

▼ 12. Valószínűségi változók összegének eloszlása. Gamma-eloszlás és alkalmazása

Valószínűségszámítás és statisztika számítógép algebrai támogatással	Készült a PTE PMMIK és a TÁMOP -4.1.2.A/1-11/1-2011-0098 támogatásával
Klincsik Mihály	

▼ 12.1. Bevezetés

A valószínűségi változókkal végzett műveletek közül egyik legfontosabb az összegzés. A várható érték becslése során az átlagot használjuk, a gyakoriságoknál is összegzést végzünk, a nagy számok törvényében is valószínűségi változókat összegzünk, a centrális határeloszlásban is fontos helyet kap a valószínűségi változók összege. Keressük folytonos valószínűségi változók összegének eloszlás függvényét és sűrűség függvényét.

Célunk az alábbi fogalmak, összefüggések és eljárások megismerése, megértése	
Két folytonos változó összegének eloszlás függvénye az együttes sűrűség függvény ismeretében	Egyenletes eloszlás összegének eloszlása
Független változók összegének sűrűség függvénye	Gamma-eloszlás értelmezése
Két függvény konvolúciója	Khi-négyzet, mint speciális gamma eloszlás

▼ 12.1. Folytonos valószínűségi változók összegének eloszlása

12.1.1. Probléma

Ha adott az X_1 és X_2 folytonos valószínűségi változó, akkor határozzuk meg az $Y = X_1 + X_2$ összeg eloszlását, az együttes $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ sűrűség függvény ismeretében.

Kezdjük egy egyszerű példa Maple megoldásával.

12.1.2. PÉLDA. A [0,1] intervallumon független egyenletes eloszlások összege

Legyen $X_1 \sim \text{Uniform}(0, 1)$ és $X_2 \sim \text{Uniform}(0, 1)$ egyenletes eloszlású! Határozzuk meg az $Y = X_1 + X_2$ összeg eloszlását.

Megoldás

Vegyük fel a Statistics csomag segítségével az X_1 és X_2 [0,1] intervallumon egyenletes eloszlást.

Majd képezzük az $Y = X_1 + X_2$ összeget!

A Statistics csomag segítségével csak független változókat tudunk fel venni.

```
> restart :
> with(Statistics) :
> X1 := RandomVariable(Uniform(0, 1))
> X2 := RandomVariable(Uniform(0, 1))
X1 := _R
X2 := _R0
```

(1.2.1)

Képezzük az összeget

```
> Y := X1 + X2
Y := _R + _R0
```

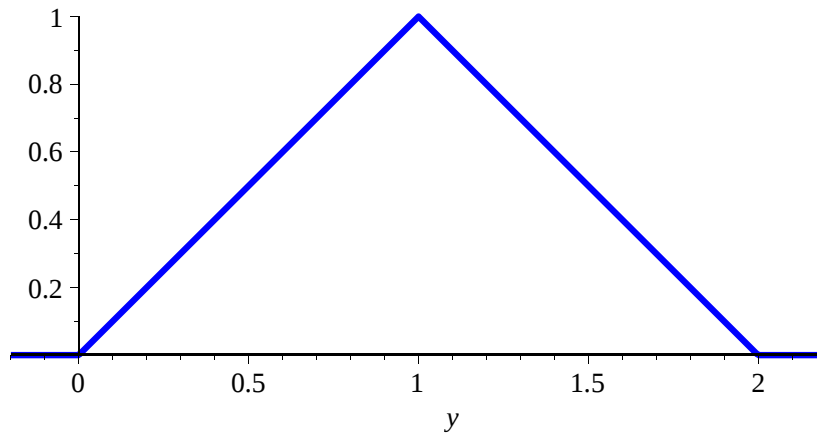
(1.2.2)

Az összeg sűrűség függvényének képletét megkapjuk a beépített PDF eljárással

> $fY := \text{unapply}(\text{PDF}(Y, y), y)$: Az összeg sűrűség függvénye = $fY(y)$

> $\text{plot}(fY(y), y = -0.2 \dots 2.2, \text{thickness} = 3, \text{scaling} = \text{constrained}, \text{color} = \text{blue})$

$$\text{Az összeg sűrűség függvénye} = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ y & 0 < y \leq 1 \\ 2 - y & 1 < y \leq 2 \\ 0 & 2 < y \end{cases}$$



A kapott sűrűség függvény egy háromszög eloszlás sűrűség függvénye, amely a Statistics csomagban "Triangular" néven beépített.

> $H := \text{Distribution}(\text{Triangular}(0, 2, 1))$

> $\text{PDF}(H, x); \text{plot}(\%, x = -0.2 \dots 2.2, \text{thickness} = 3, \text{scaling} = \text{constrained}, \text{color} = \text{red})$

$H := \text{module}()$

option *Distribution, Continuous;*

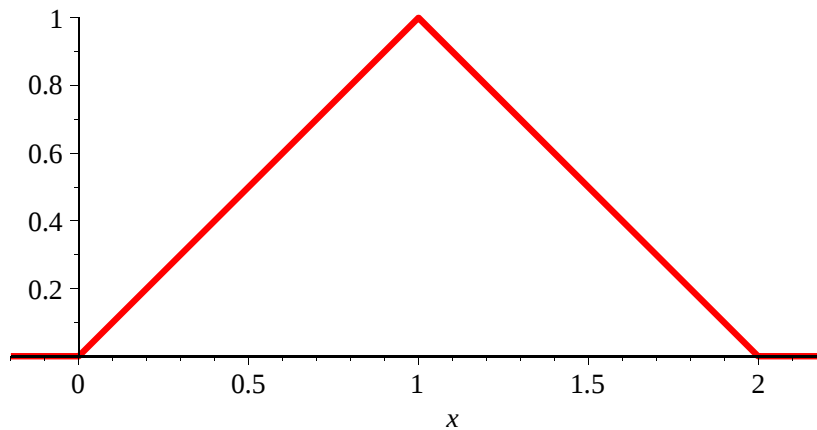
export *Conditions, ParentName, Parameters, CDF, Mean, Mode, PDF, Quantile,*

Support, Variance, CDFNumeric, QuantileNumeric, RandomSample,

RandomSampleSetup, RandomVariate;

end module

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \leq 1 \\ 2 - x & x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Hogyan kapjuk meg az összeg háromszög eloszlását a tagok egyenletes eloszlásából?

