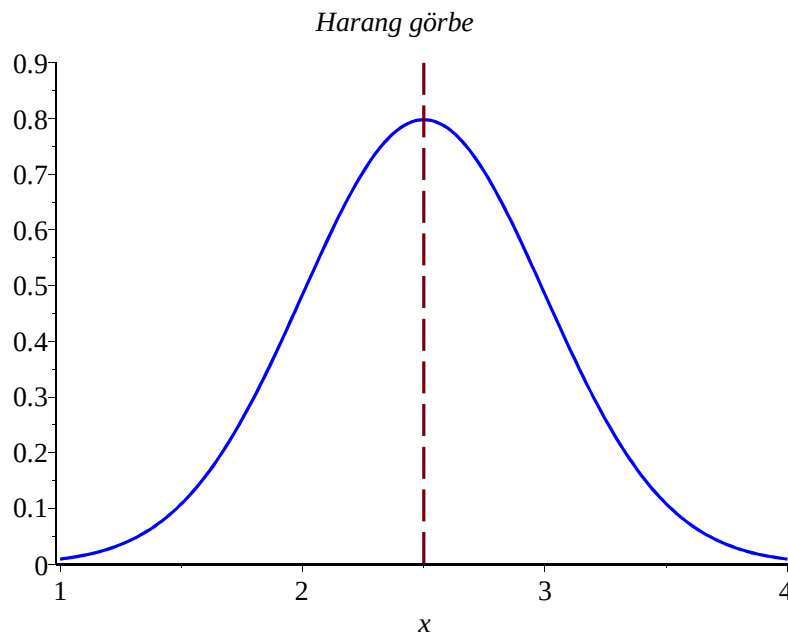
```

Nézzük meg a sűrűség függvény grafikonját pl. $\mu = 2.5$ és $\sigma = 0.5$ paraméterek esetén!

```

> harang := NormalSuruseg( 2.5, 0.5 ) : tengely := plot( [[2.5, 0], [2.5, 0.9]], linestyle
= 3 ) :
plots[display]( [harang, tengely], title = Harang görbe);

```



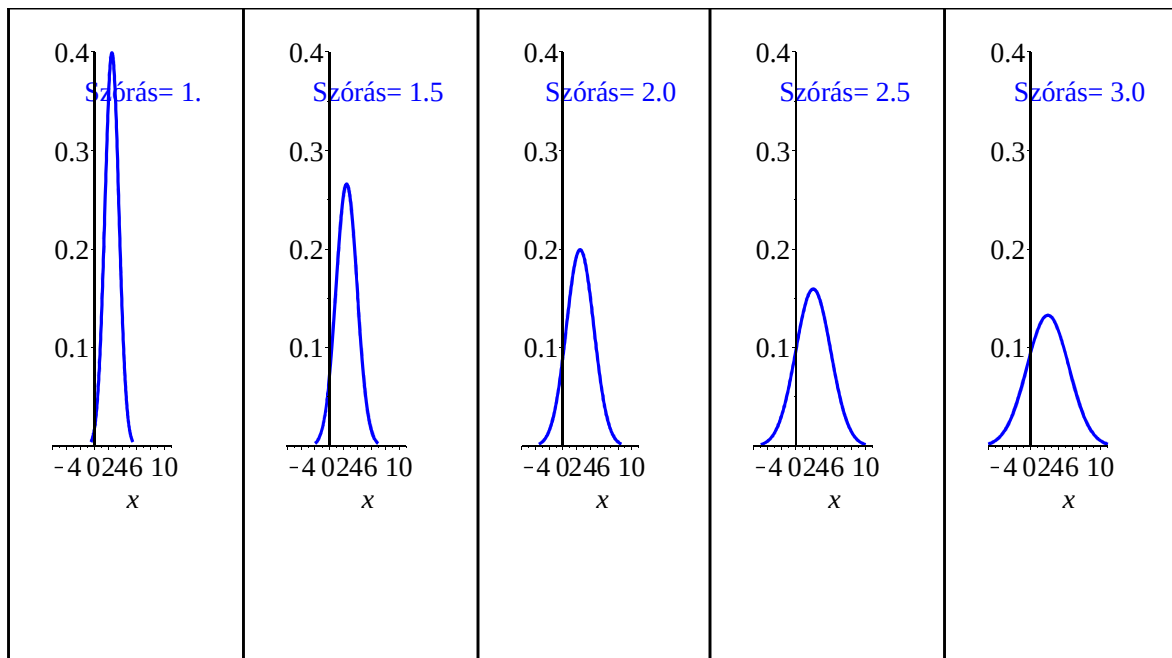
A függvény szimmetrikus az $x = \mu = 2.5$ függőleges egyenesre, ahol maximuma van!

Vizsgáljuk a sűrűség függvény alakjának változását állandó $\mu = 2.5$ várható érték és növekvő σ szórás mellett, $\sigma = 1$ kezdő és $\sigma = 3$ végértékek között!

```

> mu, sigma, sigma_step := 2.5, 1, 0.5; N := 4 :
> for n from 0 to N do
  density[n] := NormalSuruseg(mu, sigma + sigma_step·n) :
  num := convert( evalf( sigma + sigma_step·n, 3 ), string ) :
  tracker[n] := plots[textplot]( [ 7, 0.36, cat("Szórás= ", num) ], color = blue ) :
  P[n] := plots[display]( { density[n], tracker[n] } ) :
od:
plots[display]( Matrix(1, N + 1, [ seq(P[n], n = 0 .. N) ] ), view = [ -6 .. 11, 0 .. 0.4 ] )
mu, sigma, sigma_step := 2.5, 1, 0.5

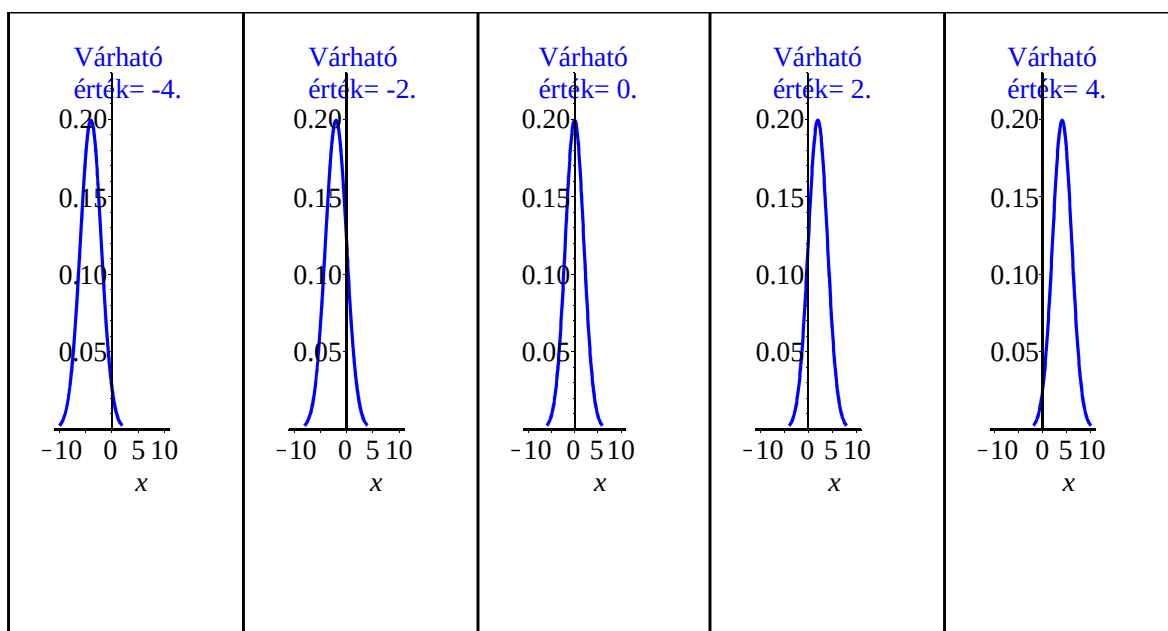
```



A **normál eloszlás** sűrűség függvénye növekvő szórás és állandó várható érték mellett. A szórás növekedésével a függvények ellaposodnak, szétterjeszkednek a várható érték körül szimmetrikusan és ezzel együtt maximális értéke kisebb lesz!

Vizsgáljuk most a sűrűség függvény alakjának változását állandó $\sigma = 2$ szórás és növekvő μ várható érték mellett, $\mu = -2$ kezdő és $\mu = 2$ végérték között!

```
>  $\sigma, \mu, mu\_step := 2, -4, 2; N := 4 :$ 
  for  $n$  from 0 to  $N$  do
     $density[n] := NormalSuruseg(\mu + mu\_step \cdot n, \sigma) :$ 
     $num := convert(evalf(\mu + mu\_step \cdot n, 3), string) :$ 
     $tracker[n] := plots[textplot]([3, 0.23, cat("Várható érték= ", num)], color = blue) :$ 
     $P[n] := plots[display]({density[n], tracker[n]}) :$ 
  od:
   $plots[display](Matrix(1, N + 1, [seq(P[n], n = 0 .. N)]), view = [-11 .. 11, 0 .. 0.23]);$ 
   $\sigma, \mu, mu\_step := 2, -4, 2$ 
```



Az eloszlások alakja nem változik csak az x-tengely mentén vándorol a görbe!

10.6.4. TÉTEL. A sűrűség függvény inflexiós helyei $\mu - \sigma$ és $\mu + \sigma$.

A $X \sim N(\mu, \sigma)$ normál eloszlás $f_{\mu, \sigma}(x)$ sűrűség függvényének inflexiós pontja van az $x = \mu - \sigma$ és $x = \mu + \sigma$ helyeken.

Bizonyítás

Mivel az $f(x)$ függvény tetszőleges számszor differenciálható, ezért az inflexiós helyek a második derivált zérus helyeinél lesznek, ha ott a második derivált előjelet vált. Képezzük az $f''(x)$ második derivált függvény szorzat alakját, majd határozzuk meg zérus helyeit!

> $\mu, \sigma := ' \mu ', ' \sigma ' : \frac{d^2}{dx^2} f(x, \mu, \sigma) : \text{factor}(\text{második derivált} = \%); \text{zérushelyek} = \text{solve}(\text{rhs}(\%)), \{x\})$

$$\text{második derivált} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(-x+\mu)^2}{\sigma^2}} \frac{\sqrt{2} (-x+\mu-\sigma) (-x+\mu+\sigma)}{\sigma^5 \sqrt{\pi}}$$

$$\text{zérushelyek} = (\{x = \mu + \sigma\}, \{x = \mu - \sigma\}) \quad (1.6.5)$$

A második derivált előjele egy x -ben másodfokú olyan tényezőtől függ, melynek két különböző valós gyöke van. Ezért ez a polinom mindenképpen előjelet vált a zérus helyeken. Tehát valóban inflexiós pontja van a harang görbének az $x = \mu - \sigma$ és $x = \mu + \sigma$ helyeken. **Q.e.**

d.

A normál eloszlás eloszlás függvényének nincs elemi formában kifejezhető zárt alakja.

> $\mu := ' \mu ' : \sigma := ' \sigma ' :$

$F := (x, \mu, \sigma) \rightarrow \text{Int}(f(\text{eta}, \mu, \sigma), \text{eta} = -\text{infinity}..x) :$

$'F'(x, \mu, \sigma) = F(x, \mu, \sigma); \text{lhs}(\%) = \text{value}(\text{rhs}(\%)) \text{ assuming } \sigma > 0;$

$$F(x, \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\eta - \mu)^2}{\sigma^2}} d\eta$$

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\eta - \mu)^2}{\sigma^2}} d\eta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} (-x + \mu)}{\sigma}\right) \quad (1.6.6)$$

A Maple az úgy nevezett "hiba függvényt" vagy "erf" beépített függvényt (az angol error function rövidítése) használja a kifejezés megadásához. Több információt a hiba függvényről a súgó oldalakon találhatunk.

> ?erf

Tetszőleges $X \sim N(\mu, \sigma)$ normál eloszlás $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ standardizáltján keresztül elegendő részletesen ismerni az $N(0, 1)$ változó **sűrűség függvényét**

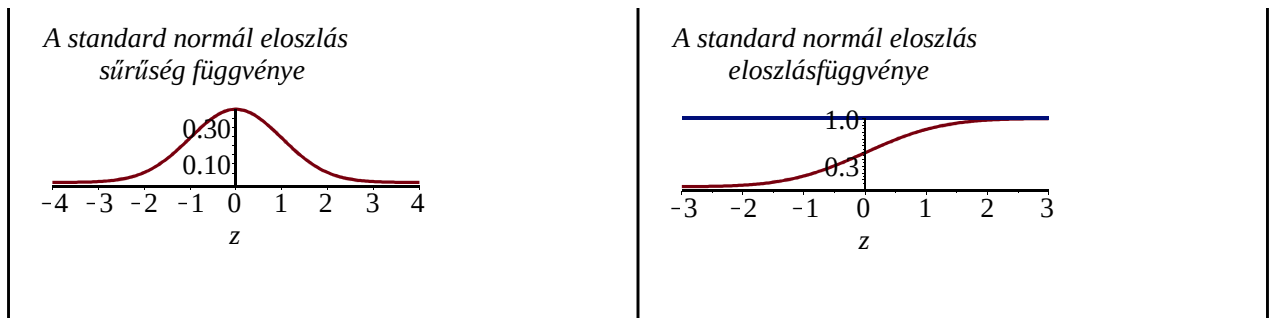
$$\phi(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

illetve **eloszlás függvényét**

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Mivel gyakran találkozunk a ϕ és Φ függvényekkel, ezért ismerkedjünk meg velük alaposabban.

Az $N(0,1)$ standard normál eloszlás sűrűség függvénye > phi := 'phi': phi := z → $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$ $\phi := z \rightarrow \frac{e^{-\frac{1}{2} z^2}}{\sqrt{2\pi}}$ (1.6.7)	Az $N(0,1)$ standard normál eloszlás eloszlásfüggvénye > Phi := z → int(exp(-t^2/2) / sqrt(2 * Pi), t = -infinity .. z) $\Phi := z \rightarrow \int_{-\infty}^z \frac{e^{-\frac{1}{2} t^2}}{\sqrt{2\pi}} dt$ (1.6.8)
> plot(phi(z), z = -4..4, title = A standard normál eloszlás sűrűség függvénye)	> plot([Phi(z), 1], z = -3..3, title = A standard normál eloszlás eloszlásfüggvénye);



Generáljuk a standard normál eloszlás eloszlás függvényének táblázatát! Ez minden valószínűségszámítással és statisztikával foglalkozó könyv melléklete!

