

▼ 11. Két valószínűségi változó együttes eloszlása, feltételes eloszlás és feltételes várható érték

Valószínűségszámítás és statisztika számítógép algebrai támogatással	Készült a PTE PMMIK-n a TÁMOP -4.1.2.A/1-11/1-2011-0098 támogatásával
Klincsik Mihály	

▼ 11.1. Bevezetés

Ha egy mérnöki alkotást egyidejűleg kettő vagy több véletlen hatás ér, akkor ezek együttes hatásának vizsgálata külön eszközöket igényel. Például egy híd szerkezetére ható X külső erőt ellensúlyozza az Y belső ellenállóképesség, amelyek mindegyike véletlenszerűen változik. A

szerkezet összeomlásának valószínűségét a $P(X > Y) = \iint_{\{y < x\}} f_{XY}(x, y) \, dx dy$ kettősintegrál adja meg, ahol $f_{XY}(x, y)$ az együttes sűrűségfüggvény.

Megismerjük a két valószínűségi változó vizsgálatainak legfontosabb eszközeit az együttes eloszlás függvényt és a perem eloszlás függvényeket, valamint ezek diszkrét és folytonos alkalmazásait. A matematikai segédeszközök a mátrixok és a két változós függvények differenciál-és integrálszámítása lesz.

Megismerjük, hogyan lehet a feltételes valószínűségi eloszlást értelmezni, kiszámolni és szemléltetni. A feltételes eloszlások segítségével általánosítani tudjuk a szorzás-szabályt, a teljes valószínűség-tételt és a Bayes-tételt folytonos eloszlásokra. A feltételes várható érték vagy regressziós görbe két változó közötti függvényszerű kapcsolatot

Vissgáljuk a valószínűségi változók függetlenségének fogalmát folytonos és diszkrét esetekben. Értelmezzük a több dimenziós polinomiális eloszlást, a két dimenziós normál és az exponenciális eloszlásokat, amikor a két változó nem független.

Célunk az alábbi fogalmak és összefüggések megismerése, megértése	
Két valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvényének fogalma	Feltételes eloszlás értelmezése és számítása diszkrét esetben
Perem-eloszlás függvények fogalma és származtatása az együttes eloszlás függvényből	Feltételes sűrűség függvény számítása
Együttes eloszlás függvény tulajdonságai	A feltételes várható érték
Két valószínűségi változó téglalap alakú tartományba esésének számítása	Változók függetlensége diszkrét és folytonos esetben
Diszkrét együttes eloszlás megadása mátrix formában	Polinomiális eloszlás értelmezése
Diszkrét együttes eloszlás tulajdonságai	Két dimenziós normál eloszlás értelmezése adott korrelációs együtthatóval
Együttes sűrűség függvény kapcsolata az együttes eloszlás függvénnyel	Két dimenziós exponenciális eloszlás értelmezése adott korrelációs együtthatóval

▼ 11.2. Együttes eloszlásfüggvény és perem-eloszlásfüggvények

Legyenek az X és Y valószínűségi változók ugyanazon az (Ω, S, P) valószínűségi mezőn értelmezettek.

A $Z = (X, Y)$ párt valószínűségi **vektorváltozónak** nevezzük.

11.2.1. DEFINÍCIÓ. EGYÜTTES ELOSZLÁSFÜGGVÉNY

Az X és Y **együttes eloszlásfüggvénye** az $F_{XY}(x, y)$ **kétváltozós függvény**, amelyet az

$$F_{XY}(x, y) = P((X < x) \cap (Y < y))$$

szorzat esemény valószínűségével értelmezzük tetszőleges valós x és y esetén.

Az $F_{XY}(x, y)$ együttes eloszlásfüggvény a sík tetszőleges pontján értelmezett és grafikonját az $(x; y; z)$ térben tudjuk ábrázolni, ahol $z = F_{XY}(x, y)$.

Tehát az X és Y együttes eloszlásfüggvény kiszámításához az $\{X < x\} \cdot \{Y < y\}$ szorzat esemény valószínűségét kell meghatározni.

11.2.2. DEFINÍCIÓ. PEREM ELOSZLÁSFÜGGVÉNYEK vagy VETÜLETI ELOSZLÁSFÜGGVÉNYEK

Ha az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvényét az $F_{XY}(x, y)$ kétváltozós függvény jelöli, akkor külön-külön az

X eloszlásfüggvényét az $F_X(x) = P(X < x)$ egyváltozós függvény és

Y eloszlásfüggvényét az $F_Y(y) = P(Y < y)$ egyváltozós függvény,

jelöl, amelyet **perem eloszlásfüggvényeknek** vagy **vetületi eloszlásfüggvényeknek** nevezünk.

Vizsgáljuk meg az együttes eloszlásfüggvény tulajdonságait és kapcsolatát a vetületi eloszlás függvényekkel!

11.2.3. TÉTEL. AZ EGYÜTTES ELOSZLÁSFÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAI

(1) $0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1$;

(2) Az $x \rightarrow F_{XY}(x, y)$ és az $y \rightarrow F_{XY}(x, y)$ egyváltozós függvények monoton nem-csökkenőek;

(3) $F_{XY}(x, y)$ balról folytonos, mind az x , mind az y változóban: $\lim_{x \rightarrow a^-} F_{XY}(x, y) = F_{XY}(a, y)$ és

$\lim_{y \rightarrow b^-} F_{XY}(x, y) = F_{XY}(x, b)$

(4) $F_{XY}(-\infty, -\infty) = F_{XY}(-\infty, y) = F_{XY}(x, -\infty) = 0$;

(5) $F_{XY}(\infty, \infty) = 1$

(6) $F_{XY}(x, \infty) = F_X(x)$ és $F_{XY}(\infty, y) = F_Y(y)$ a peremeloszlás függvények.

BIZONYÍTÁS.

A 2., 4. és 6. tulajdonságokat bizonyítjuk, a többi az olvasóra bízunk.

A (2) tulajdonság bizonyítása.

Legyen $g(x) = F_{XY}(x, y)$ az együttes eloszlásfüggvény tengelymetszete az y -tengelyre merőleges síkkal és $a < b$! Ekkor

$$\{X < a\} \cdot \{Y < y\} \subseteq \{X < b\} \cdot \{Y < y\},$$

ezért

$$g(a) = P(\{X < a\} \cdot \{Y < y\}) \leq P(\{X < b\} \cdot \{Y < y\}) = g(b).$$

A (4) tulajdonság bizonyítása.

Az $\{X < -\infty\} \cdot \{Y < y\} = \emptyset \cdot \{Y < y\} = \emptyset$, mert az $\{X < -\infty\} = \emptyset$ a lehetetlen esemény. Ezért

$$F_{XY}(-\infty, y) = P(\{X < -\infty\} \cdot \{Y < y\}) = P(\emptyset) = 0.$$

A (6) tulajdonság bizonyítása.

Az $\{X < x\} \cdot \{Y < \infty\} = \{X < x\}$, mert $\{Y < \infty\} = \Omega$ a biztos esemény. Ezért
 $F_{XY}(x, \infty) = P(\{X < x\} \cdot \{Y < \infty\}) = P(\{X < x\}) = F_X(x)$. Q.e.d.

Számítsuk ki az együttes eloszlás függvény segítségével annak valószínűségét, hogy a $Z = (X, Y)$ valószínűségi vektor változó értéke egy adott téglalap alakú tartományba esik!

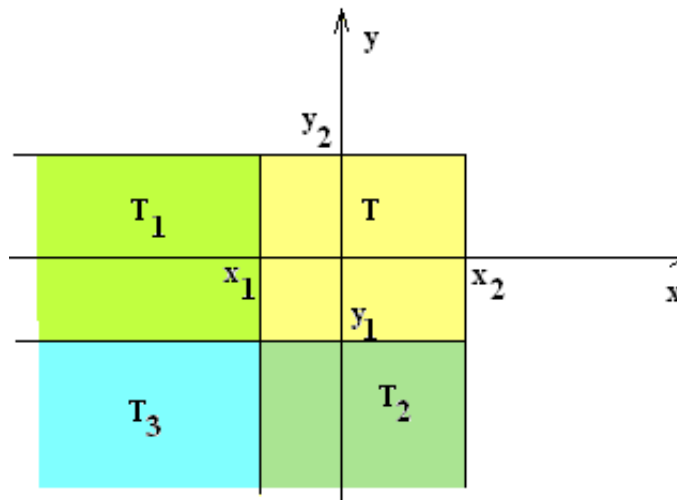
11.2.4. TÉTEL. Vektorváltozó téglalapon vett értékének valószínűsége

Legyen $x_1 < x_2$ és $y_1 < y_2$. Ekkor az $\{x_1 \leq X < x_2\} \cdot \{y_1 \leq Y < y_2\}$ szorzat esemény valószínűségét az $F_{XY}(x, y)$ együttes eloszlásfüggvénnyel következőképpen számíthatjuk ki

$$P(\{x_1 \leq X < x_2\} \cdot \{y_1 \leq Y < y_2\}) = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1)$$

BIZONYÍTÁS

Az egyenlőség bizonyításához elegendő az ábrán látható diszjunkt téglalapok uniói közül tekinteni az alábbi kombinációkat



$$(i) \quad T + T_1 + T_2 + T_3 = \{(x, y) \mid x < x_2 \text{ és } y < y_2\}$$

$$(ii) \quad T_2 + T_3 = \{(x, y) \mid x < x_2 \text{ és } y < y_1\}$$

$$(iii) \quad T_1 + T_3 = \{(x, y) \mid x < x_1 \text{ és } y < y_2\}$$

Tekintsük a megfelelő halmazokat az $\Omega \times \Omega$ szorzat eseménytérben. A jelölések egyszerűsítése érdekében a

$$P((\omega_1, \omega_2) \in \Omega \times \Omega \mid (X(\omega_1), Y(\omega_2)) \in T) = P(T)$$

jelölést használjuk a megfelelő halmazokra.

Vegyük a diszjunkt összeadandók valószínűségeit tagonként

$$P(T + T_1 + T_2 + T_3) = P(T) + P(T_1) + P(T_2 + T_3) = F_{XY}(x_2, y_2) \cdot$$

$$\text{Ahonnan } P(T) = F_{XY}(x_2, y_2) - P(T_1) - P(T_2 + T_3) = F_{XY}(x_2, y_2) - P(T_1) - F_{XY}(x_2, y_1)$$

Az (iii) egyenlőség alapján $P(T_1 + T_3) = P(T_1) + P(T_3) = F_{XY}(x_1, y_2)$. Mivel $P(T_3) = F_{XY}(x_1, y_1)$, ezért

$$P(T_1) = F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_1, y_1).$$

Behelyettesítve az előző egyenlőségbe

$$P(T) = F_{XY}(x_2, y_2) - (F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_1, y_1)) - F_{XY}(x_2, y_1),$$

amely a bizonyítandó egyenlőség. Q.e.d.

▼ 11.3. Diszkrét változó együttes eloszlása és együttes eloszlásfüggvénye

Definíciók és kapcsolatok az eloszlás, eloszlásfüggvény és perem eloszlások között
Ha az X és Y mindegyike **diszkrét valószínűségi változó** ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett, akkor az $(X, Y) = (\Omega, \Omega) \rightarrow (R, R)$ vektor-vektor leképezés **értékkészlete** véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz az $(x; y)$ síkban. Az **eloszlásfüggvény** most is lépcsős függvény lesz. Az ugrások azokon az $(x_k; y_i)$ helyeken lesznek, ahol vagy X eloszlásfüggvénye ugrik vagy Y eloszlásfüggvénye ugrik. Az együttes eloszlásfüggvény összegként való kiszámításához célszerű definiálni diszkrét esetben az **együttes eloszlást**, amely egy adott pontban felvett valószínűséget rögzít.

11.3.1. DEFINÍCIÓ. DISZKRÉT EGYÜTTES ELOSZLÁS

A $Z=(X, Y)$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó **együttes eloszlásának** nevezzük az

$$f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) = P(\{\omega \mid X(\omega) = x, Y(\omega) = y\})$$

kétváltozós függvényt.

Legyen X eloszlása a következő

$$\begin{bmatrix} X & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ P & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{bmatrix}, \text{ ahol } \sum_k p_k = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n + \dots = 1$$

és Y eloszlása az alábbi

$$\begin{bmatrix} Y & y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n & \dots \\ P & q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n & \dots \end{bmatrix}, \text{ ahol } \sum_k q_k = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n + \dots = 1.$$

Az $f(x, y)$ együttes eloszlás értéke mindenütt 0, kivéve az $(x; y) = (x_k; y_i)$ pontokban, tehát

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } (x, y) \neq (x_k, y_i) \\ r_{k, i}, & \text{ha } (x, y) = (x_k, y_i) \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, \dots; i = 1, 2, 3, \dots).$$

Milyen **kapcsolat van** a $r_{k, i}$ valószínűségek és a p_k, q_i valószínűségek között?

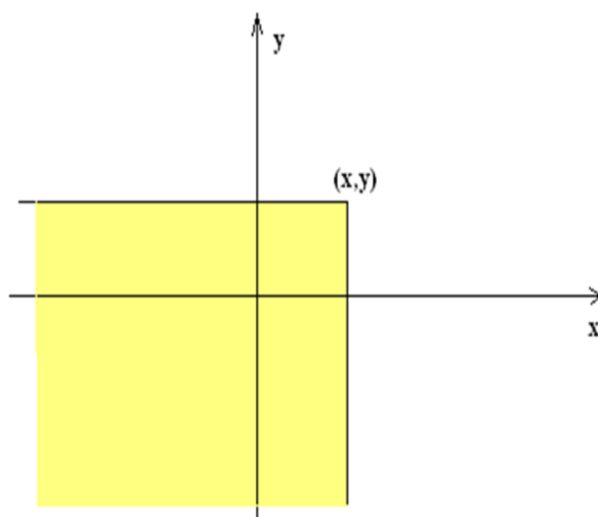
A válasz a **peremeloszlás**ban keresendő

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_{k, i} = p_k \text{ és } \sum_{k=1}^{\infty} r_{k, i} = q_i$$

Az együttes eloszlásfüggvény és az együttes eloszlás közötti kapcsolatot adja meg a következő kettős összeg

$$F_{XY}(x, y) = P(X < x, Y < y) = \sum_{u < x} \sum_{v < y} f_{XY}(u, v) = \sum_{\substack{k \\ x_k < x}} \sum_{\substack{i \\ y_i < y}} r_{k, i}$$

Tehát összegezni kell azokat az $r_{k, i}$ valószínűségeket, amelyek (k, i) indexe olyan, hogy az (x_k, y_i) az (x, y) jobbfelső sarokkal rendelkező tartományba esik! (lásd az ábrát!)



11.3.2. TÉTEL. DISZKRÉT EGYÜTTES ELOSZLÁS TULAJDONSÁGAI

(1) $0 \leq f_{XY}(x, y)$ nem-negatív

$$(2) \sum_x \left(\sum_y f_{XY}(x, y) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_{k,i} \right) = 1 \text{ a teljes összeg } 1.$$

11.3.3. Együttes eloszlás megadása mátrix formában

Véges sok x_k és y_i érték esetén az eloszlásokat (együttes és peremeloszlásokat) az alábbi alakú táblázatos formában adhatjuk meg tömören!

Diszkrét valószínűségi változók együttes valószínűségei		Y valószínűségi változó értékei				
		y₁	y₂	...	y_n	Összeg
X valószínűségi változó értékei	x₁	f(x ₁ ,y ₁)	f(x ₁ ,y ₂)	...	f(x ₁ ,y _n)	f_X(x₁)
	x₂	f(x ₂ ,y ₁)	f(x ₂ ,y ₂)	...	f(x ₂ ,y _n)	f_X(x₂)
	...	...	...	...	...	...
	x_m	f(x _m ,y ₁)	f(x _m ,y ₂)	...	f(x _m ,y _n)	f_X(x_m)
	Összeg	f_Y(y₁)	f_Y(y₂)	...	f_Y(y_n)	1

A **sárgával** jelölt középső tartományban az együttes eloszlás valószínűségeit írjuk:

$$f_{XY}(x_k, y_i) = P(X = x_k, Y = y_i) = r_{k,i} \quad (k=1..m \text{ és } i=1..n)$$

A **zölddel** jelölt oszlopok egyrészt **X** értékeit, másrészt az **X** változó perem eloszlásának valószínűségeit mutatja

$$f_X(x_k) = P(X = x_k) = \sum_{i=1}^n r_{k,i} \quad (k=1..m),$$

tehát a k-adik sor összege.

A **kékkel** jelölt sorok egyrészt **Y** értékeit, másrészt az **Y** változó perem eloszlásának valószínűségeit mutatja

$$f_Y(y_i) = P(Y = y_i) = \sum_{k=1}^m r_{k,i} \quad (i=1..n),$$

tehát az i-edik oszlop összege.

11.3.4. Példa. Adott az együttes eloszlás mátrixa

Legyen adva az X és Y diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlásának alábbi táblázata

↓X Y→	-1	0	1	2
0	0.05	0.1	0.2	0.1
1	0.05	0.05	0.1	0.05
2	0.1	0.05	0.05	0.05
3	0.02	0.02	0.005	0.005

(i) Adjuk meg az f_X és f_Y peremeloszlásokat!

(ii) Számítsuk ki az $F_{XY}(2,1) = P(X < 2, Y < 1)$ együttes eloszlásfüggvény

értékét!

(iii) Számítsuk ki az $F_{XY}(x_k, y_i) = P(X < x_k, Y < y_i)$ együttes eloszlásfüggvény összegzett mátrixát!
 (iv) Mutassuk meg, hogy F_{XY} mátrix utolsó oszlopában X eloszlásfüggvénye, míg utolsó sorában Y eloszlásfüggvénye szerepel!

MEGOLDÁS

Az X és Y változók lehetséges értékeit megadjuk az X és Y nevű vektorokban!

> restart :

> X, Y := Vector([0, 1, 2, 3]), Vector([-1, 1, 2, 3]);
 nx, ny := numelems(X), numelems(Y)

$$X, Y := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$nx, ny := 4, 4 \quad (1.3.1)$$

Az f_{XY} együttes eloszlás értékeit az f_{XY} nevű 4x4-es mátrixba tesszük.

> fXY := Matrix(1..nx, 1..ny, [[0.05, 0.10, 0.20, 0.10], [0.05, 0.05, 0.10, 0.05], [0.10, 0.05, 0.05, 0.05], [0.02, 0.02, 0.005, 0.005]]);

$$f_{XY} := \begin{bmatrix} 0.05 & 0.10 & 0.20 & 0.10 \\ 0.05 & 0.05 & 0.10 & 0.05 \\ 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \\ 0.02 & 0.02 & 0.005 & 0.005 \end{bmatrix} \quad (1.3.2)$$

Ellenőrizzük, hogy valóban kétváltozós valószínűségi eloszlással van dolgunk!

$$\sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^4 f_{XY_{i,j}} \right) = \text{add}(\text{add}(f_{XY_{i,j}}, j = 1..ny), i = 1..nx)$$

$$\sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^4 f_{XY_{i,j}} \right) = 1.0000000000 \quad (1.3.3)$$

Tehát a teljes összeg 1.

(i) Adjuk meg az f_X és f_Y peremeloszlásokat!

Az X-re vonatkozó f_X perem eloszlást az f_{XY} mátrix **sorainak** összegzésével kapjuk!

> fX := Vector([seq(add(fXY[i, j], j = 1..ny), i = 1..nx)])

$$f_X := \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.050 \end{bmatrix} \quad (1.3.4)$$

Hasonlóan számolhatjuk az Y-ra vonatkozó f_Y perem eloszlást az f_{XY} **oszlopainak** összegzésével!

> fY := Vector[row]([seq(add(fXY[i, j], i = 1..nx), j = 1..ny)]);

$$f_Y := \begin{bmatrix} 0.22 & 0.22 & 0.355 & 0.205 \end{bmatrix} \quad (1.3.5)$$

Tegyük a kiszámolt f_X összeg oszlopot az f_{XY} együttes eloszlás utolsó oszlopába!

> $bövitett := Matrix([f_{XY}, f_X]);$
 $ÖsszegY := Vector[row]([f_Y, 1])$

$$bövitett := \begin{bmatrix} 0.05 & 0.10 & 0.20 & 0.10 & 0.45 \\ 0.05 & 0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.25 \\ 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.25 \\ 0.02 & 0.02 & 0.005 & 0.005 & 0.050 \end{bmatrix}$$

$$ÖsszegY := \begin{bmatrix} 0.22 & 0.22 & 0.355 & 0.205 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.6)$$

Most a bővített mátrix utolsó sorába tegyük az f_Y összeg sort és a jobb alsó sarokban levő 1 összeget!

> $Együttes\ eloszlás\ a\ peremekkel = Matrix(5, 5, \langle bövitett, ÖsszegY \rangle);$

$$Együttes\ eloszlás\ a\ peremekkel = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.10 & 0.20 & 0.10 & 0.45 \\ 0.05 & 0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.25 \\ 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.25 \\ 0.02 & 0.02 & 0.005 & 0.005 & 0.050 \\ 0.22 & 0.22 & 0.355 & 0.205 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.7)$$

Az egy sorral és oszloppal bővített táblázatot megadjuk táblázat formában is!

$\downarrow X \parallel$ $Y \rightarrow$	-1	0	1	2	Összegek
0	0.05	0.1	0.2	0.1	0.45
1	0.05	0.05	0.1	0.05	0.25
2	0.1	0.05	0.05	0.05	0.25
3	0.02	0.02	0.005	0.005	0.05
Összegek	0.22	0.22	0.355	0.205	1

(ii) Számítsuk ki az $F_{XY}(2,1) = P(X < 2, Y < 1)$ együttes eloszlásfüggvény értékét!

A számításhoz összegezni kell az $X = 0, 1$ valamint az $Y = -1, 0$ értékekhez tartozó valószínűségeket, vagyis a táblázat bal felső sarkában levő 2×2 mátrix elemeket!

$$F_{XY}(2,1) = P(X < 2, Y < 1) = \sum_{x_k < 2} \sum_{y_i < 1} f(x_k, y_i) = \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 r_{k,i}$$

> $Sum(Sum('f_{XY}[k, i], k = 1..2), i = 1..2) = add(add(f_{XY}[k, i], k = 1..2), i = 1..2);$

$$\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^2 f_{XY_{k,i}} \right) = 0.2500000000 \quad (1.3.8)$$

(iii) Számítsuk ki az $F_{XY}(x_k, y_i) = P(X < x_k, Y < y_i)$ együttes eloszlásfüggvény összegzett

mátrixát!

A következő két egymásba ágyazott ciklussal előállítjuk az FXY mátrixban az együttes eloszlásfüggvény lépcsőinek értékeit!

```
> FXY := Matrix(1..nx, 1..ny) :
  for j to ny do
    for i to nx do
       $FXY_{i,j} := add(add(fXY_{i1,j1}, j1 = 1..j), i1 = 1..i)$ 
    end do
  end do
  Az együttes eloszlásfüggvény lépcsői = FXY
```

$$\text{Az együttes eloszlásfüggvény lépcsői} = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.15 & 0.35 & 0.45 \\ 0.10 & 0.25 & 0.55 & 0.70 \\ 0.20 & 0.40 & 0.75 & 0.95 \\ 0.22 & 0.44 & 0.795 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (1.3.9)$$

(iv) Mutassuk meg, hogy F_{XY} mátrix utolsó oszlopában X eloszlásfüggvénye, míg utolsó sorában Y eloszlásfüggvénye szerepel!

Szedjük ki az FXY mátrix utolsó oszlopát és sorát!

```
> with(LinearAlgebra) :
  FX, FY := Column(FXY, 4), Row(FXY, 4);
```

$$FX, FY := \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.70 \\ 0.95 \\ 1.000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.22 & 0.44 & 0.795 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (1.3.10)$$

Most összegezzük az f_X és f_Y peremeloszlások vektoraiban levő értékeket!

```
> Vector([seq(add(fX[k], k = 1..j), j = 1..4)]),
  Vector[row]([seq(add(fY[i], i = 1..j), j = 1..4)])
```

$$\begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.70 \\ 0.95 \\ 1.000 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.22 & 0.44 & 0.795 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (1.3.11)$$

Láthatóan a kapott vektorok megegyeznek az előzőekben kapott vektorokkal! ♣

11.3.5. Grafikus megjelenítések

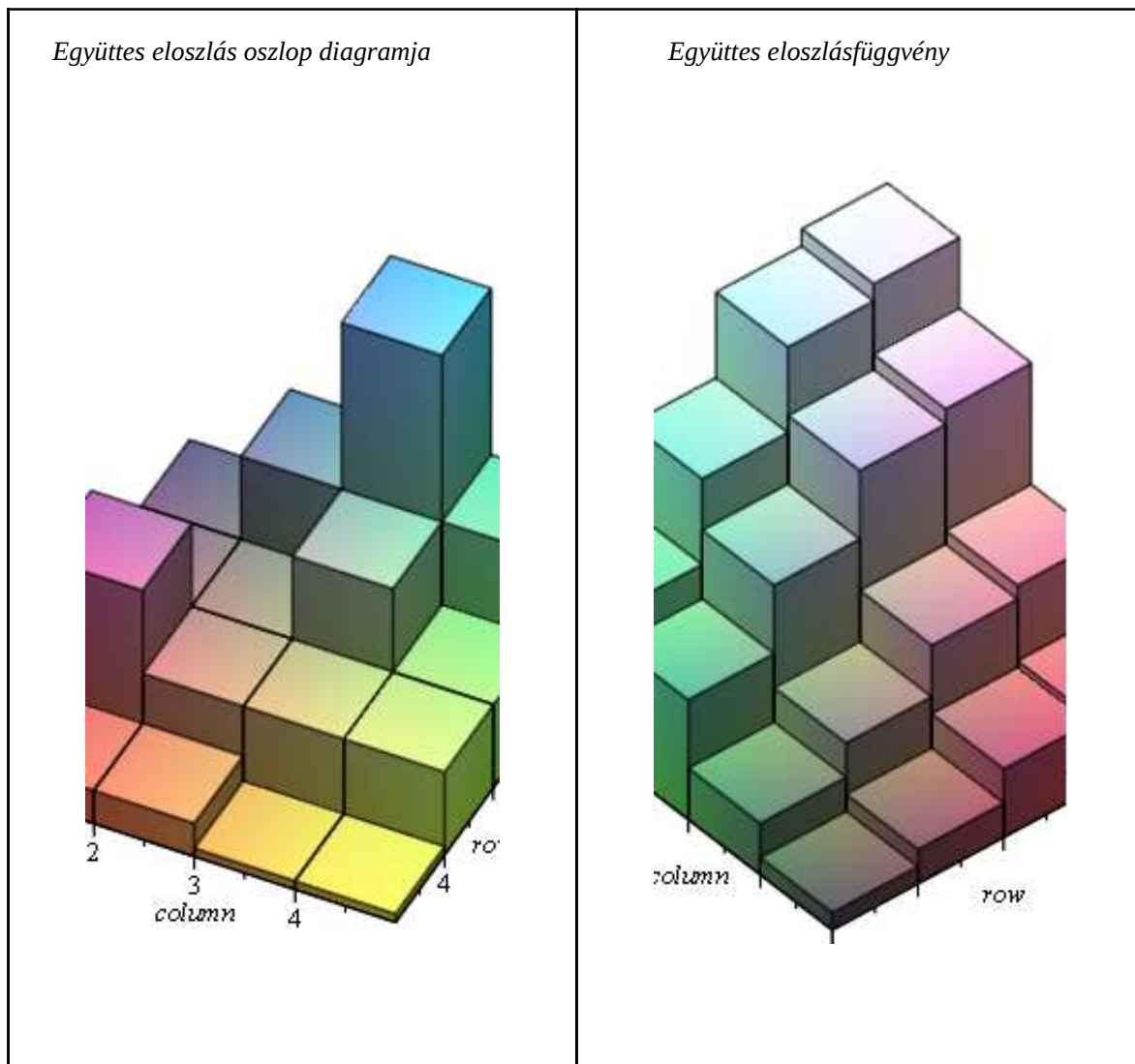
Egy **diszkrét valószínűségi változó** eloszlását **pálcika** diagrammal szemléltettük. Kétváltozós esetben használhatjuk a beépített 3D-s oszlop diagram rajzolásra is alkalmas "**matrixplot**" eljárást. Olyan 3D -s **oszlopokat** rajzol a matrixplot, amelynek az ugrásai követik az X és Y változók ugrásait! A rajzok egyetlen hibája, hogy X és Y értékeit nem jól mutatja!

```
H1 := plots:-matrixplot(fXY, heights = histogram, axes = framed, orientation = [26, 48], title
  = Együttes eloszlás oszlop diagramja) :
```

```
H2 := plots[matrixplot](FXY, heights = histogram, axes = framed, orientation = [-130, 50], title
  = Együttes eloszlásfüggvény) :
```

