

▼ 16. Hipotézis vizsgálat. Első és másodfajú hibák. Egy mintás Z-teszt, két mintás T-teszt.

Valószínűségszámítás és statisztika számítógép algebrai támogatással	Készült a PTE PMMIK-n a TÁMOP -4.1.2.A/1-11/1-2011-0098 támogatásával
Klincsik Mihály	

▼ 16.1. Bevezetés

A hipotézis a statisztikában egy olyan *feltételezés*, amelynek igazságát vagy hamisságát az adatok birtokában döntjük el. Az eldöntéshez használt számítási eljárást *tesztnek* hívjuk. A hipotézis soha nem egyedül fordul elő, hanem párban. Azért, mert egy hamis hipotézis esetén tudnunk kell, hogy mi a tagadása az eredeti feltevésnek. A tagadást nevezzük *alternatív hipotézisnek*. A valóságban a hipotézisek és az alternatívájuk nem feltétlenül egymás tagadásai. Hasonlóan ahhoz, mint amikor azt állítjuk egy falról, hogy fehér színű, és kiderül róla, hogy nem az, akkor a tagadás nem csak a fekete lehet. Hanem szürke, piros,... stb. Az eredeti hipotézis neve mindig H_0 és az alternatív vagy tagadás hipotézis neve H_1 .

Az előző fejezetben konfidencia intervallumokat becsültünk adatok alapján $\gamma=1-\alpha$ megbízhatósággal. Például, ha a termelés során mintákat veszünk ki, akkor a keresett paraméterek átlagával becslést tudunk adni a paraméterre. Ha viszont van egy előírt követelmény a paraméterre, akkor azt egy minta alapján teszteljük, hogy az előírt érték benne van-e a minta által kapott paraméter $(1 - \alpha)$ megbízhatóságú becslési intervallumában. Ha beleesik, akkor elfogadjuk a H_0 hipotézist α szignifikancia szinten, egyébként elvetjük. Ezért a becslés és a hipotézis vizsgálat szorosan összefüggenek. Tehát a tesztelést el lehet végezni a megfelelő konfidencia intervallum kiszámításával. Vagy lehet az ú.n. p-érték alapján, amely a szignifikancia szint olyan kritikus értéke, amely még támogatja a null-hipotézist. Ugyanis a H_0 hipotézist elfogadjuk α szignifikancia szinten, ha az $\alpha < p$ – érték és visszautasítjuk, ha $\alpha > p$ – érték teljesül.

Egy teszt eldöntésével kapcsolatban kétféle hibát követhetünk. Vagy visszautasítunk valójában igaz hipotézist, és ekkor első fajú hibát követünk el. Vagy elfogadunk valójában hamis hipotézist és ekkor másodfajú hibát követünk el. Az egyes hibák mértékét α -val illetve β -val jelöljük. Tehát a teszteknel megadott α szignifikancia szint az elsőfajú hiba. A másodfajú hiba becslése bonyolultabb és azt vagy az OC-görbe (működési jelleg görbe) vagy az erőfüggvény felrajzolásával lehet szemléltetni.

Példát mutatunk az illesztés jóságának tesztjére, amelyben az adatok eloszlását tudjuk tesztelni adott paraméterrel. Megmutatjuk a teszt számítás menetét és a végeredményt összehasonlítjuk a beépített eljárás eredményével

Célunk az alábbi fogalmak, összefüggések és eljárások megismerése, megértése	
Hipotézis és alternatív hipotézis fogalma, megadása	Egy mintás Z-teszt a várható értékre
A hipotézis tesztelése	Működési jelleg görbe (OC-görbe), erő függvény
Egyszerű és összetett hipotézisek	Teszt és a bcslés kapcsolata
A teszt kritikus vagy visszautasítási	Két mintás T-teszt a várható értékek

tartománya	egyenlőségére
Első és másodfajú hibák és a szignifikancia szint.	Illesztés jóságának tesztje az eloszlás tesztelésére
p-érték vagy kritikus szignifikancia szint	A Statistics csomag eljárásainak használata: <i>OneSampleZTest, TwoSampleTTest, ChiSquareGoodnessOfFitTest</i>

▼ 16.2. A statisztikai hipotézisekről, tesztelésekről és a hibákról általában

16.2.1. DEFINÍCIÓ. STATISZTIKAI HIPOTÉZIS

Egy populáció paraméterére vagy paramétereire vonatkozó **állítás**, statisztikai hipotézisnek nevezünk.

16.2.2. PÉLDA

Tekintsünk egy normál eloszlású populációt, melynek várható értéke ismeretlen μ érték. Hipotézisekre példát adnak az alábbi állítások:

- μ kisebb, mint 1.

vagy

- $\mu = 1$

16.2.3. DEFINÍCIÓ. Hipotézis tesztelése

(i) mintavételezés alapján teszteljük a hipotézist

(ii) ki kell dolgozni egy eljárást, amellyel a mintavétel értékei alapján a hipotézis eldönthető: így vagy elfogadjuk a hipotézist vagy visszautasítjuk.

Tekintsünk például egy olyan populációt, melynek eloszlás függvénye $F_a(x)$ és ez tartalmazza az 'a' ismeretlen paramétert!