```
> ind := (i,j) → evalf(Phi((i-1)·0.1 + (j-1)·0.01), 4) :
   tablázat := matrix(30, 10, ind) : fejlec := [seq(0.01·(i-1), i = 1..10)] :
   oszlop := ['z', seq(0.1·(i-1), i = 1..30)] :
   Standard normál eloszlás = linalg[augment](oszlop, linalg[stackmatrix](fejlec,
   tablázat)) ;
```

Standard normál eloszlás

(1.6.9)

```
= [[z, 0., 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09],
[0., 0.5000, 0.5040, 0.5080, 0.5120, 0.5160, 0.5199, 0.5239, 0.5279, 0.5319, 0.5359],
[0.1, 0.5398, 0.5438, 0.5478, 0.5517, 0.5557, 0.5596, 0.5636, 0.5675, 0.5714, 0.5753],
],
[0.2, 0.5793, 0.5832, 0.5871, 0.5910, 0.5948, 0.5987, 0.6026, 0.6064, 0.6103, 0.6141],
],
[0.3, 0.6179, 0.6217, 0.6255, 0.6293, 0.6331, 0.6368, 0.6406, 0.6443, 0.6480, 0.6517],
],
[0.4, 0.6554, 0.6591, 0.6628, 0.6664, 0.6700, 0.6736, 0.6772, 0.6808, 0.6844, 0.6879],
],
[0.5, 0.6915, 0.6950, 0.6985, 0.7019, 0.7054, 0.7088, 0.7123, 0.7157, 0.7190, 0.7224],
],
[0.6, 0.7257, 0.7291, 0.7324, 0.7357, 0.7389, 0.7422, 0.7454, 0.7486, 0.7517, 0.7549],
],
[0.7, 0.7580, 0.7611, 0.7642, 0.7673, 0.7704, 0.7734, 0.7764, 0.7794, 0.7823, 0.7852],
],
[0.8, 0.7881, 0.7910, 0.7939, 0.7967, 0.7995, 0.8023, 0.8051, 0.8078, 0.8106, 0.8133],
],
[0.9, 0.8159, 0.8186, 0.8212, 0.8238, 0.8264, 0.8289, 0.8315, 0.8340, 0.8365, 0.8389],
],
[1.0, 0.8413, 0.8438, 0.8461, 0.8485, 0.8508, 0.8531, 0.8554, 0.8577, 0.8599, 0.8621],
],
```

[1.1, 0.8643, 0.8665, 0.8686, 0.8708, 0.8729, 0.8749, 0.8770, 0.8790, 0.8810, 0.8830
],
[1.2, 0.8849, 0.8869, 0.8888, 0.8907, 0.8925, 0.8944, 0.8962, 0.8980, 0.8997, 0.9015
],
[1.3, 0.9032, 0.9049, 0.9066, 0.9082, 0.9099, 0.9115, 0.9131, 0.9147, 0.9162, 0.9177
],
[1.4, 0.9192, 0.9207, 0.9222, 0.9236, 0.9251, 0.9265, 0.9279, 0.9292, 0.9306, 0.9319
],
[1.5, 0.9332, 0.9345, 0.9357, 0.9370, 0.9382, 0.9394, 0.9406, 0.9418, 0.9429, 0.9441
],
[1.6, 0.9452, 0.9463, 0.9474, 0.9484, 0.9495, 0.9505, 0.9515, 0.9525, 0.9535, 0.9545
],
[1.7, 0.9554, 0.9564, 0.9573, 0.9582, 0.9591, 0.9599, 0.9608, 0.9616, 0.9625, 0.9633
],
[1.8, 0.9641, 0.9649, 0.9656, 0.9664, 0.9671, 0.9678, 0.9686, 0.9693, 0.9699, 0.9706
],
[1.9, 0.9713, 0.9719, 0.9726, 0.9732, 0.9738, 0.9744, 0.9750, 0.9756, 0.9761, 0.9767
],
[2.0, 0.9772, 0.9778, 0.9783, 0.9788, 0.9793, 0.9798, 0.9803, 0.9808, 0.9812, 0.9817
],
[2.1, 0.9821, 0.9826, 0.9830, 0.9834, 0.9838, 0.9842, 0.9846, 0.9850, 0.9854, 0.9857
],
[2.2, 0.9861, 0.9864, 0.9868, 0.9871, 0.9875, 0.9878, 0.9881, 0.9884, 0.9887, 0.9890
],
[2.3, 0.9893, 0.9896, 0.9898, 0.9901, 0.9904, 0.9906, 0.9909, 0.9911, 0.9913, 0.9916
],
[2.4, 0.9918, 0.9920, 0.9922, 0.9925, 0.9927, 0.9929, 0.9931, 0.9932, 0.9934, 0.9936
],
[2.5, 0.9938, 0.9940, 0.9941, 0.9943, 0.9945, 0.9946, 0.9948, 0.9949, 0.9951, 0.9952
],
[2.6, 0.9953, 0.9955, 0.9956, 0.9957, 0.9959, 0.9960, 0.9961, 0.9962, 0.9963, 0.9964
],
[2.7, 0.9965, 0.9966, 0.9967, 0.9968, 0.9969, 0.9970, 0.9971, 0.9972, 0.9973, 0.9974
],

[2.8, 0.9974, 0.9975, 0.9976, 0.9977, 0.9977, 0.9978, 0.9979, 0.9979, 0.9980, 0.9981
],
[2.9, 0.9981, 0.9982, 0.9982, 0.9983, 0.9984, 0.9984, 0.9985, 0.9985, 0.9986, 0.9986
]]

10.6.5. PÉLDA. Az $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ eloszlás függvény számítása a $\Phi(x)$ függvénnyel

- (i) Vezessük vissza az általános $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normál $F_X(x)$ eloszlás eloszlásfüggvény értékeinek kiszámítását a $\Phi(x)$ függvény megfelelő helyen vett értékeinek kiszámítására.
(ii) Igazoljuk a $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ tulajdonságot a standard normál eloszlásfüggvényére.

Megoldás

(i) Ha $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normál eloszlású változó $E(X) = \mu$ várható értékkel és $\sigma(X) = \sigma$ szórással, akkor a $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ normál eloszlású. Ezért

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x - \mu}{\sigma}} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

minden $-\infty < x < \infty$ esetén.

(ii) Mivel $\phi(z)$ szimmetrikus az y -tengelyre, ezért tetszőleges $z > 0$ esetén

$$\Phi(-z) = \int_{-\infty}^{-z} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt = \int_z^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt = 1 - \Phi(z).$$

Ezt a Maple "is" eljárása is megerősíti!

> is(Phi(-z) = 1 - Phi(z))

true

(1.6.10)

10.6.6. TÉTEL. A NORMÁL ELOSZLÁS ZÁRT A LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓRA

Ha $X \sim N(\mu, \sigma)$ és $Y = a + bX$, akkor $Y \sim N(a + b\mu, |b| \cdot \sigma)$.
(lásd 10.6.13. tétel)

A normál eloszlás központi szerepét mutatja az alábbi tétel. (lásd részletesebben a 13. fejezetben)

10.6.7. Centrális Határeloszlás Tétel.

Ha $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, közös μ várható értékkel és σ standard szórással, akkor az

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \mu}{\sigma \sqrt{n}}$$

valószínűségi változók $F_{Y_n}(x)$ eloszlásfüggvényeinek sorozata minden x esetén és n végtelenbe tartása mellett az $N(0, 1)$ standard normál eloszlás $\Phi(x)$ eloszlás függvényéhez konvergál, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n < x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \mu}{\sigma \sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt, \text{ minden } x\text{-re.}$$

A centrális határeloszlás -tétel alapján diszkrét eloszlások értékeit kiszámolhatjuk normál eloszlás segítségével. Diszkrét eloszlások közül a binomiális és a Poisson-eloszlások azok, amelyekre külön kiemeljük ezeket a közelítő számításokat!

10.6.8. BINOMIÁLIS ÉS POISSON ELOSZLÁSOK KÖZELÍTÉSE NORMÁL ELOSZLÁSSAL

Az alábbi tételek szemléltető bizonyítását láttuk a diszkrét valószínűségek animációinál illetve a 13. fejezetben!

10.6.8.1. TÉTEL. Ha $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, akkor a $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ valószínűségi változó tart az $N(0,1)$ standard normál eloszlás eloszlásfüggvényéhez, midőn n tart végtelenbe.

10.6.8.2. TÉTEL. Ha $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, akkor a λ várható érték növekedésével a $Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$

standardizált valószínűségi változó tart az $N(0,1)$ standard normális eloszlás eloszlásfüggvényéhez.

A Poisson-eloszlás és a normál eloszlás közelítőleges egyenlőségéből levezethetjük a nevezetes Stirling-formulát, amely $n!$ értékét jól közelíti nagy n esetén.

10.6.9. TÉTEL. Stirling-formula

Az $n!$ faktoriális értékek aszimptotikus egyenlősége

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$$

levezethető a Poisson-eloszlás és a normál eloszlás közelítése alapján

Bizonyítás

Vegyünk fel egy X Poisson eloszlású véletlen változót, melynek $\lambda > 0$ a várható értéke: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

> *restart* :

> *with(Statistics)* :

> $X := \text{RandomVariable}(\text{Poisson}(\lambda))$: $pX := \text{unapply}(\text{ProbabilityFunction}(X, k), k)$:
Poisson_eloszlás = pX(u)

$$Poisson_eloszlás = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{\lambda^u e^{-\lambda}}{u!} & otherwise \end{cases} \quad (1.6.11)$$

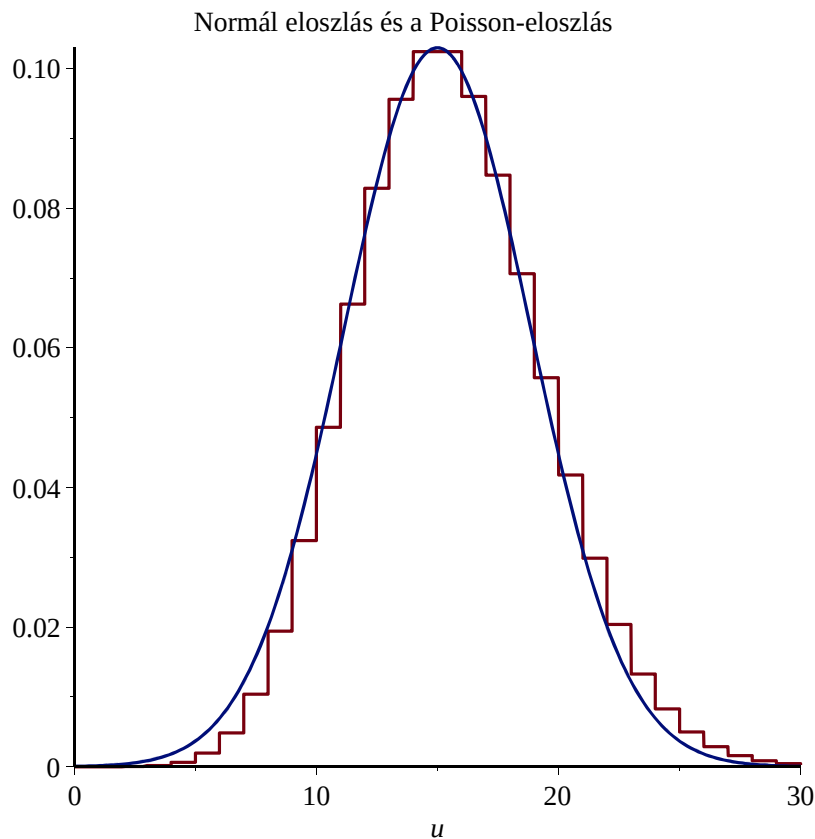
Mivel a Poisson -eloszlás szórása a paraméter négyzetgyöke, ezért vegyünk fel egy Y normál eloszlású véletlen változót is, melynek várható értéke $\lambda = m$ és szórása $\sqrt{\lambda} = \sigma$: $Y \sim \text{Normal}(\lambda, \sqrt{\lambda})$. Így X és Y várható értéke is és szórása is azonos!

> $Y := \text{RandomVariable}(\text{Normal}(\text{lambd}, \text{sqrt}(\text{lambd})))$;
 $fY := \text{unapply}(\text{PDF}(Y, u), u)$: Normál_eloszlás = $fY(u)$;

$$Normál_eloszlás = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(u-\lambda)^2}{\lambda}} \quad (1.6.12)$$

Rajzoljuk fel X eloszlását és Y sűrűség függvényét $\lambda = 15$ értékre, hogy a közelítő egyenőséget szemléltessük!

> $\text{plot}(\text{subs}(\lambda = 15, [pX(\text{trunc}(u)), fY(u)]), u = 0..30, \text{title} = \text{"Normál eloszlás és a Poisson-eloszlás"})$;



A rajz alapján világos, hogy a két eloszlás jól közelíti egymást, különösen az $u=\lambda$ maximum hely közelében! Ezért felírjuk a két eloszlás közelítését az u helyen, majd az $u=\lambda$ helyettesítés mellett.

> *eloszlasok* := *op*(3, *pX*(*u*)) = *fY*(*u*);
helyettesites := *eval*(*eloszlasok*, *u* = *lambda*);

$$\begin{aligned} \text{eloszlasok} &:= \frac{\lambda^u e^{-\lambda}}{u!} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(u-\lambda)^2}{\lambda}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda}} \\ \text{helyettesites} &:= \frac{\lambda^\lambda e^{-\lambda}}{\lambda!} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda}} \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

A Stirling - formulát ebből a $\lambda!$ értékének kifejezésével kapjuk, ha $\lambda = n$ helyettesítést vesszük.

> *Stirling* := *subs*($\lambda = n$, *isolate*(*helyettesites*, *lambda*!))

$$\text{Stirling} := n! = \sqrt{\pi} \sqrt{n} n^n e^{-n} \sqrt{2} \quad (1.6.14)$$

Megkaptuk a **faktoriális** értékét közelítő **Stirling** - formulát nemcsak annak alábbi **első rendű közelítését**

$$n! \sim \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

hanem a korrekciós tényezőt is

$$n! \sim \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2 \pi n} .$$

Számoljuk ki a faktoriálisok és a Stirling közelítések értékeit rendre $n=3$ és $n=20$ között! Nagy számok esetén a faktoriálisokat kézzel sokáig tartana kiszámolni, viszont a közelítések kisebb számítás igényűek!

> *faktorialisok* := *seq*(*lhs*(*Stirling*), $n = 3 \dots 20$)

> *kozelitesek* := *seq*(*floor*(*evalf*(*rhs*(*Stirling*))), $n = 3 \dots 20$)

faktorialisok := 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, 39916800, 479001600,
6227020800, 87178291200, 1307674368000, 20922789888000, 355687428096000,
6402373705728000, 121645100408832000, 2432902008176640000

kozelitesek := 5, 23, 118, 710, 4980, 39902, 359536, 3598695, 39615625, 475687486, (1.6.15)
6187239474, 86661001780, 1300430721000, 20814114400000, 353948328600000,
6372804624000000, 121112786600000000, 2422786846000000000

Jobban érzékelteti a pontosság növekedését a hányadosok értékeinek sorozata.

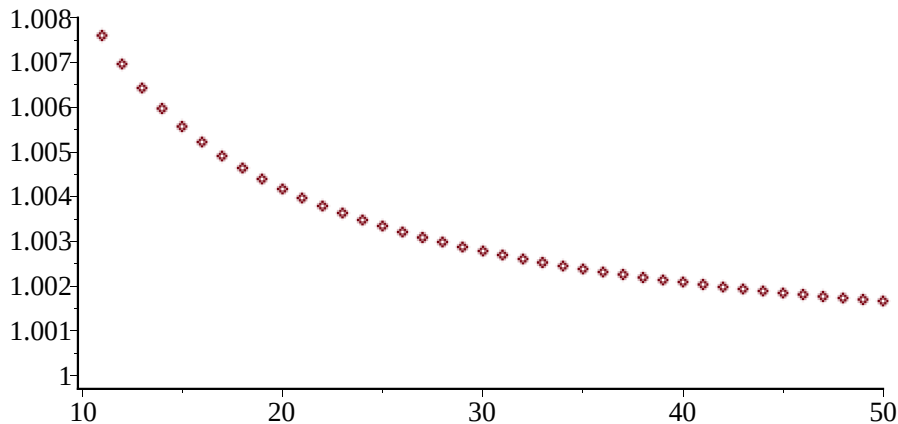
> *hanyadosok* := [*seq*($[n, \text{evalf}(\text{lhs}(\text{Stirling}) / \text{rhs}(\text{Stirling}))]$), $n = 10 \dots 50$];

hanyadosok := [[10, 1.008365359], [11, 1.007602428], [12, 1.006966997], [13, 1.006429575], [14, 1.005969115], [15, 1.005570189], [16, 1.005221239], [17, 1.004913427], [18, 1.004639885], [19, 1.004395190], [20, 1.004175010], [21, 1.003975837], [22, 1.003794800], [23, 1.003629531], [24, 1.003478056], [25, 1.003338717], [26, 1.003210111], [27, 1.003091046], [28, 1.002980496], [29, 1.002877581], [30, 1.002781536], [31, 1.002691695], [32, 1.002607475], [33, 1.002528366], [34, 1.002453915], [35, 1.002383724], [36, 1.002317437], [37,

```
1.002254735], [38, 1.002195338], [39, 1.002138989], [40, 1.002085462], [41,
1.002034547], [42, 1.001986058], [43, 1.001939828], [44, 1.001895701], [45,
1.001853536], [46, 1.001813207], [47, 1.001774595], [48, 1.001737593], [49,
1.001702103], [50, 1.001668034]]
```

> *plot(hanyadosok, style = point, view = [10 ..50, 1.008 ..0.9998], title
= A Stirling közelítések a faktoriálisokat relatív értelemben egyre jobban közelítik);*

A Stirling közelítések a faktoriálisokat relatív értelemben egyre jobban közelítik



A Stirling - formula segítségével a binomiális együtthatókra is levezethető közelítő formula. Nézzünk néhány tipikus példát a normál eloszlás alkalmazására.

10.6.10. PÉLDA. Hiba analízis

Csavarok gépi gyártása során mért nagy mennyiségű független hiba alapján arra a következtetésre jutottak, hogy a gyártásnál kapott méretek normál eloszlást követnek $m = 11$ centiméter várható értékkel és $\sigma = 0.2$ centiméter szórás hibával. Ha a követelmények azt írják elő, hogy a hosszak 10.6 és 11.2 centiméter között kell lenni, akkor milyen arányban lesznek hibásak a gyártott csavarok?

Megoldás

Jelölje X a legyártott csavar hosszát! Mérések szerint X eloszlása jól közelíthető az $N(11, 0.2)$ normál eloszlással!

> *restart : with(Statistics) :*

> *X := RandomVariable(Normal(11, 0.2)) :*

X := _R

(1.6.17)

Számoljuk annak valószínűségét, hogy a csavarok hossza az előírt [10.6;11.2] intervallumba esnek! Ezt a sűrűségfüggvény ezen intervalluma alatti területével vagy az eloszlásfüggvény két értékének különbségével kapjuk meg! Számoljunk az utóbbival!

> *a, b := 10.6, 11.2;*

> *P(a < 'X' < b) := CDF(X, b) - CDF(X, a)*

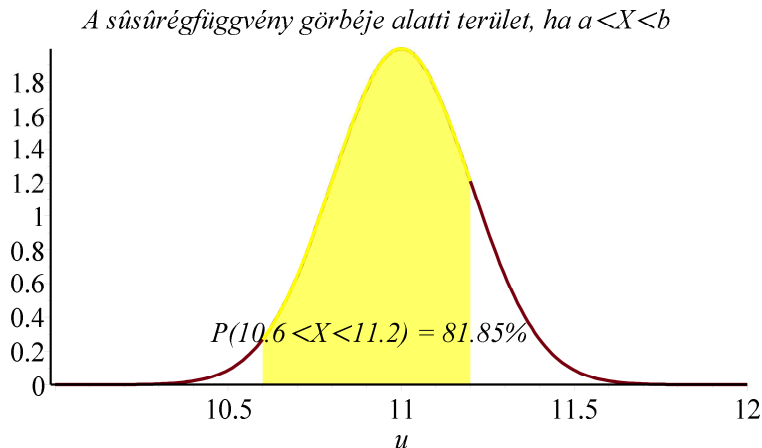
a, b := 10.6, 11.2

P(10.6 < X and X < 11.2) := 0.818594614120363

(1.6.18)

Szemléltessük a valószínűséget a sűrűségfüggvény görbéje alatti terület befestésével!