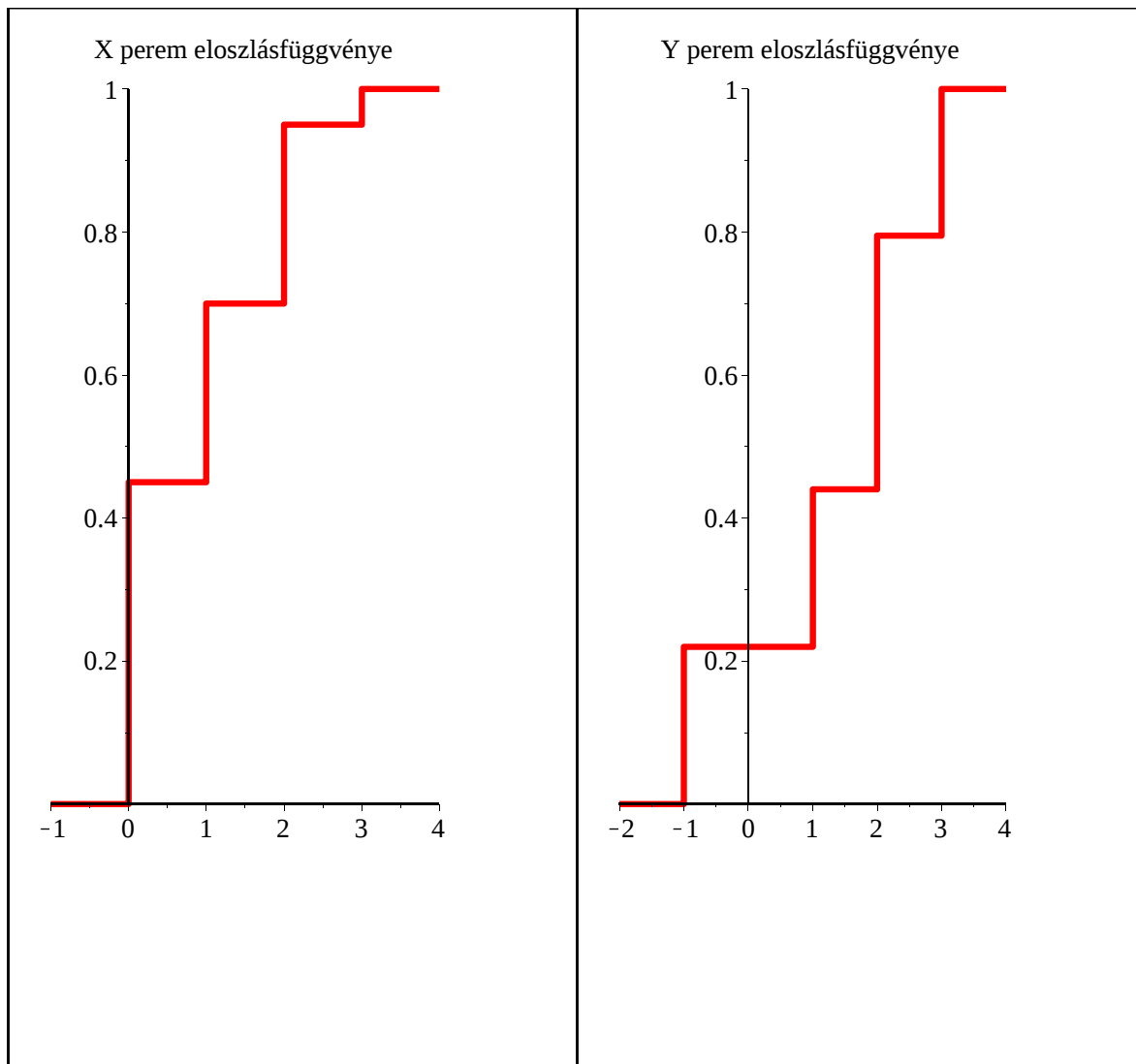
```
H := Matrix(1, 2, [H1, H2]) :
```

> *plots:-display(H)*



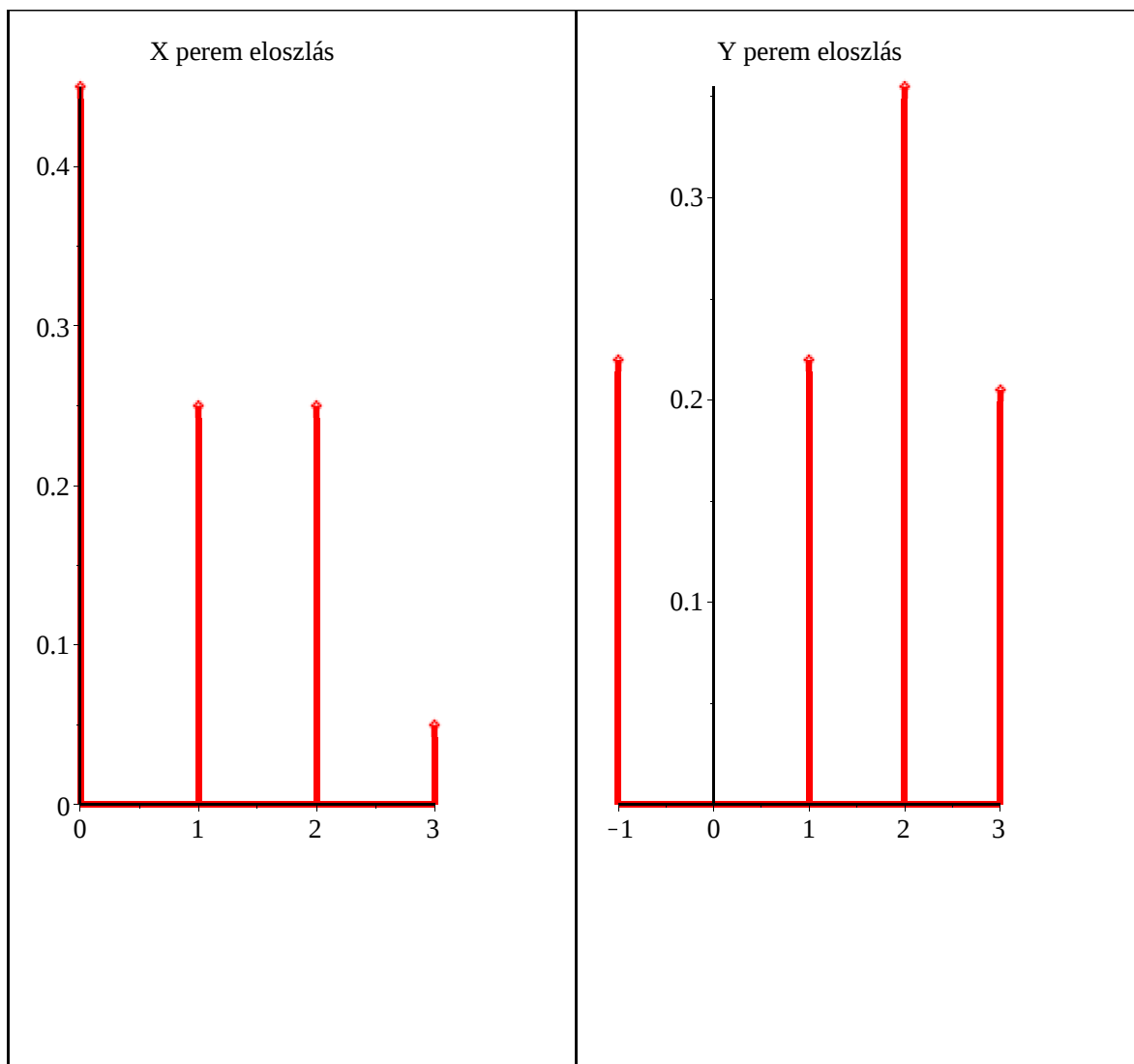
Rajzoljuk fel az X és Y egy dimenziós diszkrét eloszlásfüggvények lépcsőit a *DynamicSystems* csomag *DiscretePlot* eljárását használva!

```
> XX := [X1 - 1, op(convert(X, list)), Xnx + 1] : FXX := [0, op(convert(FX, list)), 1] :
  YY := [Y1 - 1, op(convert(Y, list)), Yny + 1] : FYY := [0, op(convert(FY, list)), 1] :
> L := Matrix(1, 2, [ DynamicSystems:-DiscretePlot(XX, FXX, style = stair, thickness = 3,
  color = red, title = "X perem eloszlásfüggvénye"), DynamicSystems:-DiscretePlot(YY,
  FYY, style = stair, thickness = 3, color = red, title = "Y perem eloszlásfüggvénye") ]) :
plots:-display(L)
```



Rajzoljuk fel az X és Y egy dimenziós diszkrét eloszlások pálcikáit a *DynamicSystems* csomag *DiscretePlot* eljárását használva!

```
> M := Matrix(1, 2, [ DynamicSystems:-DiscretePlot(X, fX, style = stem, thickness = 3, color
= red, title = "X perem eloszlása"), DynamicSystems:-DiscretePlot(Y, fY, style = stem,
thickness = 3, color = red, title = "Y perem eloszlása") ] ) :
plots:-display(M)
```



11.3.6. PÉLDA. Az együtteseloszlás mátrixának meghatározása a kísérletből

Egy bridzs partin a pakli 52 kártya lapból áll, amelyben 4 **királynő**, 4 **király** és 4 **ász** van.

Visszatevéssel kihúzzunk 3 kártyát!

Legyen **X** a kihúzott kártyák között a **királynők** száma és **Y** a kihúzott kártyák között a **király és ász** lapok száma **együtt**.

Készítsük el

- X és Y együttes eloszlását!**
- X és Y perem eloszlását!**
- X és Y együttes-, és perem eloszlásfüggvényeit!**
- Ábrázoljuk** az együttes eloszlást, együttes eloszlásfüggvényt, perem eloszlást és a perem eloszlásfüggvényeket!

MEGOLDÁS

(a) Készítsük el **X és Y együttes eloszlását!**

Mivel a 3 lapot visszatevéssel húzzuk, ezért az **X** és **Y** változók értéke 0, 1, 2, 3 lehet!

> *restart*

> **X := [0, 1, 2, 3]; Y := [0, 1, 2, 3];**

$$X := [0, 1, 2, 3]$$

$$Y := [0, 1, 2, 3]$$

(1.3.12)

Egy húzás eredményével kapcsolatban célszerű jelöléseket bevezetni a feladatban szereplő eseményekre.

$A = \{ \text{a húzás eredménye királynő} \}$	$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
$B = \{ \text{a húzás eredménye király} \},$ $C = \{ \text{a húzás eredménye ász} \}$	$P(B + C) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$
$D = \{ \text{a húzás eredménye se királynő, se király, se ász} \}$	$P(D) = \frac{52 - 12}{52} = \frac{40}{52} = \frac{10}{13}$

Látható, hogy $A, B + C, D$ események teljes eseményrendszert alkotnak!

Az X és Y együttes eloszlásához a következő valószínűségeket kell meghatározni

$$f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y) =$$

$P(3 \text{ húzásból } x \text{ esetben királynőt, } y \text{ esetben királyt vagy ászt húztunk és így } (3 - x - y) \text{ esetben egyiket sem})$

Az első húzás eredményét jelölje H_1 , másodikét H_2 és a harmadikét H_3 .

A H_1, H_2, H_3 mindegyike helyére az $A, B + C$ és D események valamelyikét helyettesíthetjük úgy, hogy közöttük x db A, y db $(B + C)$ és $(3 - x - y)$ db D szerepel (az $x, y, 3 - x - y \in \{0, 1, 2, 3\}$). A húzások függetlenek, mert visszatesszük a lapokat az egyes húzások után, ezért

$$P(H_1 \cdot H_2 \cdot H_3) = P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot P(H_3).$$

A jobb oldalon szereplő valószínűségek szorzata

$$\left(\frac{1}{13}\right)^x \left(\frac{2}{13}\right)^y \left(\frac{10}{13}\right)^{3-x-y}, \text{ ahol } x + y \leq 3.$$

Például $x = 2, y = 0$ és $z = 3 - x - y = 1$ esetben a lehetséges szorzat események a következők:
 $\{X = 2, Y = 0\} = A \cdot A \cdot D + A \cdot D \cdot A + D \cdot A \cdot A$

Ezek száma $\frac{3!}{x! y! (3 - x - y)!} = \frac{6}{2! \cdot 0! \cdot 1!} = 3$. Minden más esetben a számítások hasonlóan mennek. Így kapjuk az együttes valószínűségekre a polinomiális eloszlásból ismert alábbi képletet

$$f_{XY}(x, y) = \frac{3!}{x! y! (3 - x - y)!} \left(\frac{1}{13}\right)^x \left(\frac{2}{13}\right)^y \left(\frac{10}{13}\right)^{3-x-y}, \text{ ahol } x + y \leq 3.$$

Minden más (x, y) esetben $f_{XY}(x, y) = 0$.

Használjuk a fenti kétváltozós függvényt az együttes eloszlás mátrixának létrehozásához!

➤ $x := 'x'; y := 'y';$

$$f := (x, y) \rightarrow \frac{3!}{x! \cdot y! \cdot (3 - x - y)!} \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{13}\right)^y \cdot \left(\frac{10}{13}\right)^{(3 - x - y)}$$

$$f := (x, y) \rightarrow \frac{3! \left(\frac{1}{13}\right)^x \left(\frac{2}{13}\right)^y \left(\frac{10}{13}\right)^{3-x-y}}{x! y! (3 - x - y)!}$$

(1.3.13)

A nulla értékek felismeréséhez a valószínűségeket elágazásos módon kell megadni, ezért egy eljárást írunk az indexek képzésére!

```

> ind := proc(i, j)
  local k, l;
  k := i-1; l := j-1;
  if k + l ≤ 3 then simplify( f(k, l) ) else 0 fi
end:

```

Ezzel az eljárással létrehozzuk az f_{XY} 4x4-es mátrixot!

```

> fXY := Matrix(4, 4, ind);

```

$$f_{XY} := \begin{bmatrix} \frac{1000}{2197} & \frac{600}{2197} & \frac{120}{2197} & \frac{8}{2197} \\ \frac{300}{2197} & \frac{120}{2197} & \frac{12}{2197} & 0 \\ \frac{30}{2197} & \frac{6}{2197} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2197} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.14)$$

Ellenőrizzük, hogy valóban valószínűségi eloszlást kaptunk!

$$\sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^4 f_{XY_{i,j}} \right) = \text{add}(\text{add}(f_{XY_{i,j}}, j = 1 \dots 4), i = 1 \dots 4)$$

$$\sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^4 f_{XY_{i,j}} \right) = 1 \quad (1.3.15)$$

(b) Készítsük el X és Y **perem eloszlását!**

Az X változó f_X perem-eloszlását az f_{XY} **sorainak összegzésével** kapjuk!

```

fX := Vector([seq(add(fXY_{i,j}, j = 1 .. 4), i = 1 .. 4)])

```

$$f_X := \begin{bmatrix} \frac{1728}{2197} \\ \frac{432}{2197} \\ \frac{36}{2197} \\ \frac{1}{2197} \end{bmatrix} \quad (1.3.16)$$

Hasonlóan számolhatjuk az Y változó f_Y perem-eloszlását az f_{XY} **oszlopainak összegzésével!**

```

fY := Vector[row]([seq(add(fXY_{i,j}, i = 1 .. 4), j = 1 .. 4)])

```

$$f_Y := \begin{bmatrix} \frac{1331}{2197} & \frac{726}{2197} & \frac{132}{2197} & \frac{8}{2197} \end{bmatrix} \quad (1.3.17)$$

(c) Készítsük el X és Y **együttes-, és perem eloszlásfüggvényeit!**

Két egymásba ágyazott ciklussal összegezve kapjuk a kummulatív együttes eloszlásfüggvény mátrixát!

```

FXY := Matrix(1 .. 4, 1 .. 4) :

```

```

> i := i : j := j :
  for j from 1 to 4 do
>   for i from 1 to 4 do
> FXYi,j := add( add( fXYii,jj, jj = 1 ..j ), ii = 1 ..i )
>   end do;
> end do:

```

Az együttes eloszlásfüggvény = FXY

$$\text{Az együttes eloszlásfüggvény} = \begin{bmatrix} \frac{1000}{2197} & \frac{1600}{2197} & \frac{1720}{2197} & \frac{1728}{2197} \\ \frac{100}{169} & \frac{2020}{2197} & \frac{2152}{2197} & \frac{2160}{2197} \\ \frac{1330}{2197} & \frac{2056}{2197} & \frac{2188}{2197} & \frac{2196}{2197} \\ \frac{1331}{2197} & \frac{2057}{2197} & \frac{2189}{2197} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.18)$$

Az **X** változó perem eloszlásfüggvényét a **fX vektor** kummulatív összegzésével kapjuk!
Ez éppen FXY mátrix utolsó oszlop vektora!

FX := Vector([seq(add(fX_j, j = 1 ..i), i = 1 ..4)])

$$FX := \begin{bmatrix} \frac{1728}{2197} \\ \frac{2160}{2197} \\ \frac{2196}{2197} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.19)$$

Az **Y** változó perem eloszlásfüggvényét a **fY vektor** kummulatív összegzésével kapjuk!
Ez FXY mátrix utolsó sor vektora!

FY := Vector_{row}([seq(add(fY_j, j = 1 ..i), i = 1 ..4)])

$$FY := \begin{bmatrix} \frac{1331}{2197} & \frac{2057}{2197} & \frac{2189}{2197} & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.20)$$

(d) Ábrázoljuk az együttes eloszlást, együttes eloszlásfüggvényt, perem eloszlást és a perem eloszlásfüggvényeket!

Tegyük egymás mellé az együttes eloszlás oszlopdiagrammját és ennek összegzett rajzát!

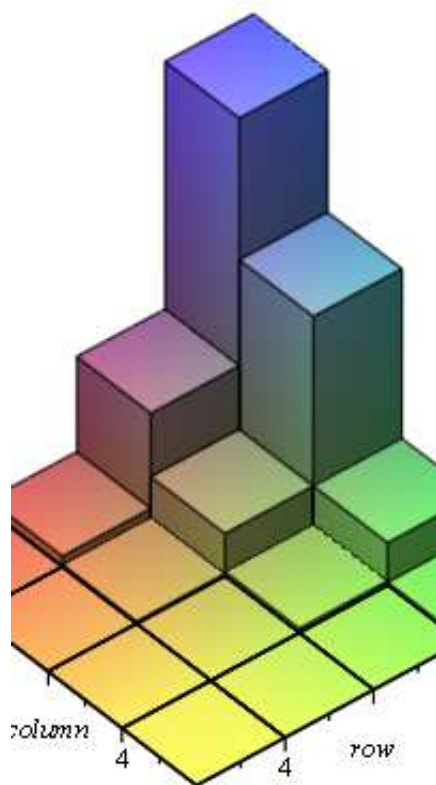
H1 := plots[matrixplot](fXY, heights = histogram, axes = framed, orientation = [50, 50], title = Együttes eloszlás oszlopdiagramja) :

H2 := plots[matrixplot](FXY, heights = histogram, axes = framed, orientation = [-130, 50], title = Együttes eloszlásfüggvény) :

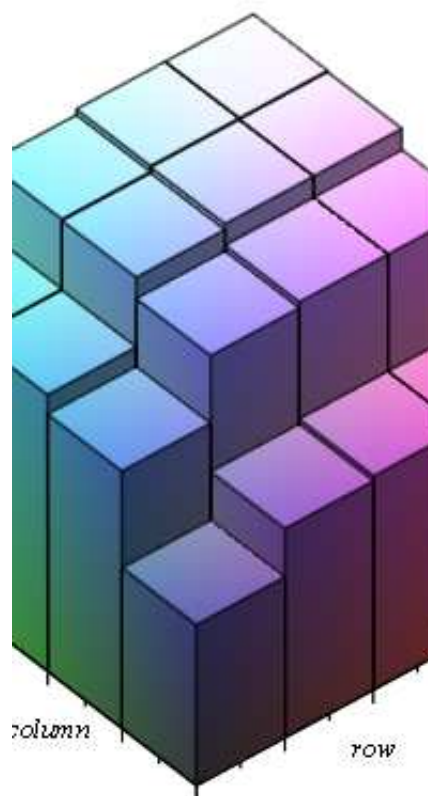
H := Matrix(1, 2, [H1, H2]) :

> plots:-display(H)

Együttes eloszlás oszlopdiagramja

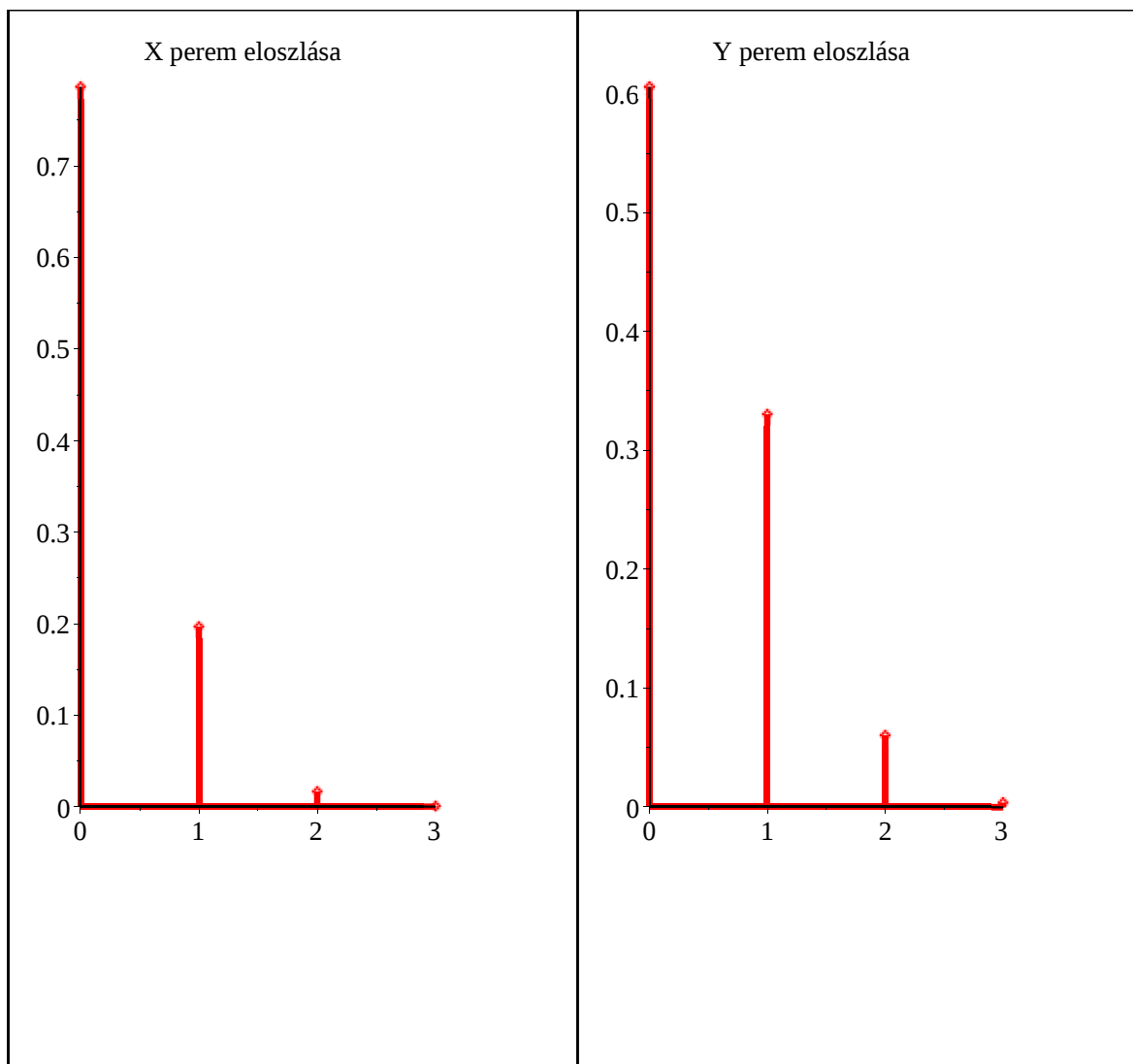


Együttes eloszlásfüggvény



Rajzoljuk fel mindkét perem eloszlást egyszerre!

```
> M := Matrix(1, 2, [ DynamicSystems:-DiscretePlot(X, fX, style = stem, thickness = 3, color
= red, title = "X perem eloszlása"), DynamicSystems:-DiscretePlot(Y, fY, style = stem,
thickness = 3, color = red, title = "Y perem eloszlása") ] ) :
plots:-display(M)
```



▼ 11.4. Együttes sűrűségfüggvény és együttes eloszlásfüggvény folytonos változókra

Definíciók és kapcsolatok a sűrűségfüggvény, eloszlásfüggvény és perem sűrűségek között

11.4.1. DEFINÍCIÓ. FOLYTONOS VALÓSZÍNŰSÉGI VEKTOR VÁLTOZÓ

Az (X, Y) valószínűségi vektorváltozóról azt mondjuk, hogy **folytonos**, ha a megfelelő $F_{XY}(x, y)$ együttes eloszlásfüggvény előállítható a

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) \, du \, dv$$

kettősintegrál alakban, ahol az $f(x, y) \geq 0$ értelmezett és **nemnegatív** a teljes (x, y) síkon, folytonos kivéve esetleg véges sok folytonosan differenciálható görbe mentén, továbbá a teljes síkon vett **kettős integrál értéke 1**.

Az együttes eloszlásfüggvény és az együttes sűrűség függvény között a kétszeres parciális deriválás és a kettős integrálás teremt kapcsolatot.

11.4.2. DEFINÍCIÓ. FOLYTONOS EGYÜTTES SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY

Az (X,Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó **együttes sűrűségfüggvényének nevezzük** a $z = f(x, y)$ kétváltozós függvényt, mely a 11.4.1. definícióban szerepel!

Az együttes sűrűségfüggvény az együttes eloszlásfüggvény vegyes másodrendű parciális deriváltjából határozhatjuk meg, azaz

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F_{XY}(x, y)$$

Ahol nem differenciálható az együttes eloszlásfüggvény, ott értelmezzük az együttes sűrűségfüggvényt lehetőleg folytonosan vagy félig folytonosan.

A perem sűrűség függvényeket az együttes sűrűség függvény egyszeres integrálásával kapjuk.

11.4.3. DEFINÍCIÓ. PEREM SŰRŰSÉG FÜGGVÉNYEK

Az X változó sűrűségfüggvényét nevezzük X **perem sűrűségfüggvényének** és az együttes sűrűségfüggvényből megkapjuk y -szerinti egyszeres integrállal

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

Az Y változó sűrűségfüggvényét nevezzük Y **perem sűrűségfüggvényének** és az együttes sűrűségfüggvényből megkapjuk x -szerinti egyszeres integrállal

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

A folytonos vektor változó együttes sűrűségfüggvénye hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint az egy változós sűrűség függvény: nem-negatív és a teljes görbe alatti térfogat 1.

11.4.4. TÉTEL. FOLYTONOS EGYÜTTES SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAI

(1) $0 \leq f_{XY}(x, y)$ nemnegativitási tulajdonság

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy dx = 1$ a teljes görbe alatti térfogat egységnyi

11.4.5. Példa. Az együttes sűrűség függvény egyetlen képlettel adott

Tekintsük az $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{\pi^2 (1+x^2)(1+y^2)}$ képlettel adott kétváltozós

függvényt!

(i) Mutassuk meg, hogy $f_{XY}(x, y)$ függvény lehet együttes sűrűség függvény!

(ii) Határozzuk meg a perem sűrűség függvényeket és rajzoljuk fel grafikonjukat!

(iii) Határozzuk meg az együttes eloszlás függvényt, perem eloszlás függvényeket és rajzoljuk fel a grafikonokat!

MEGOLDÁS

(i) Mutassuk meg, hogy $f_{XY}(x, y)$ függvény lehet egy együttes sűrűség függvény!

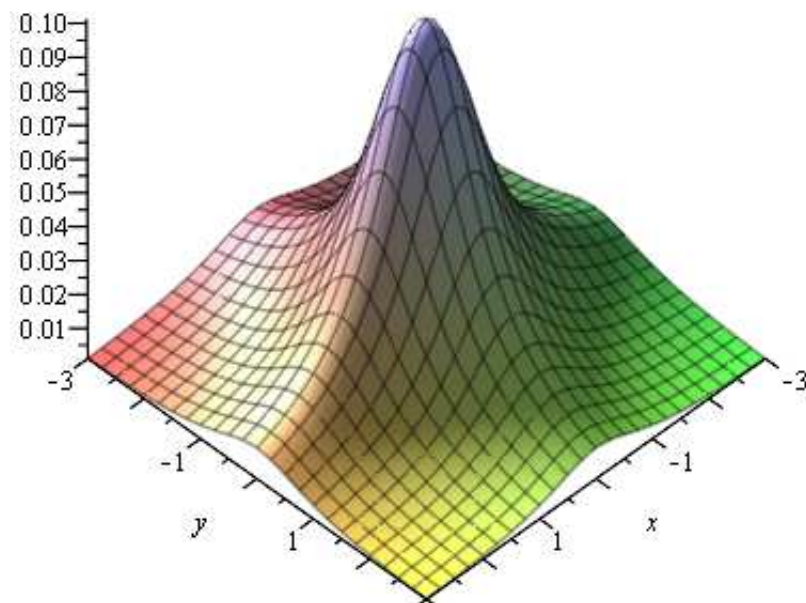
> restart :

$$f_{XY} := (x, y) \rightarrow \frac{1}{\pi^2 \cdot (1+x^2) \cdot (1+y^2)}$$

$$f_{XY} := (x, y) \rightarrow \frac{1}{\pi^2 (1+x^2) (1+y^2)} \quad (1.4.1)$$

Látható, hogy az $f_{XY}(x, y) \geq 0$ feltétel teljesül minden valós x, y esetén. Rajzoljuk fel a felületet!

> `plot3d( fXY(x, y), x=-3..3, y=-3..3, axes = framed);`



Ellenőrizzük, hogy a felület alatti térfogat 1, azaz teljesül a sűrűség függvényre kirótt második feltétel is!

> `Int(Int( fXY(x, y), x=-∞..∞), y=-∞..∞) = int(int( fXY(x, y), x=-∞..∞), y=-∞..∞);`

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (1+x^2) (1+y^2)} dx dy = 1 \quad (1.4.2)$$

Tehát az $f_{XY}(x, y)$ függvény valóban egy két dimenziós sűrűség függvény!

(ii) Határozzuk meg a perem sűrűség függvényeket!

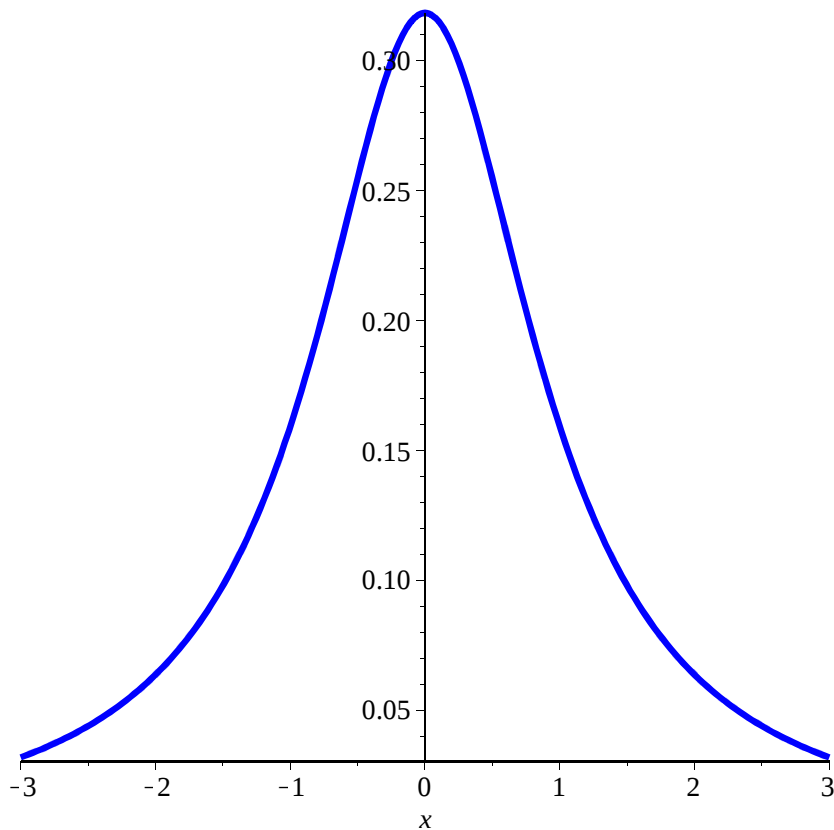
Az X peremsűrűség függvényt az y-szerinti integrál adja $(-\infty)$ -tól ∞ -ig !

> `fX := x → ∫_{-∞}^{∞} fXY(x, y) dy; 'fX(x)' = fX(x);`

> `plot( fX(x), x=-3..3, color = blue, thickness = 3)`

$$f_X := x \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \, dy$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi (1 + x^2)}$$



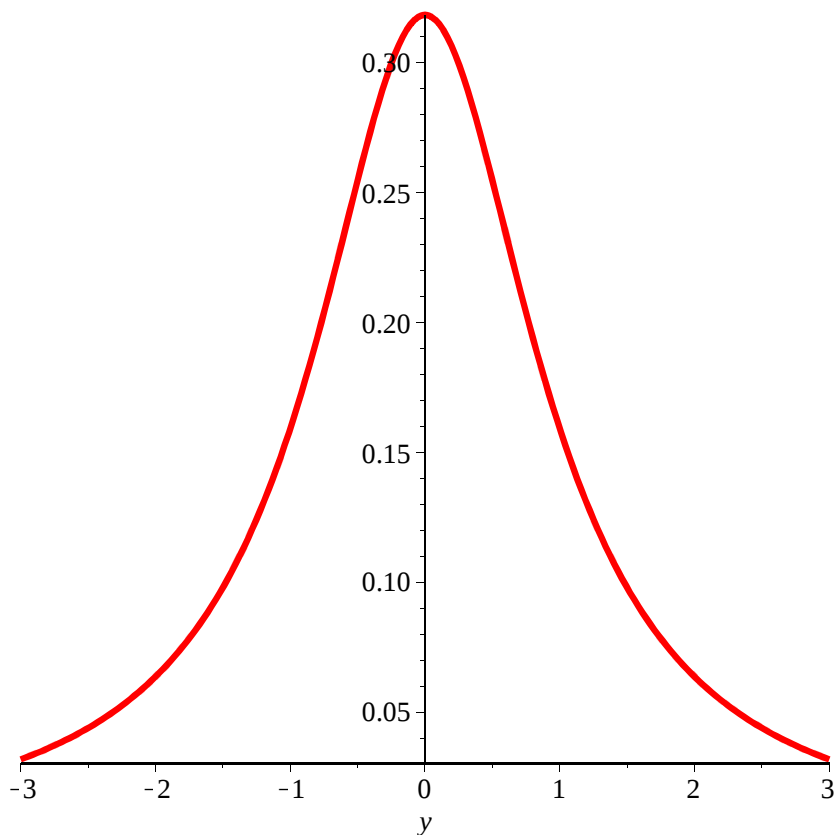
Az Y peremsűrűség függvényt az x-szerinti integrál adja ($-\infty$)-tól ∞ -ig !