Általában az összeg $F_Y(y)$ eloszlás függvényét az $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ együttes sűrűség függvénynek a

$$T_y = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 < y \}$$

tartományon vett kettős integráljával számolható

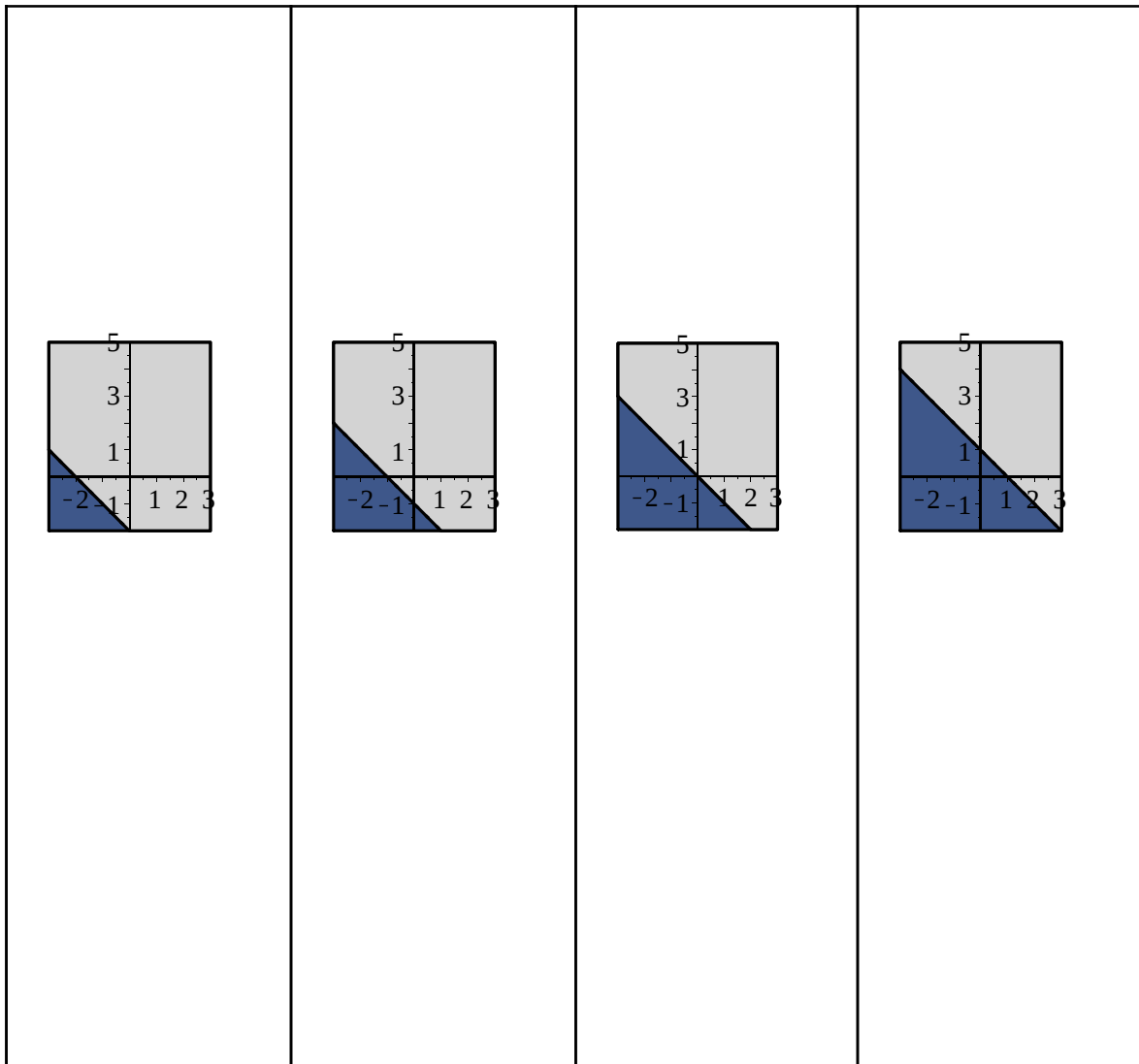
$$F_Y(y) = \int_T \int_{x_1 x_2} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2.$$

Rajzoljuk fel a T_y tartományt y -növekedésével!

> with(plots) :

> display(Matrix(1, 4, [seq(inequal({ $x_1 + x_2 < y$ }, $x_1 = -3 \dots 3$, $x_2 = -2 \dots 5$, scaling

$= \text{constrained}), y = -2 \dots 1)]))$



A külső integrál az $-\infty < x_2 < \infty$ intervallumon tetszőleges. Ha rögzítettük az x_2 értékét valahol, akkor a tartomány belsejében úgy leszünk, ha a belső integrál határai $-\infty < x_1 \leq y - x_2$ között változik. Tehát

$$T_y = \{ (x_1, x_2) \mid -\infty < x_1 < y - x_2, -\infty < x_2 < \infty \}.$$

Így az integrál felírható

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y-x_2} f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Deriváljuk y -szerint, hogy megkapjuk a Y összeg változó sűrűség függvényét

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1 X_2}(y - x_2, x_2) dx_2$$

ahol a deriválást és a külső integrálás sorrendjét megcseréltük és alkalmaztuk a felső határ függvény deriválásáról szóló tételt.

Mivel független változók együttes sűrűség függvénye a sűrűség függvények szorzata, ezért

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$$

Írjuk ezt be Y sűrűség függvényének képletébe

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y-x_2) \cdot f_{X_2}(x_2) dx_2$$

12.2.3. DEFINÍCIÓ. Konvolúció

Az $f_{X_1}(x_1)$ és $f_{X_2}(x_2)$ függvények konvolúciója alatt az

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y-x_2) \cdot f_{X_2}(x_2) dx_2$$

integrállal definiált függvényt értjük és $f_Y = f_{X_1} * f_{X_2}$ jelölést használjuk.

12.2.4. TÉTEL. Független változók összegének sűrűség függvényét konvolúcióval kapjuk

Ha az X_1 és X_2 folytonos valószínűségi változók függetlenek, akkor az $Y = X_1 + X_2$ összeg változó $f_Y(y)$ sűrűség függvénye

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y-x_2) \cdot f_{X_2}(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_2}(y-x_2) \cdot f_{X_1}(x_2) dx_2$$

Kezdjük előlről a példa megoldását! Adjuk meg az egyenletes eloszlások sűrűség függvényeit és képezzük ezek konvolúciós integrálját!

12.2.5. PÉLDA. Konvolúció számítás

Számoljuk ki az $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűség függvényének önmagával vett konvolúcióját!

> $fX1 := \text{unapply}(\text{PDF}(X1, x), x) : fX1'(x) = fX1(x)$

> $fX2 := \text{unapply}(\text{PDF}(X2, x), x) : fX2'(x) = fX2(x)$

$$fX1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$fX2(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1.2.3)

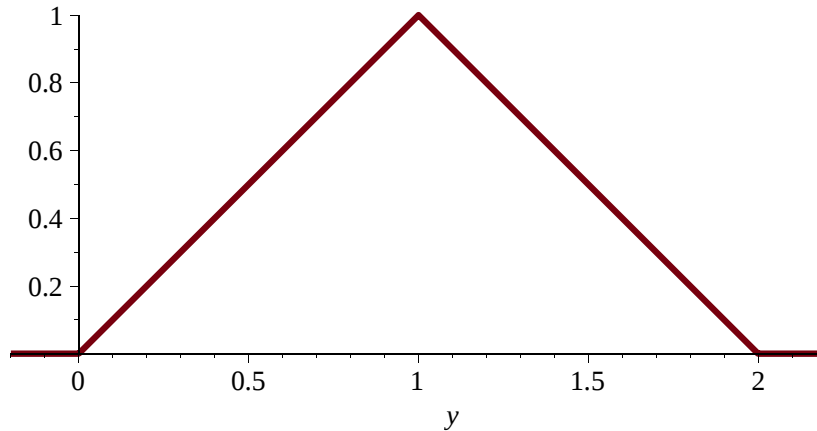
> $\text{konvolúció} := \text{unapply}\left(\int_{-\infty}^{\infty} fX1(y-u) fX2(u) du, y\right); fY(y)$

$\text{konvolúció} := y \rightarrow \text{piecewise}(y < 0, 0, y < 1, y, y < 2, 2-y, 2 \leq y, 0)$

$$\begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ y & 0 < y \leq 1 \\ 2-y & 1 < y \leq 2 \\ 0 & 2 < y \end{cases}$$

(1.2.4)

> $\text{plot}(\text{konvolúció}(y), y = -0.2 .. 2.2, \text{thickness} = 3, \text{scaling} = \text{constrained})$



Megkaptuk konvolúcióval a háromszög eloszlást.