```
> rajz1 := plot(PDF(X, u), u = a..b, color = yellow, filled = true) :
  rajz2 := plot(PDF(X, u), u = 10..12) :
  szoveg := plots[textplot]([10.91, 0.3, `P(10.6 < X < 11.2) = 81.85%`]) :
  plots[display]([rajz2, rajz1, szoveg], title
    = A sűrűségfüggvény görbéje alatti terület, ha a < X < b );
```



A feladat a kiegészítő esemény $P(\{X \leq 10.6\} \text{ vagy } \{11.2 < X\})$ valószínűségét kérdezi, amely a hibás csavarok gyártásának aránya.

```
> Hibás csavarok(%) = (1 - P(a < 'X' < b)) * 100;
```

Hibás csavarok(%) = 18.1405385879637

(1.6.19)

Tehát ilyen gyártás mellett a csavarok közelítőleg 18%-a hibás lesz!

10.6.11. PÉLDA. Digitális jelek additív zaj vizsgálata

Tegyük fel, hogy egy digitális jel vétele során a háttér zaj feszültségének értéke normál eloszlású, melynek várható értéke 0 (Volt) és standard szórása 0.45 (Volt). A rendszer feltételezi, hogy a digitális 1 jelet küldték, ha a jel feszültség szintje meghaladja a 0.9 volt értéket. A digitális 0 értéket a $[0; 0.9]$ volt tartományban kapjuk.

(a) Mekkora valószínűséggel jelez digitális 1 értéket a berendezés, a zaj miatt, amikor nem is küldtek semmit?

(b) Határozzuk meg 0 körül azt a szimmetrikus korlátot, amelyen belül a zaj feszültség szintje 99%-os megbízhatósággal belül marad!

Megoldás

Jelölje X a véletlen zaj feszültség szintjét voltokban mérve! A feltételezés szerint $X \sim N(0; 0.45)$.

(a) Ha a zaj X értéke meghaladja a 0.9 volt értéket, akkor a berendezés digitális 1 jelet érzékel, holott ez csak a zaj miatt van és nem a küldött jel miatt. Számítsuk ki a $P(X > 0.9)$ valószínűséget a

$$P(X > 0.9) = 1 - \text{CDF}(X, 0.9)$$

képlettel, ahol $\text{CDF}(X, x)$ az eloszlásfüggvény értéke az x helyen!