> $f_Y := y \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \, dx$; ' $f_Y(y)$ ' = $f_Y(y)$;

> $\text{plot}(f_Y(y), y = -3 \dots 3, \text{color} = \text{red}, \text{thickness} = 3)$

$$f_Y := y \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \, dx$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi (1 + y^2)}$$



Láthatjuk, hogy az együttes sűrűségfüggvény megegyezik az X és Y perem-sűrűségfüggvények szorzatával. Ekkor azt mondjuk, hogy az X és Y valószínűségi változók függetlenek! (Lásd 11.6. pontot)

> `'fXY(x, y)'='fX(x)'\cdot'fY(y)'; value(%);`

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$\frac{1}{\pi^2 (1+x^2) (1+y^2)} = \frac{1}{\pi^2 (1+x^2) (1+y^2)} \quad (1.4.3)$$

Az együttes eloszlásfüggvényt a sűrűségfüggvény integrálja adja!

> $F_{XY} := (x, y) \rightarrow \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{XY}(u, v) du dv$

> *Együttes eloszlás függvény* = $F_{XY}(x, y)$

$$F_{XY} := (x, y) \rightarrow \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{XY}(u, v) du dv$$

Együttes eloszlás függvény

(1.4.4)

$$= \frac{1}{4} \frac{\pi^2 + 2\pi \arctan(x) + 2\arctan(y)\pi + 4\arctan(y)\arctan(x)}{\pi^2}$$

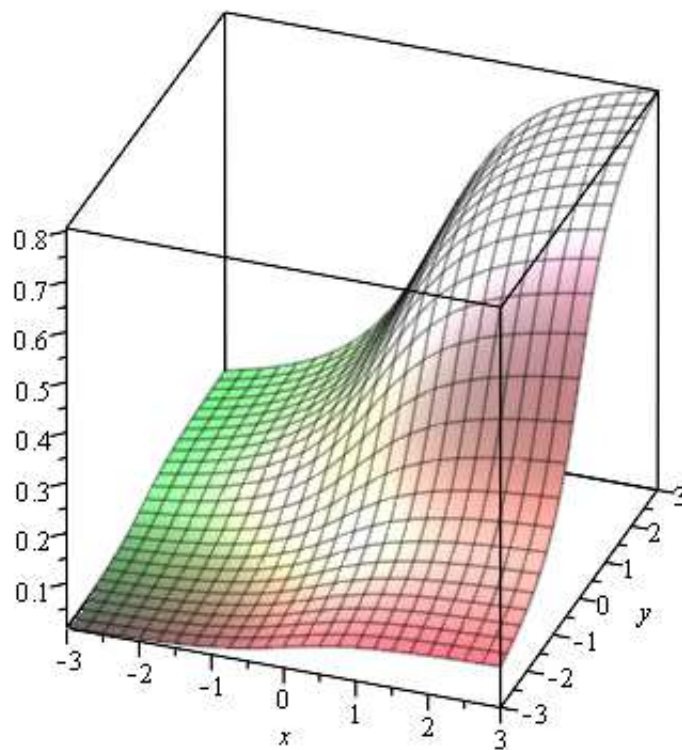
Ellenőrizzük, hogy az eloszlásfüggvény vegyes másodrendű parciális deriváltja az együttes sűrűségfüggvény!

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F_{XY}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f_{XY}(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_{XY}(x, y) &= \frac{1}{\pi^2 (1+x^2)(1+y^2)} \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Rajzoljuk fel az együttes eloszlásfüggvény grafikonját!

> `plot3d(fxy(x, y), x = -3..3, y = -3..3, axes = boxed, orientation = [-70, 60], title = Együttes eloszlásfüggvény)`

Együttes eloszlásfüggvény



Ellenőrizzük, hogy X peremeloszlás függvényét az együttes sűrűség függvényéből $y \rightarrow \infty$ határérték mellett kapjuk

$$F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{XY}(x, y)$$

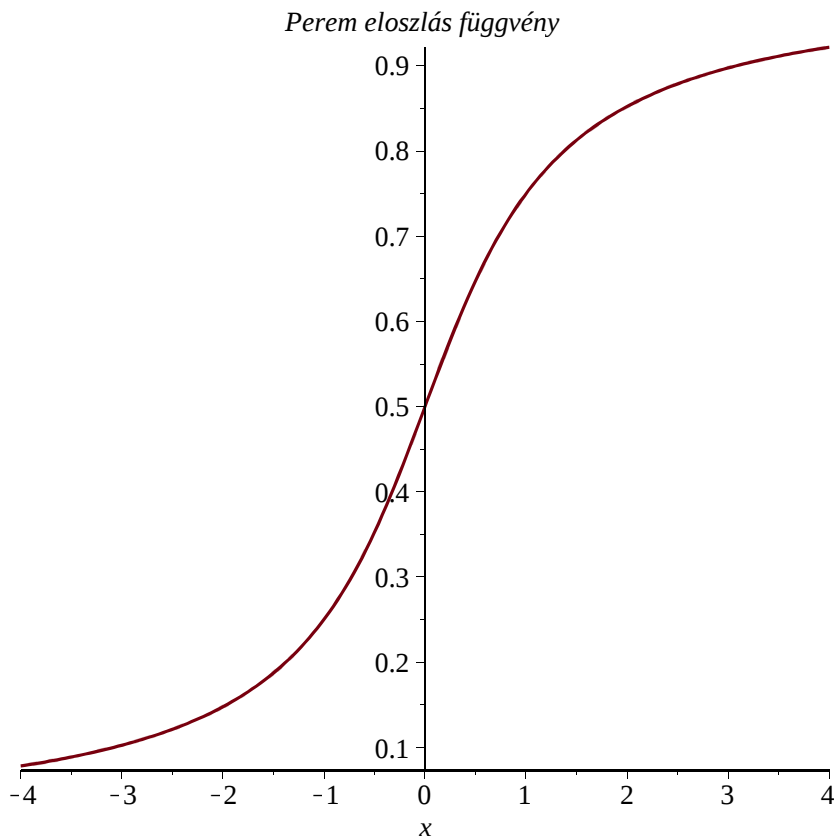
> `FX := x -> lim_{y -> inf} FXY(x, y); 'FX(x)' = FX(x)`

$$FX := x \rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} FXY(x, y)$$

$$FX(x) = \frac{1}{2} \frac{\pi + 2 \arctan(x)}{\pi} \quad (1.4.6)$$

Rajzoljuk fel X peremeloszlás függvényét!

> `plot(FX(x), x=-4..4, title = Perem eloszlás függvény)`



Mutassuk meg, hogy a peremeloszlás függvény deriváltja a perem sűrűség függvényt adja!

$$\frac{d}{dx} FX(x) = \frac{1}{\pi (1 + x^2)} \quad (1.4.7)$$

11.4.6. Példa. Az együttes sűrűségfüggvény tartója nem az egész sík

Tekintsük az

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{2(x+y)e^{-x}}{3} & (0 < x) \text{ és } (0 < y < 1) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

kétváltozós függvényt

- (i) Mutassuk meg, hogy $f_{XY}(x, y)$ függvény lehet együttes sűrűség függvény!
- (ii) Határozzuk meg a perem sűrűség függvényeket és rajzoljuk fel grafikonjukat!
- (iii) Határozzuk meg az együttes eloszlás függvényt, a perem eloszlás függvényeket és rajzoljuk fel a grafikonokat!

MEGOLDÁS

(i) Mutassuk meg, hogy $f_{XY}(x, y)$ függvény lehet egy együttes sűrűség függvény!

> restart :

$f_{XY} := (x, y) \rightarrow \text{piecewise}\left(x > 0 \text{ and } y > 0 \text{ and } y < 1, \frac{2}{3} \cdot (x + y) \cdot \exp(-x), 0\right) :$

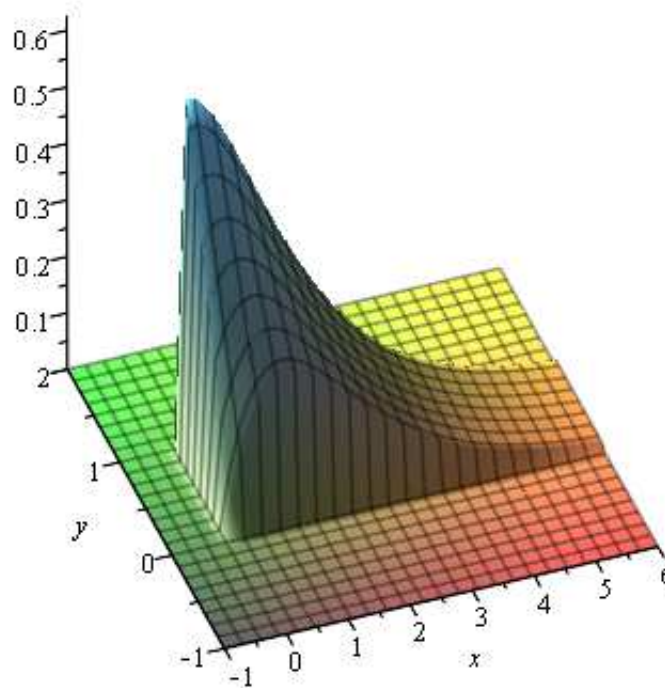
'fXY'(x, y) = fXY(x, y)

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y\right)e^{-x} & 0 < x \text{ and } 0 < y \text{ and } y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.4.8)$$

Láthatóan az $f_{XY}(x, y) \geq 0$ feltétel teljesül minden valós x, y esetén. Rajzoljuk fel a felületet!

> plot3d(fXY(x, y), x = -1 ..6, y = -1 ..2, axes = framed, orientation = [-110, 50], title = Együttes sűrűség függvény);

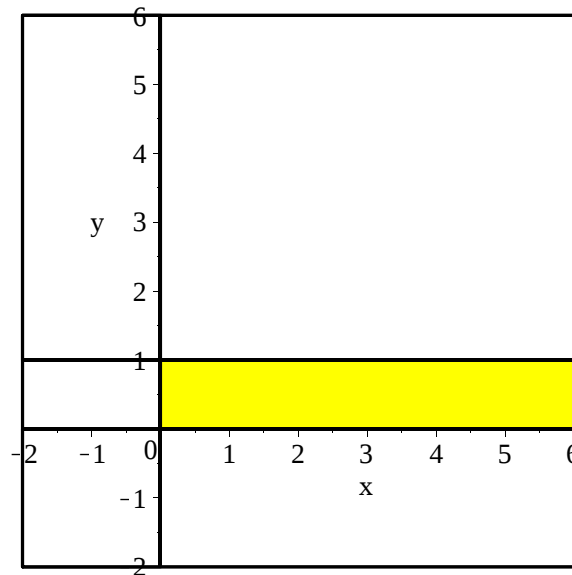
Együttes sűrűség függvény



A sűrűségfüggvény csak a $T = \{(x, y) | 0 \leq x, 0 < y < 1\}$ tartományon nullától különböző!

Rajzoljuk fel a tartományt!

> `plots[inequal]( {0 ≤ x, 0 ≤ y, y ≤ 1}, x=-2..6, y=-2..6, optionsfeasible = (color = yellow), scaling = constrained, optionsexcluded = (color = white), labels = ["x", "y"], caption = "Az értelmezési tartomány");`



Az értelmezési tartomány

Ellenőrizzük, hogy a felület alatti térfogat 1, azaz teljesül a sűrűség függvényre kirótt második feltétel is!

> `Int(Int( fXY(x, y), x=- ∞.. ∞), y=- ∞.. ∞) = int(int( fXY(x, y), x=- ∞.. ∞), y=- ∞.. ∞);`

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} \left(\frac{2}{3} x + \frac{2}{3} y \right) e^{-x} & 0 < x \text{ and } 0 < y \text{ and } y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} dx dy = 1 \quad (1.4.9)$$

Tehát az $f_{XY}(x, y)$ függvény valóban egy két dimenziós sűrűség függvény!

(ii) Határozzuk meg a perem sűrűség függvényeket!

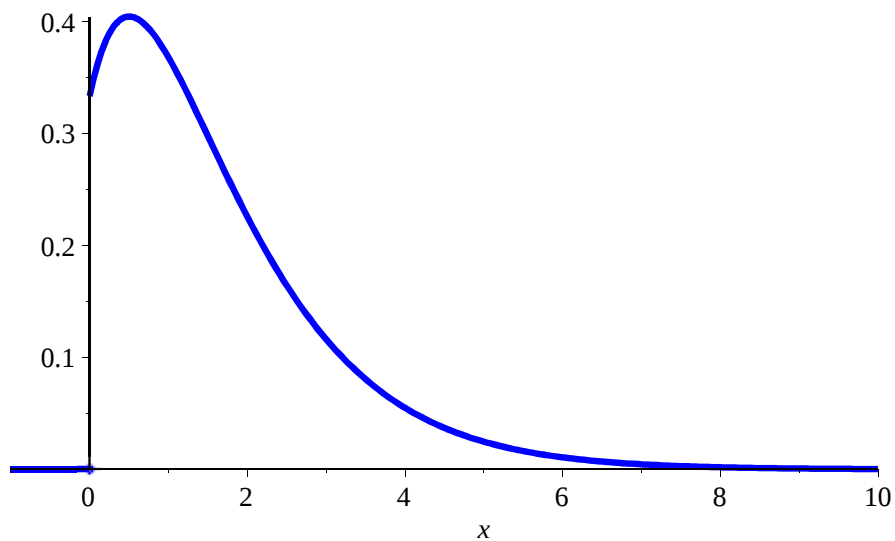
Az X peremsűrűség függvényt az y-szerinti integrál adja $(-\infty)$ -től ∞ -ig !

> `fX := unapply( ∫-∞∞ fXY(x, y) dy, x ); 'fX(x)' = fX(x);`

> `plot( fX(x), x=-1..10, thickness=3, color = blue, scont = true)`

$$fX := x \rightarrow \text{piecewise} \left(x \leq 0, 0, 0 < x, \frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} x e^{-x} \right)$$

$$fX(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} x e^{-x} & 0 < x \end{cases}$$



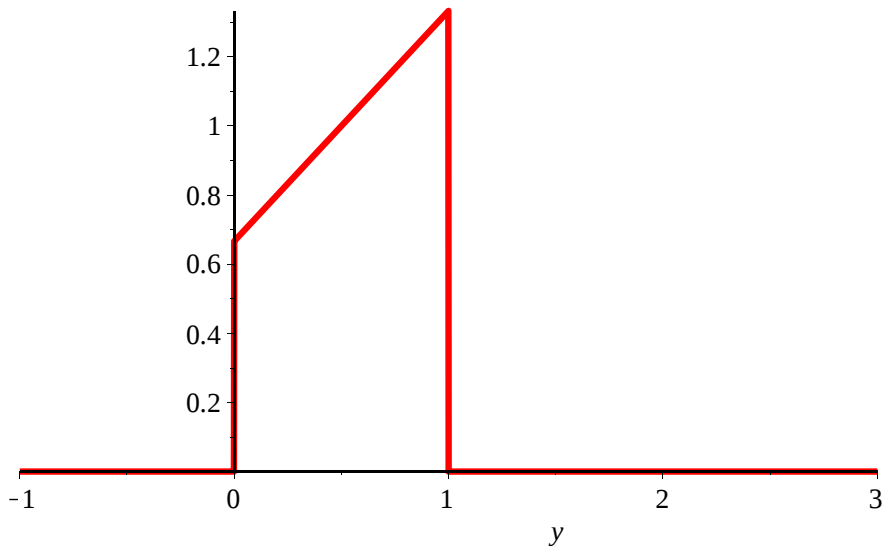
Az Y peremsűrűség függvényt az x-szerinti integrál adja $(-\infty)$ -tól ∞ -ig !

> $f_Y := \text{unapply}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \, dx, y\right); 'f_Y(y)' = f_Y(y);$

> $\text{plot}(f_Y(y), y = -1 \dots 3, \text{color} = \text{red}, \text{thickness} = 3)$

$$f_Y := y \rightarrow \text{piecewise}\left(y \leq 0, 0, y < 1, \frac{2}{3} + \frac{2}{3}y, 1 \leq y, 0\right)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{2}{3} + \frac{2}{3}y & y < 1 \\ 0 & 1 \leq y \end{cases}$$



(iii) Határozzuk meg az együttes eloszlás függvényt, a perem eloszlás függvényeket és rajzoljuk fel a grafikonokat!

Az eloszlásfüggvényt a sűrűségfüggvény tartományintegrálása útján kapjuk úgy, hogy a felső határ változik

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{XY}(u, v) \, dv \, du$$

Mivel f_{XY} tartományonként eltérően értelmezett, ezért az integrálást ezeken a tartományokon külön-külön kell számolni!

1. tartomány: $T_1 = \{ (x, y) \mid x \leq 0 \text{ vagy } y \leq 0 \}$ tartományon $f_{XY} = 0$. Ezért itt F_{XY} is 0 lesz! (Ez az első síknegyed kivételével mindenütt teljesül!)

2. tartomány: $T_2 = \{ (x, y) \mid 0 < x \text{ és } 0 < y \leq 1 \}$ tartományon a megadott képletet kell integrálni:

$$> F2 := \text{simplify} \left(\int_0^y \int_0^x \frac{2(u+v)e^{-u}}{3} \, du \, dv \right)$$

$$F2 := -\frac{1}{3} y (-y + e^{-x} y - 2 + 2e^{-x} + 2xe^{-x}) \quad (1.4.10)$$

3. tartomány: $T_3 = \{ (x, y) \mid 0 < x \text{ és } 1 < y \}$ tartományon az y-szerinti integrált $[0, 1]$ -n kell venni!

$$F3 := \int_0^1 \int_0^x \frac{2(u+v)e^{-u}}{3} \, du \, dv$$

$$F3 := 1 - e^{-x} - \frac{2}{3} x e^{-x} \quad (1.4.11)$$

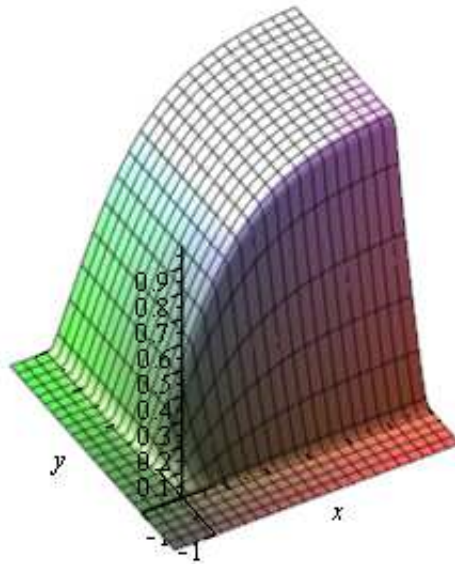
Képezzük ezekkel a kifejezésekkel az eloszlásfüggvényt tartományonként!

$$F_{XY} := \text{factor}(\text{piecewise}(x \leq 0 \text{ or } y \leq 0, 0, 0 < x \text{ and } 0 < y \text{ and } y \leq 1, F2, 0 < x \text{ and } 1 < y, F3))$$

$$F_{XY} := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ or } y \leq 0 \\ -\frac{1}{3} y (-y + e^{-x} y - 2 + 2 e^{-x} + 2 x e^{-x}) & 0 < x \text{ and } 0 < y \text{ and } y \leq 1 \\ 1 - e^{-x} - \frac{2}{3} x e^{-x} & 0 < x \text{ and } 1 < y \end{cases} \quad (1.4.12)$$

Rajzoljuk fel a grafikont!

plot3d(FXY, x = -1 ..6, y = -1 ..4, axes = normal, orientation = [-120, 50])



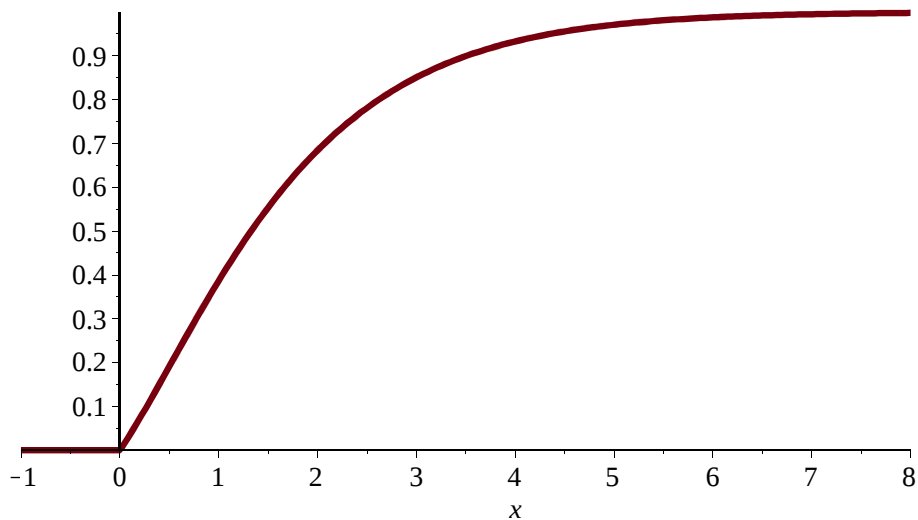
Az X változó perem eloszlásfüggvényét Y végtelenben vett határértévével számolhatjuk ki!

x := 'x' : assume(1 < y) : FX := $\lim_{y \rightarrow \infty} FXY$

$$FX := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} - \frac{2}{3} x e^{-x} & 0 < x \end{cases} \quad (1.4.13)$$

Rajzoljuk fel X perem eloszlásfüggvényét!

plot(FX, x = -1 ..8, thickness = 3)



Ellenőrizzük, hogy FX x -szerinti deriváltja az fX sűrűségfüggvény!

$DFX := \text{simplify}\left(\frac{\partial}{\partial x} FX\right);$

$fX(x)$

$$DFX := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \text{undefined} & x = 0 \\ \frac{1}{3} e^{-x} (1 + 2x) & 0 < x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{3} e^{-x} + \frac{2}{3} x e^{-x} & 0 < x \end{cases}$$

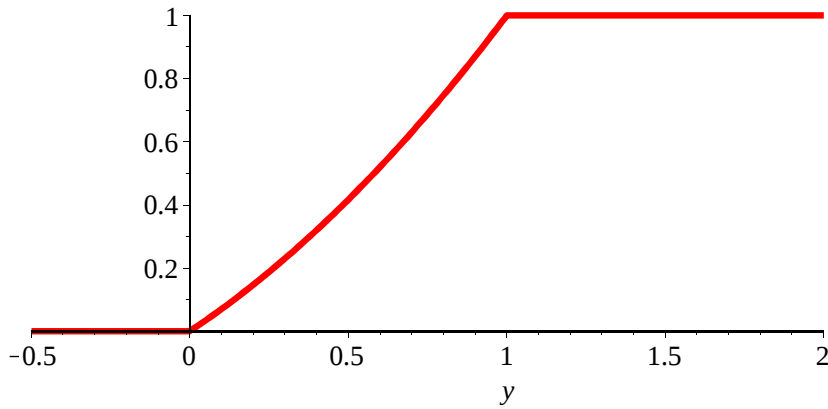
(1.4.14)

Az Y változó peremeloszlására is ellenőrizzük a fenti feltételeket!

$y := 'y' : \text{assume}(0 < x) : FY := \lim_{x \rightarrow \infty} FXY$

$\triangleright \text{plot}(FY, y = -0.5 .. 2, \text{scaling} = \text{constrained}, \text{color} = \text{red}, \text{thickness} = 3)$

$$FY := \frac{1}{3} y^2 \text{Heaviside}(y) - \frac{1}{3} y^2 \text{Heaviside}(-1 + y) + \text{Heaviside}(-1 + y) \\ + \frac{2}{3} y \text{Heaviside}(y) - \frac{2}{3} y \text{Heaviside}(-1 + y)$$



Grafikonok felrajzolásával mutassuk meg, hogy az FY deriváltja és az $fY(y)$ függvények azonosak!

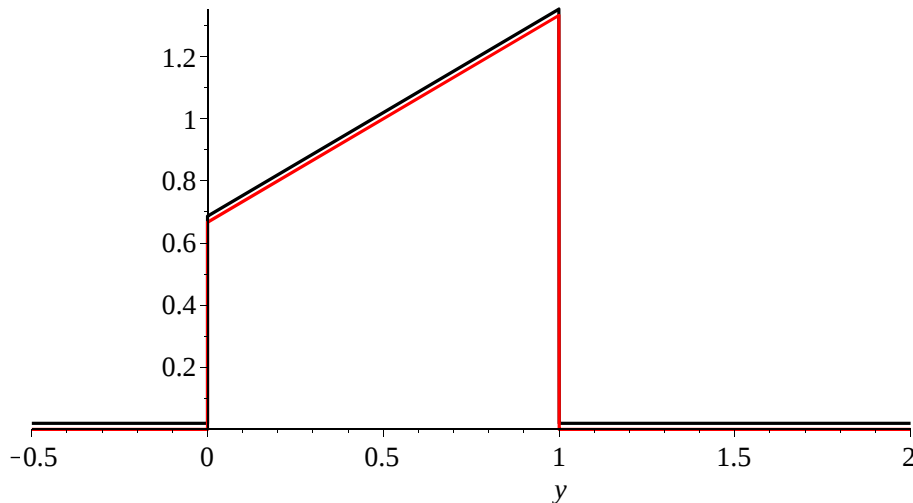
$$> DFY := \frac{\partial}{\partial y} FY$$

$$DFY := \frac{2}{3} y \text{Heaviside}(y) + \frac{1}{3} y^2 \text{Dirac}(y) - \frac{2}{3} y \text{Heaviside}(-1 + y) - \frac{1}{3} y^2 \text{Dirac}(-1 + y) \quad (1.4.15)$$

$$+ \text{Dirac}(-1 + y) + \frac{2}{3} \text{Heaviside}(y) + \frac{2}{3} y \text{Dirac}(y) - \frac{2}{3} \text{Heaviside}(-1 + y)$$

$$- \frac{2}{3} y \text{Dirac}(-1 + y)$$

$$> \text{plot}([DFY + 0.02, fY(y)], y = -0.5..2, \text{color} = [\text{black}, \text{red}]);$$



11.4.7. PÉLDA. Szerkezetek megbízhatósága

Egy szerkezet (pl. híd) megbízhatósági tanulmányozásához jelölje X a **külső terhelést** és Y a szerkezet **belső ellenállóképességét** (vagy erejét), amelyek általában véletlen változók. A

szerkezet összeomlásának (angolul *failure*) valószínűségét a

$$p_f = P(Y < X) = P(\text{belső ellenállóképesség} < \text{külső terhelés})$$

egyenlőtlenség valószínűségével határozzuk meg.

Használjuk a szerkezet erőhatásainak modellezésére az

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} a b e^{-ax - by} & , \text{ha } x > 0 \text{ és } y > 0 \\ 0 & , \text{egyébként} \end{cases}$$

kétváltozós exponenciális függvényt. A külső hatást az $a > 0$ és a belső ellenállóképességet a $b > 0$ paraméterrel lehet megadni.

(i) Mutassuk meg, hogy $f_{XY}(x, y)$ valóban egy együttes sűrűségfüggvény!

(ii) Mutassuk meg, hogy X és Y exponenciális eloszlásúak és

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) !$$

(iii) Mutassuk meg, hogy a szerkezet összeomlásának valószínűsége

$$p_f = \frac{b}{a + b} !$$

(iv) Adjuk meg a $K = Y - X$ különbség valószínűségi változó sűrűség függvényét és ezzel az összeomlás $P(K < 0) = p_f$ valószínűségét!

Megoldás

Tetszőleges pozitív (a, b) paraméter mellett folytonos valószínűségi vektorváltozó az (X, Y) ,

$$\text{mert } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) \, dx \, dy = 1.$$

> *restart* : $f_{XY} := \text{unapply}(\text{piecewise}(x > 0 \text{ and } y > 0, a \cdot b \cdot \exp(-a \cdot x - b \cdot y), 0), x, y) :$
 $'f_{XY}'(x, y) = f_{XY}(x, y)$

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} a b e^{-ax - by} & 0 < x \text{ and } 0 < y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.4.16)$$

(i) Mutassuk meg, hogy $f_{XY}(x, y)$ valóban egy együttes sűrűségfüggvény!

> *assume*($a > 0, b > 0$) :

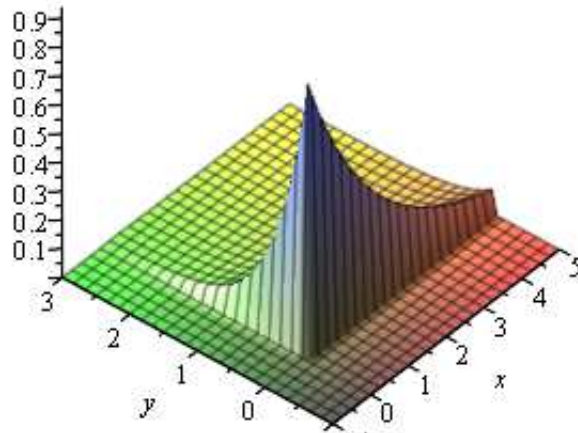
$\text{Int}(\text{Int}(f_{XY}(x, y), x = 0 .. \infty), y = 0 .. \infty) = \text{int}(\text{int}(f_{XY}(x, y), x = 0 .. \infty), y = 0 .. \infty) ;$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \begin{cases} a b e^{-ax - by} & 0 < x \text{ and } 0 < y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} dx \, dy = 1 \quad (1.4.17)$$

A sűrűségfüggvény felrajzolásához az a és b paraméterek értékeit meg kell adni, hogy az egységnyi térfogat elhelyezkedéséről szemléletes képünk legyen!

Kísérletezzon az olvasó más paraméterekkel is!

> *plot3d*(*eval*($f_{XY}(x, y)$, [$a = 0.5, b = 2$]), $x = -1 .. 5, y = -1 .. 3$, *axes = framed, orientation = [-140, 50]*);



(ii) Mutassuk meg, hogy X és Y exponenciális eloszlásúak és $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

> $fX := \text{unapply}(\text{int}(fXY(x, y), y = 0 .. \infty), x) : 'fX'(x) = fX(x)$

$$fX(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ a \cdot e^{-a \cdot x} & 0 < x \end{cases} \quad (1.4.18)$$

> $fY := \text{unapply}(\text{int}(fXY(x, y), x = 0 .. \infty), y) : 'fY'(y) = fY(y)$

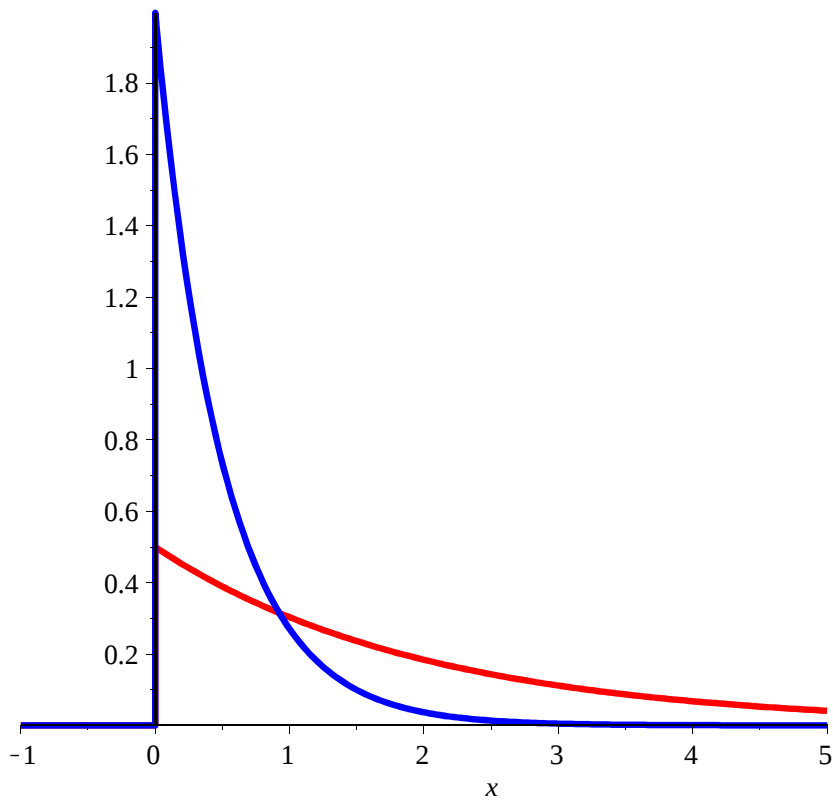
$$fY(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ b \cdot e^{-b \cdot y} & 0 < y \end{cases} \quad (1.4.19)$$

> $fX(x) \cdot fY(y) = fXY(x, y);$

$$\left(\begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ a \cdot e^{-a \cdot x} & 0 < x \end{cases} \right) \left(\begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ b \cdot e^{-b \cdot y} & 0 < y \end{cases} \right) = \begin{cases} a \cdot b \cdot e^{-a \cdot x - b \cdot y} & 0 < x \text{ and } 0 < y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.4.20)$$

Az exponenciális eloszlás sűrűség függvényének ábrájához válasszuk az $a = 0.5$ és $b = 2$ paramétereket!