▼ 12.2. Folytonos valószínűségi változók átlaga

Ha az X folytonos valószínűségi változó $Y = a \cdot X$ pozitív a konstanszorosát vesszük, akkor

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(a \cdot X < y) = P\left(X < \frac{y}{a}\right) = F_X\left(\frac{y}{a}\right). \quad (a > 0)$$

összefüggés teljesül X és Y eloszlás függvényei között.

Ha deriváljuk az eloszlás függvényt, akkor a változó sűrűség függvényét kapjuk. Ezért

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot f_X\left(\frac{y}{a}\right) \quad (a > 0)$$

összefüggés teljesül az X és Y sűrűség függvényei között.

Így igazoltuk a következő tételt.

12.2.1. TÉTEL. Az $Y = a \cdot X$ transzformáció hatása az eloszlás függvényre és a sűrűség függvényre

Ha az X folytonos változó eloszlás függvénye $F_X(x)$ és sűrűség függvénye $f_X(x)$, akkor az $Y = a \cdot X$ ($a > 0$) pozitív konstansszoros változó eloszlás függvénye

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{a}\right)$$

és sűrűség függvénye

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} \cdot f_X\left(\frac{y}{a}\right)$$

képlettel számolható.

Legyen M_2 az X_1 és X_2 változók számtani közepe

$$M_2 = \frac{1}{2} \cdot (X_1 + X_2) = \frac{1}{2} \cdot S_2$$

Ha X_1 és X_2 független folytonos eloszlású, akkor az összegének sűrűség függvényét a tagok sűrűség függvényeinek konvolúciójával számolhatjuk. Ezért ennek $a = \frac{1}{2}$ -szeresének

> restart :

> with(Statistics) :

> X1 := RandomVariable(Uniform(0, 1)) :

> X2 := RandomVariable(Uniform(0, 1)) :

> S2 := X1 + X2

$$S2 := _R + _R0 \quad (1.3.1)$$

> M2 := $\frac{S2}{2}$

$$M2 := \frac{1}{2} _R + \frac{1}{2} _R0 \quad (1.3.2)$$

Density function of the mean

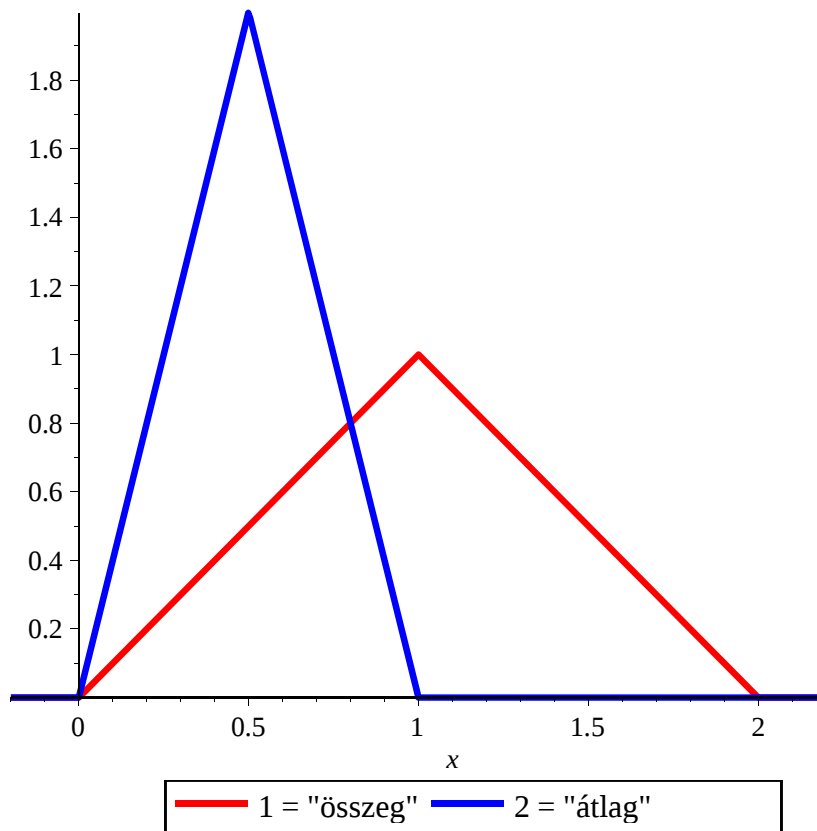
> dS2 := unapply(PDF(S2, x), x)

$$dS2 := x \rightarrow \text{piecewise}(x \leq 0, 0, x \leq 1, x, x \leq 2, 2 - x, 2 < x, 0) \quad (1.3.3)$$

> dM2 := unapply(PDF(M2, x), x)

$$dM2 := x \rightarrow \text{piecewise}\left(x \leq 0, 0, x \leq \frac{1}{2}, 4x, x \leq 1, 4 - 4x, 1 < x, 0\right) \quad (1.3.4)$$

> plot([dS2(x), dM2(x)], x = -0.2..2.2, color = [red, blue], thickness = 3, legend = [1 = "összeg", 2 = "átlag"])



Ellenőrizzük a $f_{M_2}(x) = 2 \cdot f_{S_2}(2 \cdot x)$ transzformációs képlet teljesülését!

> $dM2(x) = \text{simplify}(2 \cdot dS2(2 \cdot x))$

$$\begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 4x & x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - 4x & x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 4x & x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - 4x & x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$$

(1.3.5)

Folytassuk az összegzést három tagra.