```
> restart : with(Statistics) :
```

```
> X := RandomVariable(Normal(0, 0.45)) :
```

```
> P(0.9 < 'X') := 1 - CDF(X, 0.9)
```

(1.6.20)

$$P(0.9 < X) := 0.0227501319481792 \quad (1.6.20)$$

Ugyanezt **kézi számítás** mellett a $Z \sim N(0,1)$ standard normál eloszlás $\Phi(x)$ eloszlásfüggvény értékének kiszámítására kell visszavezetni, mert csak ennek érték táblázatát ismerjük.

$$> Z := \frac{X}{0.45} :$$

$$> \Phi(u) = \int_{-\infty}^u PDF(Z, t) dt$$

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \frac{0.5000000000 \sqrt{2} e^{-0.4999999999 t^2}}{\sqrt{\pi}} dt \quad (1.6.21)$$

Elvégezzük a standardizálást, kiszámoljuk u értékét, majd $\Phi(u)$ értékét kivonjuk 1-ből

$$P(X > 0.9) = P\left(\frac{X}{0.45} > 2\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - \Phi(2).$$

$$> u = 0.9 / 0.45; \Phi(lhs(\%)) = CDF(Z, rhs(\%)); 1 - \%;$$

$$u = 2.0000000000$$

$$\Phi(u) = 0.9772498681$$

$$-\Phi(u) + 1 = 0.0227501319 \quad (1.6.22)$$

Tehát a berendezés az esetek 2.27% -ában a zaj miatt jelez 1 értéket! Ennek a kiegészítő eseményének valószínűsége a hibátlan működést adja meg.

$$> \text{Hibátlan működés} = 1 - rhs(\%);$$

$$\text{Hibátlan működés} = 0.9772498681 \quad (1.6.23)$$

Szemléltessük a hibátlan és a zaj miatti hibás működés arányát a sűrűség függvény görbéje alatti megfelelő területek befestésével!

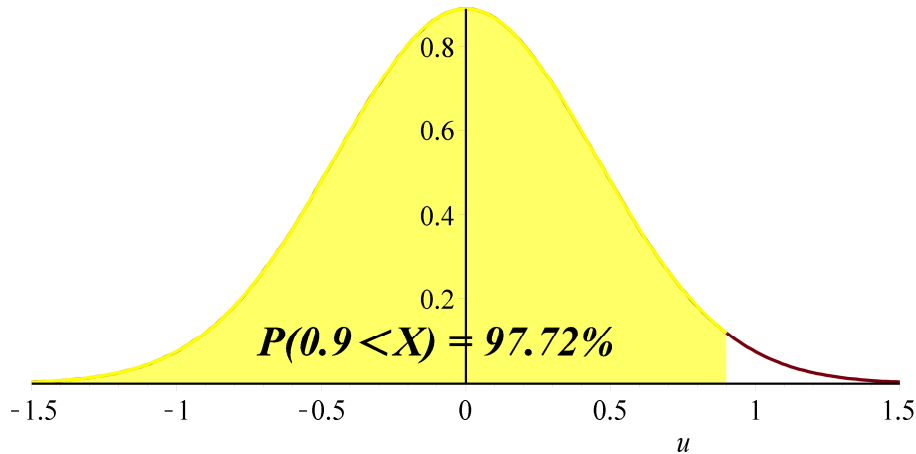
$$> \text{rajz1} := \text{plot}(PDF(X, u), u = -1.5 .. 0.9, color = yellow, filled = true, tickmarks = [default, [0.2, 0.4, 0.6, 0.8]]);$$

$$\text{rajz2} := \text{plot}(PDF(X, u), u = -1.5 .. 1.5);$$

$$\text{szoveg} := \text{plots}[\text{textplot}]([-0.1, 0.1, 'P(0.9 < X) = 97.72\%', 'font' = ["times", "roman", "bold", 16]]);$$

$$\text{plots}[\text{display}]([\text{rajz2}, \text{rajz1}, \text{szoveg}], title = \text{Görbe alatti terület, ha } X < 0.9);$$

Görbe alatti terület, ha $X < 0.9$



(b) Keressük azt a ' $z > 0$ ' értéket, amelyre $P(-z < X < z) = 0.99$ teljesül!
Mivel $P(-z < X < z) = CDF(X, z) - CDF(X, -z)$, ezért felírjuk az eloszlás függvényével az egyenletet, majd megoldjuk **fsolve** segítségével közelítőleg az egyenletet z -re!

> $z := 'z' : \text{egyenlet} := 0.99 = CDF(X, z) - CDF(X, -z)$

> $z := \text{fsolve}(\text{egyenlet}, z)$

$\text{egyenlet} := 0.99 = \text{erf}\left(1.111111111 z \sqrt{2}\right)$

$z := 1.159123187$

(1.6.24)

A kapott $z = 1.159$ közelítő értéket rajzoljuk fel 0 körül szimmetrikusan a sűrűség függvényhez!

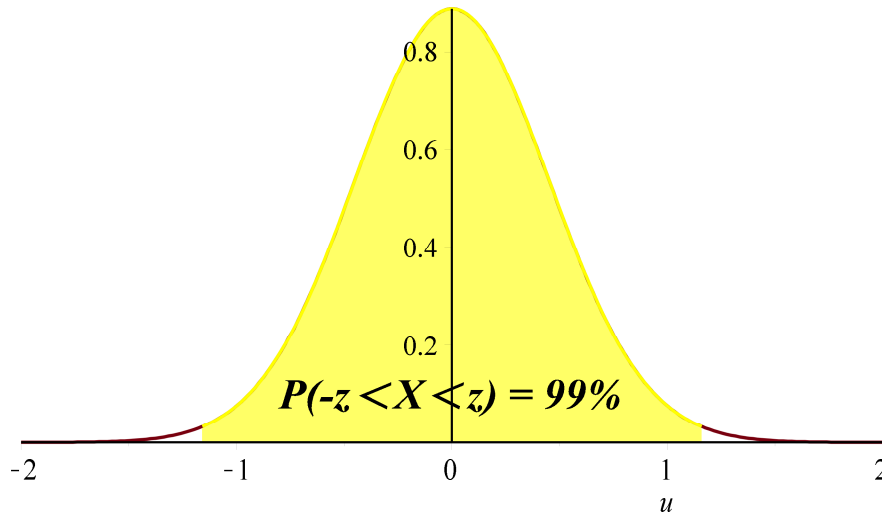
> $\text{rajz1} := \text{plot}(PDF(X, u), u = -z..z, \text{color} = \text{yellow}, \text{filled} = \text{true}, \text{tickmarks} = [\text{default}, [0.2, 0.4, 0.6, 0.8]]) :$

$\text{rajz2} := \text{plot}(PDF(X, u), u = -2..2) :$

$\text{szoveg} := \text{plots}[\text{textplot}]([0, 0.1, 'P(-z < X < z) = 99\%', \text{font}' = ["times", "roman", "bold", 16]]) :$

$\text{plots}[\text{display}]([\text{rajz2}, \text{rajz1}, \text{szoveg}], \text{title} = \text{Görbe alatti terület, ha } P(-z < X < z) = 0.99 \text{ adott});$

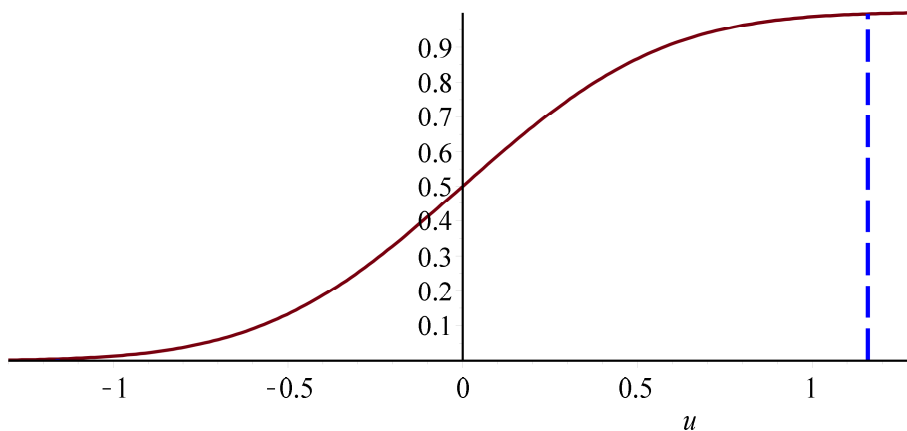
Görbe alatti terület, ha $P(-z < X < z) = 0.99$ adott



Tehát a zaj értéke 99%-os megbízhatósággal a [-1.59 Volt; 1.59 Volt] feszültség értékek között lesz. Ezért, igazíthatjuk ezekhez az értékekhez is a berendezés digitális 1 érzékelését! Szemléltessük ugyanezt a 99%-os megbízhatóság értéket az eloszlás függvénnyel!

> $F := \text{plot}(\text{CDF}(X, u), u = -1.3 \dots 1.3) :$
 $\text{helyek} := \text{plot}([[-z, 0], [-z, \text{CDF}(X, -z)]], [[z, 0], [z, \text{CDF}(X, z)]]], \text{linestyle} = 3, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 2) :$
 $\text{plots}[\text{display}]([F, \text{helyek}], \text{scaling} = \text{constrained}, \text{title} = \text{Az } F \text{ eloszlás függvényre } F(z) - F(-z) = 0.99);$

Az F eloszlás függvényre $F(z) - F(-z) = 0.99$



Tehát a zajszint feszültség értéke az esetek 99%-ában a [-1.159(Volt); 1.159(Volt)] intervallumon belül marad! Természetesen, ha a feszültség szint átlépi a 0.9 [V] értéket, akkor a nulla jelet torzítja a zaj 1 jellé.

Megjegyzés: Az is előfordulhat, hogy a berendezés 1 jelet ad és a háttérzaj feszültség értéke olyan nagy negatív érték, hogy digitális nulla lesz az 1 jelből!

10.6.12. PÉLDA. Terhességi vizsgálatok

Statisztikai mérések alapján egy terhesség időtartama normál eloszlású $\mu = 270$ nap várható értékkel és $\sigma = 10$ nap szórással. Egy tengerész feleség világra hozott egy gyermeket. Kiderült, hogy a férj úton volt a szülés előtti 290 és 240 napok között. Mekkora a valószínűsége, hogy a gyermek akkor fogant, amikor a tengerész otthon volt?

Megoldás

Legyen T az aktuális terhesség időtartama napokban. Mivel T pontos értéke ismeretlen, ezért a statisztikai számításokra támaszkodhatunk $T \sim N(270, 10)$. A feladat szerint a tengerész otthon tartózkodásának eseménye megadható

$$\{T < 240\} \cup \{T > 290\}$$

időtartamok uniójaként. Tehát a keresett valószínűség visszavezetve a standard normál eloszlásra

$$\begin{aligned} P(\{T < 240\} \cup \{T > 290\}) &= P\left(\left\{\frac{T-270}{10} < -3\right\} \cup \left\{\frac{T-270}{10} > 2\right\}\right) = \\ &= P(Z < -3) + P(Z > 2) = \Phi(-3) + (1 - \Phi(2)) = (1 - \Phi(3)) + (1 - \Phi(2)) = \\ &= 2 - (\Phi(2) + \Phi(3)) \approx 2 - 0.9772498 - 0.9986501 = 0.0241. \end{aligned}$$

Nézzük, hogyan számolunk Maple-ben! Definiáljuk a terhesség T valószínűségi változóját, majd használjuk a *Probability* eljárást!

> *restart : with(Statistics) :*

> *T := RandomVariable(Normal(270, 10)) :*

> *evalf(Probability(T < 240) + Probability(T > 290)) ;*

0.0241000300

(1.6.25)

Tehát kb. 2.4% az esély arra, hogy a gyermek akkor fogant, amikor a férj otthon volt. Mit gondol az olvasó, hogy a tengerész örült-e a gyermekáldásnak, amikor mindezt kiszámolta? ♣

A normál eloszlás használhatósága abban is rejlik, hogy tetszőleges számú (nem feltétlenül független) normál eloszlású valószínűségi változók összege is normál eloszlású.

Igazoljuk Maple segítségével két X_1 és X_2 változó esetére!

10.6.13. TÉTEL. Két normál eloszlás lineáris kombinációja normál eloszlás

(i) Ha $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ és $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$, akkor

$$X_1 + X_2 \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$

(ii) Ha $X \sim N(\mu, \sigma)$ és $a \in \mathbb{R}$ valós szám, akkor

$$a \cdot X \sim N(a \cdot \mu, |a| \cdot \sigma)$$

Bizonyítás

> *restart : with(Statistics) :*

> *X1 := RandomVariable(Normal(mu1, sigma1)) : X2 := RandomVariable(Normal(mu2, sigma2)) :*

> *Sűrűségek = PDF(X1, u), PDF(X2, u) ;*

$$\text{Sűrűségek} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sigma_1} e^{-\frac{1}{2} \frac{(u - \mu_1)^2}{\sigma_1^2}}, \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(u - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}} \quad (1.6.26)$$

Képezzük az $S = X_1 + X_2$ összeg valószínűségi változót és kérdezzük meg a sűrűség függvényét!

> $S := X1 + X2;$
 $f_S(u) = \text{factor}(\text{PDF}(S, u));$

$$S := _R + _R0$$

$$f_S(u) = \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(u - \mu_2 - \mu_1)^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}} \sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}} \quad (1.6.27)$$

A Maple feltételezi, hogy $X1$ és $X2$ függetlenek! Ezért

$$E(X1 + X2) = E(X1) + E(X2) \text{ és } \text{Var}(X1 + X2) = \text{Var}(X1) + \text{Var}(X2).$$

Képezzük azt a Z normál eloszlású valószínűségi változót, melynek várható értéke $X1$ és $X2$ várható értékeinek összege, és varianciája $X1$ és $X2$ varianciájának összege.

> $Z := \text{RandomVariable}(\text{Normal}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}));$
 > $f_Z(u) = \text{PDF}(Z, u)$

$$f_Z(u) = \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{(u - \mu_2 - \mu_1)^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}} \sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}} \quad (1.6.28)$$

Ennek sűrűség függvénye megegyezik a fenti S változó sűrűség függvényével! Tehát $Z=S$ és az összeg normál eloszlású.

Képezzük az $X1$ valószínűségi változó a -szorosát!

> $T := a \cdot X1;$
 $f_T(u) = \text{PDF}(T, u);$

$$f_T(u) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{u}{a} - \mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}}}{|a| \sqrt{\pi} \sigma_1} \quad (1.6.29)$$

Tudjuk, hogy $E(a \cdot X_1) = a \cdot E(X_1)$ és $\text{Var}(a \cdot X_1) = a^2 \cdot \text{Var}(X_1)$. Ezért képezzük annak az Y normál eloszlású valószínűségi változót, melynek várható értéke $a \mu_1$, és szórása $|a| \sigma_1$.

> $Y := \text{RandomVariable}(\text{Normal}(a \mu_1, |a| \sigma_1));$
 > $f_Y(u) = \text{PDF}(Y, u)$

$$f_Y(u) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(u - a \mu_1)^2}{|a|^2 \sigma_1^2}}}{\sqrt{\pi} |a| \sigma_1} \quad (1.6.30)$$

Mivel T és Y sűrűség függvénye azonos, ezért $T = a \cdot X_1$ normál eloszlású. Q.e.d.

▼ 10.7. Khi-négyzet eloszlás

Khi-négyzet eloszlást használunk, ha

- (a) a statisztikai minta szórására konfidencia intervallumot szeretnénk meghatározni (lásd 15.3. fejezet)
- (b) az elméleti modell eloszlását szeretnénk tesztelni, hogy egyezik-e a minta eloszlásával (lásd 14.9. fejezet)
- (c) az illesztés jóságának tesztje esetén (lásd 16.7. fejezet)

10.7.1. DEFINÍCIÓ. Khi-négyzet eloszlás

Az $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ valószínűségi változók legyenek azonos $N(0,1)$ standard normál eloszlásúak és függetlenek. Ekkor az

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

négyzetösszeg valószínűségi változó eloszlását nevezzük χ^2 -(khi-négyzet) eloszlásnak, ahol n értékét szabadsági foknak nevezzük.

A sűrűség függvényt $k_n \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ alakú függvényekkel adhatjuk meg, ahol $k_n > 0$ konstans x -től független.

10.7.2. TÉTEL. Khi-négyzet eloszlás sűrűségfüggvénye

Ha X_n khi-négyzet eloszlású valószínűségi változó **n-szabadsági fokkal**, azaz $X_n \sim \chi_n^2$, akkor

(i) X lehetséges értékei nem negatívak, azaz $0 \leq X_n$ és

(ii) sűrűség függvénye

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & x > 0 \end{cases}$$

Bizonyítás

A *Statistics* csomag segítségével megmutatjuk, hogy két független $N(0,1)$ standard normál eloszlás négyzetösszege χ^2 -eloszlás $n=2$ szabadságfokkal.

> *restart : with(Statistics) :*

X1 := RandomVariable(Normal(0, 1)) : X2 := RandomVariable(Normal(0, 1)) :

S := X1^2 + X2^2 : n := 2;

> *a négyzetösszeg sűrűség függvénye = PDF(S, x);*

> *n=2 szabadságfokú khi-négyzet eloszlás sűrűség függvénye = PDF(ChiSquare(n), x)*

n := 2

$$a \text{ négyzetösszeg sűrűség függvénye} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} & 0 < x \end{cases}$$

$$n=2 \text{ szabadságfokú khi-négyzet eloszlás sűrűség függvénye} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.7.1)$$

Megjegyezzük, ez a sűrűség függvény megegyezik a $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterű exponenciális eloszlású sűrűség függvényével.

Hasonlóan három független $N(0,1)$ standard normál eloszlás négyzetösszege χ^2 -eloszlás $n=3$ szabadságfokkal.

> $X3 := \text{RandomVariable}(\text{Normal}(0, 1)) : S := S + X3^2 :$
 > $\text{PDF}(S, u); n := n + 1;$
Chi²-eloszlás sűrűség függvénye = PDF(ChiSquare(n), u)

$$\text{Chi}^2\text{-eloszlás sűrűség függvénye} = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{u} \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}u} & 0 < u \end{cases} \quad n := 3 \quad (1.7.2)$$

További összegzéssel igazolhatjuk a χ^2 -eloszlás eredetét a normál eloszlásból! Q.e.d.

10.7.3. TÉTEL. Khi-négyzet eloszlás várható értéke és szórása

Ha X_n khi-négyzet eloszlású valószínűségi változó **n-szabadsági fokkal**, akkor a várható értéke

$$E(X_n) = n$$

szórása

$$\sigma(X_n) = \sqrt{2 \cdot n}.$$

Bizonyítás

Számítsuk ki a várható értéket és a varianciát a *Statistics* csomag *Mean* és *Variance* eljárásokkal!

> *restart : with(Statistics) :*
 > $X := \text{RandomVariable}(\text{ChiSquare}(n)) :$
Várható érték = Mean(X);
 > *`Variancia` = Variance(X)*

$$\text{Várható érték} = n$$

$$\text{Variancia} = 2n$$

(1.7.3)

Q.e.d.

10.7.4. PÉLDA.

Szemléltessük a khi-négyzet eloszlás **sűrűség függvény** grafikonjait különböző n szabadság fokkal.

Megoldás

Nézzük előbb szimbolikusan, majd n értékét változtassuk!

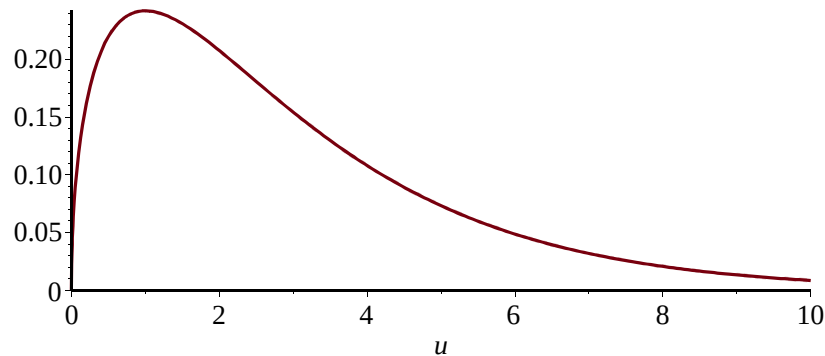
> *restart : with(Statistics) :*

> $X := \text{RandomVariable}(\text{ChiSquare}(n))$: Sűrűség függvény = $\text{PDF}(X, u)$

$$\text{Sűrűség függvény} = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{u^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}u}}{2^{\frac{1}{2}n} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.7.4)$$

Nézzük az $n=3$ esetet!

> $\text{plot}(\text{subs}(n = 3, \text{PDF}(X, u)), u = 0..10);$



> $\text{surusegek} := [\text{seq}(\text{PDF}(X, u), n = 2..8)];$

$$\text{surusegek} := \left[\begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}u} & \text{otherwise} \end{cases}, \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{u} e^{-\frac{1}{2}u}}{\sqrt{\pi}} & \text{otherwise} \end{cases}, \right. \quad (1.7.5)$$

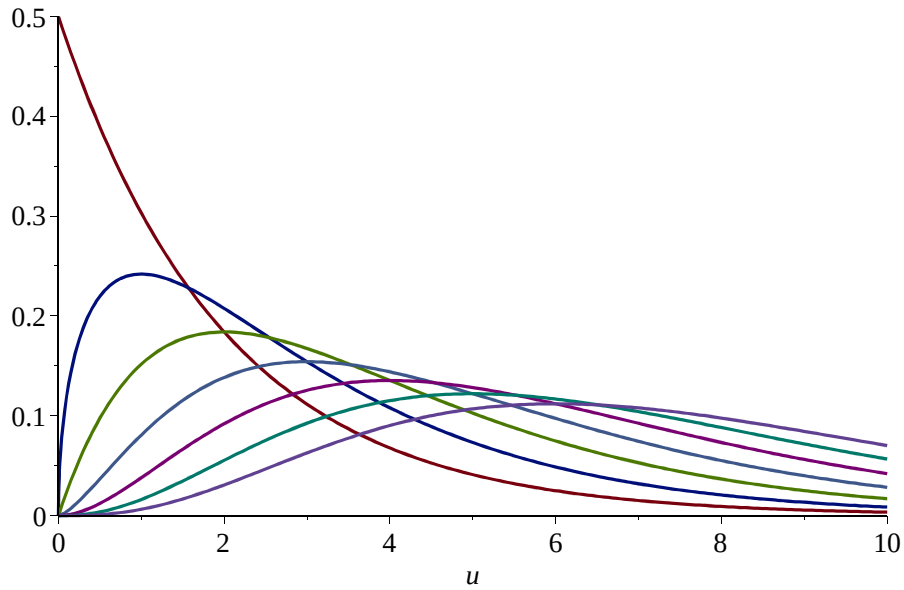
$$\left. \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{1}{4} u e^{-\frac{1}{2}u} & \text{otherwise} \end{cases}, \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{1}{6} \frac{\sqrt{2} u^{3/2} e^{-\frac{1}{2}u}}{\sqrt{\pi}} & \text{otherwise} \end{cases}, \right.$$

$$\left. \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{1}{16} u^2 e^{-\frac{1}{2}u} & \text{otherwise} \end{cases}, \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{1}{30} \frac{\sqrt{2} u^{5/2} e^{-\frac{1}{2}u}}{\sqrt{\pi}} & \text{otherwise} \end{cases}, \right.$$

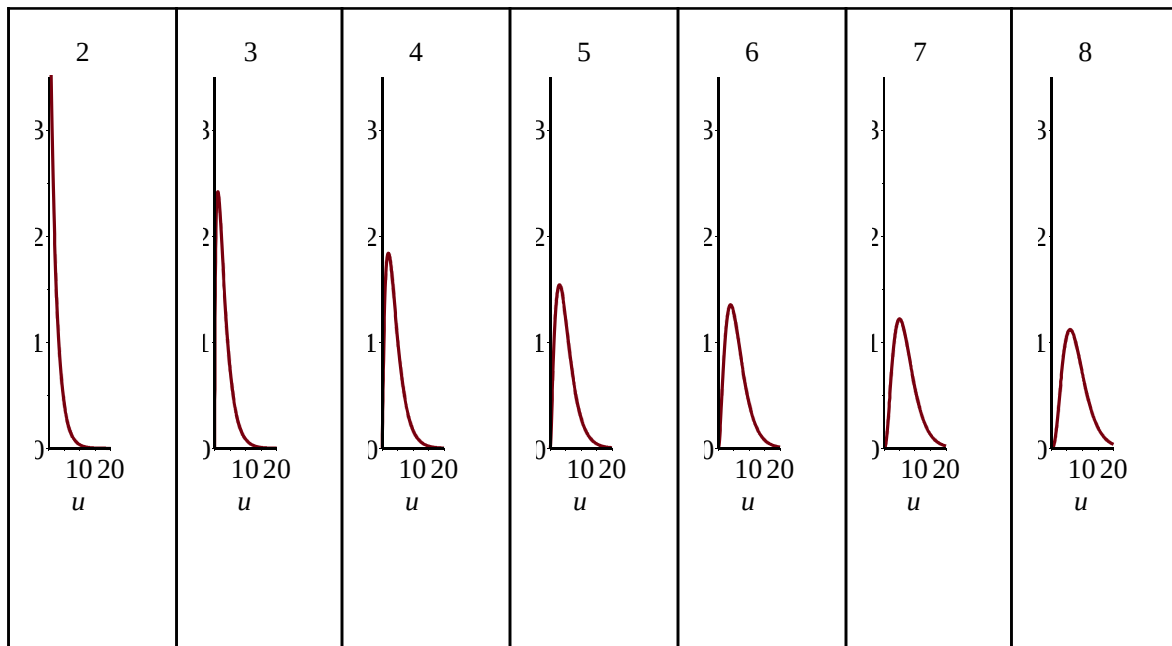
$$\left. \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{1}{96} u^3 e^{-\frac{1}{2}u} & \text{otherwise} \end{cases} \right]$$

> $\text{plot}(\text{surusegek}, u = 0..10, \text{title} = \text{Khi-négyzet eloszlások});$

Khi-négyzet eloszlások



```
> plots[display](Matrix(1, 7, [seq(plot(surusegekn, u = 0 ..20, 0 ..0.35, title = n + 1), n = 1
..7) ]));
```



▼ 10.8. Student t-eloszlás

t-eloszlást használunk normál eloszlás várható értékének intervallum becslése illetve hipotézis tesztjének eldöntése során, amikor a szórást a statisztikai adatokból számoljuk! (lásd 15.3.2.

fejezet)

10.8.1. DEFINÍCIÓ. t-eloszlás vagy Student t-eloszlás

Ha a Z valószínűségi változó $N(0,1)$ eloszlású és X_n eloszlása χ_n^2 khi-négyzet n -szabadsági fokkal, akkor a

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X_n}{n}}}$$

hányados valószínűségi változó eloszlását **t- eloszlásnak** nevezzük n szabadság fokkal.

A sűrűség függvényt $k_n \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$ alakú függvényekkel adhatjuk meg, ahol a $k_n > 0$

konstans x -től független.

10.8.2. TÉTEL. A t-eloszlás sűrűség függvénye

Ha X t-eloszlású n -szabadsági fokkal vagyis $X \sim T_n$, akkor

(i) X értéke tetszőleges valós szám lehet $X \in (-\infty, \infty)$

(ii) sűrűség függvénye $f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{n}{2}}}$

Bizonyítás

A *Statistics* csomag segítségével generálunk egy $Z \sim N(0, 1)$ standard normál eloszlású változót és

egy $X_n \sim \chi_n^2$ khi-négyzet eloszlású változót. Mivel a $T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X_n}{n}}}$ változó sűrűség függvényét a

Maple nem tudja megadni, ezért kénytelenek vagyunk az integrálszámítás eszközrendszerét bevetni.