> $\text{plot}(\text{eval}([fX(x), fY(x)], [a = 0.5, b = 2]), x = -1 .. 5, \text{color} = [\text{red}, \text{blue}], \text{thickness} = 3, \text{caption} = \text{Piros=külső terhelés, kék=belső ellenállóképesség sűrűsége})$



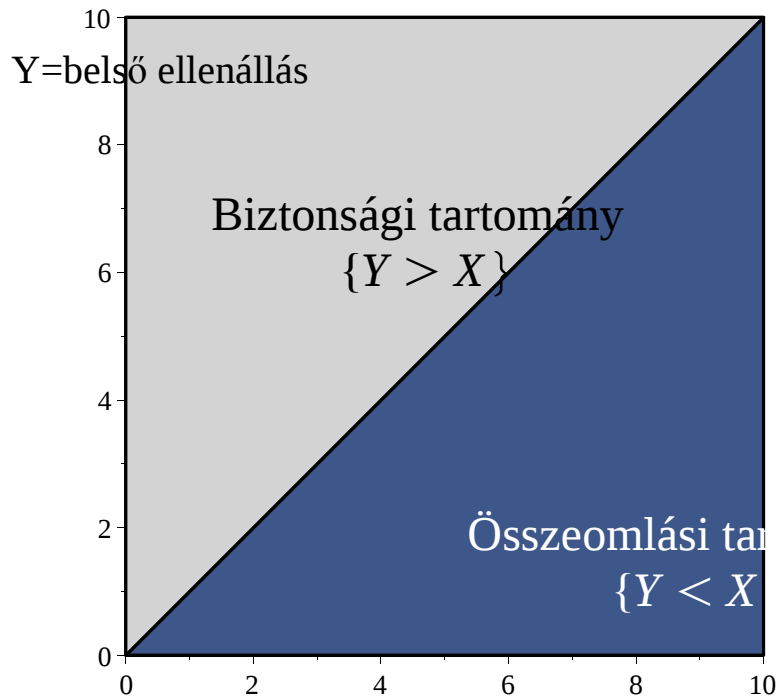
Piros=külső terhelés, kék=belső ellenállóképesség sűrűsége

(iii) Mutassuk meg, hogy a szerkezet összeomlásának valószínűsége $p_f = \frac{b}{a+b}$!

Az összeomlási vizsgálathoz az $Y < X$ egyenlőtlenségnek eleget tevő tartomány felett kell integrálni az együttes sűrűség függvényt! Tehát

$$p_f = \iint_{\{y < x\}} f_{XY}(x, y) \, dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^x f_{XY}(x, y) \, dy \, dx.$$

> *plots:-inequal({y ≤ x}, x = 0 ..10, y = 0 ..10, scaling = constrained) :*

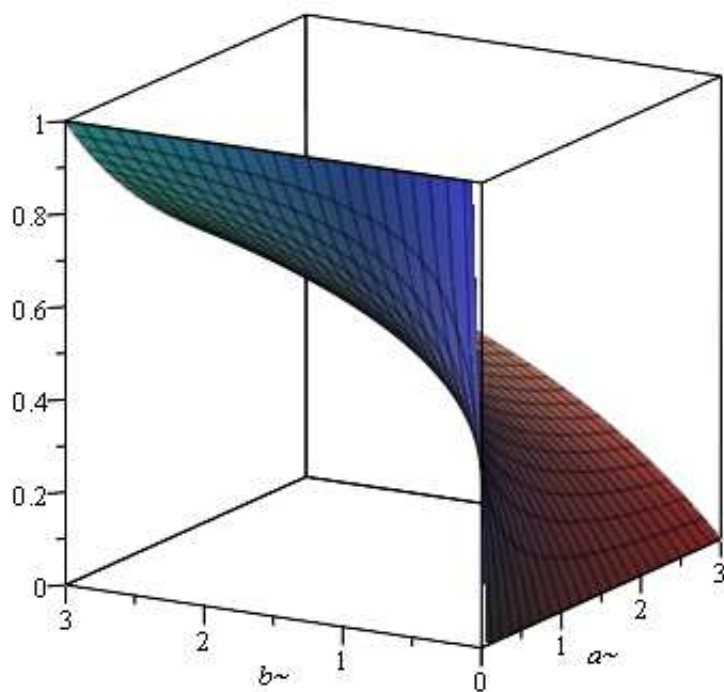


> $\text{Int}(\text{Int}('f_{XY}(x, y), y = 0 \dots x), x = 0 \dots \infty) = \text{int}(\text{int}(f_{XY}(x, y), y = 0 \dots x), x = 0 \dots \infty);$

$$\int_0^\infty \int_0^x f_{XY}(x, y) \, dy \, dx = \frac{b_{\sim}}{a_{\sim} + b_{\sim}} \quad (1.4.21)$$

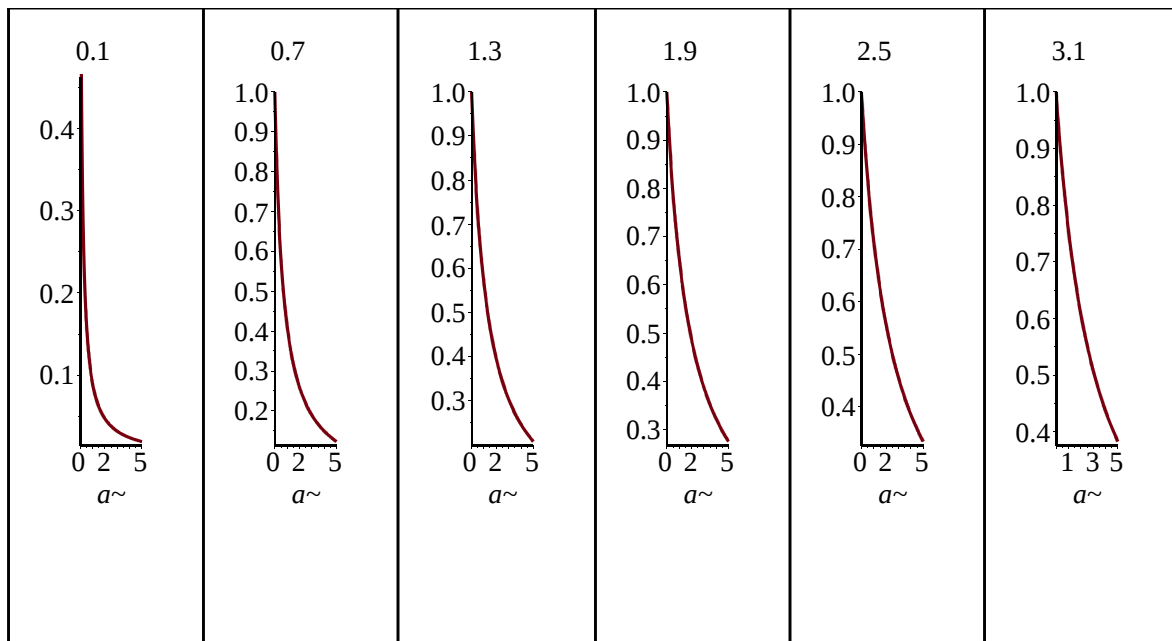
A $p_f = \frac{b}{a+b}$ megbízhatósági valószínűség alakulásáról az "a" és "b" paraméterek különböző értékei mellett áttekintő képet nyújt a p_f valószínűség 3D-s rajza az (a;b) pozitív értékeire.

> $\text{plot3d}\left(\frac{b}{a+b}, a = 0 \dots 3, b = 0 \dots 3, \text{axes} = \text{boxed}, \text{orientation} = [-150, 75]\right)$



Az alábbi animációk $p_f(a, b)$ változását követik nyomon az (a, b) paraméterek változtatása mellett!

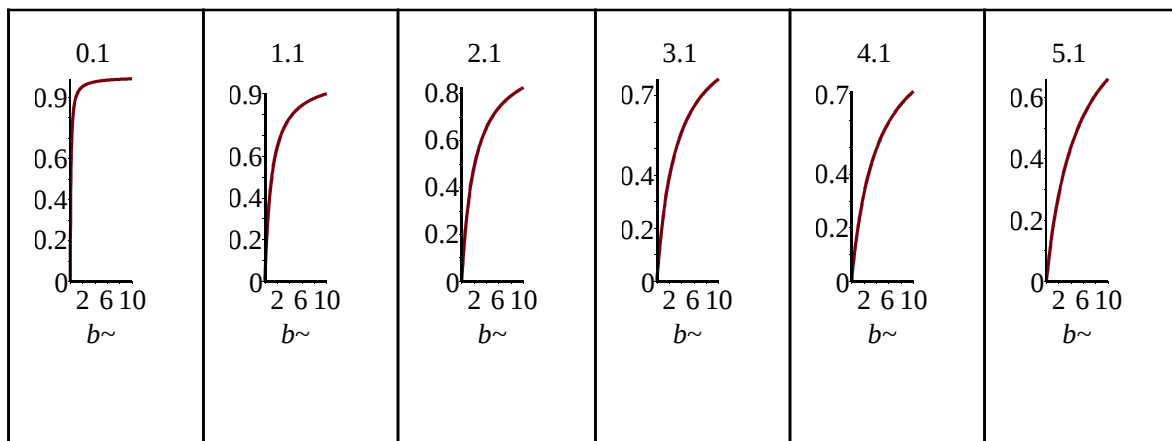
➤ $R1 := \text{Matrix}\left(1, 6, \left[\text{seq}\left(\text{plot}\left(\frac{b}{a+b}, a = 0..5, \text{title} = `b`\right), b = 0.1..3.1, 0.6\right)\right]\right) :$
 $\text{plots:-display}(R1)$



A fenti ábra alapján a következő megállapítást tehetjük:

(i) Rögzített "b" mellett az "a" paraméter növelésével csökken a szerkezet összeomlásának valószínűsége.

> $R2 := \text{Matrix}\left(1, 6, \left[\text{seq}\left(\text{plot}\left(\frac{b}{a+b}, b=0..10, \text{title}='a'\right), a=0.1..5.1, 1\right)\right]\right) :$
plots:-display(R2)



A fenti ábra alapján a következő megállapítást tehetjük:

(ii) Rögzített "a" mellett a "b" paraméter növelésével növekszik a szerkezet összeomlásának valószínűsége.

Látható, hogy az a és b paraméterek változtatásai ellentétes hatással vannak az összeomlás valószínűségére.

(iv) Adjuk meg a $K = Y - X$ különbség valószínűségi változó sűrűség függvényét és ezzel az összeomlás $P(K < 0) = p_f$ valószínűségét!

> *with(Statistics) :*

$X := \text{RandomVariable}\left(\text{Exponential}\left(\frac{1}{a}\right)\right) :$

$Y := \text{RandomVariable}\left(\text{Exponential}\left(\frac{1}{b}\right)\right) :$

> sűrűség $X = PDF(X, x)$, sűrűség $Y = PDF(Y, y)$

$$\text{sűrűség } X = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ a \sim e^{-a \sim x} & \text{otherwise} \end{cases}, \text{sűrűség } Y = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ b \sim e^{-b \sim y} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.4.22)$$

> $K := Y - X$:

> $fK := unapply(PDF(K, x), x) : fK'(x) = fK(x)$

$$fK(x) = \begin{cases} \frac{b \sim e^{a \sim x} a \sim}{a \sim + b \sim} & x \leq 0 \\ \frac{b \sim e^{-b \sim x} a \sim}{a \sim + b \sim} & 0 < x \end{cases} \quad (1.4.23)$$

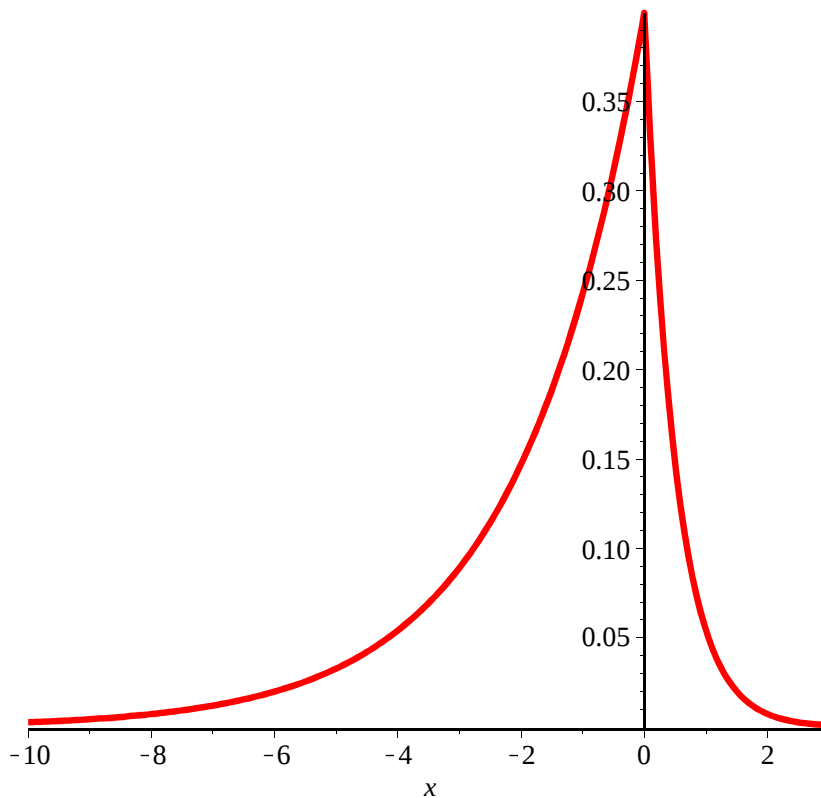
> $p_f = Probability(K < 0); eval(%, [a = 0.5, b = 2])$

$$p_f = \frac{b \sim}{a \sim + b \sim}$$

$$p_f = 0.8000000000 \quad (1.4.24)$$

Tehát az $a = 0.5$ és $b = 2$ paraméterek mellett az összeomlás valószínűsége 80%.

> $plot(eval(fK(x), [a = 0.5, b = 2]), x = -10..3, color = red, thickness = 3, caption = K=Y-X \text{ különbség sűrűség függvénye})$



K=Y-X különbség sűrűség függvénye

Az ábrán a $K = Y - X$ különbség valószínűségi változó sűrűség függvénye látható, amelyről az összeomlás valószínűsége a $K \leq 0$ tartomány. A $K \leq 0$ tartomány alatti görbe területe lesz az összeomlás valószínűsége, mely az $a = 0.5$ és $b = 2$ esetén 0.8.

▼ 11.5. Feltételes eloszlás és feltételes eloszlásfüggvény diszkrét esetben

Az A eseménynek B eseményre vonatkozó feltételes valószínűségét a

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

hányadossal értelmeztük. Az X valószínűségi változóval kapcsolatos $A = \{X < x\}$ eseménynek, tetszőleges B eseményre vonatkozó feltételes valószínűségét hasonlóan értelmezhetjük.

11.5.1. DEFINÍCIÓ. Feltételes eloszlásfüggvény eseményre vonatkozóan

Legyen X egy valószínűségi változó és B egy pozitív valószínűségű esemény. Ekkor a

$$F(x | B) = P(X < x | B) = \frac{P(\{X < x\} \cdot B)}{P(B)}$$

függvényt az X valószínűségi változó B eseményre vonatkozó **feltételes eloszlásfüggvényének** nevezzük.

Ha a B esemény egy másik Y valószínűségi változóval kapcsolatos $B = \{Y = y\}$ alakú esemény, akkor kapjuk az X valószínűségi változónak Y változóra vonatkozó feltételes eloszlásfüggvényét.

11.5.2. DEFINÍCIÓ. Az X változó feltételes eloszlásfüggvénye az Y változóra

Az

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y=y) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{Y=y\})}{P(Y=y)}$$

függvényt nevezzük az X valószínűségi változó Y-ra vonatkozó **feltételes eloszlásfüggvényének**.

Megjegyzés

Folytonos Y változó esetén a nevezőben levő $P(Y=y)$ valószínűség 0, azonban bizonyos feltételek mellett létezhet a fenti hányados, mint határérték, mert ekkor a számláló is nulla. A határérték ekkor a L'Hospital-szabállyal határozható meg.

11.5.3. DEFINÍCIÓ. Diszkrét változók feltételes eloszlása

Az

$$f_{X|Y}(x|y_j) = P(X=x | Y=y_j) = \frac{P(\{X=x\} \cap \{Y=y_j\})}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{XY}(x, y_j)}{p_Y(y_j)}$$

függvényt (mint x függvényét) az X diszkrét valószínűségi változó $Y=y$ feltételre vonatkozó **feltételes eloszlásának** nevezzük.

Tehát X és Y együttes eloszlás mátrixának $Y=y_j$ értékéhez tartozó oszlopát el kell osztani az oszlop végén található $P(Y=y_j)$ perem valószínűséggel és így kapjuk X feltételes eloszlását az $Y=y_j$ feltételre nézve!

11.5.4. PÉLDA

Egy csomagban kétféle termék van - I. illetve II. típusú- és mindegyikből 10 - 10 darab. Selejteik száma az I. típusúak között 3 db, míg a II. típusúak között 2 db. Kiveszünk a csomagból **visszatevéssel** 2 darabot.

X jelentse a kivett 2 elemű mintában levő I. típusú termékek számát.

Y jelentse a kivett 2 elemű mintában levő selejtes termékek számát.

(a) Adjuk meg az $f_{XY}(x, y)$ **együttes eloszlást** és az $f_X(x)$, $f_Y(y)$ **peremeloszlásokat!**

(b) Adjuk meg az $f_{X|Y}(x|y)$ **feltételes eloszlást!**

(c) Adjuk meg az $f_{Y|X}(y|x)$ **feltételes eloszlást!**

(d) Adjuk meg az $F_{XY}(x, y)$ **együttes eloszlásfüggvényt** és az $F_X(x)$, $F_Y(y)$ **peremeloszlás függvényeket!**

(e) Adjuk meg az $F_{X|Y}(x|y)$ és $F_{Y|X}(y|x)$ **feltételes eloszlás függvényeket!**

Megoldás

11.5.4. (a) EGYÜTTES ELOSZLÁS

Az alábbi ábra mutatja a termékek megoszlását típusok és selejteik szerint.

	I. típusú	II. típusú	Összesen
Selejt	3	2	5
Jó	7	8	15
Összesen	10	10	20

A kivett két termék között lehet 0, 1, 2 db I. típusú és lehet 0, 1, 2 db selejtes, így mind X, mind Y értéke 0, 1 és 2 lehet!

> *restart :*

X, Y := [0, 1, 2], [0, 1, 2]

X, Y := [0, 1, 2], [0, 1, 2]

(1.5.1)

Mivel a kivett terméket visszatesszük, ezért az összes lehetséges variáció = $20 \cdot 20$:

> *N := 20·20;*

N := 400

(1.5.2)

A $P(X = i, Y = k)$ valószínűségeket a következő f_{XY} 3x3-s mátrixban adjuk meg!

> *f_{XY} := Matrix(3, 3, [[64, 32, 4], [112, 76, 12], [49, 42, 9]]) / N*

$$f_{XY} := \begin{bmatrix} \frac{4}{25} & \frac{2}{25} & \frac{1}{100} \\ \frac{7}{25} & \frac{19}{100} & \frac{3}{100} \\ \frac{49}{400} & \frac{21}{200} & \frac{9}{400} \end{bmatrix}$$

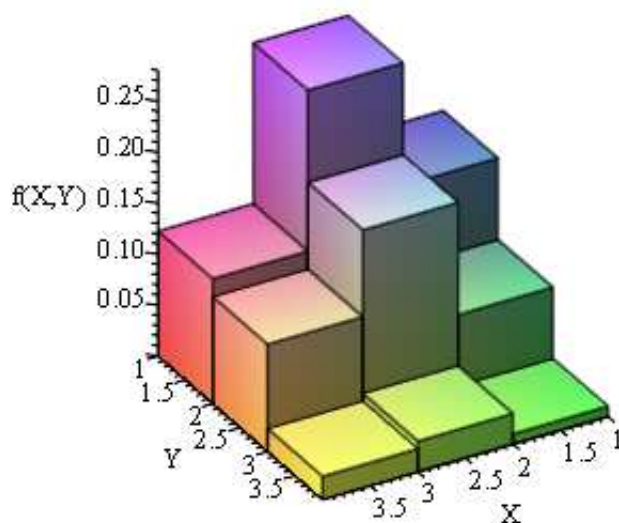
(1.5.3)

Például $X = 0$ és $Y = 0$ esetén nem vehetünk ki se I. típusú, se selejt terméket. Ekkor a táblázat szerint a jobb alsó sarokban levő 8 elem közül vehetünk ki egyet, mindkét esetben. Így $8 \cdot 8 = 64$ - féleképpen teljesülhet az $\{X=0, Y=0\}$ eset. Az olvasó ellenőrizze a többi számítást, hogyan jöttek ki!

Együttes eloszlás 3D-s oszlop grafikonját a matrixplot eljárással szemléltethetjük.

> *plots[matrixplot](f_{XY}, heights = histogram, axes = framed, orientation = [60, 60], title = Együttes eloszlás hisztogramja, labels = ["X", "Y", "f(X,Y)])*

Együttes eloszlás hisztogramja

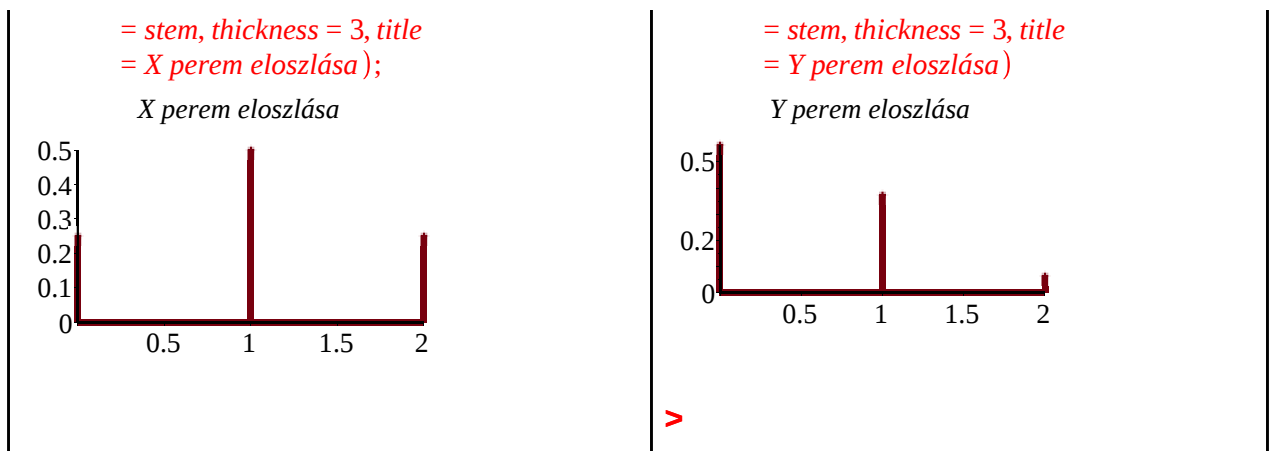


A peremeloszlások a **sorok összegei** illetve az **oszlopok összegei** adják.

X peremeloszlás értékei > $fX := \text{Vector}(3, i \rightarrow \text{add}(fXY_{i,j}, j = 1 \dots 3));$ Az összeg = $\text{add}(fX[i], i = 1 \dots 3)$ $fX := \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ Az összeg = 1 (1.5.4) $fX(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , ha \ x = 0 \\ \frac{1}{2} & , ha \ x = 1 \\ \frac{1}{4} & , ha \ x = 2 \end{cases}$	Y peremeloszlás értékei > $fY := \text{Vector}[\text{row}](3, j \rightarrow \text{add}(fXY_{i,j}, i = 1 \dots 3));$ Az összeg = $\text{add}(fY_j, j = 1 \dots 3);$ $fY := \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$ Az összeg = 1 (1.5.5) $fY(y) = \begin{cases} \frac{9}{16} & , ha \ y = 0 \\ \frac{3}{8} & , ha \ y = 1 \\ \frac{1}{16} & , ha \ y = 2 \end{cases}$
--	--

Rajzoljuk fel az egy dimenziós diszkrét perem eloszlásokat!

X perem eloszlása pálcika diagramja > $\text{DynamicSystems}:-\text{DiscretePlot}(X, fX, \text{style}$	Y perem eloszlása pálcika diagramja > $\text{DynamicSystems}:-\text{DiscretePlot}(Y, fY, \text{style}$
--	--



11.5.4. (b) AZ $f_{X|Y}(x|y)$ FELTÉTELES ELOSZLÁS

Az

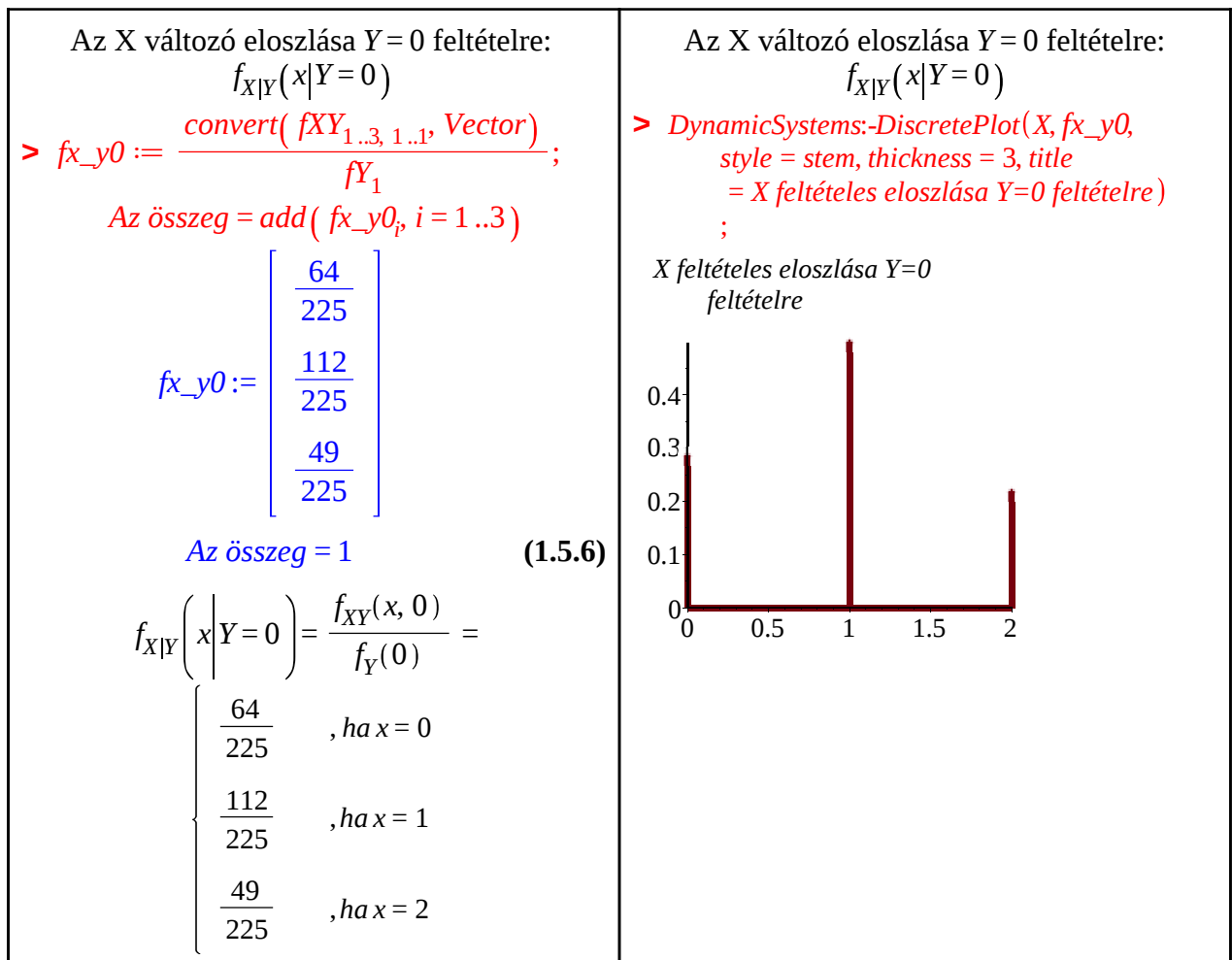
$$f_{X|Y}(x|Y=0) = [P(X=0|Y=0), P(X=1|Y=0), P(X=2|Y=0)]$$

feltételes valószínűségek alkotják az X feltételes eloszlását az Y=0 feltételre vonatkozóan.

Ehhez az fXY együttes eloszlás mátrix **első oszlopát** végig kell osztani az első oszlop

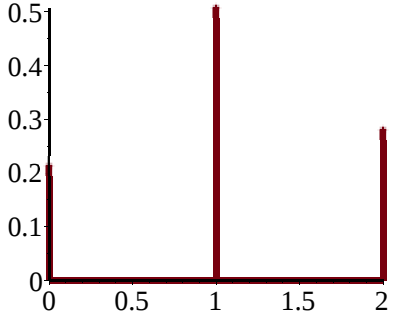
$P(Y=0) = f_Y(0)$ összegével! Így valóban olyan nem-negatív számokat kapunk, amelyek összege

1. Ez lesz az $f_{X|Y}(x|Y=0)$ feltételes eloszlás!



Az fXY együttes eloszlás mátrix **2-ik oszlopát** végig osztjuk az oszlop P(Y=1) összegével és így

kapjuk az $f_{X|Y}(x|Y=1)$ feltételes eloszlást!

Az X változó eloszlása $Y=1$ feltételre: $f_{X Y}(x Y=1)$ > $fx_y1 := \frac{\text{convert}(f_{XY}_{1..3, 2..2}, \text{Vector})}{f_{Y_2}};$ Az összeg = $\text{add}(fx_y1_i, i = 1..3)$ $fx_y1 := \begin{bmatrix} \frac{16}{75} \\ \frac{38}{75} \\ \frac{7}{25} \end{bmatrix}$ Az összeg = 1 $f_{X Y}\left(x \middle Y=1\right) = \frac{f_{XY}(x, 1)}{f_Y(1)} =$ $\left\{ \begin{array}{ll} \frac{16}{75} & , ha x = 0 \\ \frac{38}{75} & , ha x = 1 \\ \frac{7}{25} & , ha x = 2 \end{array} \right.$ (1.5.7)	Az X változó eloszlása $Y=1$ feltételre: $f_{X Y}(x Y=1)$ > $\text{DynamicSystems:-DiscretePlot}(X, fx_y1,$ $\text{style} = \text{stem}, \text{thickness} = 3, \text{title}$ $= X \text{ feltételes eloszlása } Y=1 \text{ feltételre})$ $;$ X feltételes eloszlása $Y=1$ feltételre  >
---	--

Az f_{XY} együttes eloszlás mátrix **harmadik oszlopát végig osztjuk az oszlop $P(Y=2)$ összegével** és így kapjuk az $f_{X|Y}(x|Y=2)$ feltételes eloszlást!