> $X3 := \text{RandomVariable}(\text{Uniform}(0, 1))$

> $S3 := S2 + X3$

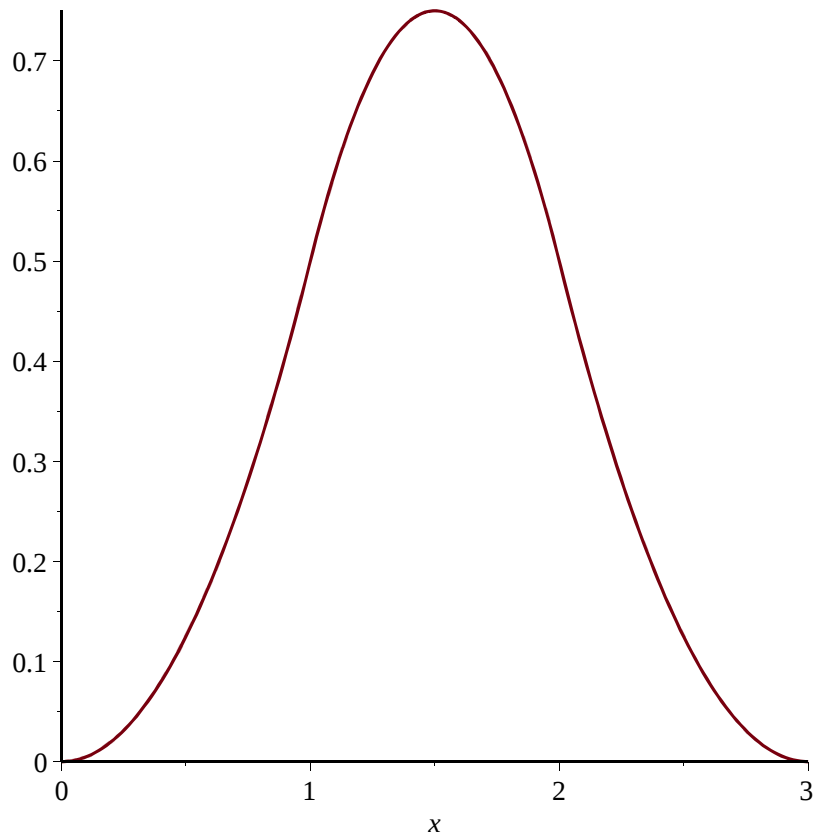
$X3 := _R3$

$S3 := _R + _R0 + _R3$

(1.3.6)

> $dS3 := \text{PDF}(S3, x); \text{grafS3} := \text{plot}(dS3, x = 0 \dots 3) : \text{grafS3}$

$$dS3 := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} x^2 & 0 < x \leq 1 \\ -\frac{3}{2} - x^2 + 3x & 1 < x \leq 2 \\ \frac{9}{2} - 3x + \frac{1}{2} x^2 & 2 < x \leq 3 \\ 0 & 3 < x \end{cases}$$



$$> M3 := \frac{S3}{3}$$

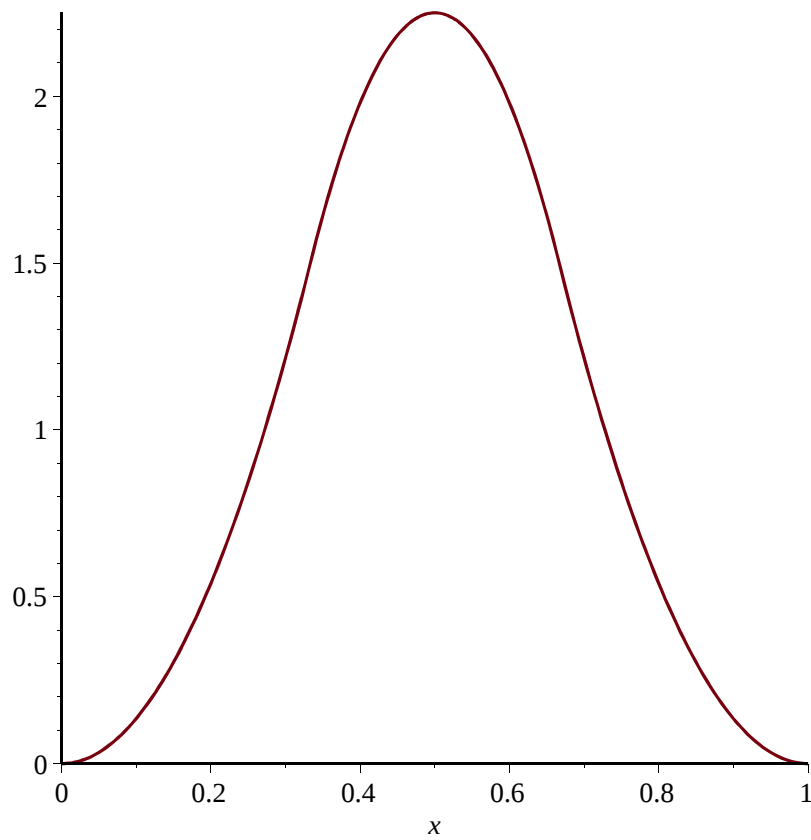
$$M3 := \frac{1}{3} _R + \frac{1}{3} _R0 + \frac{1}{3} _R3$$

(1.3.7)

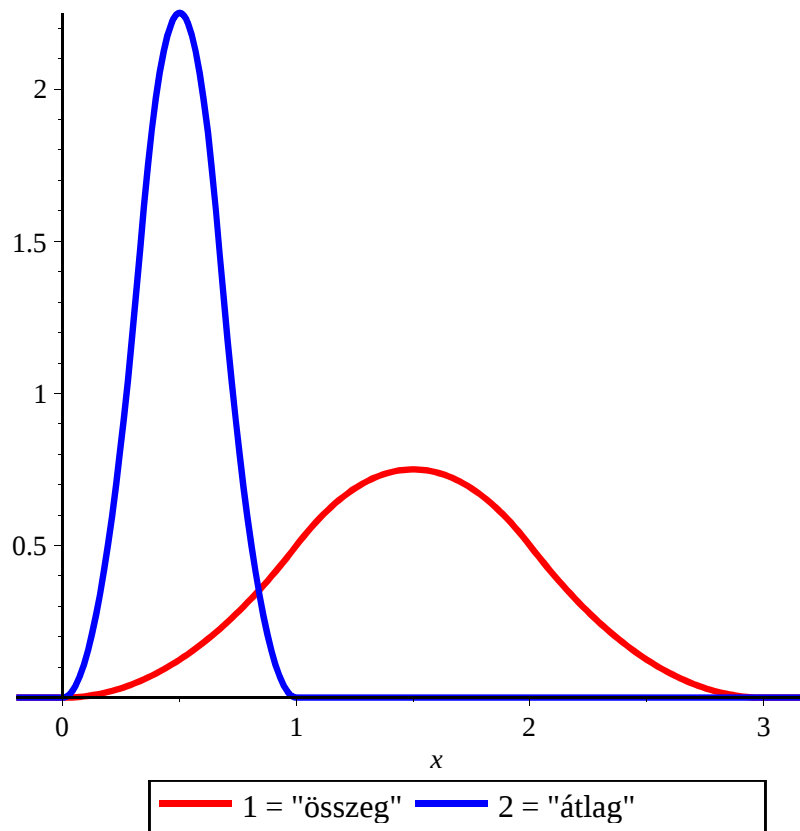
$$> dM3 := PDF(M3, x);$$

$$dM3 := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{27}{2} x^2 & 0 < x \leq \frac{1}{3} \\ -\frac{9}{2} - 27x^2 + 27x & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{27}{2} - 27x + \frac{27}{2} x^2 & \frac{2}{3} < x \leq 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases} \quad (1.3.8)$$

> `grafM3 := plot(dM3, x = 0..1) : grafM3`



> `plot([dS3, dM3], x = -0.2..3.2, color = [red, blue], thickness = 3, legend = [1 = "összeg", 2 = "átlag"])`



▼ 12.3. Gamma- eloszlás. Független exponenciális - eloszlások összege

12.3.1. PROBLÉMA

Ha $X \sim \text{Exponenciális}(\lambda)$ és $Y \sim \text{Exponenciális}(\lambda)$, akkor vajon mi lesz a $Z = X + Y$ összeg sűrűség függvénye és eloszlás függvénye?