Jelölje H_0 az 'a' paraméterre vonatkozó hipotézist, amelyet "null hipotézisnek" nevezünk.

Célunk a H_0 hipotézis tesztelése.

16.2.4. DEFINÍCIÓ. Egyszerű / Összetett hipotézis

A hipotézist **egyszerűnek** nevezzük, ha teljesülése esetén a populáció eloszlását teljesen meghatározza.

Ha a hipotézis nem határozza meg egyértelműen a populáció eloszlását, akkor **összetett** hipotézisnek nevezzük.

16.2.5. PÉLDA.

$H_0: \mu = 1$ hipotézis egyszerű, mert a μ paramétert egyértelműen megadja

$H_0: \mu < 1$ hipotézis összetett, mert a μ paramétert nem adja meg egyértelműen csak egy felső korlátot ad rá.

16.2.6. DEFINÍCIÓ (ALTERNATÍV HIPOTÉZIS)

A H_0 hipotézissel szembeállított állítást H_1 alternatív hipotézisnek nevezzük.

16.2.7. PÉLDA

Legyen $F_{\mu}(x)$ normál eloszlás eloszlásfüggvénye μ ismeretlen várható értékkel és ismert szórással.

- $H_0: \mu = 1 \quad <---> \quad H_1: \mu = 2$
- $H_0: \mu = 1 \quad <---> \quad H_1: 1 < \mu$
- $H_0: \mu = 1 \quad <---> \quad H_1: \mu < 1$
- $H_0: \mu = 1 \quad <---> \quad H_1: \mu \neq 1$

Legyen adott a H_0 hipotézis, és legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ egy n elemű minta az adott populációból. El kell döntenünk az adott n elemű minta alapján, hogy a H_0 hipotézist elfogadjuk-e vagy visszautasítjuk!

16.2.8. DEFINÍCIÓ. KRITIKUS TARTOMÁNY

Az n -dimenziós tér egy C tartományát **kritikus** vagy **visszautasítási tartomány**nak nevezzük, ha

- a H_0 hipotézist elfogadjuk, amennyiben $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nem eleme C -nek;
- a H_0 hipotézist visszautasítjuk, amennyiben $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ eleme C -nek.

Milyen kritérium alapján határozzuk meg a C kritikus tartományt? A válasz azon múlik, hogy

- (1) a populáció milyen **eloszlású**;
- (2) az eloszlás melyik **paraméterét** becsüljük;
- (3) a H_0 **hipotézisben** mit állítunk a paraméterről;
- (4) milyen H_1 **alternatív hipotézist** állítottunk a H_0 hipotézissel szemben;
- (5) milyen **szignifikancia szinten** kell a hipotézist eldönteni.

16.2.9. PÉLDA.

$$A \ C = \{ (X_1, X_2, \dots, X_n) : \frac{1.96}{\sqrt{n}} < \left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - 1 \right| \}$$
 kritikus tartomány megfelel a normál

eloszlású sokaság $H_0 : \mu = 1$ átlagra vonatkozó hipotézis eldöntéséhez, melyre a $H_1 : \mu \neq 1$ az alternatív hipotézis és a szignifikancia szint $\alpha=0.05$. Mindez leolvasható a teszt statisztikából.

A hipotézis eldöntése során mintát veszünk a populációból. A minta minden alkalommal más és más egyedekből áll.

Ezért előfordulhat, hogy a populáció egészére a H_0 hipotézis igaz, de a véletlen folytán olyan egyedeket választottunk ki, amelyek alapján a hipotézist vissza kell utasítani.

Másrészt előfordulhat, hogy a H_0 állítás a teljes populációra nem igaz. Mégis el kell fogadnunk a minta alapján a hipotézist, mert a kivett minta elemek olyanok. Mindezek a hibák elkerülhetők lennének, ha az egész populációt átvizsgálnánk, és **nem** csak egy kis része alapján döntenénk. A hipotézis vizsgálat felvállalja a hiányos információk birtokában történő valószínűségi döntést.

16.2.10. DEFINÍCIÓ. A HIPOTÉZIS ELDÖNTÉSÉVEL KAPCSOLATOS HIBÁK

A H_0 hipotézis tesztelése során kétféle hibát követhetünk el.

elsőfajú hiba: amikor a minta alapján visszautasítjuk a H_0 hipotézist, pedig valójában H_0 igaz.

másodfajú hiba: amikor a minta alapján elfogadjuk a H_0 hipotézist, pedig valójában H_0 hamis.

16.2.11. DEFINÍCIÓ.

A **hiba szintek** az alábbi feltételes valószínűségekkel határozhatók meg

$$P(\text{elsőfajú hiba}) = P(\text{visszautasítjuk } H_0\text{-t} \mid H_0 \text{ igaz}) = \alpha$$

$$P(\text{másodfajú hiba}) = P(\text{elfogadjuk } H_0\text{-t} \mid H_0 \text{ hamis}) = \beta$$

A $P(\text{elsőfajú hiba}) = \alpha$ -ra úgy is hivatkozunk, mint **szignifikancia szintre**!