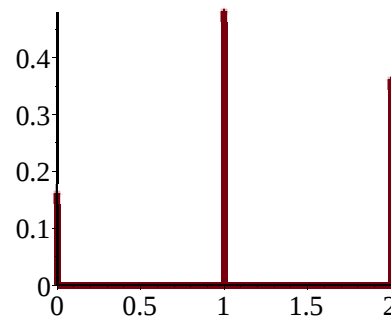
Az X változó eloszlása $Y=2$ feltételre: $f_{X Y}(x Y=2)$ > $fx_y2 := \frac{\text{convert}(f_{XY}_{1..3, 3..3}, \text{Vector})}{f_{Y_3}};$ Az összeg = $\text{add}(fx_y2_i, i = 1..3)$ $fx_y2 := \begin{bmatrix} \frac{4}{25} \\ \frac{12}{25} \\ \frac{9}{25} \end{bmatrix}$ Az összeg = 1 (1.5.8)	Az X változó eloszlása $Y=2$ feltételre: $f_{X Y}(x Y=2)$ > $\text{DynamicSystems:-DiscretePlot}(X, fx_y2,$ $\text{style} = \text{stem}, \text{thickness} = 3, \text{title}$ $= X \text{ feltételes eloszlása } Y=2 \text{ feltételre})$ $;$
---	--

$$f_{X|Y}\left(x \middle| Y=2\right) = \frac{f_{XY}(x, 2)}{f_Y(2)} =$$

$$\begin{cases} \frac{4}{25} & , \text{ha } x = 0 \\ \frac{12}{25} & , \text{ha } x = 1 \\ \frac{9}{25} & , \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

(1.5.8)

*X feltételes eloszlása Y=2
feltételre*



>

11.5.4.(c) Adjuk meg a fordított irányú $f_{Y|X}(y | X = i)$ feltételes eloszlásokat $i = 0, 1, 2$ esetén!

A

$$f_{Y|X}(y|X=0) = [P(Y=0|X=0), P(Y=1|X=0), P(Y=2|X=0)]$$

feltételes valószínűségek alkotják az **Y feltételes eloszlását az X=0 feltételre** vonatkozóan. Ehhez az fXY együttes eloszlás **mátrix első sorát végig osztjuk a sor P(X=0) összegével!** Így olyan valószínűségeket kapunk, melyek összege 1.

Az Y változó feltételes eloszlása X = 0 feltételre:

$$f_{Y|X}(y|X=0)$$

> *fy_x0*
:= 1 /
fX1(*convert*(*fXY*_{1..1, 1..3},
Vector)); *Az összeg*
= *add*(*fy_x0*, *i = 1..3*)

$$f_{y_x0} := \begin{bmatrix} \frac{16}{25} \\ \frac{8}{25} \\ \frac{1}{25} \end{bmatrix}$$

Az összeg = 1

(1.5.9)

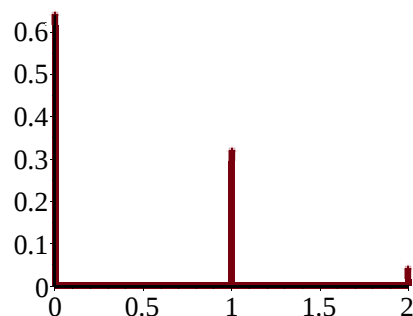
$$f_{Y|X}\left(y \middle| X=0\right) = \frac{f_{XY}(0, y)}{f_X(0)} =$$

Az Y változó feltételes eloszlása X = 0 feltételre:

$$f_{Y|X}(y|X=0)$$

> *DynamicSystems:-DiscretePlot*(*Y*, *fy_x0*, *style*
= *stem*, *thickness* = 3, *title*
= *Y feltételes eloszlása X=0 feltételre*);

Y feltételes eloszlása X=0 feltételre



>

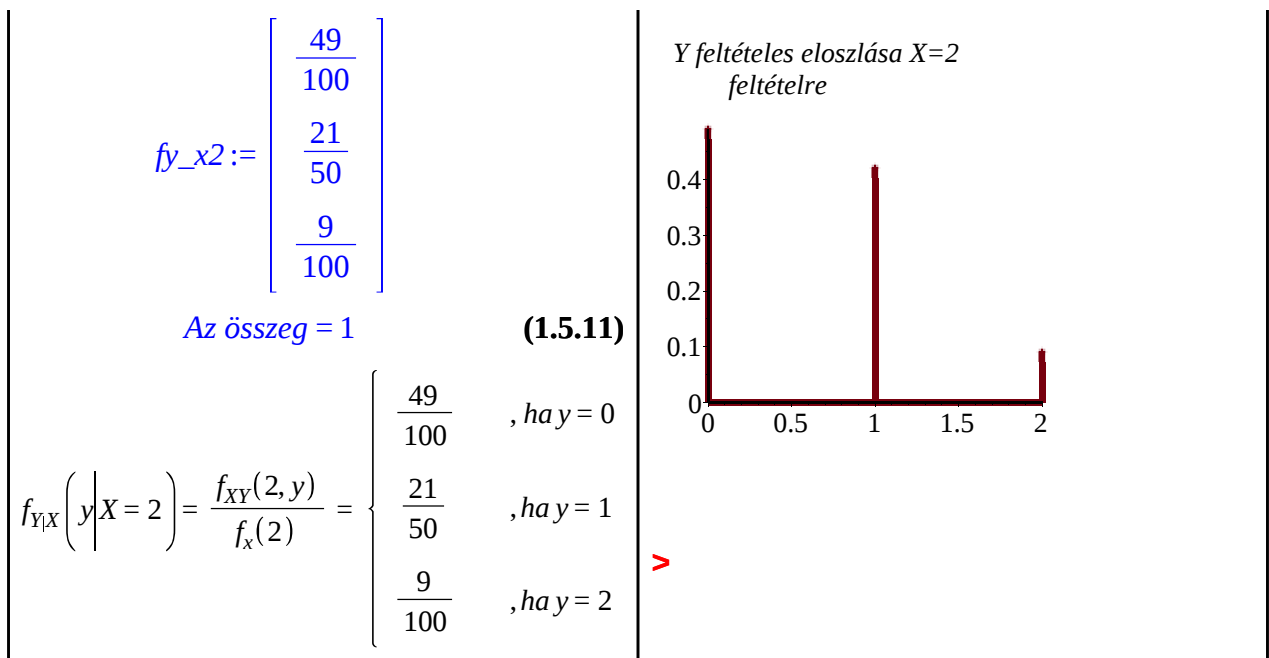
$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{16}{25} & , ha y = 0 \\ \frac{8}{25} & , ha y = 1 \\ \frac{1}{25} & , ha y = 2 \end{array} \right.$	
--	--

Az f_{XY} együttes eloszlás mátrix **2-ik sorát végig osztjuk a sor $P(X=1)$ összegével** és így kapjuk az $f_{Y|X}(y|X=1)$ feltételes eloszlást!

Az Y változó eloszlása $X=1$ feltételre: $f_{Y X}(y X=1)$ > $fy_x1 := \frac{\text{convert}(f_{XY}_{2..2,1..3}, \text{Vector})}{f_{X_2}};$ Az összeg = $\text{add}(fy_x1, i = 1..3)$ $fy_x1 := \begin{bmatrix} \frac{14}{25} \\ \frac{19}{50} \\ \frac{3}{50} \end{bmatrix}$ Az összeg = 1 (1.5.10) $f_{Y X}\left(y X=1\right) = \frac{f_{XY}(1,y)}{f_X(1)} = \begin{cases} \frac{14}{25} & , ha y = 0 \\ \frac{19}{50} & , ha y = 1 \\ \frac{3}{50} & , ha y = 2 \end{cases}$	Az Y változó eloszlása $X=1$ feltételre: $f_{Y X}(y X=1)$ > $\text{DynamicSystems:-DiscretePlot}(Y, fy_x1, \text{style} = \text{stem}, \text{thickness} = 3, \text{title} = Y \text{ feltételes eloszlása } X=1 \text{ feltételre})$; $Y \text{ feltételes eloszlása } X=1 \text{ feltételre}$ >
--	--

Az f_{XY} együttes eloszlás mátrix **3-ik sorát végig osztjuk a sor $P(X=2)$ összegével** és így kapjuk az $f_{Y|X}(y|X=2)$ feltételes eloszlást!

Az Y változó eloszlása $X=2$ feltételre: $f_{Y X}(y X=2)$ > $fy_x2 := \frac{\text{convert}(f_{XY}_{3..3,1..3}, \text{Vector})}{f_{X_3}};$ Az összeg = $\text{add}(fy_x2, i = 1..3)$	Az Y változó eloszlása $X=2$ feltételre: $f_{Y X}(y X=2)$ > $\text{DynamicSystems:-DiscretePlot}(Y, fy_x2, \text{style} = \text{stem}, \text{thickness} = 3, \text{title} = Y \text{ feltételes eloszlása } X=2 \text{ feltételre})$; $Y \text{ feltételes eloszlása } X=2 \text{ feltételre}$
--	--



11.5.4. (d) ELOSZLÁS FÜGGVÉNYEK, PEREM ELOSZLÁS FÜGGVÉNYEK

Képezzük az együttes eloszlásmátrix értékeit összegeit a bal felső saroktól indulva!

```
> FXY := Matrix(3, 3) :
  for j from 1 to 3 do
    for i from 1 to 3 do
      FXYi,j := add( add( fXYii,jj, jj = 1..j ), ii = 1..i )
    end do
  end do:
  FXY
```

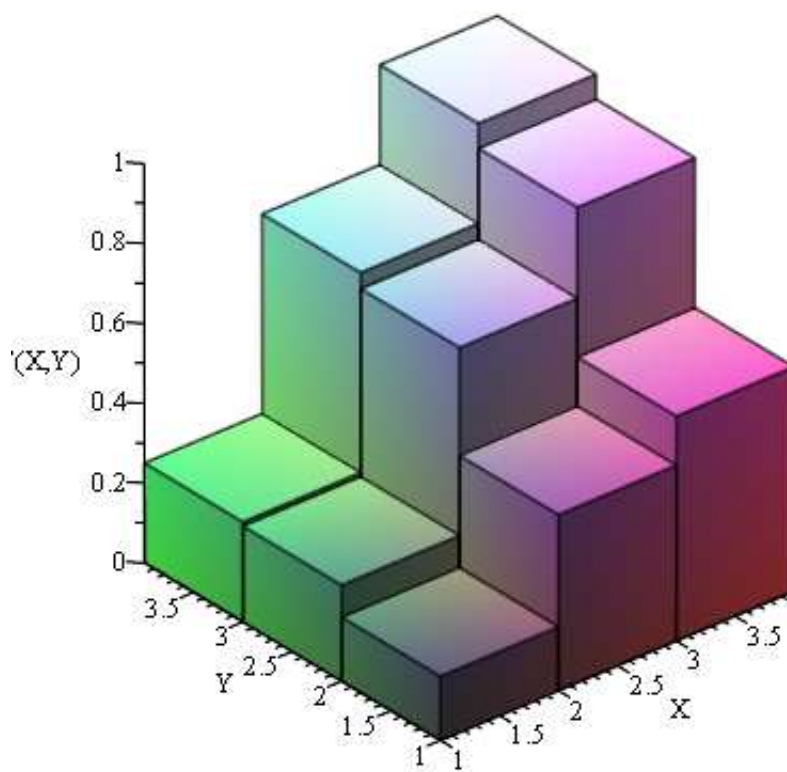
$$\begin{bmatrix} \frac{4}{25} & \frac{6}{25} & \frac{1}{4} \\ \frac{11}{25} & \frac{71}{100} & \frac{3}{4} \\ \frac{9}{16} & \frac{15}{16} & 1 \end{bmatrix}$$

(1.5.12)

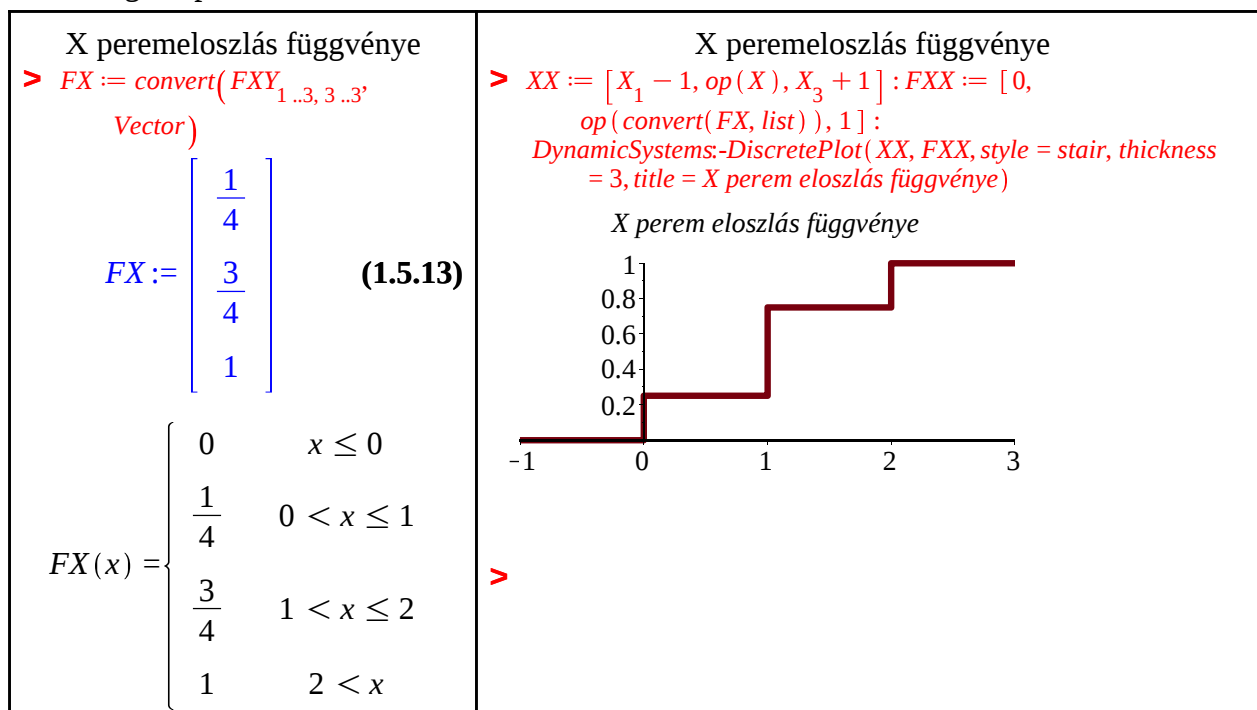
Együttes eloszlásfüggvény lépcsős grafikonja

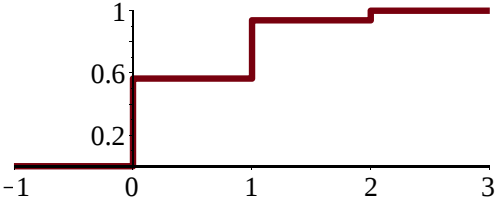
```
> plots[matrixplot](FXY, heights = histogram, axes = framed, orientation = [ -130, 60 ], title
  = Együttes eloszlás hisztogramja, labels = ["X", "Y", "F(X,Y)"]);
```

Együttes eloszlás hisztogramja



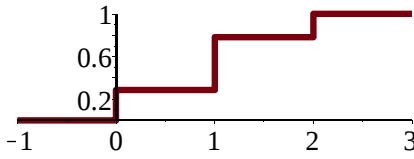
Az összegzett peremeloszlások.

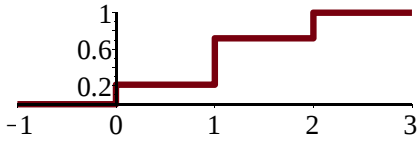
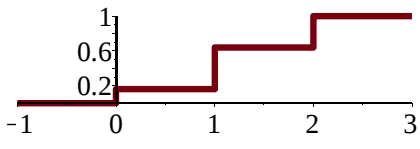


Y peremeloszlás függvénye > $FY := \text{convert}(FXY_{3..3, 1..3}, \text{Vector})$ $FY := \begin{bmatrix} \frac{9}{16} \\ \frac{15}{16} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.5.14)$ $FY(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{9}{16} & 0 < y \leq 1 \\ \frac{15}{16} & 1 < y \leq 2 \\ 1 & 2 < y \end{cases}$	Y peremeloszlás függvénye > $YY := [Y_1 - 1, \text{op}(Y), Y_3 + 1] : FYY := [0, \text{op}(\text{convert}(FY, \text{list})), 1] :$ <i>DynamicSystems:-DiscretePlot(YY, FYY, style = stair, thickness = 3, title = Y perem eloszlás függvénye)</i> Y perem eloszlás függvénye 
--	---

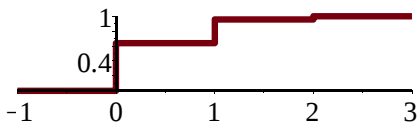
11.5.4. (e) FELTÉTELES ELOSZLÁS FÜGGVÉNYEK

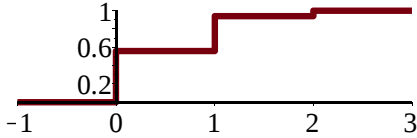
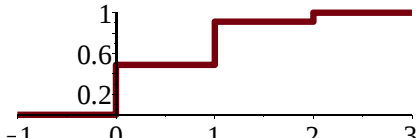
Ha a feltételes eloszlások értékeit összegezzük, akkor megkapjuk a feltételes eloszlás függvények értékeit!

X feltételes eloszlás függvénye Y=0 feltételre > $FX_Y0 := [\text{seq}(\text{add}(fx_y0_i, i = 1..j), j = 1..3)]$ $FX_Y0 := \left[\frac{64}{225}, \frac{176}{225}, 1 \right] \quad (1.5.15)$ $F_{X Y}(x Y=0) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{64}{225} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{176}{225} & 1 < x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$	X feltételes eloszlás függvénye Y=0 feltételre > $FXX_Y0 := [0, \text{op}(\text{convert}(FX_Y0, \text{list})), 1] :$ <i>DynamicSystems:-DiscretePlot(XX, FXX_Y0, style = stair, thickness = 3, title = X feltételes eloszlás függvénye Y=0 feltételre)</i> X feltételes eloszlás függvénye Y=0 feltételre 
X feltételes eloszlás függvénye Y=1 feltételre > $FX_Y1 := [\text{seq}(\text{add}(fx_y1_i, i = 1..j), j = 1..3)]$ $FX_Y1 := \left[\frac{16}{75}, \frac{18}{25}, 1 \right] \quad (1.5.16)$	X feltételes eloszlás függvénye Y=1 feltételre > $FXX_Y1 := [0, \text{op}(\text{convert}(FX_Y1, \text{list})), 1] :$ <i>DynamicSystems:-DiscretePlot(XX, FXX_Y1, style = stair, thickness = 3, title = X feltételes eloszlás függvénye Y=1 feltételre)</i>

(1.5.16) $F_{X Y}(x Y=1) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{16}{75} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{18}{25} & 1 < x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$	<i>X feltételes eloszlás függvénye Y=1 feltételre</i> 
X feltételes eloszlás függvénye Y=2 feltételre > <i>FX_Y2 := [seq(add(fx_y2, i = 1..j), j = 1 ..3)]</i> <i>FX_Y2 := [4/25, 16/25, 1]</i> (1.5.17) $F_{X Y}(x Y=2) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{4}{25} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{16}{25} & 1 < x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$	X feltételes eloszlás függvénye Y=2 feltételre > <i>FXX_Y2 := [0, op(convert(FX_Y2, list)), 1] : DynamicSystems:-DiscretePlot(XX, FXX_Y2, style = stair, thickness = 3, title = X feltételes eloszlás függvénye Y=2 feltételre)</i> <i>X feltételes eloszlás függvénye Y=2 feltételre</i> 

Számoljuk és ábrázoljuk az $F_{X|Y}(y|x)$ feltételes eloszlás függvények lépcsőit!

Y feltételes eloszlás függvénye X=0 feltételre > <i>FY_X0 := [seq(add(fy_x0, i = 1..j), j = 1 ..3)]</i> <i>FY_X0 := [16/25, 24/25, 1]</i> (1.5.18) $F_{X Y}(y X=0) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{16}{25} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{24}{25} & 1 < x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$	Y feltételes eloszlás függvénye X=0 feltételre > <i>FYY_X0 := [0, op(convert(FY_X0, list)), 1] : DynamicSystems:-DiscretePlot(YY, FYY_X0, style = stair, thickness = 3, title = Y feltételes eloszlás függvénye X=0 feltételre)</i> <i>Y feltételes eloszlás függvénye X=0 feltételre</i>  >
Y feltételes eloszlás függvénye X=1 feltételre > <i>FY_X1 := [seq(add(fy_x1, i = 1..j), j = 1 ..3)]</i> (1.5.19)	Y feltételes eloszlás függvénye X=1 feltételre > <i>FYY_X1 := [0, op(convert(FY_X1, list)), 1] : DynamicSystems:-DiscretePlot(YY, FYY_X1, style = stair, thickness = 3, title = Y feltételes eloszlás függvénye X=1 feltételre)</i>

$FY_X1 := \left[\frac{14}{25}, \frac{47}{50}, 1 \right] \quad (1.5.19)$ $F_{X Y}(y X=1) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{14}{25} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{47}{50} & 1 < x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$	Y feltételes eloszlás függvénye X=1 feltételre 
Y feltételes eloszlás függvénye X=2 feltételre > $FY_X2 := [seq(add(fy_x2, i = 1..j), j = 1..3)]$ $FY_X2 := \left[\frac{49}{100}, \frac{91}{100}, 1 \right] \quad (1.5.20)$ $F_{X Y}(y X=2) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{49}{100} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{91}{100} & 1 < x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$	Y feltételes eloszlás függvénye X=1 feltételre > $FYY_X2 := [0, op(convert(FY_X2, list)), 1] :$ $DynamicSystems:-DiscretePlot(YY, FYY_X2, style = stair, thickness = 3, title = Y\ feltételes\ eloszlás\ függvénye\ X=2\ feltételre)$ Y feltételes eloszlás függvénye X=2 feltételre 

▼ 11.6. Feltételes sűrűség függvény és a feltételes várható érték folytonos esetben

Legyen az (X, Y) folytonos valószínűségi vektor változó együttes eloszlásfüggvénye $F_{XY}(x, y)$ és $F_X(x)$, $F_Y(y)$ a peremeloszlásfüggvények.

Ekkor tetszőleges $\Delta y \neq 0$ esetén

$$P(X < x | y \leq Y < y + \Delta y) = \frac{P(\{X < x\} \cdot \{y \leq Y < y + \Delta y\})}{P(\{y \leq Y < y + \Delta y\})} = \frac{F_{XY}(x, y + \Delta y) - F_{XY}(x, y)}{F_Y(y + \Delta y) - F_Y(y)}.$$

A feltételes eloszlásfüggvényt úgy kapjuk, ha limeszt képezünk midőn Δy nullához tart

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x|y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} P(X < x | y \leq Y < y + \Delta y) = \\ &= \frac{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F_{XY}(x, y + \Delta y) - F_{XY}(x, y)}{\Delta y}}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F_Y(y + \Delta y) - F_Y(y)}{\Delta y}} = \frac{\frac{\partial F_{XY}(x, y)}{\partial y}}{\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial F_{XY}(x, y)}{\partial y}}{f_Y(y)}, \end{aligned}$$

ahol $f_Y(y)$ az Y perem sűrűség függvénye.

11.6.1. DEFINÍCIÓ. FELTÉTELES ELOSZLÁS FÜGGVÉNY FOLYTONOS ESETBEN

Az X folytonos valószínűségi változó Y -ra vonatkozó $F_{X|Y}(x|y)$ **feltételes eloszlásfüggvényén** az együttes eloszlásfüggvény y -szerinti parciális deriváltjának és az Y sűrűség függvényének hányadosát értjük, azaz

$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{\frac{\partial F_{XY}(x, y)}{\partial y}}{f_Y(y)}$$

11.6.2. DEFINÍCIÓ. X FELTÉTELES SŰRŰSÉG FÜGGVÉNYE Y -RA NÉZVE

Az X folytonos valószínűségi változó Y -ra vonatkozó $f_{X|Y}(x|y)$ **feltételes sűrűségfüggvényén** a megfelelő feltételes eloszlásfüggvény x -szerinti derivált függvényét értjük, azaz

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\partial F_{X|Y}(x|y)}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F_{XY}(x, y)}{\partial y} \right)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}}{f_Y(y)} = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Hasonlóan értelmezhető az Y változónak X -re vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye is

11.6.3. DEFINÍCIÓ. Y FELTÉTELES SŰRŰSÉG FÜGGVÉNYE X -RE

Az Y folytonos valószínűségi változó Y -ra vonatkozó $f_{Y|X}(y|x)$ **feltételes sűrűségfüggvényén**

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}$$

hányadosát értjük.

Mivel az $f_{Y|X}(y|x)$ feltételes sűrűség függvény, mint az y változó függvénye rendelkezik a sűrűség függvényekre kirótt feltételekkel, ezért segítségével számolhatunk várható értéket. Ezt nevezzük Y változó X -re vonatkozó feltételes várható értékének és ez függvénye az x változónak, amelyet az Y változó X -re vonatkozó regressziós görbéjének is nevezünk.

11.6.4. DEFINÍCIÓ. Y FELTÉTELES VÁRHATÓ ÉRTÉKE X -RE

Az $E(Y|X) = \int_0^x y f_{Y|X}(y|x) dy$ integrált nevezzük Y feltételes várható értékének X -re nézve vagy Y regressziós görbéje X -re nézve.

A 11.6.2. definícióban szereplő egyenlőséget szorozzuk meg $f_Y(y)$ -nal és 11.6.3. definícióban szorozzuk $f_X(x)$ -szel és így kapjuk a **szorzás szabály** általánosítását folytonos eloszlásokra.

11.6.5. TÉTEL. Szorzás-szabály folytonos eloszlásokra

Az X és Y folytonos valószínűségi változók $f_{XY}(x, y)$ együttes sűrűség függvénye, $f_X(x)$ (ill. $f_Y(y)$) az X (ill. Y) változó perem sűrűség függvénye és $f_{X|Y}(x|y)$ (ill. $f_{Y|X}(y|x)$) az X változó Y -ra vonatkozó (ill. Y változó X -re vonatkozó) feltételes perem sűrűség függvényei között fennáll az

$$f_{XY}(x, y) = f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)$$

szorzás-szabály.

A perem sűrűségfüggvények 11.4.3. számítási szabályát használva az alábbi azonosságokat kapjuk.

11.6.6. TÉTEL. Teljes valószínűség-tétel folytonos eloszlásokra

Az X és Y folytonos változók perem sűrűség függvényei előállíthatók a megfelelő feltételes sűrűség függvény segítségével a következő integrál alakban

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x) dx.$$

Az azonosságok tekinthetők a **teljes valószínűség-tétel** általánosításának folytonos eloszlásokra.

A Bayes-tétel általánosításához már csak egy lépés hiányzik.

11.6.7. TÉTEL. Bayes-tétel általánosítása folytonos eloszlásokra

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) dy}$$

Bizonyítás

Írjuk be a 11.6.3. feltételes sűrűség függvény definíciójának $f_{XY}(x, y)$ számlálója helyébe a 11.6.5. szorzás szabály első egyenlőségét és a nevezőbe $f_X(x)$ helyébe pedig a 11.6.6. teljes valószínűség-tétel első egyenlőségét! Q.e.d.

11.6.8. PÉLDA. Feltételes sűrűségek, feltételes várható értékek és függetlenség

Legyen az együttes sűrűségfüggvény $f(x, y) = \begin{cases} k & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$, ahol $k > 0$ konstans.

(a) Számítsuk ki "k" értékét úgy, hogy $f(x, y)$ egy két dimenziós eloszlás együttes sűrűségfüggvénye legyen!

(b) Határozzuk meg és szemléltessük az X változó $f_X(x) = \int_0^x f(x, y) dy$ **perem sűrűség függvényét!**

(c) Határozzuk meg és szemléltessük az Y változó X-re vonatkozó $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$ **feltételes sűrűségfüggvényét!**

(d) Határozzuk meg és szemléltessük az Y változó X-re vonatkozó $E(Y|X) = \int_0^x y f_{Y|X}(y|x) dy$ **feltételes várható értékét!**

(e) Határozzuk meg és szemléltessük az Y változó $f_Y(y) = \int_0^1 f_{XY}(x, y) dx$ **perem sűrűség függvényét!**

(f) Határozzuk meg és szemléltessük az X változó Y-ra vonatkozó $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ **feltételes sűrűségfüggvényét!**

(g) Határozzuk meg és szemléltessük az X változó Y-ra vonatkozó $E(X|Y) = \int_y^1 x f_{X|Y}(x|y) dx$ **feltételes várható értékét !**

(h) **Függetlenek-e** egymástól az X és Y változók?

MEGOLDÁS

(a) Számítsuk ki "k" értékét úgy, hogy $f(x,y)$ egy két dimenziós eloszlás sűrűségfüggvénye legyen!

Két feltételt kell teljesíteni: (i) $f(x,y) \geq 0$ és (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$.

Az $f_{XY}(x,y)$ együttes sűrűség függvény

> restart :

$f := \text{unapply}(\text{piecewise}(y < 0 \text{ or } x < 0, 0, 0, 0 < y < x < 1, k, 0), x, y)$

:

$'f(x,y) = f(x,y);$

$f(x,y) =$ (1.6.1)

$$\begin{cases} 0 & y < 0 \text{ or } x < 0 \\ k & 0 < y \text{ and } y < x \text{ and } x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

A bezárt térfogat 1 kell, hogy legyen!

> feltetel := int(int(f(x,y), y=0..1), x=0..1) = 1;

isolate(feltetel, k); assign(%);

$$\text{feltetel} := \frac{1}{2} k = 1$$

$$k = 2$$

(1.6.2)

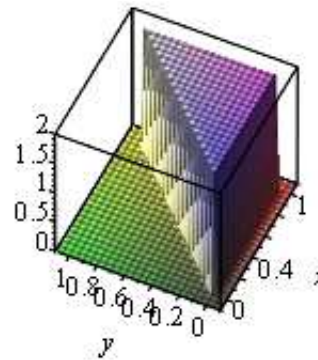
> f(x,y)

$$\begin{cases} 0 & y < 0 \text{ or } x < 0 \\ 2 & 0 < y \text{ and } y < x \text{ and } x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.6.3)$$

Az $f_{XY}(x,y)$ együttes sűrűség függvény

> plot3d(f(x,y), x=-0.1..1.1, y=-0.1..1.1, axes=boxed, orientation=[-155, 40], title=Együttes sűrűség függvény);

Együttes sűrűség függvény



>

(b) Határozzuk meg és szemléltessük az X változó $f_X(x) = \int_0^1 f_{XY}(x,y) dy$ perem sűrűség függvényét!