```
> restart :
  with(Statistics) :
  Z := RandomVariable(Normal(0, 1)) :
  Xn := RandomVariable(ChiSquare(n)) :
> g := unapply(PDF(Z, u), u) : 'g'(u) = g(u);
> k := unapply(PDF(Xn, v), v) : 'k'(v) = k(v)
```

$$g(u) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2} u^2}}{\sqrt{\pi}}$$

$$k(v) = \begin{cases} 0 & v < 0 \\ \frac{v^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}v}}{2^{\frac{1}{2}n} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.8.1)$$

Mivel Z és X_n függetlenek, ezért a megfelelő $g(u)$ és $k(v)$ sűrűség függvények segítségével felírjuk a

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X_n}{n}}}$$

változó sűrűség függvényét

$$f_{T_n}(t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \delta\left(t - \frac{u}{\sqrt{\frac{v}{n}}}\right) \cdot g(u) \cdot k(v) \, du \, dv,$$

ahol δ jelöli a Dirac-féle delta függvényt. A kettős integrált írjuk fel szimbolikusan.

$$\text{> } \textit{kettos_integrál} := \textit{int}\left(\textit{int}\left(\textit{Dirac}\left(t - \frac{u}{\sqrt{\frac{v}{n}}}\right) \cdot g(u) \cdot k(v), u = -\infty.. \infty\right), v = 0.. \infty\right)$$

assuming $n > 0$

$$\textit{kettos_integrál} := \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2} \frac{t^2 v}{n}} v^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}v} \sqrt{\frac{v}{n}}}{\sqrt{\pi} 2^{\frac{1}{2}n} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}} dv \quad (1.8.2)$$

A kettős integrálból az u változó szerinti integrált megfejtette a Maple. Ezért a v -szerinti integrálásban kell segíteni. Ehhez alkalmazzuk a

$$v = \frac{2}{1 + \frac{t^2}{n}} \cdot x$$

változó transzformációt és térjünk át az új x változóra!

$$\text{> } f := \textit{simplify}\left(\textit{IntegrationTools:-Change}\left(\textit{kettos_integrál}, v = \frac{2}{1 + \frac{t^2}{n}} \cdot x, x\right), \textit{symbolic}\right)$$

assuming $n > 1$ and $t :: \textit{real}$

$$f := \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n\right) n^{\frac{1}{2}n} (t^2 + n)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \quad (1.8.3)$$

A kapott függvény egyszerűsített alakját hasonlítsuk össze a *Statistics* csomag által a *StudentT* eloszlásra szolgáltatott sűrűség függvénnyel.

> $X := \text{RandomVariable}(\text{StudentT}(n)) : h := \text{PDF}(X, t)$

$$h := \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} n\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{1}{2} n\right) \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} n}} \quad (1.8.4)$$

> $\text{simplify}(f - h, \text{symbolic})$

0

(1.8.5)

A kapott nulla azt jelzi, hogy a Maple bizonyítás sikeres volt. Q.e.d.

10.8.3. TÉTEL. t- eloszlás várható értéke és szórása

Ha T_n t-eloszlású valószínűségi változó **n-szabadsági fokkal**, akkor a várható értéke

$$E(T_n) = n, \text{ ha } n = 2, 3, 4, \dots$$

szórása

$$\sigma(T_n) = \sqrt{\frac{n}{n-2}}, \text{ ha } n = 3, 4, \dots$$

Bizonyítás

Számítsuk ki a várható értéket és a varianciát a *Statistics* csomag *Mean* és *Variance* eljárásokkal!

> $\text{restart} : \text{with}(\text{Statistics}) :$

> $T := \text{RandomVariable}(\text{StudentT}(n)) :$

Várható érték = $\text{Mean}(T)$;

> $\text{'Variancia'} = \text{Variance}(T)$

$$\begin{aligned} \text{Várható érték} &= \begin{cases} \text{undefined} & n \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \text{Variancia} &= \begin{cases} \text{undefined} & n \leq 2 \\ \frac{n}{-2 + n} & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

Tehát a várható érték csak $n \geq 2$ esetén létezik és a szórás csak $n \geq 3$ esetén létezik. Q.e.d.

10.8.4. PÉLDA.

Szemléltessük a khi-négyzet eloszlás **sűrűség függvény** grafikonjait különböző n szabadság fokkal.

Megoldás

Nézzük előbb szimbolikusan, majd n értékét változtassuk!

> $\text{restart} : \text{with}(\text{Statistics}) :$

> $T := \text{RandomVariable}(\text{StudentT}(n)) : \text{Sűrűség függvény} = \text{PDF}(T, x)$

$$\text{Sűrűség függvény} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} n + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{1}{2} n\right) \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{1}{2} n + \frac{1}{2}}} \quad (1.8.7)$$

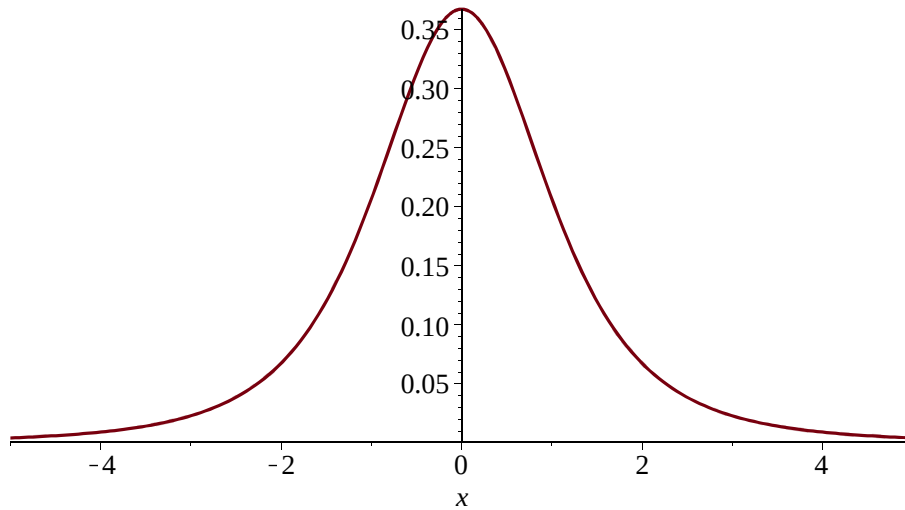
Az n=1 szabadság fokú t-eloszlás megegyezik a (0, 1) paraméterű ún. Cauchy-eloszlással.

> $PDF(StudentT(1), x) = PDF(Cauchy(0, 1), x)$

$$\frac{1}{\pi (1 + x^2)} = \frac{1}{\pi (1 + x^2)} \quad (1.8.8)$$

Nézzük az n=3 esetet!

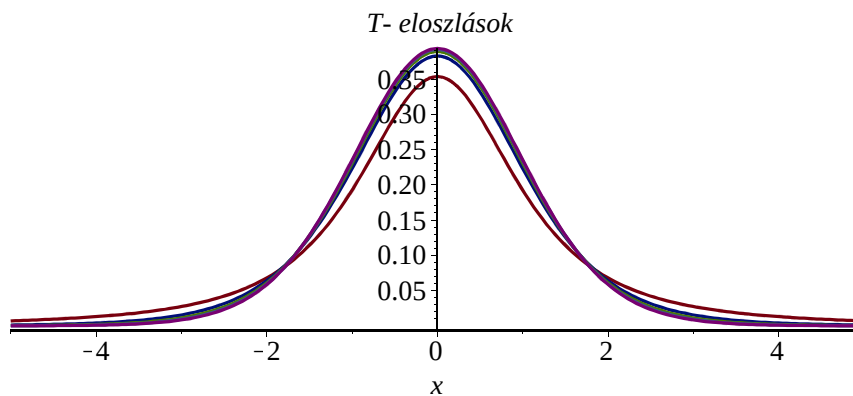
> $plot(subs(n = 3, PDF(T, x)), x = -5 .. 5)$



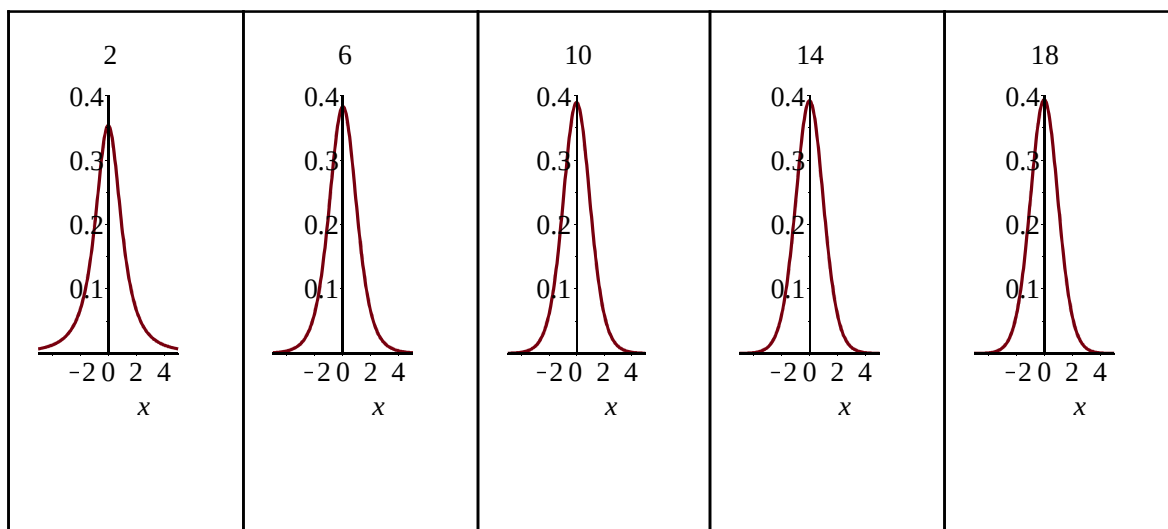
> $surusegek := [seq(PDF(T, x), n = 2 .. 20, 4)];$

$$surusegek := \left[\frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{\left(1 + \frac{1}{2} x^2\right)^{3/2}}, \frac{5}{32} \frac{\sqrt{6}}{\left(1 + \frac{1}{6} x^2\right)^{7/2}}, \frac{63}{512} \frac{\sqrt{10}}{\left(1 + \frac{1}{10} x^2\right)^{11/2}}, \right. \\ \left. \frac{429}{4096} \frac{\sqrt{14}}{\left(1 + \frac{1}{14} x^2\right)^{15/2}}, \frac{12155}{131072} \frac{\sqrt{18}}{\left(1 + \frac{1}{18} x^2\right)^{19/2}} \right] \quad (1.8.9)$$

> $plot(surusegek, x = -5 .. 5, title = T- eloszlások);$