▼ 16.3. Teszt normál eloszlás várható értékére, ha a szórás ismert. Egy mintás Z-teszt.

Legyen egy normál eloszlású populáció μ várható értéke ismeretlen és σ szórása ismert.

Jelöljön $X_1, X_2, \dots, X_n$ egy n elemű mintát!

Viszsgáljuk a

$H_0 : \mu = \mu_0$ null hipotézist és legyen az ellentéte a $H_1 : \mu \neq \mu_0$ alternatív hipotézis.

A μ pontbecslése az $X_{\text{átlag}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ statisztika.

Adott α szignifikancia szint mellett keressük a C visszautasítási tartományt úgy, hogy

$$P((X_{\text{átlag}} \in C) \mid H_0 \text{ igaz}) = \alpha$$

16.3.1. Tétel.

Ha H_0 igaz, akkor $X_{\text{átlag}} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ eloszlású.

Ezért az $Y = \frac{X_{\text{átlag}} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ valószínűségi változó eloszlása $N(0,1)$ standard normál.

Keressük meg azt a $z_{\frac{\alpha}{2}}$ értéket, melyre $P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} < |Y|\right) = \alpha$ teljesül. Ekkor a C visszautasítási tartomány

$$C = \{ (X_1, X_2, \dots, X_n) : z_{\frac{\alpha}{2}} < \left| \frac{X_{\text{átlag}} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| \}$$

Tehát α szignifikancia szinten a H_0 hipotézist

- visszautasítjuk, ha $|X_{\text{átlag}} - \mu_0| > \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}$ teljesül;

- elfogadjuk, ha $|X_{\text{átlag}} - \mu_0| \leq \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}$ teljesül;

16.3.2. PÉLDA

Egy adatátviteli ponton egy μ értéket továbbítanak, miközben a vevő oldalon véletlen zaj $W \sim N(0,2)$ eloszlással adódik az üzenethez.

Ugyanazt a μ értéket 5-ször egymás után megismétlik és a vevő által vett értékek átlagára 9.5 érték adódott, Teszteljük azt a hipotézist, hogy $H_0: \mu = 8$ értéket küldték-e, $\alpha = 0.05$ és $\alpha = 0.1$ szignifikancia szintek mellett!

Megoldás

Vegyük fel az adatokat változókba!

restart : with(Statistics) :

> $\mu_0, n, \text{átlag}, \text{szórás} := 8, 5, 9.5, 2$

$\mu_0, n, \text{átlag}, \text{szórás} := 8, 5, 9.5, 2$

(1.3.1)

Legyen a szignifikancia szint, vagyis az első fajú hiba $\alpha = 0.05$.

$\alpha := 0.05$

$\alpha := 0.05$

(1.3.2)

Határozzuk meg $z_{\frac{\alpha}{2}}$ értékét az $N(0,1)$ eloszlást használva!

> $z := 'z' : e := CDF(Normal(0, 1), z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

> $fsolve(e, \{z\}); assign(\%) :$

> $L95 := evalf\left(\frac{z \text{ szórás}}{\sqrt{n}}\right)$

$e := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} z \sqrt{2}\right) = 0.9750000000$

$\{z = 1.9599639850\}$

$L95 := 1.753045081$

(1.3.3)

Vajon a mérési átlag benne van -e a feltételezett $\mu_0 = 8$ várható érték L95 sugarú környezetében?

$|\text{átlag} - \mu_0| < L95$

$1.5000000000 < 1.7530450810$

(1.3.4)

Mivel az egyenlőtlenség igaz, ezért a $H_0: \mu = 8$ hipotézist $100(1 - \alpha)\% = 95\%$ -os megbízhatósági szinten **elfogadjuk!**

Ugyanezt kapjuk a Statistics csomag **OneSampleZTest** eljárásával is, de az eljárásnak a minta elemeket meg kell adni! Ezért generáltunk adatokat, melyek átlaga 9.5! A szórás most nem érdekes, mert nem a minta adataiból becsüli az eljárás, hanem meg kell adni input adatként!

$\text{minta} := [10.2, 9.8, 8.7, 9.3, 9.5];$

> Az adatok átlaga = $Mean(minta)$;
 > $OneSampleZTest(minta, 8, 2, confidence = 0.95)$
 $minta := [10.2, 9.8, 8.7, 9.3, 9.5]$
 Az adatok átlaga = 9.500000000000000
 $hypothesis = true, confidenceinterval = 7.74695491845523 \dots 11.2530450815448,$ (1.3.5)
 $distribution = Normal(0, 1), pvalue = 0.0935325127624477, statistic$
 = 1.67705098274968

A kapott konfidencia intervallum ugyanaz, mint amit mi számoltunk a normál eloszlás alapján!

> $konfidencia_intervallum = \text{átlag} - L95 \dots \text{átlag} + L95;$
 $konfidencia_intervallum = 7.7469549190 \dots 11.2530450800$ (1.3.6)

Vizsgáljuk most az $\alpha = 0.1$ szignifikancia szinthez tartozó tesztet!