Az X változó perem sűrűségfüggvénye

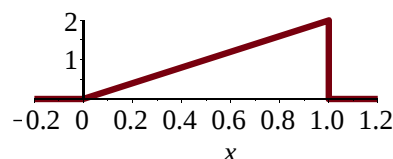
> fX := unapply(int(f(x,y), y=0..1), x) : simplify(fX(x));

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \end{cases} \quad (1.6.4)$$

Az X változó perem sűrűségfüggvénye

> plot(fX(x), x=-0.2..1.2, thickness=3, title=Az X változó perem sűrűsége);

Az X változó perem sűrűsége



(c) Határozzuk meg és szemléltessük az Y változó X-re vonatkozó $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ **feltételes sűrűségfüggvényét!**

Az Y változó X-re vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvénye**

> $fy_x := \frac{f(x,y)}{f_X(x)} : 'f(y|x)' = fy_x$

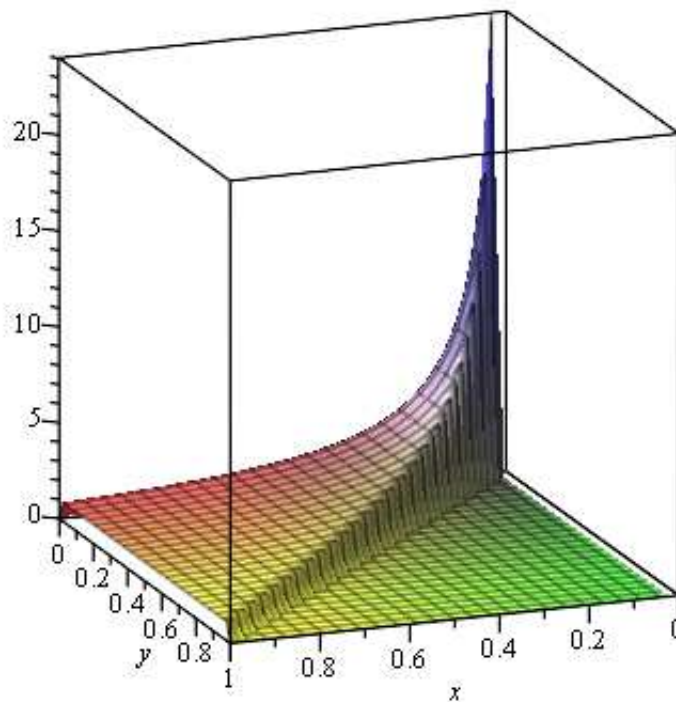
$$f(y|x) = \begin{cases} 0 & y < 0 \text{ or } x < 0 \\ 2 & 0 < y \text{ and } y < x \text{ and } x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \end{cases}$$

(1.6.5)

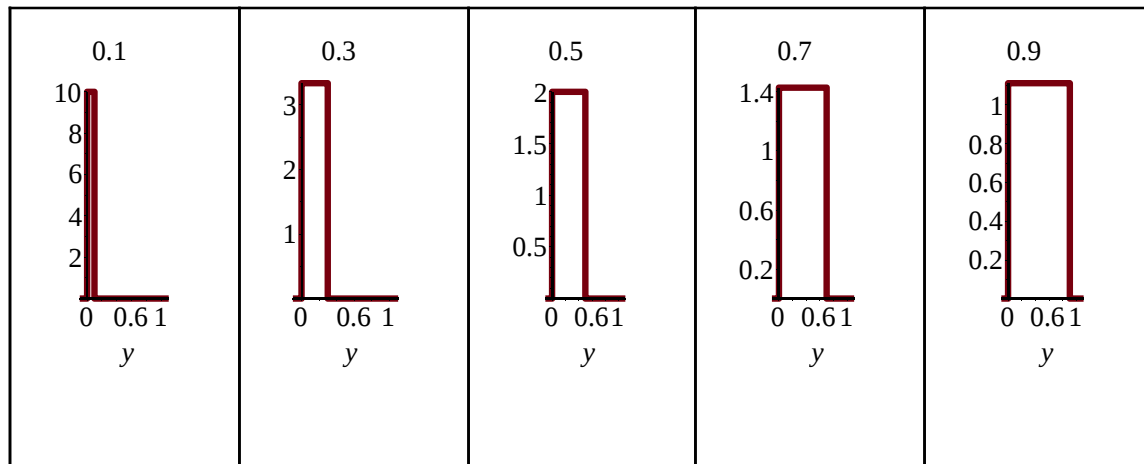
A kapott két változós függvényt szemléltessük felülettel

> `plot3d( fy_x, x = 0 ..1, y = 0 ..1, axes = boxed, orientation = [69, 74, 0] )`



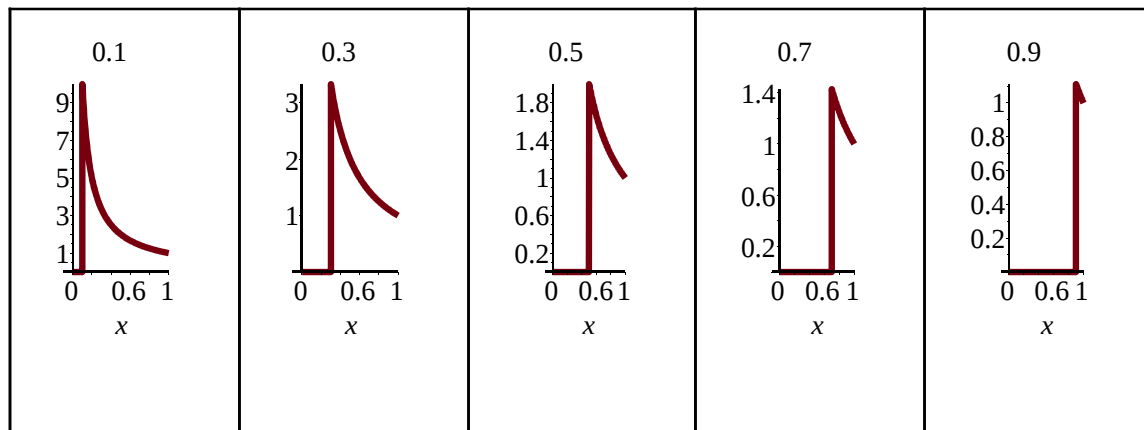
Rögzített $x = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ és 0.9 értékekhez felrajzoljuk, mint y függvényét!

> `kepeky := Matrix(1, 5, [ seq(plot( fy_x, y=-0.1 ..1.1, thickness = 3, title = x), x = 0.1 ..0.9, 0.2) ] ) :`
 > `plots:-display(kepeky)`



Rögzített $y = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ és 0.9 értékekhez felrajzoljuk, mint x függvényét!

> `kepekx := Matrix(1, 5, [ seq(plot( fy_x, x=-0.1 ..1, thickness = 3, title = y), y = 0.1 ..0.9, 0.2) ] ) :`
 > `plots:-display(kepekx)`



(d) Határozzuk meg és szemléltessük az Y változó X -re vonatkozó $E(Y|X) = \int_0^x y f_{Y|X}(y|x) dy$

feltételes várható értékét!

A számítást a várható érték szokásos definíciója alapján végezzük. A kapott várható érték függ az x -változótól. Ezt a függvényt az Y változó X -re vonatkozó regressziós görbéjének is hívjuk, amely jelen esetben a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett $y = \frac{x}{2}$ egyenes.

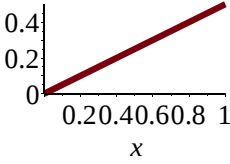
Y változó X -re vonatkozó **feltételes várható érték**

> ``regresszio_Y|X` := simplify(int(y*fy_x, y = 0..1));`

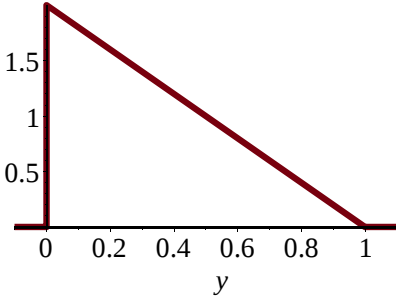
(1.6.6)

Y változó X -re vonatkozó **feltételes várható érték**

> `plot(`regresszio_Y|X`, x = 0..1, scaling = constrained, title`

$\text{regressio_Y X} :=$ $\begin{cases} \text{undefined} & x < 0 \\ \frac{1}{2} x & 0 \leq x < 1 \\ \text{undefined} & 1 \leq x \end{cases}$	(1.6.6) = Y feltételes várható értéke vagy regressziós görbéje X-re, thickness = 3) Y feltételes várható értéke vagy regressziós görbéje X-re 
--	---

(e) Határozzuk meg és szemléltessük az Y változó $f_Y(y) = \int_0^1 f_{XY}(x, y) dx$ perem sűrűség függvényét!

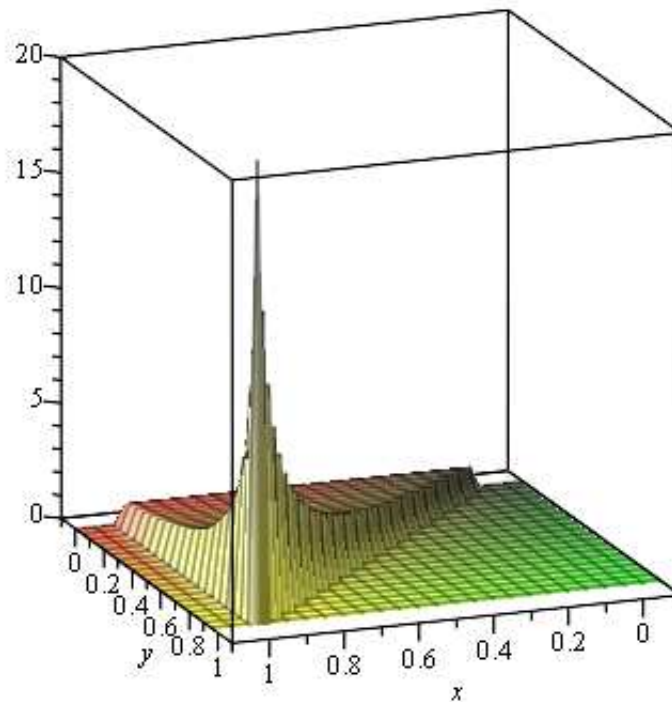
Az Y változó perem sűrűségfüggvénye > $fY := \text{unapply}(\text{simplify}(\text{int}(f(x, y), x = y..1)), y) : fY(y);$ $\begin{cases} 0 & y < 0 \\ 2 - 2y & 0 \leq y < 1 \\ 0 & 1 \leq y \end{cases}$ (1.6.7)	Az Y változó perem sűrűségfüggvénye > $\text{plot}(fY(y), y = -0.1..1.1, \text{title} = \text{Az Y változó perem sűrűsége, thickness} = 3)$ Az Y változó perem sűrűsége 
---	---

(f) Határozzuk meg és szemléltessük az $f_{X|Y}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$ feltételes sűrűségfüggvényt!

Az X változó Y-ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye > $f_{X Y} := \frac{f(x, y)}{fY(y)}$ $f_{X Y} := \begin{cases} 0 & y < 0 \text{ or } x < 0 \\ 2 & 0 < y \text{ and } y < x \text{ and } x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $\begin{cases} 0 & y < 0 \\ 2 - 2y & 0 \leq y < 1 \\ 0 & 1 \leq y \end{cases}$ (1.6.8)

A kapott két változós függvényt szemléltessük felülettel

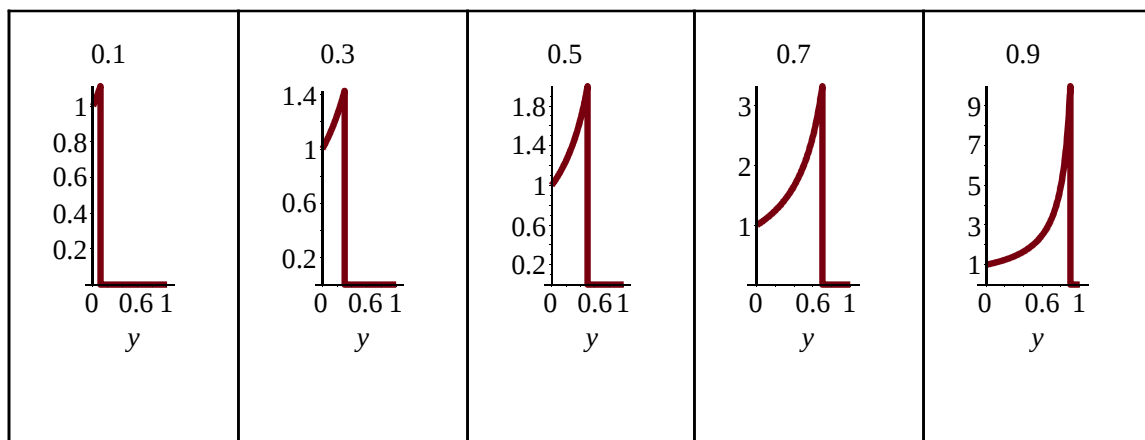
> `plot3d( fx_y, x=-0.1 ..1.1, y=-0.1 ..1.1, axes = boxed, orientation = [69, 74, 0])`



Rögzített $x = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ és 0.9 értékekhez felrajzoljuk, mint y függvényét!

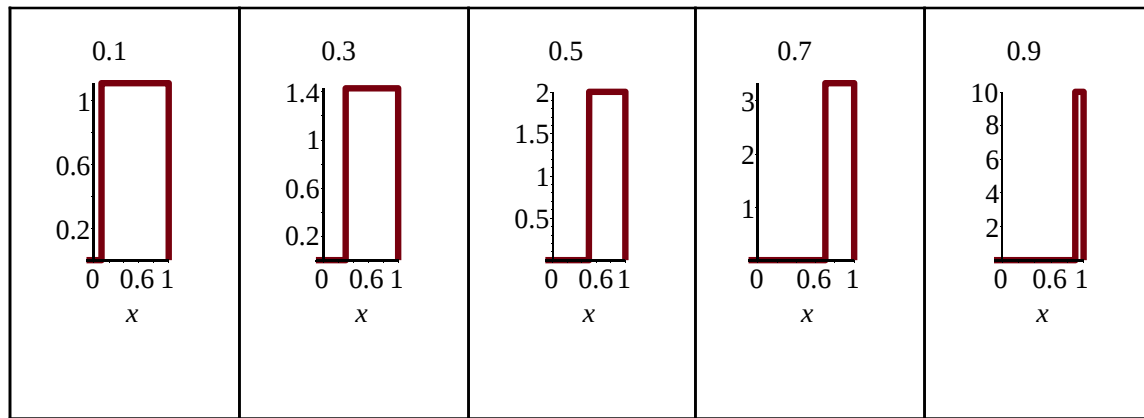
> `kepeky := Matrix(1, 5, [ seq(plot( fx_y, y=-0.1 ..1.1, thickness = 3, title = x), x = 0.1 ..0.9, 0.2) ] ) :`

> `plots:-display(kepeky)`



Rögzített $y = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ és 0.9 értékekhez felrajzoljuk, mint x függvényét!

> *kepekx := Matrix(1, 5, [seq(plot(fx_y, x=-0.1 ..1, thickness = 3, title = y), y = 0.1 ..0.9, 0.2)]) :*
 > *plots:-display(kepekx)*



(g) Határozzuk meg és szemléltessük az X változó Y -ra vonatkozó $E(X|Y) =$

$$\int_0^1 x f_{X|Y}(x|y) dx \text{ feltételes várható értékét!}$$

Ezt a függvény az X változó Y -ra vonatkozó regressziós görbéjének is hívjuk, amely most a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett $\frac{y+1}{2}$ egyenes.

Y változó X-re vonatkozó feltételes várható értéke > <i>`Regresszio_X Y` := simplify(int(x*fx_y, x = 0..1));</i> <i>Regresszio_X Y :=</i> (1.6.9) $\begin{cases} \text{undefined} & y < 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} & 0 \leq y < 1 \\ \text{undefined} & 1 \leq y \end{cases}$	Y változó X-re vonatkozó feltételes várható értéke > <i>plot(`Regresszio_X Y`, y = 0..1, 0..1, title = Az X változó feltételes várható értéke vagy regresziós görbéje Y-ra, thickness = 3)</i> Az X változó feltételes várható értéke vagy regresziós görbéje Y-ra
--	---

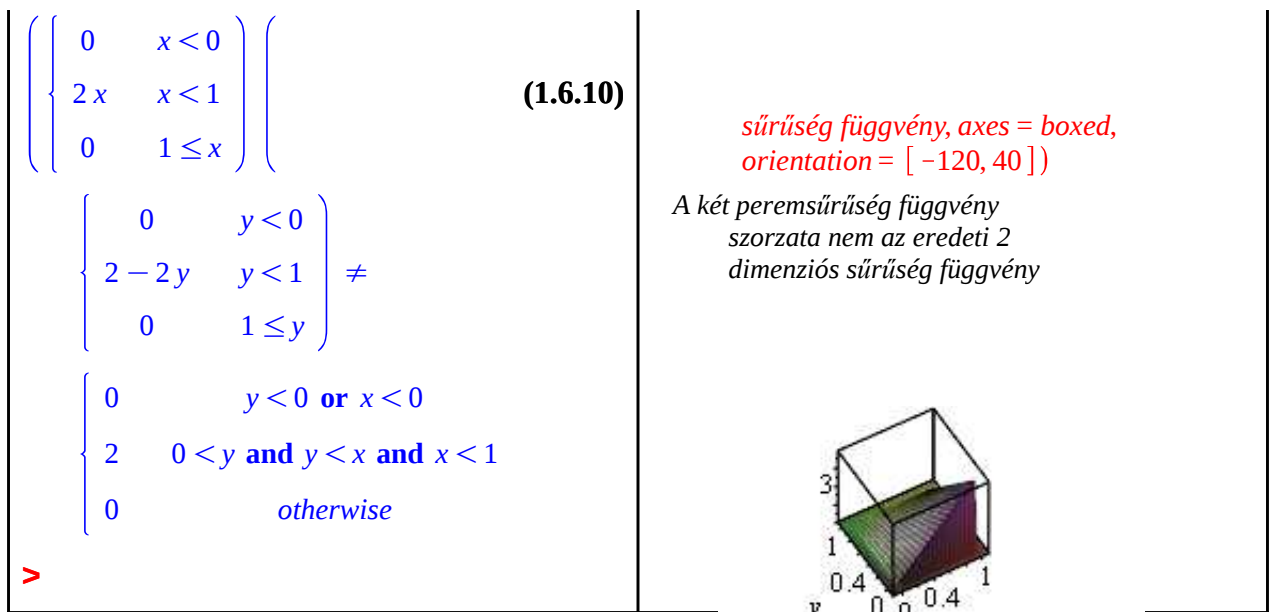
(h) Függetlenek-e az X és Y változók?

Ellenőrizzük, hogy az

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x, y)$$

egyenlőtlenség teljesül vagyis az X és Y változók **nem függetlenek**.

X és Y változók nem függetlenek > <i>simplify(fX(x) * fY(y)) != f(x, y);</i> (1.6.10)	X és Y változók nem függetlenek > <i>plot3d(fX(x) * fY(y), x=-0.1 ..1.1, y=-0.1 ..1.1, title = A két peremsűrűség függvény szorzata nem az eredeti 2 dimenziós</i>
---	--



A jobb oldali grafikon nem ugyanaz, mint az $f_{XY}(x, y)$ együttes sűrűség függvény korábbi grafikonja.

▼ 11.7. Valószínűségi változók függetlensége

Az események függetlenségét felhasználva értelmezhetjük valószínűségi változók függetlenségét. Ha ugyanis az A és B eseményeket az X és Y változó segítségével a következőképpen adjuk meg

$$A = \{X < x\} \text{ és } B = \{Y < y\},$$

akkor az események $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ függetlensége definiálja az X és Y változók függetlenségét.

11.7.1. DEFINÍCIÓ. Két változó függetlensége eloszlás függvényekkel

Az X és Y valószínűségi változókat **függetleneknek** nevezzük, ha

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

teljesül minden valós x és y esetén.

Diszkrét esetben ez ekvivalens az eloszlásokra tett hasonló feltétellel.

11.7.2. TÉTEL. Diszkrét változók függetlensége eloszlásokkal

Az X és Y diszkrét valószínűségi változók **függetlenek**, ha teljesül az

$$f_{XY}(x_i, y_k) = f_X(x_i) \cdot f_Y(y_k)$$

egyenlőség minden i-re és k-ra, ahol $f_X(x)$ és $f_Y(y)$ az X és Y változó diszkrét **eloszlását** jelöli.

Folytonos esetben 11.7.1. ekvivalens a sűrűség függvényre tett hasonló feltétellel.

11.7.3. TÉTEL. Folytonos változók függetlensége sűrűség függvényekkel

Ha X és Y folytonos valószínűségi változók, akkor ezek függetlensége ekvivalens az

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \text{ minden } x, y\text{-ra}$$

egyenlőség teljesülésével, ahol $f_X(x)$ és $f_Y(y)$ az X és az Y változó **sűrűség függvényét** jelöli.

Bizonyítás

Az együttes sűrűség függvény és az együttes eloszlásfüggvény kapcsolata alapján

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y) =$$

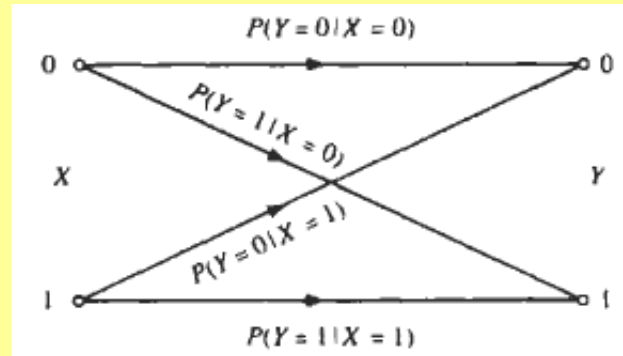
$$= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (F_X(x) \cdot F_Y(y)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} F_X(x) \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) \right) = f_X(x) f_Y(y).$$

Q.e.d

A legegyszerűbb zajos digitális adatátviteli modell megfogalmazható valószínűségi változókkal.

11.7.4. PÉLDA. Digitális kommunikációs csatorna zajjal

A digitális kommunikációs csatornához jelölje $(X; Y)$ azt a két dimenziós valószínűségi vektor változót, amelyben X a csatorna **bemeneti jele** és Y a csatorna **kimeneti jele**. (Lásd az ábrát!)



Legyenek adottak az alábbi valószínűségek

$P(X=0) = 0.45$ a bemeneti 0 jelek előfordulásának relatív gyakorisága vagy valószínűsége;

$P(Y=1|X=0) = 0.1$ annak valószínűsége, hogy az Y kimenet 1, feltéve, hogy a bemenet $X=0$; (a 0 jel tévesztése)

$P(Y=0|X=1) = 0.15$ annak valószínűsége, hogy az Y kimenet 0, feltéve hogy a bemenet $X=1$; (az 1 jel tévesztése)

(a) Határozzuk meg az $(X; Y)$ vektorváltozó együttes eloszlását!

(b) Határozzuk meg az X és az Y változók peremeloszlását!

(c) Vajon függetlenek-e az X és Y változók? Írjuk táblázatba az együttes valószínűségeket!

Megoldás

Vegyük fel az ismert valószínűségeket!

> *restart* :

> $P(X=0) := 0.45$

> $P(Y=1|X=0) := 0.1$; $P(Y=0|X=1) := 0.15$

$P(X=0) := 0.45$

$P(Y=1|X=0) := 0.1$

$P(Y=0|X=1) := 0.15$

(1.7.1)

Az ábrán látható azon valószínűségeket- amelyeket a feladat nem adott meg - **komplementer képzéssel** kapjuk!

> $P(X=1) := 1 - P(X=0)$;

$P(Y=0|X=0) := 1 - P(Y=1|X=0)$;

$P(Y=1|X=1) := 1 - P(Y=0|X=1)$;

$P(X=1) := 0.55$

$P(Y=0|X=0) := 0.9$

$$P(Y=1|X=1) := 0.85 \quad (1.7.2)$$

Az együttes eloszlás értékeit a valószínűségek **szorzás szabálya** adja meg.

> $P(X=0,Y=0) := P(Y=0|X=0) \cdot P(X=0);$
 $P(X=0,Y=1) := P(Y=1|X=0) \cdot P(X=0);$
 $P(X=1,Y=0) := P(Y=0|X=1) \cdot P(X=1);$
 $P(X=1,Y=1) := P(Y=1|X=1) \cdot P(X=1);$

$$P(X=0,Y=0) := 0.405$$

$$P(X=0,Y=1) := 0.045$$

$$P(X=1,Y=0) := 0.0825$$

$$P(X=1,Y=1) := 0.4675 \quad (1.7.3)$$

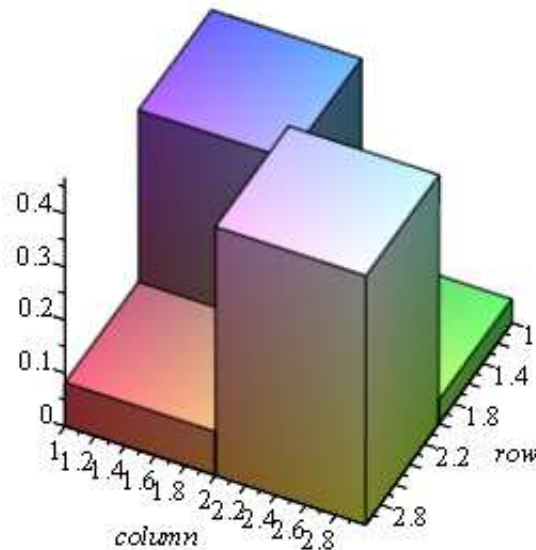
Létrehozuk az együttes eloszlás 2×2-es mátrixát és felrajzoljuk 3D-s oszlop diagramját!

> $pXY := \text{Matrix}(2, 2, [[P(X=0,Y=0), P(X=0,Y=1)], [P(X=1,Y=0), P(X=1,Y=1)]]);$

$$pXY := \begin{bmatrix} 0.405 & 0.045 \\ 0.0825 & 0.4675 \end{bmatrix} \quad (1.7.4)$$

> $\text{plots}[\text{matrixplot}](pXY, \text{heights} = \text{histogram}, \text{axes} = \text{framed}, \text{orientation} = [26, 48], \text{title} = \text{Együttes eloszlás oszlop diagramja});$

Együttes eloszlás oszlop diagramja



(b) A perem eloszlásokat a mátrix sorainak illetve oszlopainak összegei adják! Ezek egy-egy Bernoulli-típusú diszkrét eloszlások lesznek.

> $pX := [P(X=0,Y=0) + P(X=0,Y=1), P(X=1,Y=0) + P(X=1,Y=1)];$

> $pY := [P(X=0,Y=0) + P(X=1,Y=0), P(X=0,Y=1) + P(X=1,Y=1)];$

$$pX := [0.450, 0.5500]$$

$$pY := [0.4875, 0.5125] \quad (1.7.5)$$

Adjuk meg egy F 3×3-as mátrixban az együttes eloszlást és a perem eloszlásokat!

- > $F := \text{Matrix}(3, 3) :$
- > $F_{1..2, 1..2} := pXY :$
- > $F_{1..2, 3..3} := \text{convert}(pX, \text{Vector}) :$
- > $F_{3..3, 1..2} := \text{convert}(pY, \text{Vector}) : F_{3, 3} := 1 :$
- > *Együttes és perem eloszlások = F*

$$\text{Együttes és perem eloszlások} = \begin{bmatrix} 0.405 & 0.045 & 0.450 \\ 0.0825 & 0.4675 & 0.5500 \\ 0.4875 & 0.5125 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.6)$$

(c) Ellenőrizzük, hogy teljesül-e a $pXY_{i,j} = pX_i \cdot pY_j$ egyenlőség minden $i, j = 1, 2$ index esetén!

$$> pX_1 \cdot pY_1 \neq pXY_{1,1}$$

$$0.2193750000 \neq 0.4050000000 \quad (1.7.7)$$

Mivel az egyenlőség már az $i=1$ és $j=1$ index esetén sem teljesül, ezért az X és Y valószínűségi változók **nem lehetnek függetlenek** egymástól!

Megjegyezzük, hogy rossz lenne, ha az **output** független lenne az **inputtól**!

Bármely X és Y diszkrét eloszlásból tudunk képezni olyan együttes eloszlás mátrixot, amely független eloszlásokat mutat. Ehhez ki kell számolni a $pX_i \cdot pY_j$ összes lehetséges szorzatot és ezek lesznek a $P(X=x_i, Y=y_j)$ együttes eloszlás értékei. Tehát az F mátrix utolsó sorában és utolsó oszlopában szereplő számok szorzatát kell a mátrixba beírni!

- > *Függetlenség := F :*
- for i to 2 do
- for j to 2 do
- $Függetlenség_{i,j} := pX_i \cdot pY_j$
- end do
- end do
- > *Függetlenségre alapozott együttes eloszlás = Függetlenség;*

$$\text{Függetlenségre alapozott együttes eloszlás} = \begin{bmatrix} 0.2193750 & 0.2306250 & 0.450 \\ 0.26812500 & 0.28187500 & 0.5500 \\ 0.4875 & 0.5125 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.8)$$

Ha a fenti mátrix bal felső sarkában levő 2×2 -s mátrixot adtuk volna meg együttes eloszlásnak, akkor X és Y független lenne.

Az új táblázatban a függetlenség teljesülését a feltételes valószínűségek segítségével is ellenőrizhetjük

$$P(Y=1|X=0) = \frac{P(Y=1, X=0)}{P(X=0)} = \frac{0.230625}{0.45} = 0.5125 = P(Y=1) \text{ az eredeti } 0.1 \text{ helyett}$$

$$P(Y=0|X=1) = \frac{P(Y=0, X=1)}{P(X=1)} = \frac{0.268125}{0.55} = 0.4875 = P(Y=0) \text{ az eredeti } 0.15 \text{ helyett}$$

▼ 11.8. Két és több dimenziós nevezetes eloszlások

11.8.1. Polinomiális eloszlás

A binomiális eloszlás általánosítása a **polinomiális eloszlás**, amelynél a kísérletnek nem csak két

kimenetele lehet (A vagy ennek A tagadása következhet be). Tegyük fel, hogy egy kísérlet kimenetele k különböző $A_1, A_2, \dots, A_k$ kategóriába eshet. Ezek a kategóriák rendre $p_1, p_2, \dots, p_k$ valószínűséggel következnek be, amelyek összege

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy az $A_1, A_2, \dots, A_k$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ahol $p_i = P(A_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

A kísérletet megismételjük egymástól függetlenül n -szer. Jelölje X_i azt a valószínűségi változót, hogy az n kísérletből az A_i esemény hányszor következett be.

Kérdezzük, hogy mekkora az esélye az

$$X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k$$

együttes eseménynek, ahol $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$.

Megmutatjuk, hogy a

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_k!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_k^{x_k}$$

képlettel értelmezett valószínűségek k -dimenziós eloszlást definiálnak, mert összegük 1. Ugyanis a polinomiális-tétel alapján

$$\sum_{x_1 + x_2 + \dots + x_k = n} \frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_k!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_k^{x_k} = (p_1 + p_2 + \dots + p_k)^n = 1.$$

11.8.1. DEFINÍCIÓ. POLINOMIÁLIS-ELOSZLÁS

Az $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ diszkrét k -dimenziós eloszlást **polinomiálisnak** nevezzük, ha X_i értéke

$$0, 1, \dots, n \text{ lehet és } P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_k!} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \dots \cdot p_k^{x_k}.$$

Nézzünk egy példát polinomiális eloszlás alkalmazására.

11.8.2. PÉLDA. POLINOMIÁLIS ELOSZLÁS ALKALMAZÁSA

Egy helyi benzinkút 3-féle benzint ad el rendszeresen, amelyek elnevezése normal, prémium és szuper típusú. Az eladások statisztikája szerint a vásárlók $p_1=60\%$ -a normál benzint, $p_2=30\%$ -a prémiumot és $p_3=10\%$ -a szuper benzint vásárol.

(i) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a következő $n=10$ vásárló közül 5 vásárol normál, 4 vásárol prémium és 1 vásárol szuper terméket!