```
> plots[display](Matrix(1, 5, [seq(plot(surusegekn, x=-5..5, 0..0.4, title=4*(n-1)+2), n=1..5)]));
```



▼ 10.9. Elméleti ellenőrző kérdések

- 10.9.1.** Hogyan definiálunk egy valószínűségi változót adott eloszlással a *Statistics* csomag segítségével?
- 10.9.2.** Hogyan használjuk az X változó **sűrűség függvényét** a *Statistics* csomag segítségével?
- 10.9.3.** Hogyan használjuk az X változó **eloszlás függvényét** a *Statistics* csomag segítségével?
- 10.9.4.** Mikor nevezzük az X változót egyenletes eloszlásúnak az $[a, b]$ intervallumon?
- 10.9.5.** Mennyi az $X \sim \text{Uniform}(a, b)$ egyenletes eloszlás várható értéke és szórása?
- 10.9.6.** Mikor nevezzük az X változót exponenciális eloszlásúnak $\lambda > 0$ paraméterrel?
- 10.9.7.** Mennyi az $X \sim \text{Exponential}(\lambda)$ exponenciális eloszlás várható értéke és szórása?
- 10.9.8.** Mit jelent az $X \sim \text{Exponential}(\lambda)$ exponenciális eloszlás emlékezet nélküli tulajdonsága?
- 10.9.9.** Milyen alkalmazásait ismeri az exponenciális eloszlásnak?
- 10.9.10.** Mikor nevezzük az X változót Erlang eloszlásúnak n szabadság fokkal?
- 10.9.11.** Mi a különbség a Gamma eloszlás és az Erlang eloszlás között?
- 10.9.12.** Mennyi az $X \sim \text{Gamma}(\lambda, r)$ gamma eloszlás várható értéke és varianciája?
- 10.9.13.** Mikor nevezzük az X változót normál eloszlásúnak (μ, σ) paraméterekkel?
- 10.9.14.** Mit értünk a normál eloszlás központi szerepén?
- 10.9.15.** Milyen tulajdonságokkal rendelkezik egy normál eloszlás sűrűség függvénye?
- 10.9.16.** Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az $N(0,1)$ normál eloszlás eloszlás függvénye?
- 10.9.17.** Hogyan értelmezzük a khi-négyzet eloszlást n szabadság fokkal?
- 10.9.18.** Mennyi az $X \sim \text{ChiSquare}(n)$ khi-négyzet eloszlás várható értéke és varianciája?
- 10.9.19.** Milyen feladatok esetén kell használni khi-négyzet eloszlást?
- 10.9.20.** Hogyan értelmezzük a studentT eloszlást n szabadság fokkal?
- 10.9.21.** Mennyi az $X \sim \text{StudentT}(n)$ student t-eloszlás várható értéke és varianciája?
- 10.9.22.** Milyen feladatok esetén kell használni t- eloszlást?

▼ 10.10. Gyakorló feladatok

10.10.1. feladat

A $[0, 1]$ intervallumban véletlenszerűen választunk egy 'A' számot (vagyis 'A' egyenletes

eloszlású $[0,1]$ -n). Jelölje X a választott 'A' szám négyzetgyökét, azaz $X = \sqrt{A}$, ahol $0 < A < 1$

(a) Adja meg az X valószínűségi változó $F_X(x)$ eloszlás függvényét és rajzolja fel grafikonját!

(b) Adja meg az X változó $f_X(x)$ sűrűség függvényét és rajzolja fel grafikonját!

(c) Határozza meg X várható értékét $\mu = E(X)$ és σ szórását!

(d) Mutassa meg, hogy az $Y = X^2$ változó - vagyis X négyzete - egyenletes eloszlású!

10.10.2. feladat

A $[0, 1]$ intervallumban véletlenszerűen választunk egy 'A' számot (vagyis 'A' egyenletes eloszlású). Jelölje X a választott 'A' szám négyzetét, azaz $X = A^2$, ahol $0 < A < 1$.

(a) Adja meg az X valószínűségi változó $F_X(x)$ eloszlás függvényét és rajzolja fel grafikonját!

(b) Adja meg az X változó $f_X(x)$ sűrűség függvényét és rajzolja fel grafikonját!

(c) Határozza meg X várható értékét $\mu = E(X)$ és σ szórását!

(d) Mutassa meg, hogy az $Y = \sqrt{X}$ változó - vagyis X négyzetgyöke - egyenletes eloszlású!

10.10.3. feladat

Egy repülőgép hajtómű folytonos működése során az elromlás valószínűsége **egyenletes eloszlású** a $[0,200]$ óra időintervallumon. Vagyis $X \sim \text{Uniform}(0, 200)$, ahol X jelöli a hajtómű működési idejét az indítástól az elromlásig. A repülőgépeket két hajtóművel szerelik, amelyek elromlási eseménye egymástól független.

Jelölje $X = \max(X_1, X_2)$ a később elromlott hajtómű elromlási időpontját. A repülőgépet egy 8 órás útra indították.

(a) Adja meg és rajzolja fel X eloszlás függvényét!

(b) Határozza meg a $P(X > 8)$ valószínűséget vagyis, hogy a 8 órás úton legalább az egyik hajtómű végig működik!

(c) Számítsa ki X várható értékét! Magyarázza a várható érték jelentését!

10.10.4. feladat

A $[0,1]$ intervallumban választunk egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül két számot, egy A -t és egy B -t. Képezzük az $X = 2 \cdot A - B$ új valószínűségi változót.

(a) Adja meg az X változó eloszlás függvényét és rajzolja fel grafikonját!

(b) Határozza meg az X változó sűrűség függvényét és rajzolja fel grafikonját

(c) Generáljon A és B értékre $N=1000$ véletlen számot, majd számolja ki a $(2 \cdot A - B)$ számokat!

(d) A (c) pontban számolt értékek hisztogramját rajzolja fel az X változó sűrűség függvényével azonos koordináta-rendszerben!

(e) Számolja ki X várható értékét!

10.10.5. feladat

A $[0,1]$ intervallumban választunk egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül két számot, egy A -t és egy B -t. Képezzük az $X = A - 2 \cdot B$ új valószínűségi változót.

(a) Adja meg az X változó eloszlás függvényét és rajzolja fel grafikonját!

(b) Határozza meg az X változó sűrűség függvényét és rajzolja fel grafikonját

(c) Generáljon A és B értékre $N=1000$ véletlen számot, majd számolja ki a $(A - 2 \cdot B)$ számokat!

(d) A (c) pontban számolt értékek hisztogramját rajzolja fel az X változó sűrűség függvényével azonos koordináta-rendszerben!

(e) Számolja ki X várható értékét!

10.10.6. feladat

A nyári autó gumi télire cserélése érdekében bemegyünk egy ilyen szerelést végző céghez. A T várakozási idő átlagosan $\lambda = \frac{1}{2}$ óra.

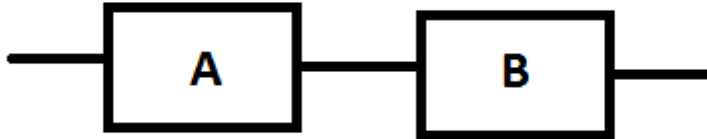
(a) Mekkora valószínűséggel kell 1 óránál többet várni? Számoljunk a Markov-egyenlőtlenséggel!

(b) Legyen a T várakozási idő **exponenciális eloszlású**! Mekkora valószínűséggel kell 1 óránál többet várni? Számoljunk az eloszlás függvényével!

(c) Szemléltessük a (b) pontban számolt valószínűséget a sűrűség függvény görbéje alatti terület befestésével!

10.10.7. feladat

Tekintsük az A és B függetlenül működő komponensek sorba kapcsolásával keletkező rendszert! (lásd az ábrát!). A két komponensből álló rendszer folyamatosan csak úgy működhet, ha mindkettő komponens működik.



Jelölje T_1 az A komponens működési idejét és T_2 az B komponens működési idejét, melyek a bekapcsolástól az elromlásig eltelt idők!

Tegyük fel, hogy T_1 **exponenciális eloszlású** $\lambda_1 = 5$ óra várható működési idővel és T_2

exponenciális eloszlású $\lambda_2 = 10$ óra várható működési idővel. Ekkor az egész rendszer T működési idejét a $T = \min(T_1, T_2)$ határozza meg, mert ha valamelyik komponens elromlik, akkor a teljes rendszer leáll.

(a) Mutassa meg, hogy T eloszlása is exponenciális, ha A és B működése illetve elromlása egymástól független! Határozza meg a T változó λ paraméterét!

(b) Rajzolja fel a T_1 , T_2 és T valószínűségi változók sűrűség függvényét közös koordináta-rendszerben!

(c) Számítsa ki a $p_1 = P(T_1 > 10)$ és $p_2 = P(T_2 > 10)$ valószínűségeket, vagyis, hogy az egyes komponensek 10 óránál tovább működnek!

(d) Számítsa ki a $p = P(T > 10)$ valószínűséget, vagyis, hogy a teljes rendszer 10 óránál tovább működik! Mutassa meg, hogy teljesül a

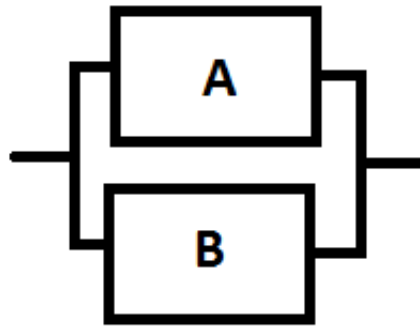
$$p = p_1 \cdot p_2$$

egyenlőség, amely a soros kapcsolás megbízhatóságára jellemző!

(e) Szemléltesse a (c) és (d) pontokban számolt valószínűségeket a sűrűségfüggvény görbék alatti megfelelő területek befestésével!

10.10.8. feladat

Tekintsük az A és B komponensek párhuzamosan kapcsolt rendszerét! (lásd az ábrát!). A két komponens folyamatosan működik egymástól függetlenül. Amikor az egyik elromlik, akkor a másik működése miatt a rendszer tovább működik, addig amíg ez a másik ún. redundáns komponens is el nem romlik.



Az ilyen komponenst nevezik "forró tartalék"-nak, mert minden pillanatban készen áll a rendszer. Jelölje T_1 az A komponens működési idejét és T_2 a B komponens működési idejét, amelyek a bekapcsolástól az elromlásig eltelt idők!

Tegyük fel, hogy T_1 **exponenciális eloszlású** λ_1 óra várható működési idővel és T_2 exponenciális eloszlású

λ_2 óra várható működési idővel. Ekkor az egész rendszer T működési idejét a $T = \max(T_1, T_2)$ képlettel kapjuk meg, mert az egész rendszer működési ideje megegyezik a tovább működő komponens működési idejével.

(a) Legyen $p_1 = P(T_1 > t)$ és $p_2 = P(T_2 > t)$ annak valószínűsége, hogy az A illetve B komponens egy $t > 0$ időn túl is működik! Adja meg p_1 és p_2 valószínűségeket Maple segítségével!

(b) Határozza meg a T változó $F_T(t) = P(T < t)$ eloszlás függvényét a Maple Statistics csomag lehetőségeit használva! Rajzolja fel az $F_T(t)$ függvényt $\lambda_1 = 5$ és $\lambda_2 = 10$ esetben a $t=0..40$ időintervallumon!

(c) Határozza meg a $p(P(T > t))$ valószínűséget, vagyis, hogy a teljes rendszer t óránál tovább működik! Mutassa meg, hogy teljesül a

$$p = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2)$$

egyenlőség, amely a párhuzamos kapcsolás megbízhatóságának számítási szabálya

10.10.9. feladat

Egy légitársaság az A városból naponta 5 repülőjáratot indít a B városba. Az utasok száma minden járaton **exponenciális eloszlással** közelíthető, melynek várható értéke $\lambda=20$ utas. Egy járat akkor gazdaságos, ha 25-nél többen utaznak rajta.

(a) Mekkora valószínűséggel lesz egy járat gazdaságos?

(b) Szemléltessük az (a) pontban számolt valószínűséget a sűrűség függvény görbéje alatti terület befestésével!

(c) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy legalább egy járat gazdaságos naponta! Tegyük fel, hogy az utasok száma független az egyes járatokon.

10.10.10. feladat

Egy on-line repülőgép helyfoglalási rendszerben két duplikált számítógépet alkalmaznak párhuzamos működtetéssel, amelyek mindegyikének külön- külön T_1 és T_2 meghibásodási ideje

exponenciális eloszlású, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2000$ óra átlaggal. A két számítógépből álló rendszerben, ha az egyik meghibásodik, akkor a másik automatikusan átveszi a feladatot adatvesztés nélkül. Így a rendszer csak mindkét számítógép meghibásodása esetén nem működik!

(a) Rajzoljuk fel az egyik számítógép

$$F_1(t) = P(T_1 < t) \text{ meghibásodási eloszlás függvényét,}$$

amely mutatja a $[0, t]$ idő tartam alatti meghibásodás valószínűségét (legyen $t \leq 4000$; óra)! Mit jelent a függvény monotonitása?

(b) Mekkora az esélye annak, hogy $t_1 = 168$ óra (azaz 1 hét) alatt a két számítógépből álló rendszer meghibásodik?

(c) Adjuk meg az $F(t) = P(T < t)$ meghibásodási eloszlás függvényt a duplikált rendszerre! Szemléltessük $F(t)$ a $[0, 4000]$ intervallumon! Magyarázzuk meg az együttes eloszlásfüggvény keletkezését!

(d) Mennyi az a t_0 [óra], mely szükséges ahhoz, hogy a rendszer 80%-os valószínűséggel ne hibásodjon meg a $[0, t_0]$ idő alatt? Rajzoljuk fel az $(1 - F(t))$ függvényt és a $p = 0.8$ valószínűségi szintet!

10.10.11. feladat

Egy vállalat online terminálokat alkalmaz arra a célra, hogy mérnökei a központi számítógéphez csatlakozva mérnöki számításokhoz szükséges programokat tudjanak használni. Megfigyelték, hogy az egyes terminálok folyamatos kapcsolatainak T ideje **exponenciális eloszlású**, melynek átlag értéke $\mu = 36$ perc.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy mérnök 30 perc vagy annál kevesebb időt tölt el a terminál mellett folyamatosan?

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy mérnök 1 óránál hosszabb ideig használja a terminált folyamatosan?

(c) A (b) pontban számolt valószínűséget szemléltessük a sűrűségfüggvény görbéje alatti megfelelő terület befestésével!

(d) Mekkora azaz R időtartam, amelyen belül a folyamatos terminál kapcsolatok 90%-a befejeződik?

(e) A (d) pontban számolt R kapcsolati időt szemléltessük az eloszlásfüggvény és a 0.9 valószínűségi szint felrajzolásával!

10.10.12. feladat

Egy autó feszültség szabályozó berendezésének élettartama **exponenciális eloszlású**, melynek átlagos élettartama 6 év.

(a) Rajzoljuk fel az élettartam sűrűség függvényét!

Vásároltunk egy 6 éves autót, amelynek működik a feszültség szabályozó berendezése. Azt tervezzük, hogy az autót még 6 évig használjuk.

(b) Mekkora az esélye annak, hogy az általunk használt 6 év alatt sem romlik el a feszültség szabályozó?

(c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az általunk használt első 3 éven belül ki kell cserélni a feszültség szabályozót? Szemléltessük a kiszámolt valószínűséget a sűrűség függvény alatti terület befestésével! Magyarázzuk meg a számítást!

(d) Határozzuk meg közelítőleg azt a $T > 0$ évet, amely ahhoz kell hogy az általunk használt T év alatt a meghibásodás feltételes valószínűsége $p = \frac{1}{2}$ legyen! Rajzoljuk fel az élettartam eloszlás

függvényét és a

$p = \frac{1}{2}$ valószínűségi szintet!

10.10.13. feladat

Egy gáz- és víz vezeték szereléssel foglalkozó vállalkozás szereléssel kapcsolatos telefon hívásai között eltelt idők **exponenciális eloszlással** követik egymást, melyek átlaga 15 perc.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy 30 perces időintervallumban nem lesz egy hívás sem?

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy legalább egy hívás érkezik egy 10 perces idő intervallumban?

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy nyitás után az első hívás 5 és 10 perc között lesz?

(d) Határozzuk meg annak a T idő intervallumnak a hosszát, melyben a legalább egy hívás

érkezésének valószínűsége 0.9 lesz!

Szemléltessük a valószínűségeket a sűrűség függvény görbéje alatti területtel!

10.10.14. feladat

A pénztárnál a T várakozási idő modellezhető exponenciális eloszlással. Tudjuk, hogy a várakozók 70%-a 5 percen belül befejezi a várakozást.

(a) Határozza meg a feltétel alapján az exponenciális eloszlás λ paraméterét és a számításhoz készítsen ábrát!

(b) Rajzolja fel T sűrűség függvényét!

(c) Számolja ki T várható értékét és szórását? Ellenőrizze az (a) pontban megadott $P(T < 5) = 0.7$ feltétel teljesülését!

(d) A Markov-egyenlőtlenség felhasználásával becsülje meg a $P(T < 5)$ valószínűséget alulról és hasonlítsa össze a feladatban adott értékkel! Összhangban van-e a két valószínűség?

10.10.15. feladat

A PMMIK számítógépes laborjaiban a számítógépek T élettartama (javítástól javításig) modellezhető exponenciális eloszlással. A nagy igénybevétel következtében a számítógépek 75%-a 3 hónapon belül javításra szorul.

(a) Határozza meg a feltétel alapján az exponenciális eloszlás λ paraméterét és a számításhoz készítsen ábrát!

(b) Rajzolja fel T sűrűség függvényét!

(c) Számolja ki T várható értékét és szórását, majd ellenőrizze az (a)-ban megadott $P(T < 3) = 0.75$ feltétel teljesülését?

(d) A Markov-egyenlőtlenség felhasználásával becsülje meg a $P(T < 3)$ valószínűséget alulról és hasonlítsa össze a feladatban adott értékkel! Összhangban van-e a két valószínűség?

10.10.16. feladat

Úszást segítő mellények teherbíró képességét tesztelik a "Tanulj úszni" klubnál úgy, hogy növekvő súlyokkal addig terhelik őket, amíg víz alá nem merül a mellény. A klubnál kétféle mellény található. Az egyik fajta felszerelés 2 éves és X teherbíró képessége **normál eloszlású** $m_1 = 6$ kg várható értékkel és $S_1 = 0.64$ kg szórással, azaz $X \sim N(6; 0.64)$