> $\alpha := 0.1;$
 $\alpha := 0.1$ (1.3.7)

> $z := 'z' : e := CDF(Normal(0, 1), z) = 1 - \frac{\alpha}{2};$
 > $fsolve(e, \{z\}); assign(\%)$
 $e := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} z \sqrt{2}\right) = 0.9500000000$
 $\{z = 1.6448536270\}$ (1.3.8)

> $L90 := evalf(z \cdot \text{szórás} / \sqrt{n});$
 $L90 := 1.471201809$ (1.3.9)

> $abs(\text{átlag} - \mu_0) < L90;$
 $1.5000000000 < 1.4712018090$ (1.3.10)

> $OneSampleZTest(minta, 8, 2, confidence = .9);$
 $hypothesis = false, confidenceinterval = 8.02879819051007 \dots 10.9712018094899,$ (1.3.11)
 $distribution = Normal(0, 1), pvalue = 0.0935325127624477, statistic$
 = 1.67705098274968

> $konfidencia_intervallum = \text{átlag} - L90 \dots \text{átlag} + L90;$
 $konfidencia_intervallum = 8.0287981910 \dots 10.9712018100$ (1.3.12)

Tehát **elvetjük** a H_0 hipotézist az $\alpha = 0.1$ szignifikancia szinten.

▼ 16.4. A teszt és a becslés kapcsolata

A paraméterek becslése fejezetben igazoltuk a következő állítást.

16.4.1. ÁLLÍTÁS

Egy normál eloszlás μ várható értékére az alábbi **konfidencia intervallum** adható
 100 $(1 - \alpha)$ % szinten, ha a σ szórás ismert

$$\left[x_{\text{átlag}} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}, x_{\text{átlag}} + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

ahol $x_{\text{átlag}}$ = a megfigyelt minta átlaga.

A fenti kijelentéssel ekvivalens az alábbi.

16.4.2. ÁLLÍTÁS

Az $X_{\text{átlag}} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ valószínűségi változóra teljesül az

$$P\left(\left\{x_{\text{átlag}} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq x_{\text{átlag}} + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}\right\}\right) = 1 - \alpha$$

egyenlőség, ahol $x_{\text{átlag}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ az átlag valószínűségi változó.

A mostani hipotézis tesztelési terminológiával a következőképpen hangzik.

16.4.3. ÁLLÍTÁS

Vizsgálva a $H_0: \mu = \mu_0$ hipotézist és ennek $H_1: \mu \neq \mu_0$ alternatív hipotézisét α szignifikancia szinten, ekkor

- H_0 -t elfogadjuk α szignifikancia szinten, ha $\left[x_{\text{átlag}} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}, x_{\text{átlag}} + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}} \right]$

- H_0 -t visszautasítjuk α szignifikancia szinten, ha μ_0 nem esik az (

$$x_{\text{átlag}} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}, x_{\text{átlag}} + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}) \text{ intervallumba}$$

A fenti H_0 **hipotézis tesztelése** a következő számításokat tartalmazza:

1. Számítsuk ki a

$$v = \frac{\sqrt{n} |x_{\text{átlag}} - \mu_0|}{\sigma}$$

teszt statisztika értékét!

2. Határozzuk meg a következő p valószínűséget

$$P(v < |Z|) = p\text{-érték}$$

az úgy nevezett **p-érték**et.

Ezek alapján a H_0 hipotézis tesztelése a következőképpen megy

- visszautasítjuk H_0 -t, ha $p\text{-érték} \leq \alpha$ teljesül;
- elfogadjuk H_0 -t, ha $p\text{-érték} > \alpha$ teljesül;

16.4.4. DEFINÍCIÓ

Az így kapott p-értéket a **kritikus szignifikancia szint**nek nevezzük.

Ezek alapján a 2. pontban tárgyalt példa tesztelése a következőképpen működik.

> *restart : with(Statistics) :*

> $\mu_0, n, \text{átlag}, \text{szórás} := 8, 5, 9.5, 2$

$\mu_0, n, \text{átlag}, \text{szórás} := 8, 5, 9.5, 2$

(1.4.1)

(a) Kiszámoljuk a **v** statisztikát!

$\frac{\sqrt{n} |\text{átlag} - \mu_0|}{\text{szórás}}, = \frac{\sqrt{n} |\text{átlag} - \mu_0|}{\text{szórás}}; v_statisztika := evalf(rhs(\%))$

$$\frac{\sqrt{n} |\text{átlag} - \mu_0|}{\text{szórás}} = 0.7500000000 \sqrt{5}$$

$v_statisztika := 1.677050983$

(1.4.2)

(b) Az $N(0,1)$ eloszlásfüggvényből kiszámoljuk a **p-kritikus** szignifikancia szintet!

$Z := \text{RandomVariable}(\text{Normal}(0, 1))$

> $p_érték := 1 - (\text{CDF}(Z, v_statisztika) - \text{CDF}(Z, -v_statisztika))$

$Z := _R$

$p_érték := 0.0935325127135034$

(1.4.3)

(b1) A $H_0 : \mu = 8$ hipotézist elfogadjuk, ha az α szignifikancia szintre teljesül az $\alpha < 0.0935$ egyenlőtlenség

(b2) A $H_0 : \mu = 8$ hipotézist visszautasítjuk, ha az α szignifikancia szintre teljesül az $\alpha > 0.0935$ egyenlőtlenség.