Megoldás

- > *restart : with(Statistics) :*
- > $X := \text{RandomVariable}(\text{Exponential}(\lambda)) : Y := \text{RandomVariable}(\text{Exponential}(\lambda)) :$
- > $f_X := \text{PDF}(X, u) ; f_Y := \text{PDF}(Y, u)$

$$f_X := \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{e^{-\frac{u}{\lambda}}}{\lambda} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_Y := \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{e^{-\frac{u}{\lambda}}}{\lambda} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.4.1)$$

Képezzük az összeget!

> $Z := X + Y$

$$Z := _R + _R0 \quad (1.4.2)$$

Meg kellene határozni az összeg $F_Z(u) = P(Z = X + Y < u)$ eloszlásfüggvényét és az

$f_Z(u) = \frac{d}{du} F_Z(u)$ sűrűség függvényt! A Maple könnyedén kiszámolja Z sűrűség függvényét!

> $PDF(Z, u)$

$$\begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ \frac{u e^{-\frac{u}{\lambda}}}{\lambda^2} & 0 < u \end{cases} \quad (1.4.3)$$

12.3.2. DEFINÍCIÓ. Gamma-eloszlás sűrűség függvénye

Az X folytonos változó **Gamma-eloszlású** az $a > 0$ és $\mu > 0$ paraméterekkel, ha a sűrűség függvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\mu \cdot (\mu \cdot x)^{a-1} e^{-\mu \cdot x}}{\Gamma(a)} & x \geq 0 \end{cases}$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $X \sim \text{Gamma}(\mu, a)$.

Az $a = 1$ esetén exponenciális eloszlást kapunk: $\text{Exponenciális}(\mu) = \text{Gamma}(\mu, 1)$

A Statistics csomag μ helyett az $\frac{1}{\mu}$ értékkel számol ugyanúgy, mint az exponenciális eloszlás esetén.

> $PDF(\text{Gamma}(\lambda, a), x)$

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{a-1} e^{-\frac{x}{\lambda}}}{\lambda \Gamma(a)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Mutassuk meg, hogy megkaptuk a $\text{Gamma}(\lambda, 2)$ - eloszlás vagy $\text{Erlang}(\lambda, 2)$ -eloszlás sűrűség függvényét.

> $PDF(\text{Gamma}(\lambda, 2), u), PDF(\text{Erlang}(\lambda, 2), u)$

(1.4.5)

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & u < 0 \\ \frac{u e^{-\frac{u}{\lambda}}}{\lambda^2} & \text{otherwise} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{ll} 0 & u < 0 \\ \frac{u e^{-\frac{u}{\lambda}}}{\lambda^2} & \text{otherwise} \end{array} \right\} \quad (1.4.5)$$

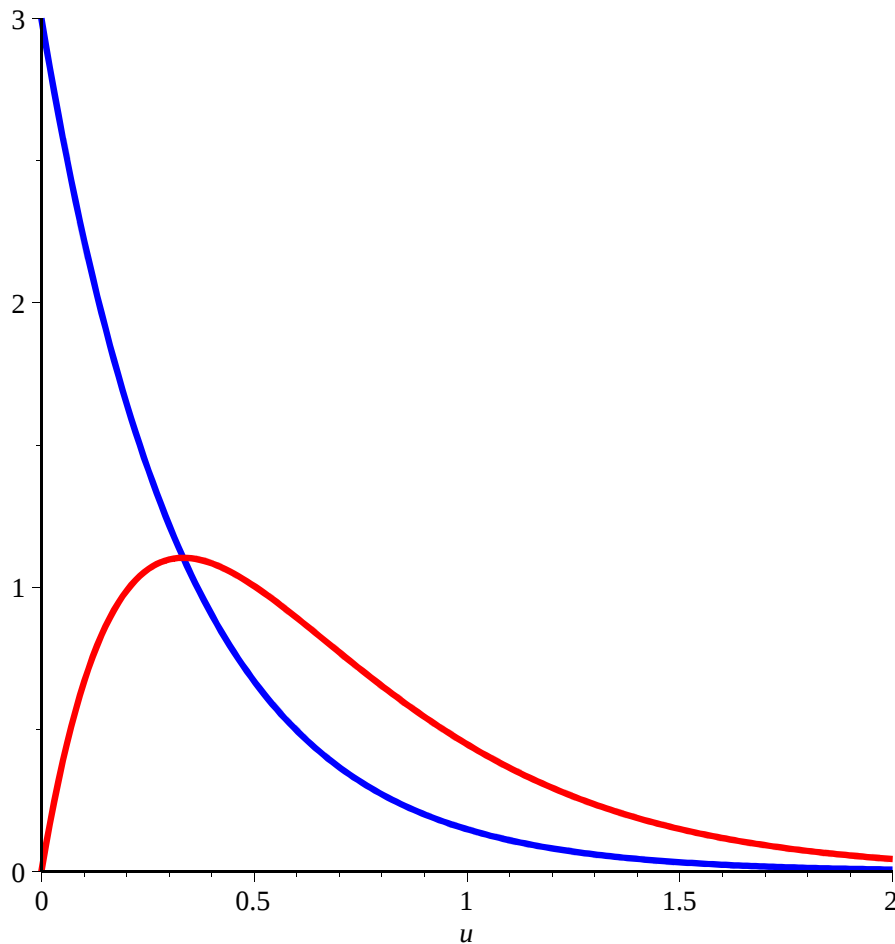
Rajzoljuk fel az exponenciális és a Gamma-eloszlás sűrűség függvényét egyaránt $\lambda = \frac{1}{3}$ paraméterekkel!

$$\lambda := \frac{1}{3};$$

`plot([PDF(X, u), PDF(Z, u)], u = 0 ..2, 0 ..3, thickness = 3, color = [blue, red], title
= Két exponenciális eloszlás összegének sűrűség függvénye (kék=exponenciális,piros=
Erlang))`

$$\lambda := \frac{1}{3}$$

Két exponenciális eloszlás összegének sűrűség függvénye (kék=exponenciális, piros=Erlang)



Folytassuk az összegzést!

Adjunk össze 3 független, exponenciális eloszlású valószínűségi változót azonos " λ " paraméterrel!

▼ 12.4. Komphajók indítása: Gamma-eloszlás

12.3.1. PÉLDA

Úgy döntött a mohácsi komphajót üzemeltető cég, hogy minden olyan esetben elindítanak egy kompot, amikor a fedélzeten 9 gépjármű összejön. Azt tapasztalták, hogy a gépjárművek érkezési ideje egymástól független (nincs konvoj) és átlagosan óránként 6 gépjármű érkezik. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy az egyes komphajók indítása között 1 óránál kevesebb idő telik el!

Szemléltessük a számítást a sűrűség függvény görbéje alatti terület befestésével!

Megoldás

Feltételezhető, hogy a gépjárművek Poisson - eloszlás szerint érkeznek, melynek $\lambda = 6$ a paramétere és ez a paraméter 1 órára vonatkozó átlagosan érkező autók száma.

> *restart : with(Statistics) :*

Mivel $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ és várható értéke $E(X) = \lambda$, ezért $\lambda = 6$ választással kell élni!