(ii) Feltételezve, hogy a 10 vásárló közül $x_1=5$ vásárló vesz normál benzint, milyen variációk fordulhatnak elő? Adjuk meg az összes variációt és határozzuk meg az előfordulásuk valószínűségeit! Melyik eset a legvalószínűbb? Rajzoljuk fel a valószínűségeket oszlop diagrammal!

(iii) Feltételezve, hogy a 10 vásárló közül $x_2=4$ vásárló vesz prémium benzint, milyen variációk fordulhatnak elő. Adjuk meg az összes variációt és határozzuk meg az előfordulásuk valószínűségeit! Melyik eset a legvalószínűbb? Rajzoljuk fel a valószínűségeket oszlop diagrammal!

Megoldás

(i) Vegyük fel az adatokat!

➤ *restart* :

$$p_1, p_2, p_3 := 0.6, 0.3, 0.1;$$

$$x_1, x_2, x_3 := 5, 4, 1$$

$$p1, p2, p3 := 0.6, 0.3, 0.1$$

$$x1, x2, x3 := 5, 4, 1 \quad (1.8.1)$$

Jelölje X1 azon vásárlók számát, akik normál, X2 azon vásárlók számát, akik prémium és X3 azon vásárlók számát, akik szuper benzint vásárolnak.

$$> n := x1 + x2 + x3$$

$$n := 10 \quad (1.8.2)$$

$$> P(X1 = x1, X2 = x2, X3 = x3) = \frac{n!}{x1! \cdot x2! \cdot x3!} \cdot p1^{x1} \cdot p2^{x2} \cdot p3^{x3}$$

$$P(X1 = 5, X2 = 4, X3 = 1) = 0.0793618560 \quad (1.8.3)$$

Tehát kb. 7.9% az esély arra, hogy 10 vásárló közül 5 vásárol normál, 4 prémium és 1 szuper benzint.

(ii) Az egyes variációkat és a hozzájuk tartozó valószínűségeket számoljuk.

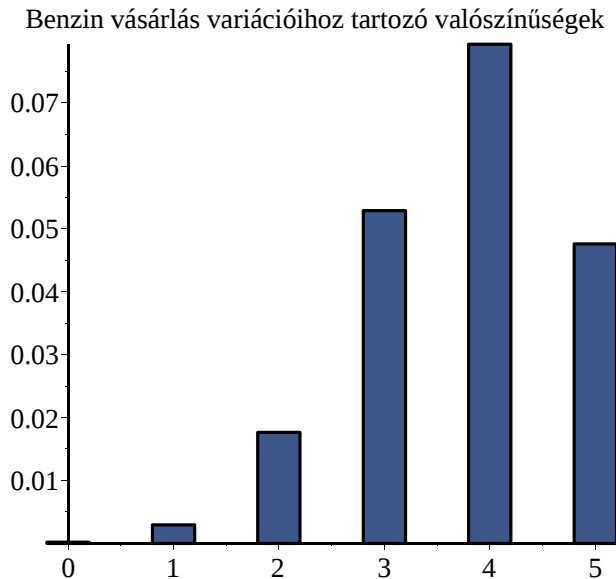
$$> x1 := 5 : \text{variációk1} := [\text{seq}([x1, x2, n - x1 - x2], x2 = 0 .. 5)]$$

$$\text{variációk1} := [[5, 0, 5], [5, 1, 4], [5, 2, 3], [5, 3, 2], [5, 4, 1], [5, 5, 0]] \quad (1.8.4)$$

$$> \text{valószínűségek1} := \left[\text{evalf} \left(\text{seq} \left(\frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot x_3!} \cdot p1^{x_1} \cdot p2^{x_2} \cdot p3^{x_3}, x \text{ in variációk1} \right), 5 \right) \right]$$

$$\text{valószínűségek1} := [0.00019596, 0.0029393, 0.017636, 0.052909, 0.079362, 0.047618] \quad (1.8.5)$$

$$> \text{Statistics:-ColumnGraph}(\text{valószínűségek1}, \text{offset} = -0.2, \text{distance} = 0.6, \text{width} = 0.4, \text{title} = \text{"Benzin vásárlás variációihoz tartozó valószínűségek"})$$



Tehát feltételezve, hogy $x_1 = 5$ vásárló vesz normál benzint 10 vásárló közül, akkor legnagyobb az esélye annak, hogy $x_2 = 4$ vásárló vesz prémium és $x_3 = 1$ szuper benzint.

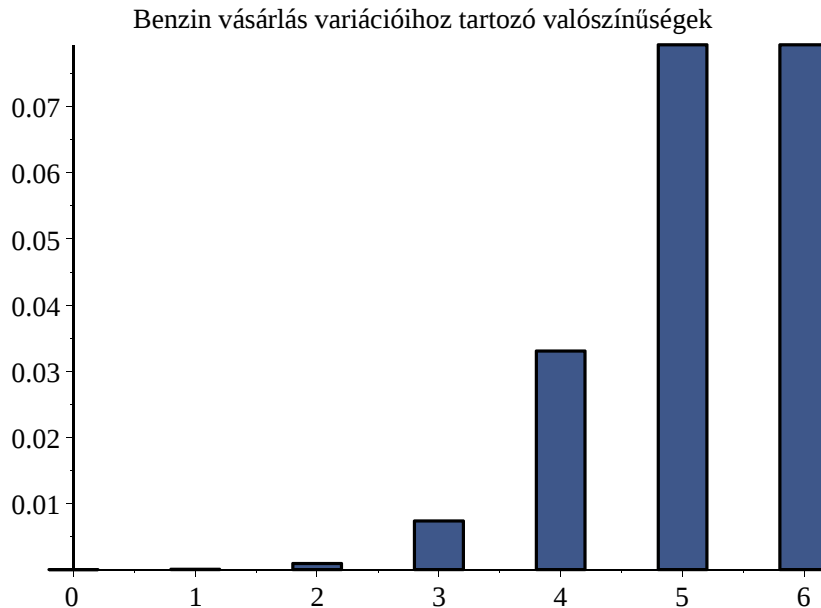
(iii) Az egyes variációkat és a hozzájuk tartozó valószínűségeket számoljuk.

$$> x2 := 4 : \text{variációk2} := [\text{seq}([x1, x2, n - x1 - x2], x1 = 0 .. 6)]$$

$$\text{variációk2} := [[0, 4, 6], [1, 4, 5], [2, 4, 4], [3, 4, 3], [4, 4, 2], [5, 4, 1], [6, 4, 0]] \quad (1.8.6)$$

> $val\acute{o}s\acute{z}\acute{i}n\acute{u}s\acute{e}g\acute{e}k2 := \left[evalf \left(seq \left(\frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot x_3!} \cdot p1^{x_1} \cdot p2^{x_2} \cdot p3^{x_3}, x \text{ in variációk2} \right), 5 \right) \right]$
 $val\acute{o}s\acute{z}\acute{i}n\acute{u}s\acute{e}g\acute{e}k2 := [0.0000017010, 0.000061236, 0.00091854, 0.0073483, 0.033067,$ (1.8.7)
 $0.079362, 0.079362]$

> $Statistics:-ColumnGraph(val\acute{o}s\acute{z}\acute{i}n\acute{u}s\acute{e}g\acute{e}k2, offset = -0.2, distance = 0.6, width = 0.4, title = "Benzin vásárlás variációihoz tartozó valószínűségek")$



Tehát feltételezve, hogy $x_2 = 4$ vásárló vesz prémium benzint 10 vásárló közül, akkor az $(x_1 = 5, x_3 = 1)$ és $(x_1 = 6, x_3 = 0)$ eseteknek ugyanakkora a valószínűsége és ezek a maximális valószínűségű esetek. ♣

11.8.3. PÉLDA. Adatátvitel torzulása

Egy digitális adatátvitel során annak valószínűsége, hogy egy byte információ nagyon, mérsékelten vagy kis mértékben torzul rendre $p_1=0.01$, $p_2=0.1$ és $p_3=0.89$. Tegyük fel, hogy 3 byte információt küldünk át a csatornán, melyek torzulásának mértéke egymástól független. Jelölje X azon byte-k számát a 3-ból, amelyek nagyon torzulnak és jelölje Y azon byte-k számát a 3-ból, amelyek mérsékelten torzulnak.

- Határozzuk meg az $f_{XY}(x, y)$ együttes eloszlás mátrixot!
- Számítsuk ki a $P(1 < X, Y < 2)$ valószínűség értékét!
- Adjuk meg az X perem eloszlást és rajzoljuk fel pálcika diagrammal!
- Számítsuk ki az $E(Y|X=1)$ feltételes várható értéket!
- Függetlenek-e egymástól az X és Y változók?

MEGOLDÁS

(a) Az $f_{XY}(x, y)$ együttes eloszlás számítása

X lehetséges értéke 0, 1, 2 vagy 3, mert 3 byte-ból a nagyon torzulnak száma maximum 3 lehet. Y értékei ugyanazok lehetnek, csak a mérsékelten torzulnak száma.

> restart : X := [0, 1, 2, 3]; Y := X;

X := [0, 1, 2, 3]

Y := [0, 1, 2, 3]

(1.8.8)

Az $\{X=x, Y=y\}$ esemény azt jelenti, hogy a 3 byte-ból "x" darab nagyon torzult és "y" mérsékelten torzult. Használjuk a torzulások függetlenségét, vagyis $P(X=x, Y=y) = P(X=x) * P(Y=y)$ feltételt.

Jelölje N_i azt az eseményt, hogy az i-ik byte **n**agyon torzult, M_i azt az eseményt, hogy az i-ik byte **m**érsékelten torzult és K_i azt az eseményt, hogy az i-ik byte **k**issé torzult, ahol $i=1, 2$ és 3 lehet.

Feltétel szerint $P(N_i) = p_1=0.01, P(M_i) = p_2=0.1, P(K_i) = p_3=0.95$.

Az $\{X=x, Y=y\}$ esemény olyan B_1, B_2, B_3 hármashból áll, amelyben B_i jelöli az i-ik byte torzulásának mértékét. Ezért B_i lehet N_i, M_i vagy K_i tetszőleges ismétlődéssel. Ebben a sorozatban x darab N van, y darab M van és $(3-x-y)$ darab K van. Így a valószínűséget az ismétléses permutáció alapján számolhatjuk

> $f := (x, y) \rightarrow \frac{3! p_1^x p_2^y p_3^{3-x-y}}{x! y! (3-x-y)!}$

$f := (x, y) \rightarrow \frac{3! p_1^x p_2^y p_3^{3-x-y}}{x! y! (3-x-y)!}$

(1.8.9)

> p1, p2, p3 := 0.01, 0.1, 0.89

p1, p2, p3 := 0.01, 0.1, 0.89

(1.8.10)

Az alábbi eljárás a mátrix sor és oszlop indexei alapján ellenőrzi az $x + y \leq 3$ feltételt és kiszámolja a valószínűségeket! Mivel $i=x+1$ és $j=y+1$, ezért $i+j=x+y+2 \leq 5$, ha $x+y \leq 3$.

egyuttes := proc(i, j) if i + j <= 5 then evalf(f(i - 1, j - 1)) else 0 end if end proc

egyuttes := proc(i, j) if i + j <= 5 then evalf(f(i - 1, j - 1)) else 0 end if end proc (1.8.11)

Feltöltjük az együttes eloszlás mátrixát az előző eljárás segítségével!

fXY := Matrix(4, 4, egyuttes)

fXY :=

(1.8.12)

0.7049690000	0.2376300000	0.02670000000	0.001000000000
0.02376300000	0.00534	0.0003000000000	0
0.0002670000000	0.00003000000000	0	0
0.000001000000000	0	0	0

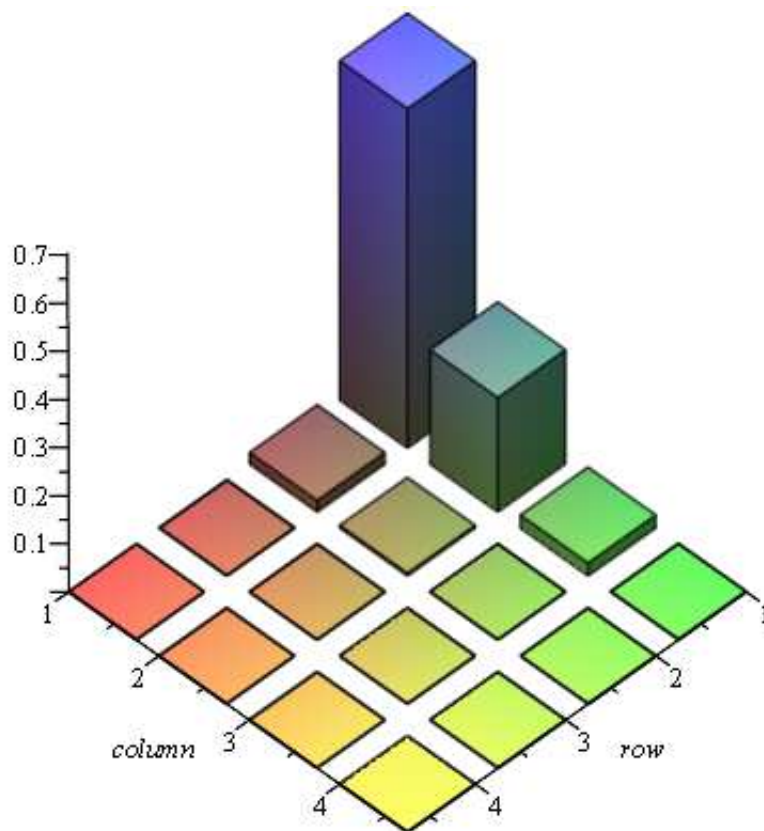
A teljes összeg 1, ezért valóban egy két dimenziós eloszlást kaptunk!

add(add(fXY[i, j], i = 1..4), j = 1..4)

1.0000000000

(1.8.13)

> plots[matrixplot](fXY, heights = histogram, axes = frame, gap = 0.25)



(b) Számítsuk ki a $P(1 < X, Y < 2)$ valószínűség értékét! (2 pont)

$P(1 < X, Y < 2)$ valószínűséget az $X > 1$ -nek megfelelő $i = 3$ és 4 sorok és $Y < 2$ -nek megfelelő $j = 1$ és 2 oszlopok kereszteződésében álló mátrix elemek összegzésével kapjuk.

> $P(1 < 'X', 'Y' < 2) = \text{add}(\text{add}(f_{XY_{i,j}}, j = 1..2), i = 3..4)$

$P(1 < X, Y < 2) = 0.0002980000$

(1.8.14)

(c) Adjuk meg az X perem eloszlást és rajzoljuk fel pálcika diagrammal! (3 pont)

Az $f_X(x)$ peremeloszlásokat a sorok összegzésével kapjuk.

> $fX := [\text{seq}(\text{add}(f_{XY_{i,j}}, j = 1..4), i = 1..4)]$

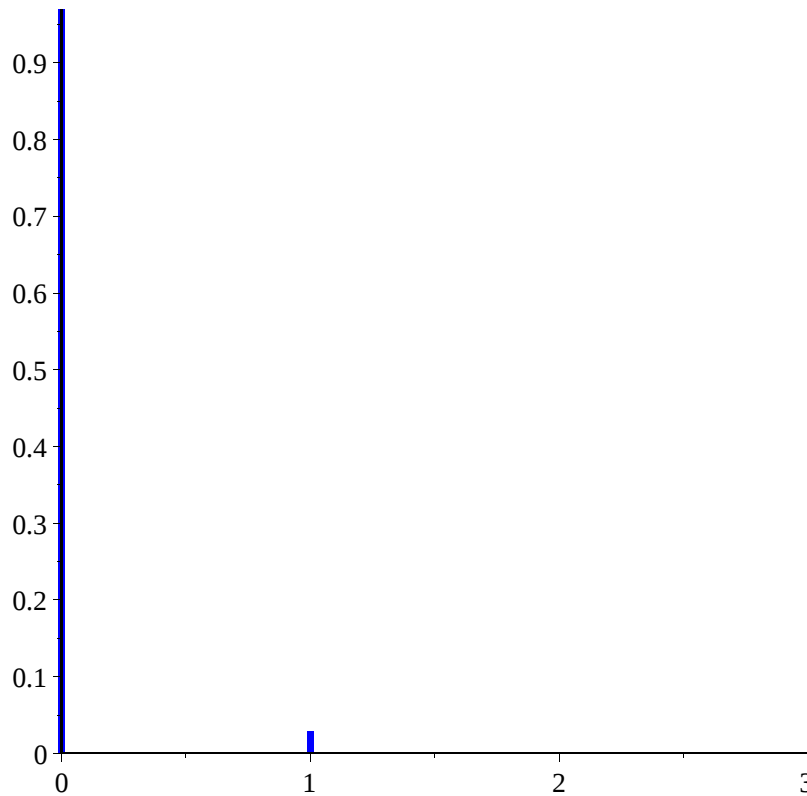
$fX := [0.9702990000, 0.02940300000, 0.0002970000000, 0.000001000000000]$

(1.8.15)

> $\text{palcikak} := [\text{seq}([i - 1, 0], [i - 1, fX_i]), i = 1..4)]$

$\text{plot}(\text{palcikak}, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3)$

$\text{palcikak} := [[0, 0], [0, 0.9702990000]], [[1, 0], [1, 0.02940300000]], [[2, 0], [2, 0.0002970000000]], [[3, 0], [3, 0.000001000000000]]]$



(d) Számítsuk ki az $E(Y|X=1)$ feltételes várható értéket! (2 pont)

Az $f_{Y|X=1}(y)$ Y feltételes eloszlást az $X=1$ feltételre vonatkozóan úgy kapjuk, hogy az f_{XY} mátrix $X=1$ értékéhez tartozó (második) sorát elosztjuk a sorösszeggel, vagyis az f_X peremeloszlás $X=1$ -hoz tartozó (második) értékével.

> ``fXY_X=1` := LinearAlgebra[Row]( fXY, 2 )`

$$f_{XY_X=1} := \begin{bmatrix} 0.02376300000 & 0.00534 & 0.0003000000000 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.8.16)$$

> ``f(Y|X=1)` :=  $\frac{f_{XY\_X=1}}{f_{X_2}}$`

$$f(Y|X=1) := \begin{bmatrix} 0.808182838480260 & 0.181614121006800 & 0.0102030405060000 & 0. \end{bmatrix} \quad (1.8.17)$$

A várható értéket Y értékei és a megfelelő valószínűségek szorzatösszege adja.

> ``E(Y|X=1)` = add(  $Y_i \cdot f(Y|X=1)_i$ , i = 1..4 )`

$$E(Y|X=1) = 0.202020202018800 \quad (1.8.18)$$

((e) Függetlenek-e egymástól az X és Y változók? (2 pont)

Ha függetlenek, akkor $P(X=0, Y=0)$ együttes valószínűség $P(X=0) \cdot P(Y=0)$ szorzat valószínűséggel kell egyenlőnek lenni. Ehhez számoljuk ki az f_Y peremeloszlást!

> `fY := [seq( add( fXYi,j, i = 1..4 ), j = 1..4 )]`

$$fY := [0.7290000000, 0.2430000000, 0.0270000000, 0.001000000000] \quad (1.8.19)$$

$$> fX_1 fY_1 \neq fXY_{1,1}$$

$$0.7073479710 \neq 0.7049690000 \quad (1.8.20)$$

Tehát az X és Y változók nem függetlenek!

11.8.4. Kétdimenziós normál eloszlás

Generáljunk olyan együttes sűrűség függvényt, amelynek Z_1 és Z_2 peremeloszlásai standard 1-dimenziós $N(0,1)$ normál eloszlású valószínűségi változók. Ha feltételezzük Z_1 és Z_2 függetlenségét, akkor az együttes sűrűségfüggvény a két perem sűrűségfüggvény szorzata! Ennél bonyolultabb konstrukciót kapunk, ha feltesszük, hogy Z_1 és Z_2 nem független és korrelációs együtthatójuk egy tetszőleges $(-1,1)$ intervallumba eső ρ szám ismert. Ezzel a ρ -val megadunk egy kétváltozós függvényt és igazoljuk, hogy teljesíti az együttes sűrűség függvényre vonatkozó feltételeket!

> restart :

$$f[Z1, Z2] := (x, y, \rho) \rightarrow \frac{\exp\left(-\frac{x^2 - 2 \cdot \rho \cdot x \cdot y + y^2}{2 \cdot (1 - \rho^2)}\right)}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{1 - \rho^2}} ;$$

$$'f[Z1, Z2](x, y, \rho)' = f[Z1, Z2](x, y, \rho) ;$$

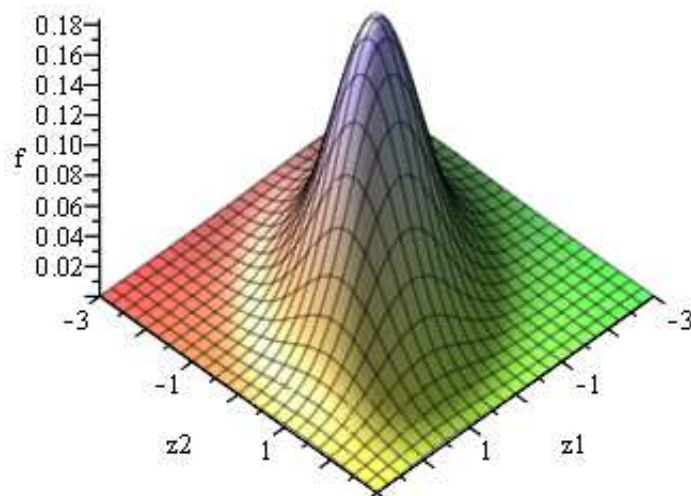
$$f_{Z1, Z2}(x, y, \rho) = \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2\rho^2 + 2}}}{\pi \sqrt{1 - \rho^2}} \quad (1.8.21)$$

ahol $-1 < \rho < 1$ a Z_1 és Z_2 változók korrelációs együtthatója $\rho = \frac{\text{Cov}(Z_1, Z_2)}{\sigma(Z_1) \sigma(Z_2)} = \text{Cov}(Z_1, Z_2) =$

$E(Z_1 \cdot Z_2)$, mert $\sigma(Z_1) = \sigma(Z_2) = 1$ és $E(Z_1) = E(Z_2) = 0$.

Rajzoljuk fel a felületet $\rho = 0.5$ esetén!

> plot3d(f[Z1, Z2](x, y, 0.5), x = -3..3, y = -3..3, axes = frame, labels = ["z1", "z2", "f"]);



Igazoljuk, hogy a sűrűségfüggvény felülete alatti térfogat 1 lesz tetszőleges $\rho=r \in (-1,1)$ közötti korrelációs együtthatóra.

> $\text{Int}(\text{Int}(f[Z1, Z2](x, y, r), x = -\infty.. \infty), y = -\infty.. \infty) =$
 $\text{simplify}(\text{int}(\text{int}(f[Z1, Z2](x, y, r), x = -\infty.. \infty), y = -\infty.. \infty))$ assuming $(-1 < r)$ and $(r < 1)$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{x^2 - 2rxy + y^2}{-2r^2 + 2}}}{\pi \sqrt{1 - r^2}} dx dy = 1 \quad (1.8.22)$$

Mutassuk meg, hogy a Z_1 perem eloszlásának $f_{Z_1}(x)$ sűrűségfüggvénye $N(0,1)$ normál eloszlású lesz és a szimmetria miatt Z_2 eloszlása is ugyanilyen.

> $f[Z1](x) = \text{simplify}(\text{int}(f[Z1, Z2](x, y, \rho), y = -\infty.. \infty))$ assuming $(-1 < \rho)$ and $(\rho < 1)$

$$f_{Z1}(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2} \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \quad (1.8.23)$$

Mivel x-ben és y-ban szimmetrikus a képlet, ezért az Z_2 változó peremeloszlása is $N(0,1)$.

A Z_1 és Z_2 korrelációs együtthatója $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)}$ = /mivel $\sigma(X) = \sigma(Y) = 1$ /= $\text{Cov}(X, Y) =$

$E(XY) - E(X) E(Y)$ = /mivel $E(X) = E(Y) = 0$ /= $E(XY)$.

Számoljuk ki az $X \cdot Y$ várható értékét!

> $E(X \cdot Y) = \text{simplify}(\text{int}(\text{int}(x \cdot y \cdot f[Z1, Z2](x, y, \rho), x = -\infty.. \infty), y = -\infty.. \infty))$ assuming $-1 < \rho$ and $\rho < 1$;

$$E(X \cdot Y) = \rho \quad (1.8.24)$$

Tehát a korrelációs együttható valóban a ρ paraméter!

11.8.5. DEFINÍCIÓ. KÉT VÁLTOZÓ EGYÜTTES ELOSZLÁSA NORMÁL

Az X és Y folytonos változók együttes eloszlása normál, ha együttes sűrűség függvényük

$$f_{XY}(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}},$$

ahol $\rho \in (-1, 1)$ az X és Y változók korrelációs együtthatója.

11.8.6. Kétdimenziós exponenciális eloszlás

A kétdimenziós **exponenciális** eloszlás együttes sűrűség függvényét több különböző módon definiálhatjuk.

Egy egyszerű lehetséges mód két független exponenciális eloszlás sűrűségfüggvényeinek szorzatával számolni. (lásd 11. 4.7. példa)

Nem független esetben az alábbi Gumbel-által talált együttes sűrűségfüggvénnyel lehet megadni

$f_{XY}(x, y) = ((1 - \theta) \cdot a \cdot b + \theta \cdot a^2 \cdot b \cdot x + \theta \cdot a \cdot b^2 \cdot y + \theta^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot x \cdot y) e^{-a \cdot x - b \cdot y - a \cdot b \cdot \theta \cdot x \cdot y}$
ha $x > 0$ és $y > 0$!

A paraméterekre teljesüljenek a $0 < \theta < 1$, $a > 0$ és $b > 0$ feltételek!

> **restart :**

assume($0 < \theta$ and $\theta < 1$, $a > 0$, $b > 0$) :

$S := (x, y) \rightarrow \exp(-(a \cdot x + b \cdot y + a \cdot b \cdot \theta \cdot x \cdot y))$:

$f := \text{unapply}(\text{piecewise}(x \leq 0 \text{ or } y \leq 0, 0, ((1 - \theta) \cdot a \cdot b + \theta \cdot a^2 \cdot b \cdot x + \theta \cdot a \cdot b^2 \cdot y + \theta^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot x \cdot y) \cdot S(x, y)), x, y)$:

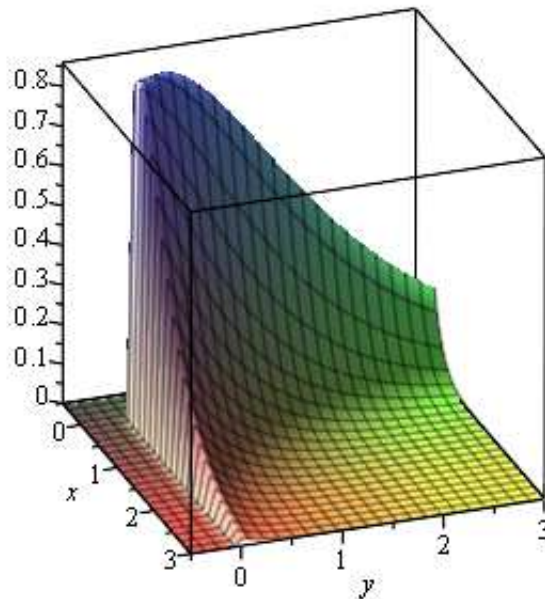
$f(x, y)$;

$$\begin{cases} 0 & x \leq 0 \text{ or } y \leq 0 \\ ((1 - \theta) a b + \theta a^2 b x + \theta a b^2 y + \theta^2 a^2 b^2 x y) e^{-a x - b y - a b \theta x y} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Felrajzoljuk az együttes sűrűség függvény grafikonját $a = 2$, $b = 1$ és $\theta = 0.6$ paraméterekre.

> **plot3d**(**subs**($\theta = 0.6$, $a = 2$, $b = 1$, $f(x, y)$), $x = -0.5..3$, $y = -0.5..3$, **axes = boxed**, **title = Két dimenziós exponenciális eloszlás együttes sűrűség függvénye**, **orientation = [-20, 65]**)

Két dimenziós exponenciális eloszlás együttes sűrűség függvénye



A sűrűség függvény alatti térfogat 1.

> $\text{Int}(\text{Int}(f(x, y), x=0.. \infty), y=0.. \infty) = \text{int}\left(\text{int}\left(\left((1-\theta) \cdot a \cdot b + \theta \cdot a^2 \cdot b \cdot x + \theta \cdot a \cdot b^2 \cdot y + \theta^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot x \cdot y\right) \cdot \exp(-a \cdot x - b \cdot y - a \cdot b \cdot \theta \cdot x \cdot y), x=0.. \infty\right), y=0.. \infty\right);$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \leq 0 \text{ or } y \leq 0 \\ ((1-\theta) a b + \theta a^2 b x + \theta a b^2 y + \theta^2 a^2 b^2 x y) e^{-a x - b y - a b \theta x y} & \text{otherwise} \end{array} \right. dx dy = 1$$

A perem sűrűség függvények **egy dimenziós exponenciális eloszlásúak** és a sűrűség függvényeik paramétere "a" illetve "b"!

> $f1[X] := \text{simplify}(\text{int}(f(x, y), y=0.. \infty)) \text{ assuming } (x > 0);$
 $f2[Y] := \text{simplify}(\text{int}(f(x, y), x=0.. \infty)) \text{ assuming } (y > 0);$

$$f1_X := a e^{-a x}$$

$$f2_Y := b e^{-b y}$$

(1.8.27)

Ennek megfelelően a perem eloszlások várható értékei $\frac{1}{a}$ és $\frac{1}{b}$.

> $E(X), E(Y) := \text{int}(f1[X] \cdot x, x=0.. \infty), \text{int}(f2[Y] \cdot y, y=0.. \infty);$

$$E(X), E(Y) := \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$$

(1.8.28)

Számítsuk ki X és Y kovarianciáját lépésenként! Előbb az $X \cdot Y$ szorzat várható értékét számoljuk,

majd a kovarianciát!

$$> (E(XY)) := \int_0^\infty \int_0^\infty xy \left((1-\theta)ab + \theta a^2bx + \theta ab^2y + \theta^2 a^2b^2xy \right) S(x,y) dx dy$$

$$E(XY) := \frac{e^{\frac{1}{\theta}} \text{Ei}\left(1, \frac{1}{\theta}\right)}{\theta a b} \quad (1.8.29)$$

$$> \text{Cov} := E(XY) - E(X) \cdot E(Y);$$

$$\text{Cov} := \frac{e^{\frac{1}{\theta}} \text{Ei}\left(1, \frac{1}{\theta}\right)}{\theta a b} - \frac{1}{a b} \quad (1.8.30)$$

a kovarianciát az $\text{Ei}(a, z) = \int_1^\infty e^{-z \cdot t} t^{-a} dt$ exponenciális integrál függvény segítségével lehet megadni, ahol $z > 0$.