A második fajta felszerelés 5 éves és Y teherbíró képessége normál eloszlású $m_2 = 4.5$ kg várható értékkel és $S_2 = 1$ kg szórással, azaz $Y \sim N(4.5; 1)$.

Az összes mellényt tesztelik és azokat a mellényeket, amelyek teherbírása nem éri el az $m = 5$ kg-ot, azokat mind kidobják.

(a) Rajzolja fel az X és Y teherbíróképessegek sűrűség függvényeit közös koordináta-rendszerben!

(b) Fesse be a sűrűség függvények $x > 5$ tartomány alatti területeit a közös rajzon!

(c) Számolja ki, hogy az $N_1 = 24$ darab raktáron levő első fajta mellényből mennyit kell kidobni!

(d) Számolja ki, hogy az $N_2 = 32$ darab raktáron levő második fajta mellényből mennyi használható még tovább is!

10.10.17. feladat

Vásárlói jelentések alapján egy TV berendezés X élettartama **normál eloszlású** $\mu = 8.2$ év átlaggal. Tudjuk, hogy a TV készülékek 27%-a nem szorul javításra 9 évnél korábban.

(a) Mekkora a TV készülékek X élettartamának σ szórása?

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy a TV berendezés élettartama nagyobb, mint 10 év? Rajzoljuk fel a sűrűség függvény grafikonját és fessük be a kiszámolt valószínűségnek megfelelő területet!

(c) Mekkora T [év] garancia időt vállalhat a gyártó maximálisan, ha 2%-nál több olyan készüléket nem szeretne kicserélni, amelyek T -nél kevesebb ideig működtek! Ábrázoljuk az

$F(t) = P(X < t)$ eloszlás függvényt és a 0.02 valószínűségi szintet!

10.10.18. feladat

Az adatátviteli sebesség hálózaton keresztül az egyetemi szervertől a hallgató otthoni számítógépe felé - valamely hétköznap este - **normál eloszlású** X változó átlagosan 60 kilobit/másodperc sebességgel és 4 kilobit/másodperc szórással.

- (a) Mekkora valószínűséggel lesz az adatátvitel sebessége nagyobb, mint 65 kilobit/másodperc? Fessük be a kiszámolt valószínűségnek megfelelő területet a sűrűség függvény grafikonja alatt!
- (b) Mekkora a veszélye (valószínűsége), hogy az átviteli sebesség 58 kilobit/másodperc alatt lesz? Fessük be a kiszámolt valószínűségnek megfelelő területet a sűrűség függvény grafikonja alatt!
- (c) Mekkora az a v sebesség határ, amelyet az esetek 80%-ában nem halad meg az adat átviteli sebesség? Ábrázoljuk a $P(X < t) = F(x)$ eloszlás függvényt és a 0.8 valószínűségi szintet!

10.10.19. feladat

(a) Nyomtatott áramköri lapok lyuk fúrásakor az átmérők méreteinek standard szórása $\sigma = 0.01$ milliméter. Mennyi független mérést kell elvégezni az átmérőkre ahhoz, hogy legalább $p = 8/9$ valószínűséggel biztosak legyünk abban, hogy a mért átmérők átlagának eltérése az átmérők ismeretlen μ várható értékétől a 0.005 milliméteres eltéréseken belül maradjon?

Tip: Használjuk a becsléshez az ún. Csebisev-egyenlőtlenség $P(k \cdot \sigma_Y \leq |Y - \mu_Y|) \leq \frac{1}{k^2}$

alakját az $Y = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ átlag valószínűségi változóval, ahol X_k a k -adik lyuk átmérőjének értéke milliméterben és μ_Y illetve σ_Y az Y átlag valószínűségi változó várható értéke és szórása.

(b) Mennyi független mérést kell elvégezni az átmérőkre akkor, ha feltesszük, hogy lyukak átmérőinek eloszlása **normál eloszlást** követ a megadott $\sigma = 0.01$ milliméter szórással, viszont ismeretlen μ várható értékkel? Továbbá ugyanazt szeretnénk kiszámolni, mint az (a) részben. Vagyis legalább $p = 8/9$ annak a valószínűsége, hogy a mért átmérők átlagának eltérése a μ várható értéktől kisebb legyen, mint 0.005 milliméter.

10.10.20. feladat

Egy terep mérési gyakorlaton két mérőeszközzel mérik a hallgatók ugyanazt a távolságot. A mérőeszközök által mért X_1 és X_2 mérési távolságok mennyiségei **normál eloszlást** követnek.

Mindkét távolság várható értéke 350 [m]. Mérési adatok alapján az első mérőeszköz szórása $\sigma_1 = 1.5$ [m], míg a második szórása

$\sigma_2 = 2$; [m]. Az első mérőeszközzel a hallgatók 55%-a mért.

(a) Rajzoljuk fel az X_1 és X_2 valószínűségi változók sűrűségfüggvényeit azonos koordinátarendszerben!

(b) A mérési jegyzőkönyvekből véletlenszerűen kivesszünk egyet. Számítsuk ki azt a p valószínűséget, hogy a feljegyzett távolság 353 [m] és 348 [m] közé esik?

(c) A csoport hány százalékának szabad az első mérőeszközzel mérni, ha azt szeretnénk, hogy a (b) pontban kért p valószínűség 0.85-nél nagyobb vagy egyenlő legyen!

10.10.21. feladat

Egy fémpénz elfogadó automata nyílásának X szélessége inchben mérve normál eloszlású véletlen érték, melynek várható értéke $\mu = 0.9$ inch és szórása $\sigma = 0.003$ inch. A specifikációs előírás a nyílásokra 0.9 ± 0.005 inch.

(a) Rajzoljuk fel az X valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

(b) Az automata hány százaléka nem teljesíti a megadott előírást? Rajzoljuk fel a kapott valószínűségnek megfelelő területet a sűrűség függvény görbéje alatt!

(c) Maximálisan mekkora lehet a σ szórás értéke, ha azt szeretnénk, hogy 1%-nál kevesebb automata essen kívül a megadott előíráson?

10.10.22. feladat

Két fajta csövet szeretnénk egymásba illeszteni annak érdekében, hogy az átmenettel növeljük az átmérőt. A kisebb keresztmetszetű cső külső átmérője legyen X mm és ezt illesztjük egy Y mm belső átmérőjű csőbe.

Az X külső átmérő **normál eloszlású** $m_1 = 15$ [mm] várható értékkel és $\sigma_1 = 0.02$ [mm] szórással, vagyis $X \sim N(15, 0.02)$.

Az Y belső átmérő **normál eloszlású** $m_2 = 15.07$ [mm] várható értékkel és $\sigma_2 = 0.022$ [mm] szórással, vagyis $Y \sim N(15.07, 0.022)$.

- (a) Mekkora valószínűséggel nem haladja meg X értéke a 15.03 mm-t, azaz $P(X < 15.03) = ?$
(b) Szemléltesse az (a) feladatban kapott valószínűséget a sűrűség függvény görbe alatti terület befestésével!
(c) Mekkora annak a d átmérőnek az értéke, amelyre $P(d < Y) = 0.95$ teljesül?
(d) Szemléltesse a (c) feladatban kapott d értéket az eloszlás függvény segítségével!
(e) Mekkora valószínűséggel illeszthető egymásba két véletlenszerűen választott cső, azaz $P(X < Y)$?

10.10.23. feladat

Kétféle koncentrációjú só oldatot szeretnénk összekeverni egyenlő arányban annak érdekében, hogy a megfelelő koncentrációt elérjük. Az egyik oldat só koncentrációja legyen X gr/liter és ezt összekeverjük az Y gr/liter koncentrációjú másik oldattal.

Az X **normál eloszlású** $m_1 = 10$ $\left[\frac{\text{gr}}{\text{liter}} \right]$ várható értékkel és $\sigma_1 = 2$ $\left[\frac{\text{gr}}{\text{liter}} \right]$ szórással, vagyis $X \sim N(10, 2)$.

Az Y **normál eloszlású** $m_2 = 15$ $\left[\frac{\text{gr}}{\text{liter}} \right]$ várható értékkel és $\sigma_2 = 3$ $\left[\frac{\text{gr}}{\text{liter}} \right]$ szórással, vagyis $Y \sim N(15, 3)$.

- (a) Mekkora valószínűséggel nem haladja meg X értéke a 14 gr/liter-t, azaz $P(X < 14) = ?$
(b) Szemléltesse az (a) feladatban kapott valószínűséget a sűrűség függvény görbe alatti terület befestésével!
(c) Mekkora annak a K koncentrációnak az értéke, amelyre $P(Y < K) = 0.95$ teljesül?
(d) Szemléltesse a (c) feladatban kapott K értéket az eloszlás függvény segítségével!
(e) Összekeverünk mindkét oldatból 1 litert. Mekkora valószínűséggel lesz az összekevert oldat koncentrációja 15 gr/liter-nél nagyobb, azaz $P\left(15 < \frac{X + Y}{2}\right)$?

10.10.24. feladat

A kézi készítésű agyag edények általában a következő két fő lépésben készülnek: a forgató korongon az agyagot megformázzák, majd utána a formát kemencében kiégetik. A formázáshoz szükséges időt jelölje T_1 és az égetési idő legyen T_2 percekben. Tegyük fel, hogy a T_1 és T_2 idő is normál eloszlású véletlen változó.

A T_1 formázási idő **normál eloszlású** $m_1 = 40$ [perc] várható értékkel és $\sigma_1 = 2$ [perc] szórással, vagyis $T_1 \sim N(40, 2)$.

A T_2 égetési idő **normál eloszlású** $m_2 = 60$ [perc] várható értékkel és $\sigma_2 = 3$ [perc] szórással, vagyis $T_2 \sim N(60, 3)$.

- (a) Mekkora valószínűséggel lesz a T_1 formázási idő kevesebb, mint 44 perc, azaz $P(T_1 < 44) = ?$
(b) Szemléltesse az (a) feladatban kapott valószínűséget a sűrűség függvény görbe alatti terület befestésével!
(c) Mennyi perc annak a t időnek az értéke, amely alatt az edények 90%-a az égetőben elkészül, azaz $P(T_2 < t) = 0.9$ teljesül?
(d) Szemléltesse a (c) feladatban kapott t értéket az eloszlás függvény segítségével!
(e) Az edények hány százalékánál tart a teljes $T = T_1 + T_2$ munkafolyamat 105 percnél tovább, azaz $P(T_1 + T_2 > 105) = ?$

10.10.25. feladat

Az emberi terhességek T időtartamának eloszlása a fogantatástól a születésig közelítőleg normál

eloszlású $\mu = 266$ nap várható értékkel és $\sigma = 16$ nap szórással.

- (a) Az összes terhesség hány százaléka koraszülés, amelyekben a terhesség kevesebb, mint 245 napig tart?
- (b) Az (a) pontban kiszámolt százaléknak megfelelő területet fesse be a sűrűség függvénye alatt!
- (c) Mennyi M nap alatt fejeződik be az összes születés 95%-a?
- (d) Rajzolja fel a (c) pontban számolt M értékhez az eloszlás függvényét és a 0.95 valószínűségi szintet!

10.10.26. feladat

Egy pénzváltó hely napi pénzforgalma (amerikai) dollárban X normál eloszlású $\mu = 800$ \$ és $S = 60$ \$ standard szórással.

- (a) Mekkora a valószínűsége, hogy valamely napon a pénzváltási igény 750 \$ alatt lesz?
- (b) Rajzolja fel az (a) pontban kiszámolt valószínűséget a sűrűség függvény görbéje alatti megfelelő terület befestésével!
- (c) Mennyi M pénz mennyiség legyen a pénztárban, hogy 99%-os biztonsággal legyen elegendő pénz a váltásokhoz, azaz $P(X \leq M) = 0.99$?
- (d) Rajzolja fel a (c) pontban számolt M értékhez az eloszlás függvényét és a 0.99 valószínűségi szintet!

10.10.27. feladat

Az emberek X súlyát $m=80$ (kg) várható értékű és $\sigma = 10$ (kg) szórású normál eloszlásúnak tekintjük.

- (a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy 450 (kg) -ig terhelhető liftbe hat véletlenszerűen összeverődött ember befér, vagyis $P(Y < 450) = ?$, ahol $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$ és

$$X_k \sim N(m, \sigma) \quad (k=1,2,3,4,5,6)?$$

- (b) Mennyi lesz az Y változó várható értéke és szórása?
- (c) Rajzolja fel az Y valószínűségi változó sűrűség függvényét!
- (d) Szemléltesse a sűrűség függvény alatti terület befestésével a $P(Y < 450)$ valószínűséget!

10.10.28. feladat

A tojások X súlya, amelyeket ugyanolyan körülmények között nevelt tyúkok tojnak, $m=65$ (g) várható értékű és $\sigma = 5$ (g) szórású normál eloszlású.

- (a) Véletlenszerűen összeválogattunk egy tucat, azaz 12 tojást. Mennyi a valószínűsége, hogy az egy tucat tojás súlya 750 gram és 825 gram közé esik, vagyis $P(750 < Y < 825) = ?$, ahol

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12}$$

$$\text{és } X_k \sim N(m, \sigma) \quad (k=1,2,\dots,12)?$$

- (b) Mennyi lesz az Y változó várható értéke és szórása?
- (c) Rajzolja fel az Y valószínűségi változó sűrűség függvényét!
- (d) Szemléltesse a sűrűség függvény alatti terület befestésével a $P(750 < Y < 825)$ valószínűséget!

10.10.29. feladat

Egy futó cipő X súlya normál eloszlású $\mu=12$ uncia várható értékkel és $\sigma=0.5$ uncia szórással. (1 uncia ~ 0.0283495231 kilogramm)

- (a) Rajzoljuk fel X sűrűség függvényét!
- (b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy cipő súlya 13 unciánál több?
- (c) Szemléltessük a (b) pontban számolt valószínűséget a sűrűség függvény görbéje alatti megfelelő terület befestésével!
- (d) Mekkora legyen a cipők súlyának S szórása, ha a vállalat azt szeretné állítani, hogy a cipők 99.9%-ának az Y súlya kisebb, mint 13 uncia, ahol $Y \sim N(12, S)$
- (e) Szemléltessük a (d) pontban számolt S szórást az $F(13; S) = P(Y < 13)$ függvény grafikonjának, mint S függvényének és a 0.999 valószínűségi szintnek a felrajzolásával?
- (f) Ha a szórás marad $\sigma=0.5$ uncia, akkor mennyi legyen a cipő Z súlyának m várható értéke, hogy a cipők 99.9%-ának a Z súlya kisebb legyen, mint 13 uncia, ahol $Z \sim N(m; 0.5)$?
- (g) Szemléltessük az (f) pontban számolt m várható értéket az $F(13; m) = P(Z < 13)$ függvény

grafikonjának, mint m függvényének és a 0.999 valószínűségi szintnek a felrajzolásával?

10.10.30. feladat

Egy ipari folyamat során festékeket töltenek fém edényekbe, amelynek X töltési mennyisége normál eloszlású $\mu=5.05$ liter várható értékkel és $\sigma=0.05$ liter szórással.

(a) Rajzoljuk fel X sűrűség függvényét!

(b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy edény töltési mennyisége legalább 5 liter?

(c) Szemléltessük a (b) pontban számolt valószínűséget a sűrűség függvény görbéje alatti megfelelő terület befestésével!

(d) Mekkora legyen a töltések S szórása, ha a vállalat azt szeretné állítani, hogy az edények 90%-ának az Y töltési mennyisége legalább 5 liter, ahol $Y \sim N(5.05; S)$

(e) Szemléltessük a (d) pontban számolt S szórást az $1-F(5; S)=P(Y>5)$ függvény grafikonjának, mint S függvényének és a 0.9 valószínűségi szintnek a felrajzolásával?

(f) Ha a szórás marad $\sigma=0.05$ liter, akkor mennyi legyen az edény Z töltési mennyiségének m várható értéke, hogy az edények 90%-ának a Z töltési mennyisége legalább 5 liter legyen, ahol $Z \sim N(m; 0.05)$?

(g) Szemléltessük az (f) pontban számolt m várható értéket az $1-F(5; m)=P(Z>5)$ függvény grafikonjának, mint m függvényének és a 0.9 valószínűségi szintnek a felrajzolásával?

10.10.31. feladat

Egy duzzasztó gát által felduzzasztott átlagos vízmélység 21 méter és szórása 5 méter. A mindenkor X vízmélység méterben mérve **normál eloszlású** véletlen változó.

A gát tetején található egy biztonsági túlfolyó, amely megakadályozza, hogy a víz a 30 méteres szint fölé növekedjen. Másrészt van egy cső a túlfolyó teteje alatt 25 méterrel, amely bevezeti a vizet a hidroelektromos generátorhoz. (Hagyjuk figyelmen kívül a cső véges átmérőjét!)

(a) Rajzoljuk fel az X vízmélység sűrűség függvényét!

(b) A teljes idő hányadrészt fordul elő, hogy a túlfolyón folyik el feleslegesen a felduzzasztott víz!

(c) Szemléltessük a (b) pontban számolt valószínűséget a sűrűség függvény görbéje alatti megfelelő terület befestésével!

(d) Tudjuk, hogy a túlfolyón nem folyik a víz. Mekkora a feltételes valószínűsége ekkor annak, hogy a duzzasztó táplálja a generátort vízzel?

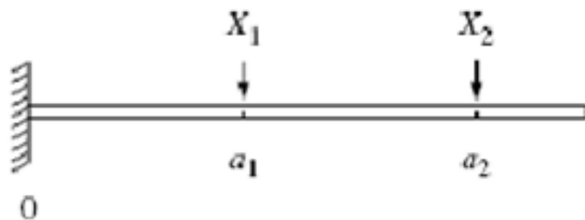
(e) Az esetek hányadrésztében nem táplálja a felduzzasztott víz a generátort?

(f) Milyen H méter mélyre kellene betenni a generátort tápláló csövet a túlfolyó alatt ahhoz, hogy az esetek legfeljebb 5%-ában ne kapjon vizet a generátor?

(g) Szemléltessük az (f) pontban számolt H mélységet, az X vízmélység eloszlás függvényének és a 0.05 valószínűségi szint felrajzolásával?

10.10.32. feladat

Az ábrán látható tartó konzolt terheljük X_1 és X_2 két független teherrel, melyek értéke véletlenszerűen változik. Az X_1 és X_2 terhek normál eloszlású véletlen változók, amelyek várható értéke rendre 2 [N] és 4 [N], továbbá szórásuk rendre 0.5 [N] és 1 [N]. A terhek a rögzítéstől számított $a_1=5$ méter és $a_2=10$ méter távolságra vannak.