Így az $\alpha = 0.05$ szignifikancia szinten a hipotézist elfogadjuk, mert $\alpha = 0.05 < 0.0935$.

De az $\alpha = 0.1$ szignifikancia szinten nem fogadjuk el a hipotézist, mert $\alpha = 0.1 > 0.0935$.

Ezeket kapjuk meg a **Statistics** csomag **OneSampleZTest** eljárása segítségével, annyi különbséggel, hogy a mintának rendelkezésre kell állni!

$\text{minta} := [10.2, 9.8, 8.7, 9.3, 9.5];$

> $\text{OneSampleZTest}(\text{minta}, 8, 2, \text{confidence} = 0.95)$

$\text{minta} := [10.2, 9.8, 8.7, 9.3, 9.5]$

$\text{hypothesis} = \text{true}, \text{confidenceinterval} = 7.74695491845523 \dots 11.2530450815448,$

(1.4.4)

$\text{distribution} = \text{Normal}(0, 1), \text{pvalue} = 0.0935325127624477, \text{statistic}$

$= 1.67705098274968$

▼ 16.5. A teszt másodfajú hibája, a működési jelleg görbe (OC-görbe) és az erő függvény.

A másodfajú hiba annak valószínűsége, hogy a minta alapján elfogadjuk a H_0 hipotézist, pedig a populáció egészére nem igaz. Ha $\mu = \mu_0$ a H_0 hipotézis és ez nem igaz, akkor a μ várható érték nem egyenlő a μ_0 értékkel.

16.5.1. DEFINÍCIÓ. A másodfajú hiba, mint feltételes valószínűség.

$\beta(\mu) = P(\text{másodfajú hiba}) =$

$$= P(a H_0\text{-t elfogadjuk} \mid \text{valójában } H_0 \text{ hamis}) =$$

$$= P(a H_0\text{-t elfogadjuk} \mid \text{az igazi várható érték} = \mu \neq \mu_0)$$

Ha H_0 hamis, akkor $X_{\text{átlag}} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, ahol μ az igazi várható érték, amely nem egyenlő a H_0 hipotézisben szerepelő μ_0 várható értékkel.

16.5.2. DEFINÍCIÓ. OC- görbe

A **teszt másodfajú hibájának**

$$\beta(\mu) = P\left(\frac{|X_{\text{átlag}} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = OC(\mu)$$

változását a valódi μ várható érték változásának függvényében a teszt **működési jelleg görbéjének** vagy **OC** (Operating Characteristic) - **görbéjének** is nevezzük.

16.5.3. DEFINÍCIÓ. ERŐ- függvény

Az $(1-OC(\mu))$ függvényt, azaz az

$$Erő(\mu) = 1 - \beta(\mu) = P(a H_0\text{-t visszautasítjuk} \mid H_0 \text{ hamis})$$

függvényt a teszt **erő függvényének** nevezzük.

Az erő függvény szemlélteti a teszt erejét a visszautasítás terén. Ugyanis az erő függvény a teszt egy jó döntését méri. Ahol kicsi az értéke, ott nagy a kockázat, ahol nagy az erő függvény értéke ott jól döntünk!

Szemléltetjük az OC-görbét és az erő függvényt egy példán keresztül.

16.5.4. PÉLDA.

Legyen a normál eloszlású populáció feltételezett várható értéke $\mu_0 = 20$ és szórása $= 2$.

Vegyünk egy $n = 16$ elemű mintát!

Teszteljük a

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

hipotézist $\alpha=0.05$ szignifikancia szinten és számoljuk ki a másodfajú hibát $\mu = 21$ igazi várható érték mellett és hasonlítsuk össze az első fajú hibával!

Megoldás

> *restart : with(Statistics) :*

szórás, n, mu0, g := 2, 16, 20, 0.95;

alpha := 1 - g;

szórás, n, mu0, g := 2, 16, 20, 0.95

alpha := 0.05

(1.5.1)

Eddig az első fajú hibát tartottuk a megadott $\alpha = 0.05$ szinten számításainkkal.

A becsléshez a standard $N(0,1)$ normál eloszlást használtuk! Meghatároztuk $z_{\frac{\alpha}{2}}$ -értékét!

> *Z := RandomVariable(Normal(0, 1));*

> *z := 'z' :*

```
> e := CDF(Z, z) = 1 -  $\frac{\alpha}{2}$ ;
> fsolve(e, {z}); assign(%) :
```