> *X := RandomVariable(Poisson(6))*

> *p := unapply(ProbabilityFunction(X, u), u) : P('X' = k) = p(k)*

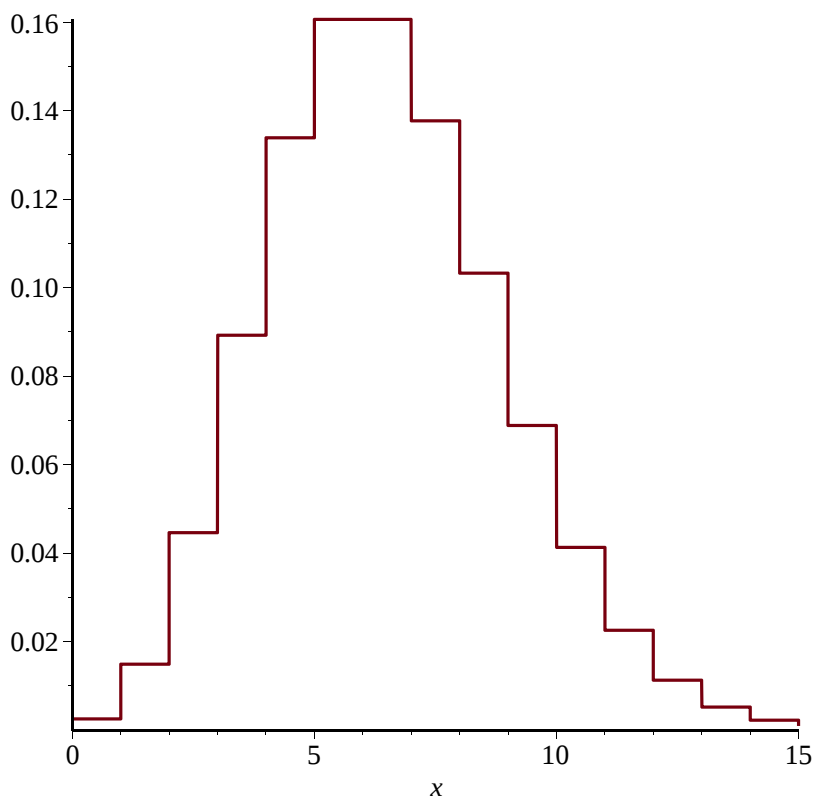
X := _R

$$P(X = k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \frac{6^k e^{-6}}{k!} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.5.1)$$

> *plot(p(floor(x)), x = 0..15, title*

= A komphajóra 1 óra alatt érkezők számának valószínűségi eloszlása)

A komphajóra 1 óra alatt érkezők számának valószínűségi eloszlása



Jelölje $X(0,t)$ a $[0,t]$ időintervallumban érkező gépjárművek számát. Továbbá legyen T a gépjárművek követési ideje között eltelt idő. Míg X diszkrét véletlen változó, addig T folytonos véletlen változó. T eloszlás függvényét könnyen meghatározhatjuk a Poisson -eloszlás alapján, mert

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}, \text{ ha } 0 \leq t.$$

Ugyanis $\{T > t\}$ jelöli azt az eseményt, hogy a $[0,t)$ időintervallumban nem jön egyetlen gépjármű

sem. És így a Poisson-eloszlás alapján

$$P(t < T) = P(X(0, t) = 0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda}.$$

Tehát a T követési idő eloszlása exponenciális $\lambda = 6$ paraméterrel.

Mivel a T **exponenciális eloszlás** várható értéke $E(T) = \frac{1}{\lambda}$, ezért a Maple eleve λ értéke helyett

$\frac{1}{\lambda}$ -t várja!

> $T := \text{RandomVariable}\left(\text{Exponential}\left(\frac{1}{6}\right)\right)$

> $\text{eloszlás} = \text{CDF}(T, u); \text{sűrűség} = \text{PDF}(T, u)$

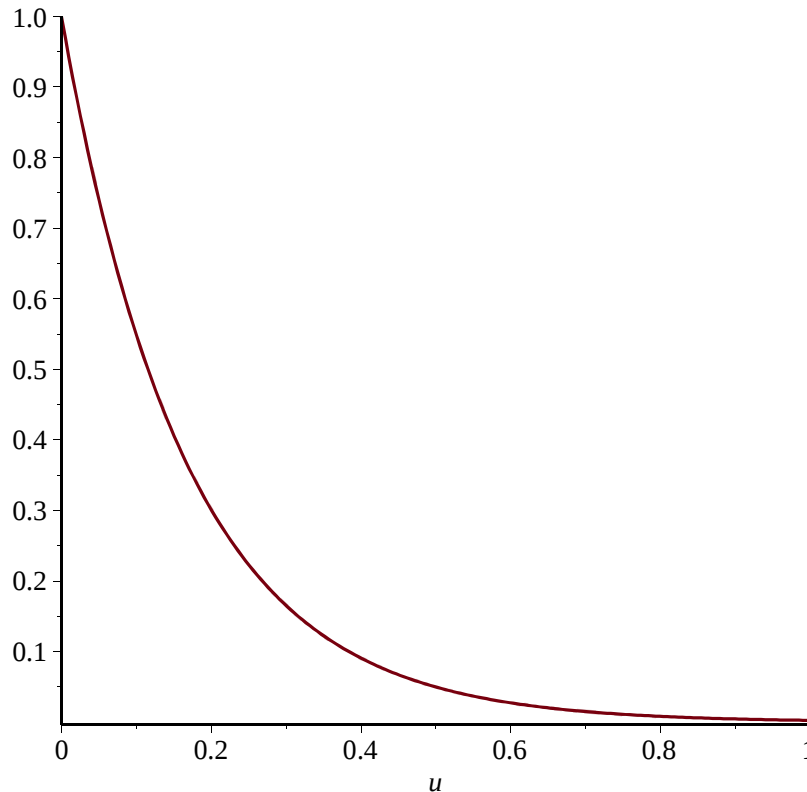
$T := _R0$

$$\text{eloszlás} = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ 1 - e^{-6u} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{sűrűség} = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ 6 e^{-6u} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.5.2)$$

> $\text{plot}(1 - \text{CDF}(T, u), u = 0 .. 1, \text{title} = A P(T > t) \text{ valószínűség függvény, a } t \text{ változtatásával})$

A $P(T > t)$ valószínűség függvény, a t változtatásával



Jelölje T_k a $(k-1)$ -ik és a k -ik gépjármű érkezése között eltelt idő tartamot, ahol $k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ lehet. A fentiek alapján

$$T_1, T_2, T_3, \dots, T_9$$

mindegyike **exponenciális eloszlású** és mindegyik paramétere ugyanaz a λ .

A feladat szövege alapján a T_k változók függetlenek, mert egymástól függetlenül érkeznek a gépjárművek.