Mivel X szórása $\frac{1}{a}$ és Y szórása $\frac{1}{b}$, ezért a korrelációs együttható nem függ az "a" és "b" paramétereiktől, csak θ -tól!

$$\begin{aligned} > s1 := \sqrt{\text{int}\left((x-E(X))^2 \cdot f1[X], x=0..\infty\right)}; \\ & s2 := \sqrt{\text{int}\left((y-E(Y))^2 \cdot f2[Y], y=0..\infty\right)}; \\ & \text{rho} := \frac{\text{Cov}}{s1 \cdot s2} : \text{simplify}(\%); \end{aligned}$$

$$s1 := \frac{1}{a}$$

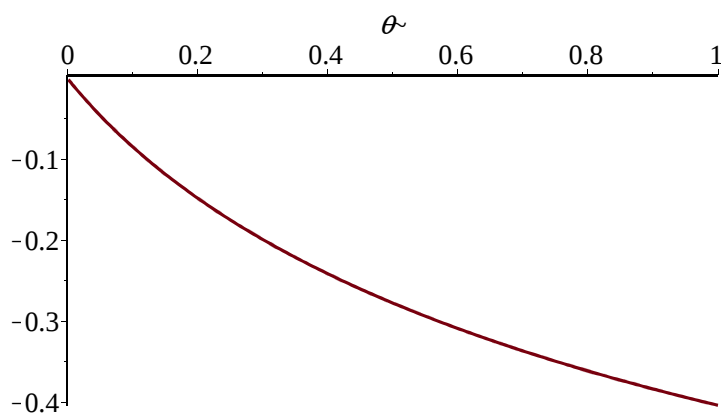
$$s2 := \frac{1}{b}$$

$$\frac{e^{\frac{1}{\theta}} \text{Ei}\left(1, \frac{1}{\theta}\right) - \theta}{\theta} \quad (1.8.31)$$

Rajzoljuk fel a korrelációs együttható változását a θ paraméter változásában és keressük a határértékét $\theta=0$ helyen!

$$> \text{plot}(\text{rho}, \text{theta} = 0..1);$$

$$> \text{Limit}(\text{simplify}(\text{rho}), \text{theta} = 0) = \text{limit}(\text{rho}, \text{theta} = 0);$$



$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{\theta}} \operatorname{Ei}\left(1, \frac{1}{\theta}\right) - \theta}{\theta} = 0 \quad (1.8.32)$$

▼ 11.9. Elméleti ellenőrző kérdések

- 11.9.1. Hogyan értelmezzük két változó együttes eloszlásfüggvényét?
- 11.9.2. Hogyan értelmezzük két változó perem eloszlásfüggvényeit?
- 11.9.3. Milyen tulajdonságait tudja felsorolni az együttes eloszlás függvénynek?
- 11.9.4. Hogyan tudjuk kiszámolni az $(X, Y) \in T$ vektorváltozó T téglalapba esés valószínűségét?
- 11.9.5. Milyen részekből áll az (X, Y) változók diszkrét együttes eloszlás mátrixa?
- 11.9.6. Milyen összefüggés van a folytonos vektor változó együttes eloszlás függvénye és az együttes sűrűség függvénye között?
- 11.9.7. Milyen kapcsolat van a perem sűrűség függvények és az együttes sűrűség függvények között?
- 11.9.8. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az együttes sűrűség függvény?
- 11.9.9. Hogyan értelmezzük az X diszkrét változó $f_{X|Y}(x|y)$ feltételes eloszlását az Y diszkrét változóra nézve?
- 11.9.10. Hogyan számoljuk az X diszkrét változó $P(X|Y=y_j)$ feltételes eloszlását az Y változó y_j értékére nézve?
- 11.9.11. Hogyan számoljuk az X folytonos változó $F_{X|Y}(x|y)$ feltételes eloszlás függvényét az Y folytonos változóra nézve?
- 11.9.12. Hogyan számoljuk az X folytonos változó $f_{X|Y}(x|y)$ feltételes sűrűség függvényét az Y folytonos változóra nézve?
- 11.9.13. Mit mond ki a szorzás-szabály folytonos eloszlásokra?
- 11.9.14. Mit mond ki a teljes valószínűség-tétel folytonos eloszlásokra vonatkozó állítása?
- 11.9.15. Mit mond ki a Bayes-tétel folytonos eloszlásokra vonatkozó állítása?
- 11.9.16. Hogyan számoljuk a folytonos X változó folytonos Y változóra vonatkozó $E(X|Y)$ feltételes várható értékét?
- 11.9.17. Milyen feltételek mellett lesz az X és Y diszkrét eloszlás egymástól független?
- 11.9.18. Milyen feltételek mellett lesz az X és Y folytonos eloszlás egymástól független?
- 11.9.19. Hogyan értelmezzük a polinomiális eloszlást?
- 11.9.20. Hogyan értelmezzük a két dimenziós normál eloszlás együttes sűrűség függvényét, melynek korrelációs együtthatója R ?

11.9.21. Hogyan értelmezzük a két dimenziós exponenciális eloszlás együttes sűrűség függvényét Gumbel-alapján, melynek korrelációs együtthatója R?

▼ 11.10. Gyakorló feladatok

11.10.1. feladat

Az X és Y diszkrét valószínűségi változók lehetséges értékei, az f_{XY} együttes eloszlás értékei a következők!

$$X := [1, 2, 3]; Y := [-1, 0, 1]; f_{XY} := \text{Matrix}\left(3, 3, \left[\left[\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{12}\right], \left[\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, 0\right], \left[0, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right]\right]\right)$$

Határozzuk meg

- (a) X és Y perem eloszlását!
- (b) Készítsük el az együttes-, és a perem eloszlásfüggvényeket
- (c) Ábrázoljuk az együttes eloszlást, együttes eloszlásfüggvényt, perem eloszlást és a perem eloszlásfüggvényeket!
- (d) Számítsuk ki a $P(Y < X)$ valószínűséget!

11.10.2. feladat

Az X és Y diszkrét valószínűségi változók lehetséges értékei, az f_{XY} együttes eloszlás értékei a következők!

$$X := [0, 1, 2]; Y := [0, 1, 2];$$

$$f_{XY} := \text{Matrix}\left(3, 3, \left[\left[0, \frac{3}{45}, \frac{3}{45}\right], \left[\frac{2}{45}, \frac{10}{45}, \frac{12}{45}\right], \left[\frac{1}{45}, \frac{8}{45}, \frac{6}{45}\right]\right]\right)$$

Határozzuk meg

- (a) X és Y **perem eloszlását!**
- (b) Készítsük el az **együttes-**, és a **perem eloszlásfüggvényeket!**
- (c) **Ábrázoljuk** az együttes eloszlást, együttes eloszlásfüggvényt, perem eloszlást és a perem eloszlásfüggvényeket!

11.10.3. feladat

Feldobunk egy szabályos fém 10 és 20 Ft -os érmét egyszer. Legyen $X = 1$, ha a 10 Ft-os írásra esik, egyébként 0. Legyen $Y = 1$, ha a 20 Ft-os írásra esik, egyébként 0.

Készítsük el

- (a) X és Y **együttes eloszlását!**
- (b) X és Y **perem eloszlását!**
- (c) X és Y **együttes-**, és a **perem eloszlásfüggvényeket!**
- (d) **Ábrázoljuk** az együttes eloszlást, együttes eloszlásfüggvényt, perem eloszlást és a perem eloszlásfüggvényeket!

11.10.4. feladat

Mutassuk meg, hogy a $f_{XY} = \frac{e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}}{2\pi}$ függvény lehet egy (X, Y) valószínűségi vektorváltozó

együttes sűrűségfüggvénye!

- (a) Számítsuk ki a perem sűrűségfüggvényeket!
- (b) Számítsuk ki az eloszlásfüggvényeket és a perem eloszlásfüggvényeket!
- (c) Ábrázoljuk a függvényeket!

11.10.5. feladat

Egy kisebb cég 100 Web oldala közül 60 oldal kevés, 30 oldal mérsékelten sok és 10 oldal sok grafikát tartalmaz. Egy 4 oldalas mintát választunk ki véletlenszerűen visszatevés nélkül a 100 oldal közül. Jelölje X a mérsékelten sok grafikát tartalmazó oldalak számát a 4 kiválasztott minta oldal között, míg Y a sok grafikát tartalmazó oldalak számát.

Határozzuk meg

- (a) az $f_{XY}(x, y)$ együttes eloszlást;
- (b) az $f_X(x)$ és $f_Y(y)$ peremeloszlásokat;
- (c) az $E(X)$ várható értéket;
- (d) az $f_{Y|X=3}(y)$ Y feltételes eloszlását az $X=3$ feltételre vonatkozóan;
- (e) az $E(Y | X=3)$ Y feltételes várható értékét az $X=3$ feltételre;
- (f) a $\text{Var}(Y | X=3)$ feltételes varianciát az $X=3$ feltételre;
- (g) Független-e az X és Y változó?

11.10.6. feladat

Tekintsük a $T = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ egység oldalú négyzetet a síkon! Válasszunk ki egy pontot a négyzet belsejében véletlenszerűen. Legyen X a pont abszcisszája és Y az ordinátája! Tekintsük az (X, Y) valószínűségi vektorváltozót!

- (a) Határozzuk meg az együttes eloszlásfüggvényt és ábrázoljuk!
- (b) Származtassuk az perem-eloszlásfüggvényeket és ábrázoljuk!
- (c) Határozzuk meg az együttes sűrűségfüggvényt és a perem-sűrűségfüggvényeket!

11.10.7. feladat

Legyen az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(x + y + x \cdot y), & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

- (a) Igazoljuk, hogy f valóban lehet együttes sűrűségfüggvény!
- (b) Határozzuk meg a perem-sűrűségfüggvényeket!
- (c) Határozzuk meg az együttes eloszlásfüggvényt és a perem-eloszlásfüggvényeket!
- (d) Ábrázoljuk a kapott függvényeket!
- (e) Függetlenek-e az X és Y változók? Adjuk meg és rajzoljuk fel az Y változó X-re vonatkozó feltételes sűrűség függvényt, az $f_{Y|X}(x, y)$ függvényt!

11.10.8. feladat

Legyen az (X, Y) diszkrét valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlása a következő táblázattal adva!

Diszkrét valószínűségi változók együttes valószínűségei		Y valószínűségi változó értékei		
		0	1	2
X valószínűségi változó értékei	0	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
	1	$\frac{2}{45}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{15}$
	2	$\frac{1}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{2}{15}$

- (a) Számítsuk ki a perem eloszlásokat!
- (b) Számítsuk ki az együttes eloszlásfüggvényt és a perem eloszlásfüggvényeket!

(c) Ábrázoljuk az eloszlásokat és az eloszlásfüggvényeket!

11.10.9. feladat

Két szabályos kockát dobunk fel. Jelentse X a 6-os dobások számát, és Y a páros dobások számát!

(a) Határozzuk meg (X, Y) együttes eloszlását!

(b) Számítsuk ki a perem eloszlásokat!

(c) Számítsuk ki az együttes eloszlásfüggvényt, perem eloszlásfüggvényeket!

(d) Ábrázoljuk az eloszlásokat és az eloszlásfüggvényeket!

11.10.10. feladat

Legyen az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlásfüggvénye

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x}) \cdot (1 - e^{-y}), & \text{ha } x > 0 \text{ és } y > 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

a) Határozzuk meg a perem-eloszlásfüggvényeket!

(b) Határozzuk meg az együttes sűrűségfüggvényt és a perem-sűrűségfüggvényeket!

(c) Ábrázoljuk a kapott függvényeket!

11.10.11. feladat

Legyen az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{75}, & \text{ha } 0 < x < 5 \text{ és } 2 < y < 4 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

a) Határozzuk meg a perem-sűrűségfüggvényeket!

(b) Határozzuk meg az együttes eloszlásfüggvényt és a perem-eloszlásfüggvényeket!

(c) Ábrázoljuk a kapott függvényeket!

11.10.12. feladat

Két szabályos kockát feldobunk. Jelölje X az első dobás eredményét és Y a két dobás közül a nagyobbikat! Határozzuk meg és szemléltessük az együttes eloszlást és a perem eloszlásokat!

11.10.13. feladat

Ha az X és Y független, folytonos és egyenletes eloszlásúak a $[0, 1]$ intervallumon, akkor határozzuk meg a $Z = X + Y$ változó sűrűség függvényét!

11.10.14. feladat

Legyen az X és Y véletlen változók együttes sűrűség függvénye

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c \cdot e^{-(x+y)}, & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Határozzuk meg c értékét! Függetlenek-e az X és Y változók? Miért?

11.10.15. feladat

Legyen az X és Y véletlen változók együttes sűrűség függvénye

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} c \cdot e^{-(x+y)}, & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < x \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Határozzuk meg c értékét! Függetlenek-e az X és Y változók? Miért?

11.10.16. feladat

Legyen az X és Y véletlen változók együttes sűrűség függvénye

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{y}} \cdot e^{-y}}{y}, & \text{ha } 0 < x \text{ és } 0 < y \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Határozzuk meg az $P(X > 1|Y=y)$ feltételes valószínűséget!

11.10.17. feladat

Legyen X és Y független és exponenciális eloszlású rendre λ és μ paraméterrel.

- Adjuk meg X és Y együttes eloszlás- és sűrűségfüggvényét.
- Határozzuk meg $\min(X, Y)$ és $\max(X, Y)$ eloszlásfüggvényét.
- Mekkora a $P(X < Y)$ valószínűség?

11.10.18. feladat

Egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással választunk egy X és egy Y véletlen számot a $[0, 1]$ intervallumban, és legyen $U = \min(X, Y)$ és $V = \max(X, Y)$. Mind az (X, Y) , mind az (U, V) vektorváltozó esetében határozzuk meg

- a vektorváltozó eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét;
- a perem sűrűségfüggvényeket;
- a várható értékeket.

11.10.19. feladat

Egy forgalmas repülőtéren az érkező jet típusú repülőgépek leszállására 3 kifutópálya áll rendelkezésre.

Az esetek $p_1=2/9$ részében az 1. pálya szabad egy gép leszállásához, ugyanez a 2. kifutópályánál $p_2=1/6$ és a 3. kifutópályánál $p_3=11/18$.

- Mekkora a valószínűsége, hogy a következőkben érkező 6 repülőgép $n_1=2$, $n_2=1$ és $n_3=3$ eloszlásban tudnak leszállni a kifutó pályákra.
- Feltételezve, hogy a 6 repülőgép közül $n_1=2$ repülőgép száll le az 1. kifutópályára, milyen variációk fordulhatnak elő? Adja meg az összes variációt és határozza meg az előfordulásuk valószínűségeit! Melyik eset a legvalószínűbb? Rajzolja fel a valószínűségeket oszlop diagrammal!
- Feltételezve, hogy a 6 repülőgép közül $n_3=3$ repülőgép száll le a 3. kifutópályára, milyen variációk fordulhatnak elő? Adja meg az összes variációt és határozza meg az előfordulásuk valószínűségeit! Melyik eset a legvalószínűbb? Rajzolja fel a valószínűségeket oszlop diagrammal!

11.10.20. feladat

Mutassuk meg diszkrét esetben hogy, ha X és Y független valószínűségi változók, akkor

$$E(X|Y=y_i) = E(X) \text{ minden } y_i \text{ értékre.}$$

11.10.21. feladat

Legyen az X és Y folytonos valószínűségi változók együttes sűrűség függvénye

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{(y^2 - x^2)}{8} \cdot e^{-y}, & \text{ha } 0 < y, -y \leq x \leq y \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy ekkor $E(X|Y=y) = 0$.

11.10.22. feladat

Legyen az X és Y folytonos valószínűségi változók együttes sűrűség függvénye

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{y}} \cdot \frac{e^{-y}}{y}, & \text{ha } 0 < x, 0 < y \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy ekkor $E(X|Y=y)=y$.

11.10.23. feladat

Legyen az X exponenciális eloszlású $\frac{1}{\lambda}$ várható értékkel, azaz $f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{ha } 0 < x \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$.

Határozzuk meg az $E(X|X > 1)$ feltételes valószínűséget!

11.10.24. feladat

Gyakran a valószínűségi változók $f_{XY}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)$ szorzás-szabályát használva kiszámolhatjuk az együttes eloszlást, ha ismerjük X és az $Y|X=x$ feltételes eloszlást. Majd az

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$ képlet alapján kiszámolhatjuk Y eloszlását.

Legyen az X változó sűrűség függvénye $f_X(x) = 2 \cdot x$, ha $0 < x < 1$. Az $X = x$ feltétel mellett Y feltételes eloszlása $Y|x \sim \text{Uniform}(0, x)$ egyenletes.

(i) Határozzuk meg az $f_{XY}(x, y)$ együttes sűrűség függvényt!

(ii) Határozzuk meg az Y változó $f_Y(y)$ peremsűrűség függvényét!

11.10.25. feladat

Mutassuk meg, hogy a feltételes várható értékre teljesül az

$$E(E(Y|X)) = E(Y)$$

azonosság.

11.10.26. feladat

Kétféle módszert használnak bizonyos fajta papír árú felületi simaságának mérésére. A méréseket úgy rögzítik, mint a megadott felületi simasági értéktől való eltérést kódolt egységekben.

A kétféle mérés együttes eloszlásfüggvénye egyenletes eloszlású a

$$T = \{ (x; y) \mid 0 < x < 4, 0 < y \text{ és } x-1 < y < x+1 \}$$

tartományon.

Tehát az $f_{XY}(x, y) = c$ együttes sűrűségfüggvény konstans a fenti T tartományon és T-n kívül 0.

(a) Határozzuk meg a "c" konstans értékét úgy, hogy az $f_{XY}(x, y)$ kétváltozós függvény együttes sűrűségfüggvény legyen! Rajzoljuk fel az $f_{XY}(x, y)$ függvény grafikonját!

(b) Számítsuk ki a $P(X \leq 1, Y \leq 1)$ valószínűség értékét, az együttes sűrűségfüggvény alatti térfogat segítségével!

(c) Határozzuk meg X és Y perem változók sűrűségfüggvényeit! Rajzoljuk fel a sűrűségfüggvényeket!

(d) Számoljuk ki az X és Y változók kovarianciáját: $\text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$!

(e) Számoljuk ki X és Y változók korrelációs együtthatóját $R = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$!

11.10.27. feladat

Az autók kerékgumijainak állapotát és a fényszórók beállítását ellenőrzik a rendőrségi járőrök.

Jelölje X egy autó azon lámpáinak számát, amelyeken beállítási igazítást kellett végezni! X lehetséges értéke 0, 1 vagy 2.

Jelölje Y ugyanazon autó kerékgumijainak számát, amelyek nem feleltek meg az előírásoknak! Y lehetséges értéke 0, 1, 2, 3, vagy 4.

Az X és Y értékek tekinthetők véletlen változóknak, melyekre az alábbiak adódtak:

X eloszlása : $f_X(0) = 0.5$, $f_X(1) = 0.3$, $f_X(2) = 0.2$.

Y eloszlása: $f_Y(0) = 0.6$, $f_Y(1) = 0.1$, $f_Y(2) = f_Y(3) = 0.05$, $f_Y(4) = 0.2$.

Feltesszük, hogy X és Y változók függetlenek egymástól

(a) Adjuk meg az (X; Y) vektorváltozó együttes eloszlás mátrixát és rajzoljuk fel oszlop diagrammal!

(b) Számítsuk ki a $P(X \leq 1, Y \leq 1)$ valószínűség értékét, az együttes valószínűségi táblázatból és ellenőrizzük, hogy ez egyenlő a $P(X \leq 1) \cdot P(Y \leq 1)$ szorzattal!

(c) Mekkora a $P(X + Y = 2)$ valószínűség értéke? Mit jelent ez a valószínűség?

(d) Számítsuk ki $P(X + Y \leq 1)$ valószínűség értékét! Mit jelent ez a valószínűség?

11.10.28. feladat

Két szabályos kockát dobunk fel. Jelentse X a 6-os dobások számát, és Y a páros dobások számát!

(a) Határozzuk meg (X,Y) együttes eloszlását!

(b) Számítsuk ki a perem eloszlásokat!

(c) Számítsuk ki az együttes eloszlásfüggvényt, perem eloszlásfüggvényeket!

(d) Ábrázoljuk az eloszlásokat és az eloszlásfüggvényeket!

11.10.28. feladat

Legyen az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{75}, & 0 < x < 5, 2 < y < 4 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg a perem-sűrűségfüggvényeket!

(b) Határozzuk meg az együttes eloszlásfüggvényt és a perem-eloszlásfüggvényeket!

(c) Ábrázoljuk a kapott függvényeket!

11.10.29. feladat

A digitális információ adatátvittele során egy bit torzulásának mértéke 3 féle lehet: nagyon (N), mérsékelten (M) vagy kissé (K) torzult. Ezek valószínűségei rendre 0.01, 0.04 és 0.95. Tekintsünk 3 bit adatátvitelét és tegyük fel, hogy az egyes bitek adatátvittele és a torzulások mértékei függetlenek.

Jelölje X a 3 adatátviteli bit közül a nagyon (N) torzult üzenetek számát. Jelölje Y a 3 adatátviteli bit közül a mérsékelten (M) torzult üzenetek számát. Határozzuk meg az alábbiakat!

(a) Készítsük el az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását és rajzoljuk fel a matrixplot utasítással!

(b) Határozzuk meg X peremeloszlását! Milyen eloszlást kaptunk?

(c) Számítsuk ki X várható értékét és varianciáját!

(d) Határozzuk meg X feltételes eloszlását az $Y=2$ feltételre, majd ennek várható értékét és szórását!

(e) Független-e az X és Y?

11.10.30. feladat

A dobozban van 2 piros, 3 fehér és 4 kék golyó. A dobozból véletlenszerűen kihúzzunk 3 golyót. Legyen (X;Y) az a két dimenziós eloszlás, amelyben X jelöli a kihúzott 3 golyó közül a piros golyók számát és Y a fehér golyók számát.

(a) Adjuk meg az (X; Y) vektorváltozó együttes eloszlás mátrixát és rajzoljuk fel plotmatrix-szal!

(b) Számítsuk ki $P(X + Y \geq 2)$ valószínűség értékét! Mit jelent ez a valószínűség?

(c) Adjuk meg X és Y peremeloszlását!

(d) Független-e az X és Y változók egymástól!

11.10.31. feladat

Egy nagy bevásárló központ ajándék csomagoló osztálya előtt várakozók X száma véletlen változó, melynek lehetséges értéke $X = 0, 1, 2, 3$ vagy 4, amelyek valószínűségei rendre 0.1, 0.2, 0.3, 0.25 és 0.15.

Egy véletlenül kiválasztott vásárló, aki csomagolásra várakozik vagy $Y=1$, vagy 2 vagy 3 csomagot szeretne becsomagoltatni rendre 0.6, 0.3 és 0.1 valószínűséggel. Vagyis Y azon csomagok száma, amelyet egy véletlenül kiválasztott sorban álló vásárló csomagoltatni szeretne. Tegyük fel, hogy a csomagok Y száma függetlenül alakul az egyes sorban állók között.

(a) Adjuk meg az $(X; Y)$ vektorváltozó együttes eloszlás mátrixát és rajzoljuk fel oszlop diagrammal!

(b) Számítsuk ki a $P(X \leq 3, Y \leq 2)$ valószínűség értékét, az együttes valószínűségi táblázatból és ellenőrizzük, hogy ez egyenlő a szorzattal!

(c) Számítsuk ki $P(X + Y > 5)$ valószínűség értékét! Mit jelent ez a valószínűség?

(d) Számítsuk ki az $(X; Y)$ együttes várható értékét és X illetve Y várható értékét külön-külön! Milyen kapcsolat van a három várható érték között?

11.10.32. feladat

Egy gyakorlati képzés során az oktató rövid megoldandó feladatot ad fel, amely két részből áll: egy elméleti és egy gyakorlati részből.

Jelölje X az elméleti részben szerzett pontszámot, melynek értéke lehet 0, 5 vagy 10 pont.

Jelölje Y a gyakorlati részben szerzett pontszámot, melynek értéke lehet 0, 5, 10 vagy 15 pont.

Azt tapasztalta, hogy az X változó egyes értékeinek előfordulási valószínűségei : 0.2, 0.45, 0.35.

Az Y változó egyes értékeihez tartozó előfordulási valószínűségek : 0.07, 0.35, 0.38., 0.2.

Tegyük fel, hogy az első és második részben szerzett pontszámok egymástól függetlennek tekinthetők.

(a) Adjuk meg az $(X; Y)$ vektorváltozó együttes eloszlás mátrixát és rajzoljuk fel oszlop diagrammal!

(b) Számítsuk ki a $P(X \leq 5, Y \leq 10)$ valószínűség értékét, az együttes valószínűségi táblázatból és ellenőrizzük, hogy ez egyenlő a $P(X \leq 5) \cdot P(Y \leq 10)$ szorzattal!

(c) Számítsuk ki $P(X + Y > 10)$ valószínűség értékét! Mit jelent ez a valószínűség?

(d) Számítsuk ki az $X \cdot Y$ várható értékét és X illetve Y várható értékét külön-külön! Milyen kapcsolat van a három várható érték között?

11.10.33. feladat

Legyen $f(x, y) = x e^{-y}$ az $0 < x < y$ tartományon és egyébként $f(x, y)$ értéke nulla!

(a) Mutassuk meg, hogy az $f(x, y)$ függvény valóban egy $(X; Y)$ vektorváltozó együttes sűrűség függvénye! Rajzoljuk fel az együttes sűrűség függvényt!

(b) Számítsuk ki a $P(X > 2, Y < 3)$ valószínűség értékét!

(c) Adjuk meg X és Y peremeloszlások sűrűség függvényét! Rajzoljuk fel a peremsűrűség függvényeket!

(d) Rajzoljuk fel az Y változó $f_{Y|X}(x, y)$ feltételes sűrűség függvényét X -re vonatkozóan animációval!

(e) Számoljuk ki az Y változó X -re vonatkozó feltételes várható értékét!

11.10.34. feladat

Legyen az X és Y valószínűségi változó együttes eloszlása a következő

$P(X = 1, Y = 0) = P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0, Y = 1) = P(X = -1, Y = 0) = \frac{1}{4}$ és

$P(X = 1, Y = 1) = P(X = -1, Y = 1) = 0$.

(a) Határozzuk meg az X és Y változók peremeloszlását.

(b) Mutassuk meg, hogy $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$, mégis X és Y **nem** függetlenek.

11.10.35. feladat

Az X valószínűségi változó eloszlása adott a $P(X=1) = \frac{1}{3}$ és $P(X=2) = \frac{2}{3}$ valószínűségekkel. Egy

másik Y valószínűségi változó függ X -től a következő módon: ha $X=1$, akkor Y felveszi a 0, 1, 2 értékeket rendre $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ valószínűségekkel; ha $X=2$, akkor Y felveszi az 1, 2, 3 értékeket

rendre $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ valószínűségekkel.

- (a) Adja meg az $(X; Y)$ diszkrét vektorváltozó együttes eloszlásának táblázatát!
- (b) Határozza meg az Y változó perem eloszlását!
- (c) Határozza meg az X változó feltételes eloszlását az $Y=1$ feltételre!

11.10.36. feladat

A dobozban van 2 piros, 3 fehér és 4 kék golyó. A dobozból véletlenszerűen kihúzzunk 3 golyót. Legyen $(X; Y)$ az a két dimenziós eloszlás, amelyben X jelöli a kihúzott 3 golyó közül a piros golyók számát és Y a fehér golyók számát.

- (a) Adjuk meg az $(X; Y)$ vektorváltozó együttes eloszlás mátrixát és rajzoljuk fel plotmatrix-szal! (4 pont)
- (b) Számítsuk ki $P(X+Y \geq 2)$ valószínűség értékét! Mit jelent ez a valószínűség?
- (c) Adjuk meg X és Y peremeloszlását!
- (d) Függetlenek-e az X és Y változók egymástól!

11.10.37. feladat

Egy nagy városba vezető forgalmas úton átlagosan 10 percenként reggelente 3 autó megy befelé a városba és átlagosan 2 autó hagyja el a várost.

A 10 perc alatt beérkező autók X száma és a várost elhagyó autók Y száma modellezhető független Poisson-eloszlásokkal.

- (a) Rajzoljuk fel az X beérkező és Y távozó autók $P(X = n)$ és $P(Y = n)$ valószínűségi eloszlásait $n=0,1,2,3,\dots,10$ értékekre!
- (b) Melyik valószínűség nagyobb: 10 perc alatt nem érkezik befelé egy autó sem, vagy 10 perc alatt nem hagyja el a várost egy autó sem: azaz $P(X=0)$ vagy $P(Y=0)$?
- (c) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy valamely 10 perc alatt egyik irányba sincs mozgás!
- (d) Mekkora annak valószínűsége, hogy 10 alatt összesen maximum 3 autó halad át az úton?
- (e) Rajzoljuk fel az X és Y autókra a $P(X \leq n)$ és $P(Y \leq n)$ eloszlás függvényeket $n=0,1,2,3,\dots,10$ értékekre, amelyek a 10 perc alatt legfeljebb " n " áthaladás valószínűségei az egyes irányokba! Melyik lépcsős függvény értékei nagyobbak!
- (f) Mekkora a valószínűsége, hogy egy 1 óra alatt 40-nél több autó halad el összesen az úton?

11.10.38. feladat

Tekintsük az $f(x, y) = c \cdot x \cdot y$ kétváltozós függvényt $0 < x < 3$ és $0 < y < x$ háromszögben és legyen $f(x, y)$ értéke nulla, egyébként!

- (a) Határozzuk meg " c " értékét úgy, hogy az $f(x, y)$ függvény valamely $(X; Y)$ valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűség függvénye legyen! Rajzoljuk fel az együttes sűrűségfüggvényt!
- (b) Számítsuk ki a $P(X < 2, Y < 1)$ valószínűség értékét!
- (c) Adjuk meg az X és az Y peremeloszlások sűrűség függvényét! Rajzoljuk fel a sűrűség függvényeket!
- (d) Számítsuk ki a $\text{Cov}(X, Y)$ kovariancia értékét!
- (e) Függetlenek-e egymástól az X és Y változók?

11.10.39. feladat

Tekintsük az $f(x, y) = c \cdot (x + y)$ kétváltozós függvényt $0 < x < 3$ és $0 < y < x$ háromszögben és legyen $f(x, y)$ értéke nulla, egyébként!

- (a) Határozzuk meg " c " értékét úgy, hogy az $f(x, y)$ függvény valamely $(X; Y)$ valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűség függvénye legyen! Rajzoljuk fel az együttes sűrűségfüggvényt!
- (b) Számítsuk ki a $P(X < 2, Y < 1)$ valószínűség értékét!
- (c) Adjuk meg az X és az Y peremeloszlások sűrűség függvényét! Rajzoljuk fel a sűrűség függvényeket!
- (d) Számítsuk ki a $\text{Cov}(X, Y)$ kovariancia értékét!
- (e) Függetlenek-e egymástól az X és Y változók?

11.10.40. feladat

Legyen $f(x, y) = c \cdot (x \cdot y - y)$ a $1 < x < 3$ és $0 < y < 3$ téglalapon és egyébként $f(x, y)$ értéke nulla!

- (a) Határozzuk meg "c" értékét úgy, hogy az $f(x,y)$ függvény valamely $(X; Y)$ valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűség függvénye legyen!
- (b) Számítsuk ki a $P(2 < X, Y < 2)$ valószínűség értékét!
- (c) Adjuk meg az X és Y peremeloszlások sűrűség függvényét! Rajzoljuk fel a sűrűség függvényeket!
- (d) Számítsuk ki a $\text{Cov}(X,Y)$ kovariancia értékét!
- (e) Függetlenek-e egymástól az X és Y változók?

11.10.41. feladat

Egy digitális adatátvitel során annak valószínűsége, hogy egy byte információ nagyon, mérsékelten vagy kis mértékben torzul rendre $p_1=0.01$, $p_2=0.1$ és $p_3=0.89$. Tegyük fel, hogy 3 byte információt küldünk át a csatornán, melyek torzulásának mértéke egymástól független. Jelölje X azon byte-k számát a 3-ból, amelyek nagyon torzultak és jelölje Y azon byte-k számát a 3-ból, amelyek mérsékelten torzultak.

- (a) Határozzuk meg az $f_{[XY]}(x,y)$ együttes eloszlás mátrixot!
- (b) Számítsuk ki a $P(1 < X, Y < 2)$ valószínűség értékét!
- (c) Adjuk meg az X perem eloszlást és rajzoljuk fel pálcika diagrammal!
- (d) Számítsuk ki az $E(Y|X=1)$ feltételes várható értéket!
- (e) Függetlenek-e egymástól az X és Y változók?

>