$$Z := _R$$

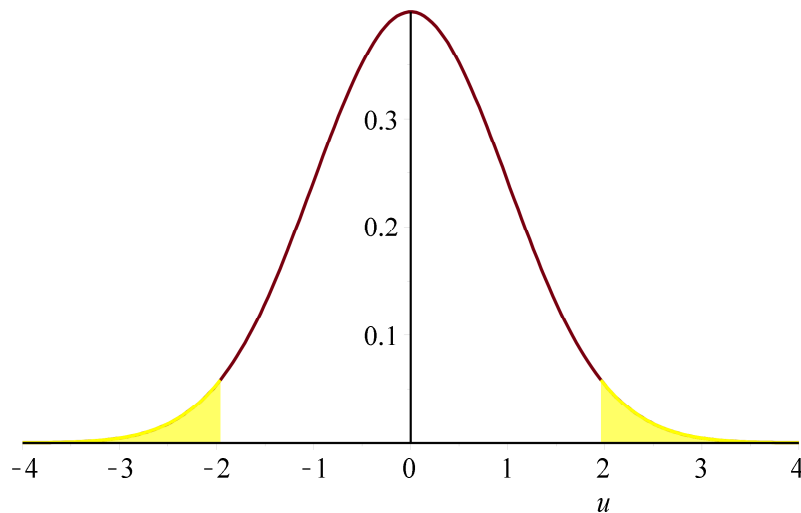
$$e := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2} z \sqrt{2}\right) = 0.9750000000$$

$$\{z = 1.9599639850\}$$

(1.5.2)

Ábrázoljuk a normál eloszlás sűrűség függvényét és az első fajú hiba szinthez tartozó tartományokat szimmetrikusan 0-ra!

```
> surusegZ := plot(PDF(Z, u), u = -4 .. 4) :
fest1 := plot(PDF(Z, u), u = -4 .. -z, color = yellow, filled = true) :
fest2 := plot(PDF(Z, u), u = z .. 4, color = yellow, filled = true) :
rajz1 := plots[display]([surusegZ, fest1, fest2]) : rajz1;
```



Az eddigi vizsgálatok alapján az $X_{\text{átlag}}$ konfidencia intervallumának sugara $\gamma=0.95$ szinten a következő!

```
> L :=  $\frac{z \text{ szórás}}{\sqrt{n}}$ 
```

$$L := 0.9799819925$$

(1.5.3)

Így kapjuk a konfidencia intervallum c_1 alsó és c_2 felső határait szimmetrikusan a μ_0 érték körül, melyek a következők!

```
> c1 := mu0 - L; c2 := mu0 + L;
```

$$c1 := 19.02001801$$

$$c2 := 20.97998199$$

(1.5.4)

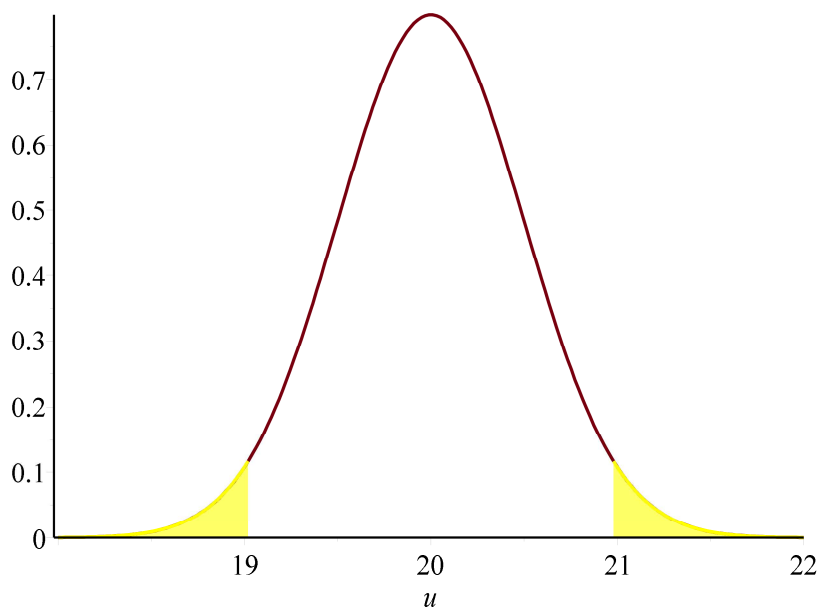
A most definiálandó Y_1 valószínűségi változó az $X_{\text{átlag}}$ valószínűségi változót hivatott reprezentálni, olyan $X_1, X_2, \dots, X_n$ minta esetén, melyek közös várható értéke

$$\mu_0 = 20.$$

$$\begin{aligned} &> Y1 := \text{RandomVariable}\left(\text{Normal}\left(\mu_0, \frac{\text{szórás}}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &Y1 := _R0 \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Ha a mintából kapott érték a sárga tartományba esik, akkor a H_0 hipotézist elvetjük 95%-os megbízhatósággal!

```
> surusegY1 := plot(PDF(Y1, u), u = 18 .. 22) :
fest3 := plot(PDF(Y1, u), u = 18 .. c1, color = yellow, filled = true) :
fest4 := plot(PDF(Y1, u), u = c2 .. 22, color = yellow, filled = true) :
rajz2 := plots[display]([surusegY1, fest3, fest4]) : rajz2;
```



21. Ezért egy másik X_2 normál eloszlást kell definiálnunk, melynek várható értéke nem 20, hanem

21. Szórása azonban megegyezik az előzőekben adott szórással!

$$\begin{aligned} &> \mu := 21 \\ &> Y2 := \text{RandomVariable}\left(\text{Normal}\left(\mu, \frac{\text{szórás}}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &\mu := 21 \\ &Y2 := _R1 \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

A $\beta(21)$ másodfajú hibát az X_2 változó eloszlás függvényéből a

$$\beta(\mu) =$$

$$P\left(\frac{|X_2 - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P(X_2 \text{ beleesik az elfogadási intervallumba} \mid \text{a } H_0 \text{ hipotézis nem igaz})$$

képlet alapján tudjuk kiszámolni!