(a) Határozzuk meg az $Y = a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2$ hajlító nyomaték várható értékét és szórását!

(b) Rajzoljuk fel az Y nyomaték változó sűrűség függvényét!

- (c) Az Y nyomaték mekkora valószínűséggel lépi túl a megengedett 70 Nm-t?
- (d) Szemléltessük a (c) pontban számolt százalékot a sűrűség függvény görbéje alatti megfelelő terület befestésével!
- (e) Mekkora M nyomatékot engedhetünk meg, ha ennek túllépését csak 0.01 valószínűséggel engedjük meg?
- (f) Szemléltessük a (e) pontban számolt M nyomatékot, az Y nyomaték eloszlás függvényének felrajzolásával?
- (g) Ha az X_1 és X_2 terhek nem függetlenek és kovarianciájuk $\text{Cov}(X_1, X_2) = 1$, akkor vajon mekkora lesz az Y nyomaték szórása? Hasonlítsuk össze az (a) pontban kapott értékkel!

10.10.33. feladat

Tesztelték a benzin oktánszám (95 és 98) szerinti hatékonyságát úgy, hogy ugyanannyi mennyiségű benzint (1 liter) tankoltak ugyanabba az autóba. A kísérletet többször egymás után elvégezték. Azt kapták hogy a 95-s oktánszámú benzinnel átlagosan $\mu_1 = 12$ km-re tudtak elmenni és a szórásra $\sigma_1 = 3$ km-t kaptak. A 98-s oktánszámú benzinnel átlagosan $\mu_2 = 16$ km-re tudtak elmenni és a szórásra $\sigma_2 = 4$ km adódott. Feltételezzük, hogy az 1 liter benzinnel megtett utak (X_1 és X_2) **normál eloszlást** követnek a fenti paraméterekkel.

(a) Rajzoljuk fel X_1 és X_2 valószínűségi változók sűrűség függvényeit azonos koordináta-rendszerben!

(b) Az autót megtankolták 1 liter 95-s és 1 liter 98-as oktánszámú benzinnel. Számítsuk ki és szemléltessük az $Y = X_1 + X_2$ összeg sűrűség függvénye alatti területtel annak valószínűségét, hogy 30 km-nél távolabbra tudnak menni a 2 liter "keverék" benzinnel: $P(Y > 30)$!

10.10.34. feladat

Egy kis forgalmú útszakaszon egy illetőnek elromlott az $m = 1200$ kg tömegű autója. Sokat kellett várnia, míg végre egy terepjáró arra ment és segített elvontatni. Az egyik autónak olyan kötele volt, melyre az volt írva, hogy $\mu_1 = 500$ kg terhet bír el és a teherbírás szórása $\sigma_1 = 40$ kg. A másik autónak olyan kötele volt, melynek teherbírása $\mu_2 = 650$ kg és a teherbírás szórása $\sigma_2 = 45$ kg.

Jelölje X_1 az egyik kötél, míg X_2 a másik kötél teherbíró képességét. Feltesszük, hogy a kötelek teherbíró képessége normál eloszlást követ.

Hogy a vontatást megoldják, ezért a két kötelet összefonták és így kezdtek a vontatáshoz.

(a) Rajzoljuk fel az X_1 , X_2 két kötél teherbíró képességének sűrűség függvényeit, illetve az $Y = X_1 + X_2$ összesodrott kötél teherbíró képességének sűrűség függvényét azonos koordináta-rendszerben!

(b) Számítsuk ki és szemléltessük az Y sűrűség függvénye alatti területtel annak valószínűségét, hogy az összesodrott kötél nem szakad el vontatás közben!

10.10.35. feladat

Egy gomba termesztő hetente szüreteli a termést. A heti gomba termés X mennyisége **normál eloszlást** követ $\mu = 10$ kg várható értékkel és $\sigma = 2$ kg szórással.

(a) A termesztő mekkora valószínűséggel tudja teljesíteni a heti 11 kg-os megrendelést?

(b) Rajzoljuk fel a sűrűség függvényt és fesse be az alatta levő azon területet, amely megfelel az (a) részben számolt valószínűségnek!

(c) Hány kg gombára köthet szállítási szerződést maximum, ha az esetek 90%-ában szeretné teljesíteni a vállalat?

(d) Rajzoljuk fel a (c) eset szemléltetéséhez az eloszlás függvényt és a hozzátartozó szinteket!

10.10.36. feladat

A számítógép hűtőventilátorának várható élettartama 4 év a tesztelések alapján. Feltételezzük, hogy az élettartam exponenciális eloszlású.

- (a) Rajzoljuk fel a sűrűség függvényt!
- (b) A hűtőventilátorok hányadrésze működik 5 éven túl is?
- (c) Hány hónapos garanciát adjon a gyártó, ha legfeljebb a ventilátorok 10%-át szeretné kicserélni a garancia időn belül?

10.10.37. feladat

Egy sejt osztódási ideje (az az idő, amely alatt két ugyanolyan sejt nem keletkezik) normál eloszlású 1 óra átlaggal és 5 perc szórással.

- (a) Rajzoljuk fel a sűrűség függvényt!
- (b) Mekkora valószínűséggel osztódik egy sejt 50 percnél kevesebb idő alatt?
Szemléltessük a kapott valószínűséget a sűrűség függvény alatti területtel!
- (c) Mekkora valószínűséggel tart 65 percnél tovább egy sejt osztódása?
Szemléltessük a kapott valószínűséget a sűrűség függvény alatti területtel!
- (d) Mekkora az az időtartam, amely alatt az összes sejt közel 99%-a befejezi az osztódást?
Szemléltessük a kapott időt az eloszlás függvénynel!

10.10.38. feladat

Egy autóúton a mérések alapján az egymást követő nagyobb úthibák közötti X távolság (km-ben mérve) exponenciális eloszlású véletlen változó, melynek várható értéke $\lambda = 5$ kilométer. Tehát átlagosan 5 km-enként követik egymást az úthibák.

- (a) Az adott úton 10 km hosszan kell utaznunk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy **nincs** nagyobb úthiba ezen a 10 km hosszú útszakaszon? Szemléltessük a kapott valószínűséget a sűrűségfüggvény grafikonja alatti területtel!
- (b) Egy másik alkalommal 15 km utat kell megtennünk az adott úton. Ebből már megtettünk 5 km-t és nem találtunk úthibát. Mekkora a feltételes valószínűsége annak, hogy a hátralévő 10 km hosszú útszakaszon sem lesz úthiba?
- (c) Hasonlítsuk össze az (a) és (b) pontokban kapott valószínűségeket és indokoljuk az eredményt!

Az utazás során találtunk egy nagyobb úthibát.

- (d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a következő nagyobb úthibához legalább 12 km-t, de legfeljebb 15 km-t kell megtenni?
- (e) Mekkora "s" távolságot kell megtenni km-ben ahhoz, hogy 90%-os eséllyel találkozzunk a következő úthibával? A számítást szemléltessük az eloszlás függvény segítségével!

10.10.39. feladat

Egy földieper termesztéssel foglalkozó vállalkozó hetente szüreteli a termést. A heti eper termés X mennyisége normál eloszlást követ $\mu = 15$ kg várható értékkel és $\sigma = 2$ kg szórással.

- (a) A termesztő mekkora valószínűséggel tudja teljesíteni a heti 13 kg-os megrendeléseket?
- (b) Rajzoljuk fel a sűrűség függvényt és fesse be az alatta levő azon területet, amely megfelel az (a) részben számolt valószínűségnek!
- (c) Maximálisan hány kg földieperre köthet szállítási szerződést hetente, ha az esetek 95%-ában szeretné teljesíteni a vállalat?
- (d) Rajzoljuk fel a (c) eset szemléltetéséhez az eloszlás függvényt és a hozzátartozó szintet!

10.10.40. feladat

Ismert, hogy egy gyártó soron készült azonos méretű beton elemek 10%-ának az X

nyomószilárdsága $30 \left[\frac{MN}{m^2} \right]$ értéknél kisebb, továbbá a beton elemek 20%-ának a

nyomószilárdsága $36 \left[\frac{MN}{m^2} \right]$ értéknél nagyobb. Feltesszük, hogy a különböző beton elemek X

nyomószilárdsága normál eloszlást követ!

- (a) Határozzuk meg az X normál eloszlás μ várható értékét és σ szórását a feltételek alapján! Rajzoljuk fel a sűrűség függvény grafikon!

- (b) A minimálisan elfogadható nyomószilárdság érték 28

$$\left[\frac{MN}{m^2} \right]. \text{ A beton elemek hány}$$

százaléka nem teljesíti a minimális előírást? Szemléltessük a számítást a sűrűségfüggvény alatti megfelelő terület befestésével!

(c) Mekkora nyomószilárdságot kell előírni minimális követelményként, hogy a beton elemek legalább 98%-át elfogadják?

(d) Szemléltessük a (c) pontban kiszámolt kritikus nyomószilárdságot a $G(u) = 1 - F(u)$ függvénnyel, ahol F az X nyomószilárdság eloszlás függvénye!

10.10.41. feladat

Egy mobil szolgáltatást végző népszerű cég felmérése szerint a telefonálók X beszélgetési ideje havonta **normál eloszlást** követ, $\mu = 600$ perc átlaggal és $\sigma = 100$ perc szórással.

(a) Határozzuk meg, hogy egy véletlenül kiválasztott felhasználó mekkora valószínűséggel telefonál havonta 500 és 700 perc között!

(b) Szemléltessük az (a) pontban számolt valószínűséget a sűrűség függvény görbéje alatti terület befestésével!

(c) Mennyi T percre köthet havi rendelkezésre állási szerződést a szolgáltató, ha azt szeretné, hogy egy előfizető X beszélgetési ideje T -nél hosszabb ideig legfeljebb 5%-os eséllyel tartson!

(d) Szemléltessük a (c) pontban számolt havi T rendelkezésre állási időt az $S(u) = 1 - F(u) = P(X > u)$ túlélési (vagy "survival") függvény megfelelő szintjeinek felrajzolásával!

10.10.42. feladat

Egy bizonyos típusú autó akkumulátorok élettartamának átlaga **4.2 év** és szórása **1.3 év**. Feltételezzük, hogy egy akkumulátor X élettartama **normál eloszlású**.

(a) Rajzoljuk fel az X élettartam **sűrűség függvényét**!

(b) A gyártó **3 év garanciát** vállal. Becsüljük meg, hogy az akkumulátorok hány százalékát kell kicserélni a garancia időn belül!

(c) Szemléltessük a (b) pontban számolt százalékot a sűrűség függvény görbéje alatti megfelelő **terület** befestésével!

(d) Legfeljebb hány év **garanciát** adhat az eladó, ha az akkumulátorok legfeljebb 5%-át szeretné kicserélni a garancia időn belül?

(e) Szemléltessük a (d) pontban számolt T garancia időt, az X élettartam **eloszlás függvényének** és a 0.05 valószínűségi szint felrajzolásával!

10.10.43. feladat

A beton minták teherbírása modellezhető normál eloszlással, melynek várható értéke $m = 6000$ kilogram négyzetcentiméterenként és standard szórása $\sigma = 100$ kilogram négyzetcentiméterenként.

(a) Rajzoljuk fel a cement terhelhetőségi modelljének sűrűség függvényét!

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy minta teherbírása 5800 és 5900 kg/cm² között van?

Szemléltessük a kapott valószínűséget a sűrűség függvény alatti területtel!

(c) A minták hány százalékának lesz a teherbírása 6250 kg/cm² értéknél nagyobb?

Szemléltessük a kapott valószínűséget a sűrűség függvény alatti területtel!

(d) Mekkora az a nyomás érték, amellyel a minták legalább 95%-a rendelkezik? Szemléltessük a kapott nyomást az eloszlás függvénnyel!

10.10.44. feladat

A papír szakító próbája modellezhető normál eloszlással, melynek várható értéke $m = 35$ font négyzetinchenként és standard szórása $\sigma = 2$ font négyzetinchenként.

(a) Rajzoljuk fel a cement terhelhetőségi modelljének sűrűség függvényét!

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy minta szakító ereje 34 és 37 font/inch² között van?

Szemléltessük a kapott valószínűséget a sűrűség függvény alatti területtel!

(c) A minták hány százalékának lesz a teherbírása 35 font/inch² értéknél alatt? Szemléltessük a kapott valószínűséget a sűrűség függvény alatti területtel!

(d) Mekkora az a szakító érték, amellyel a minták legalább 96%-a rendelkezik? Szemléltessük a kapott szakító erőt az eloszlás függvénnyel!

10.10.45. feladat

Egy kukorica pelyhből készült termék 100 grammjának E - vitamin tartalma X véletlen változó, melyet milligrammban mérünk. Az X normál eloszlású $\mu = 3$ milligramm előírt várható értékkel és $\sigma = 0.1$ milligramm szórással.

(a) Mekkora az esélye annak, hogy a kukorica pelyh 100 grammja 2.8 milligrammnál kevesebb E-vitamint tartalmaz?

(b) Szemléltessük az (a) pontban kapott valószínűséget a sűrűség függvény grafikonja alatti területtel!

(c) Mekkora az esélye annak, hogy a kukorica pelyh 100 grammjának E-vitamin tartalma 2.9 milligramm és 3.1 milligramm között van?

(d) Napi E-vitamin szükségletünk 10 milligramm. Hányszor 100 gramm kukorica pelyhet kell megennünk egy nap, ha 0.9 valószínűséggel szeretnénk megkapni a napi E-vitamin szükségletünket?

(Útmutatás : Használjuk az $Y=n \cdot X$ változót, ahol n értékét keressük, hogy a $P(Y > 10)$ feltétel teljesüljön!)

(e) Szemléltessük a (d) pontban kiszámolt n érték segítségével az $(1-F_Y(x))$ függvényt és a 0.9 valószínűségi szintet, ahol $F_Y(x)$ az $Y=n \cdot X$ eloszlásfüggvénye.

10.10.46. feladat

Bizonyos típusú ellenállások értéke Ohm-ban mérve R normál eloszlású véletlen változó.

Mérések alapján tudjuk, hogy az

(i) R ellenállás átlag értéke vagy várható értéke $10 \text{ [kOhm]} = 10\,000 \text{ [Ohm]}$, továbbá

(ii) az esetek 5%-ában az ellenállás 11 kOhm -nál nagyobb értéket mutat, azaz $P(R > 11\,000) = 0.05$.

(a) Számoljuk ki az R ellenállás szórását! A számítást végezzük az R változó $F_X(x)$ eloszlásfüggvénye segítségével!

(b) Előírás szerint az ellenállás 9500 és 10500 Ohm között elfogadható. Milyen százalékban teljesítik az ellenállások az előírást, vagyis $P(9500 < R < 10500) = ?$

(c) Szemléltessük a (b) pontban kapott valószínűséget a sűrűség függvény grafikonja alatti terület befestésével!

(d) Melyik az az E ellenállás érték, amelynél az ellenállások 10%-ának nagyobb az értéke, vagyis $P(R > E) = 0.1$ teljesül.

(e) Szemléltessük a (d) pontban kiszámolt E értéket az $(1-F_X(x))$ függvény és a 0.1 valószínűségi szint felrajzolásával!

10.10.47. feladat

Ismert, hogy egy gyártó soron készült azonos méretű beton elemek 10%-ának az X nyomószilárdsága 30

$[\text{MN}/(\text{m}^2)]$ értéknél kisebb, továbbá a beton elemek 20%-ának a nyomószilárdsága 36 $[\text{MN}/(\text{m}^2)]$; értéknél nagyobb. Feltesszük, hogy a különböző beton elemek X nyomószilárdsága normál eloszlást követ!

(a) Határozzuk meg az X normál eloszlás μ várható értékét és σ szórását a feltételek alapján! Rajzoljuk fel a sűrűség függvény grafikonját!

(b) A minimálisan elfogadható nyomószilárdság érték 28 $[\text{MN}/(\text{m}^2)]$. A beton elemek hány százaléka nem teljesíti a minimális előírást? Szemléltessük a számítást a sűrűségfüggvény alatti megfelelő terület befestésével!

(c) Mekkora nyomószilárdságot kell előírni minimális követelményként, hogy a beton elemek legalább 98%-át elfogadják?

(d) Szemléltessük a (c) pontban kiszámolt kritikus nyomószilárdságot a $G(u) = 1 - F(u)$ függvényvel, ahol F az X nyomószilárdság eloszlás függvénye!

10.10.48. feladat

A beton minták teherbírása modellezhető normál eloszlással, melynek várható értéke $m = 6000$ kilogram négyzetcentiméterenként és standard szórása $\sigma = 100$ kilogram négyzetcentiméterenként.

(a) Rajzoljuk fel a cement terhelhetőségi modelljének sűrűség függvényét!

- (b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy minta teherbírása 5800 és 5900 kg/cm² között van?
Szemléltessük a kapott valószínűséget a sűrűség függvény alatti területtel!
- (c) A minták hány százalékának lesz a teherbírása 6250 kg/cm² értéknél nagyobb?
Szemléltessük a kapott valószínűséget a sűrűség függvény alatti területtel!
- (d) Mekkora az a nyomás érték, amellyel a minták legalább 95%-a rendelkezik?
Szemléltessük a kapott nyomást az eloszlás függvényével!

10.10.49. feladat

Egy autóvezető X reakció ideje - vagyis az észleléstől a cselekvésig eltelt idő - normál eloszlású $\mu=0.4$ sec átlaggal és $\sigma=0.05$ sec standard szórással.

- (a) Rajzoljuk fel az X valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
- (b) Mekkora a valószínűsége, hogy a reakció idő nagyobb lesz, mint 0.5 sec? Ábrázoljuk a kapott valószínűséget a sűrűség függvény alatti területtel!
- (c) Mekkora a valószínűsége, hogy a reakció idő 0.4 és 0.5 sec közé esik? Ábrázoljuk a kapott valószínűséget a sűrűség függvény alatti területtel!
- (d) Mennyi az a kritikus reakció idő, amelyen belül az esetek 90%-ára reagál a vezető?
Szemléltessük a kapott kritikus reakció időt az eloszlásfüggvényével!