Jelölje

$$S = T_1 + T_2 + \dots + T_9$$

azt az időt, amely az első 9 darab gépjármű érkezéséhez szükséges! Vegyünk fel 9 darab

független exponenciális eloszlású véletlen változót ugyanazon $\frac{1}{6}$ paraméterrel és legyen S ezek összege!

$$\begin{aligned} & \text{> } T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9 := \text{seq}\left(\text{RandomVariable}\left(\text{Exponential}\left(\frac{1}{6}\right)\right), k = 1 \dots 9\right) \\ & \quad T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9 := _R1, _R2, _R3, _R4, _R5, _R6, _R7, _R8, _R9 \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

$$\begin{aligned} & \text{> } S := T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8 + T_9 \\ & \quad S := _R1 + _R2 + _R3 + _R4 + _R5 + _R6 + _R7 + _R8 + _R9 \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

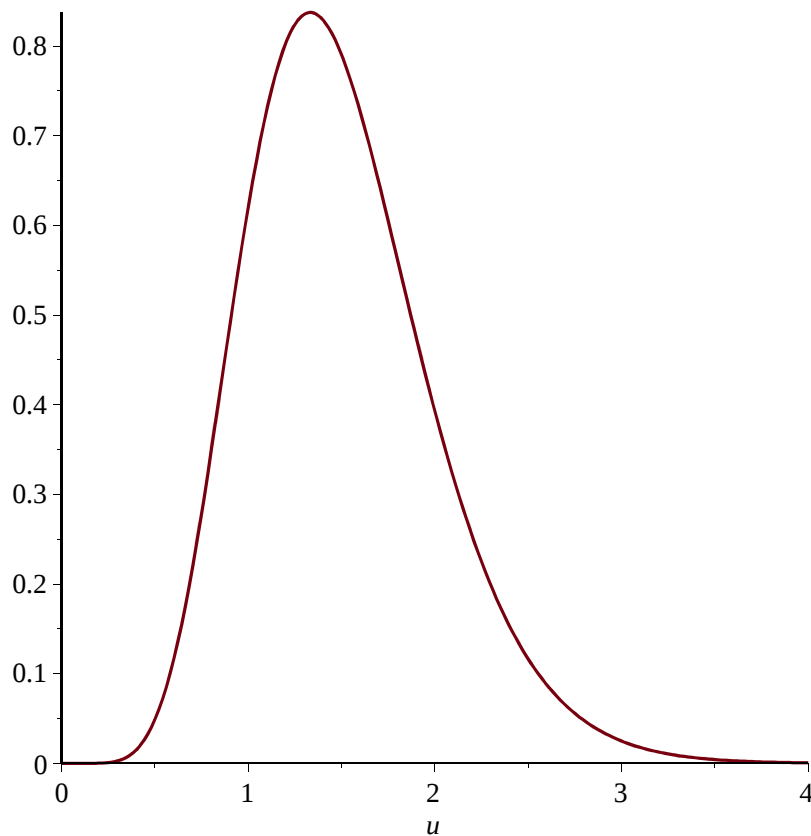
Az előző pont alapján az S összeg eloszlása $\text{Gamma}(1/6, 9)$ vagy $\text{Erlang}(1/6; 9)$ lesz.
sűrűség = $\text{PDF}(S, u)$

$$sűrűség = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ \frac{8748}{35} u^8 e^{-6u} & 0 < u \end{cases} \quad (1.5.5)$$

$$\begin{aligned} &> PDF\left(RandomVariable\left(Gamma\left(\frac{1}{6}, 9\right)\right), u\right) \\ &\quad \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{8748}{35} u^8 e^{-6u} & otherwise \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

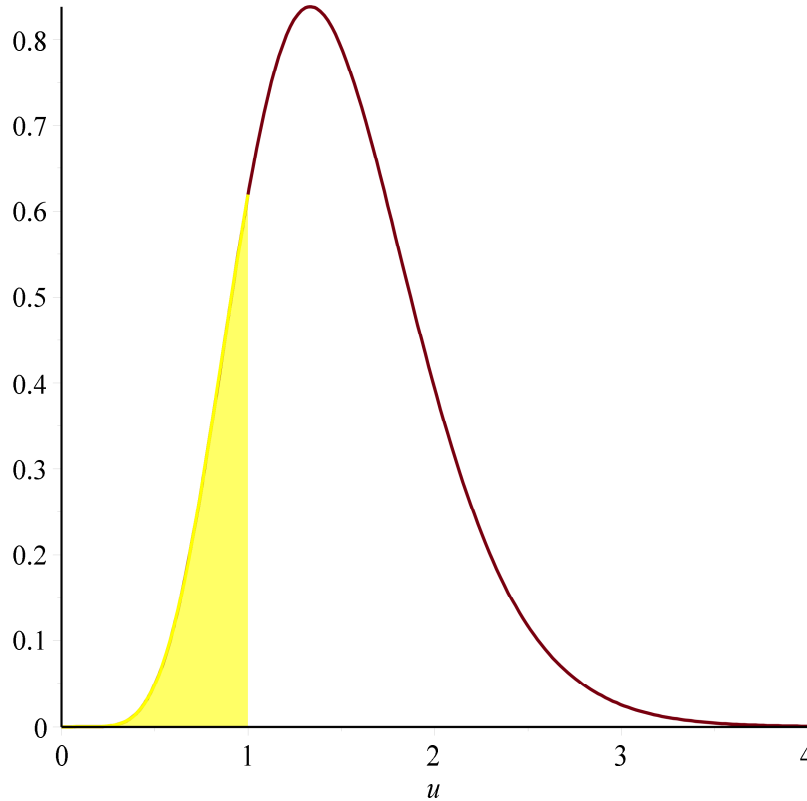
Rajzoljuk fel S sűrűség függvényét és ennek a $[0,1]$ intervalluma alatti területét, amely annak valószínűsége, hogy 9 gépjármű érkezik 1 órán belül érkezik.

`surusegS := plot(PDF(S, u), u = 0..4) : surusegS`



`> egyora := plot(PDF(S, u), u = 0..1, filled = true, color = yellow) :`
`plots[display]([surusegS, egyora], title`
`= Annak valószínűsége, hogy 1 órán belül indul a komp)`

Annak valószínűsége, hogy 1 órán belül indul a komp



A keresett valószínűség az S valószínűségi változó CDF(S,1) értékével adható meg!
 $P('S' < 1) = CDF(S, 1); p := evalf(rhs(\%))$

$$P(S < 1) = 1 - \frac{1709}{5} e^{-6}$$

$$p := 0.1527625059 \quad (1.5.7)$$

Tehát kb. 15.27% annak az esélye, hogy a komp 1 órán belül elindul!

Mivel az eloszlás hasonlít a normál eloszlásra, ezért határozzuk meg S várható értékét és szórását!
 Majd defináljuk az N normál eloszlást úgy, hogy várható értéke és szórása legyen azonos a Gamma eloszlás várható értékével és szórásával!