> *beta21 := CDF(Y2, c2) - CDF(Y2, c1);*

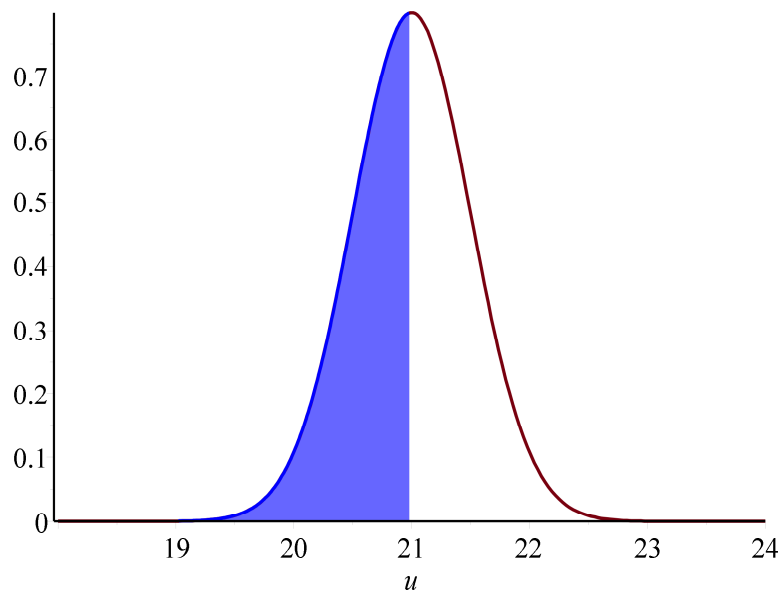
β21 := 0.483994724213343 (1.5.7)

A másodfajú hiba 0.48, ami megdöbbentően nagy!! Ez az X_2 normál eloszlás sűrűség függvénye alatti terület a $[c_1, c_2]$ konfidencia intervallumon! Ábrázoljuk a másodfajú hibát is görbe alatti területtel!

> *surusegY2 := plot(PDF(Y2, u), u = 18 ..24) :*

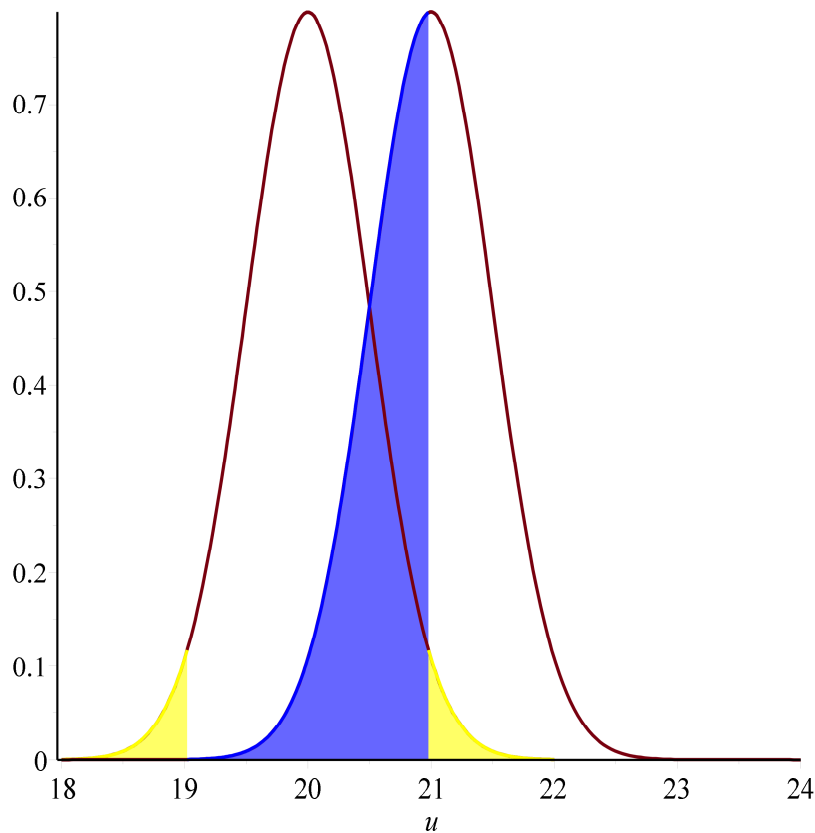
fest5 := plot(PDF(Y2, u), u = c1 ..c2, color = blue, filled = true) :

rajz3 := plots[display]([surusegY2, fest5]) : rajz3;



Tegyük egybe a két féle hibát mutató ábrát! Míg a sárga kicsi, addig a kék terület nagy!

> *plots[display]([rajz2, rajz3]);*



Kezeljük a feladatot **paraméteresen**, ekkor kapjuk az **OC -görbét** a μ paraméter változtatásával!