$\mu := Mean(S); \sigma := StandardDeviation(S)$

$$\mu := \frac{3}{2}$$

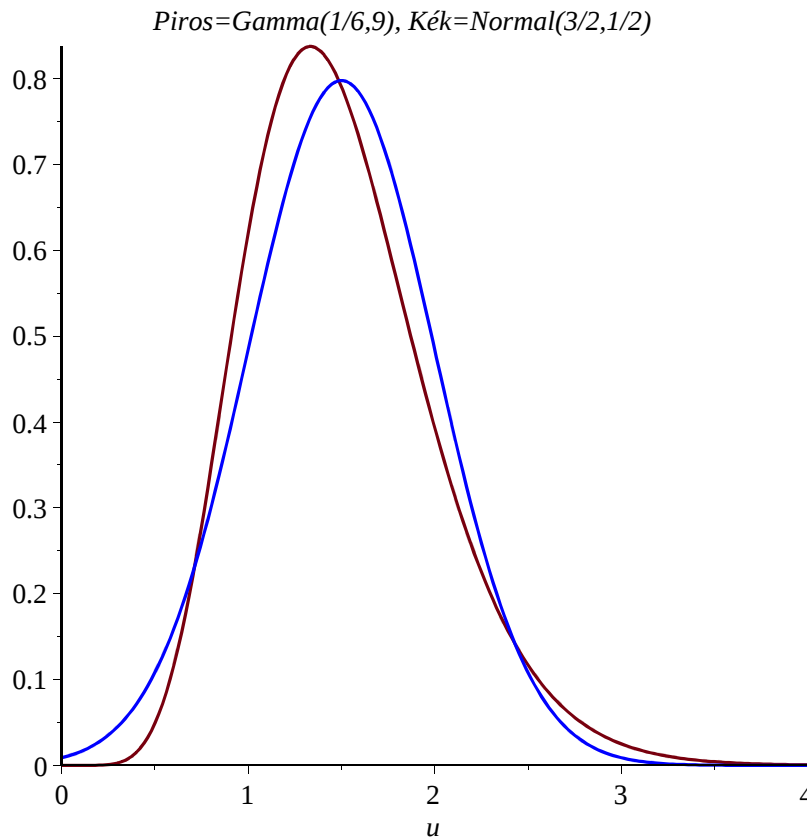
$$\sigma := \frac{1}{2} \quad (1.5.8)$$

> $N := RandomVariable(Normal(\mu, \sigma))$

> $surusegN := plot(PDF(N, u), u = 0..4, color = blue) :$

$plots[display]([surusegS, surusegN], title = Piros=Gamma(1/6,9), Kék=Normal(3/2,1/2))$

$N := _R11$



A két görbe nem sokkal tér el egymástól.

A keresett valószínűséget határozzuk meg a normáloszlás eloszlás függvénye alapján is és vonjuk ki a fenti értékből.

> $CDF(N, 1); evalf(\%)$; $eltérés = \% - p$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} \sqrt{2}\right)$$

$$0.1586552540$$

$$eltérés = 0.0058927481$$

(1.5.9)

A két érték eltérése kisebb, mint 0.006.

▼ 12.5. A khi-négyzet eloszlás speciális Gamma-eloszlás

A khi-négyzet eloszlást n szabadság fokkal úgy definiáltuk, mint n darab $N(0,1)$ standard normál eloszlás négyzetének összege. Ezért meglepő, hogy ugyanez Gamma -eloszlásnak egy speciális esete.

12.5.1. PÉLDA. Khi-négyzet(n) eloszlás $\text{Gamma}(2, \frac{n}{2})$

Mutassuk meg, hogy az $X \sim \text{khi-négyzet}(n)$ eloszlás n szabadság fokkal egyben

$X \sim \text{Gamma}\left(2, \frac{n}{2}\right)$ eloszlás is.

Megoldás

Definiáljunk egy khi-négyzet eloszlású változót n szabadságfokkal!

> *restart : with(Statistics) :*

$C := \text{RandomVariable}(\text{ChiSquare}(n))$

$C := _R$

(1.6.1)

> $\text{PDF}(C, u)$

$$\begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{u^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}u}}{2^{\frac{1}{2}n} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.6.2)$$

Definiáljunk egy Gamma $\left(2, \frac{n}{2}\right)$ eloszlású változót!

> $G := \text{RandomVariable}\left(\text{Gamma}\left(2, \frac{n}{2}\right)\right)$

$G := _R0$

(1.6.3)

> $\text{PDF}(G, u)$

$$\begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{\left(\frac{1}{2}u\right)^{\frac{1}{2}n-1} e^{-\frac{1}{2}u}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.6.4)$$

A két sűrűség függvény megegyezik!

▼ 12.6. Elméleti ellenőrző kérdések

12.6.1. Hogyan kapjuk meg az $Y = X_1 + X_2$ összeg változó eloszlás függvényét az együttes sűrűség függvénnyel?

12.6.2. Hogyan kapjuk meg az $Y = X_1 + X_2$ összeg változó sűrűség függvényét, ha X_1 és X_2 függetlenek?

12.6.3. Hogyan értelmezzük két függvény konvolúcióját?

12.6.4. Milyen eloszlást kapunk, ha két exponenciális eloszlású változót összeadunk, azonos paraméterrel?

12.6.5. Hogyan értelmezzük a Gamma(a, λ) eloszlás sűrűség függvényét?

12.6.6. Milyen a és λ paraméterek mellett lesz a Gamma(a, λ) eloszlás khi-négyzet(n) eloszlás?

▼ 12.7. Gyakorló feladatok

12.7.1. feladat

Legyenek $X_1 \sim \text{Uniform}(0, 1)$ és $X_2 \sim \text{Uniform}(0, 2)$ egyenletes eloszlásúak. Adjuk meg

(a) $Y = X_1 + X_2$ összegének sűrűség függvényét

(b) $Y = \frac{X_1 + X_2}{2}$ átlagának sűrűség függvényét.

(c) Rajzoljuk fel a kapott sűrűség függvényeket!

12.7.2. feladat

Legyenek $X_1 \sim \text{Exponential}(\lambda_1)$ és $X_2 \sim \text{Exponential}(\lambda_2)$ exponenciális eloszlásúak. Adjuk meg

(a) $Y = X_1 + X_2$ összegének sűrűség függvényét

(b) $Y = \frac{X_1 + X_2}{2}$ átlagának sűrűség függvényét.

(c) Rajzoljuk fel a kapott sűrűség függvényeket!

12.7.3. feladat

Legyenek $X_1 \sim \text{Uniform}(0, 1)$ és $X_2 \sim \text{Exponential}(\lambda)$ egyenletes illetve exponenciális eloszlású.

Adjuk meg

(a) $Y = X_1 + X_2$ összegének sűrűség függvényét

(b) $Y = \frac{X_1 + X_2}{2}$ átlagának sűrűség függvényét.

(c) Rajzoljuk fel a kapott sűrűség függvényeket!

12.7.4. feladat

Legyenek $X_1 \sim \text{Uniform}(-1, 1)$ és $X_2 \sim \text{Uniform}(-1, 1)$ egyenletes eloszlásúak. Adjuk meg

(a) $Y = X_1^2 + X_2^2$ négyzet összeg sűrűség függvényét

(b) $Y = \frac{X_1^2 + X_2^2}{2}$ négyzetes átlag sűrűség függvényét.

(c) Rajzoljuk fel a kapott sűrűség függvényeket!

12.7.5. feladat

Tegyük fel, hogy egy ügyfél kiszolgálási ideje a bankban exponenciális eloszlású átlagosan 2 perc várható idővel. Legyen X 10 ügyfél teljes kiszolgálási ideje. Becsüljük meg $X > 22$ perc eseményt!

12.7.6. feladat

Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független exponenciális eloszlásúak $\lambda = 1$ paraméterrel.

(a) Adjuk meg az $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ összeg sűrűség függvényét!

(b) Adjuk meg az $M_n = \frac{S_n}{n}$ átlag sűrűség függvényét!