> $\mu := 'u' : Y2 := \text{RandomVariable}\left(\text{Normal}\left(\mu, \frac{\text{szórás}}{\sqrt{n}}\right)\right);$

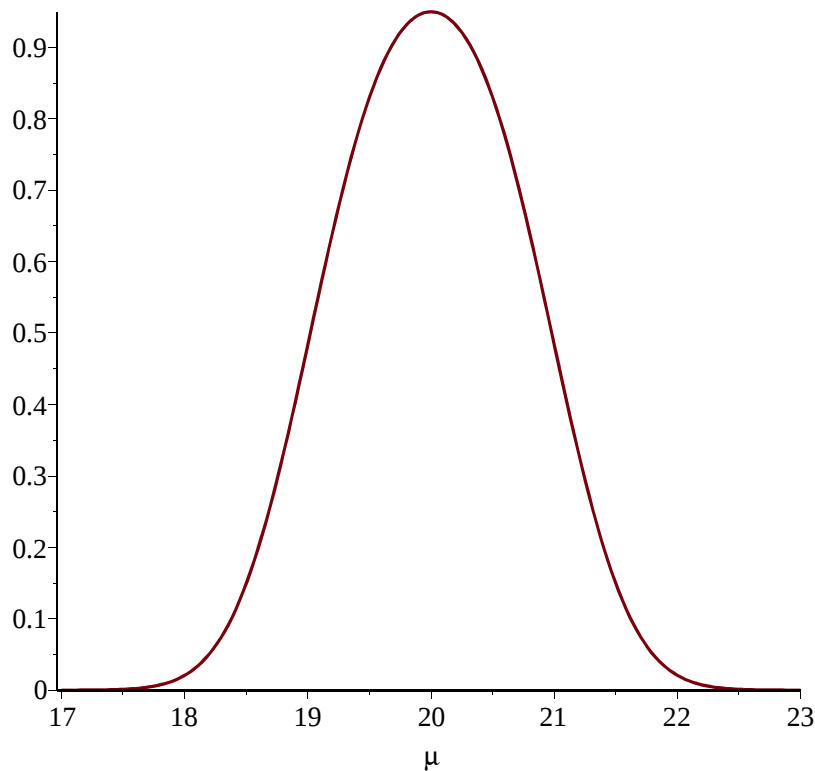
> $\beta := \text{CDF}(Y2, c2) - \text{CDF}(Y2, c1)$

$Y2 := _R2$

$\beta := -0.5000000000 \operatorname{erf}\left(-29.67017506 + 1.414213562 \mu\right) + 0.5000000000 \operatorname{erf}\left(-26.89836742 + 1.414213562 \mu\right)$ (1.5.8)

> $OC := \text{plot}(\text{beta}, \text{mu} = 17..23, \text{title} = \text{"Kétoldalú teszt jelleggörbéje vagyis az Operating Characteristic (OC)-görbe"}) : OC;$

Kétoldalú teszt jelleggörbéje vagyis az Operating Characteristic (OC)-
görbe



Az OC-görbe maximumát a $\mu_0 = 20$ helyen veszi fel, ahol értéke $\beta = 1 - \alpha = 0.95$.

> 'beta'(mu0) = evalf(eval(beta, mu = mu0)); % + alpha;

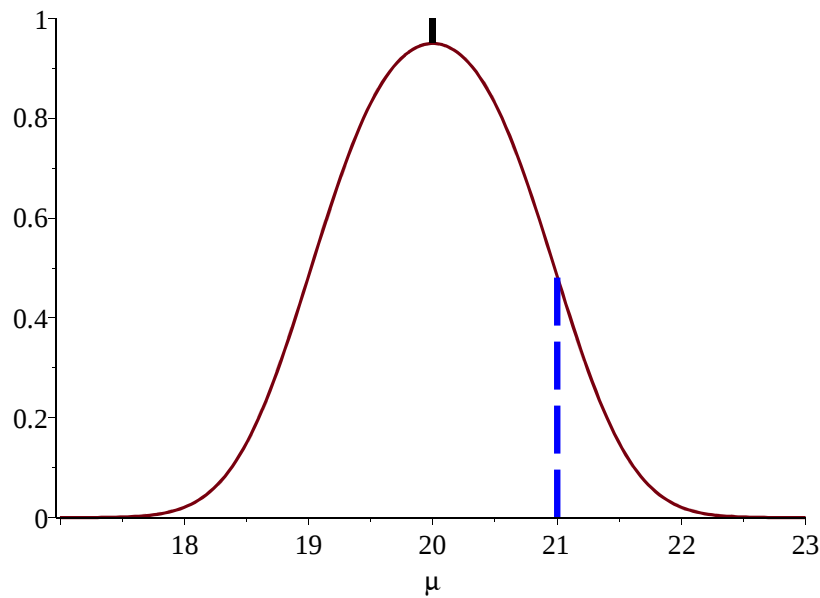
$\beta(20) = 0.9499999992$

$-0.5000000000 \operatorname{erf}(-29.67017506 + 1.414213562 \mu)(20) + 0.5000000000 \operatorname{erf}(-26.89836742 + 1.414213562 \mu)(20) + 0.05 = 0.9999999992$ (1.5.9)

Rajzoljuk be (kékkel) az előbbieken számolt másodfajú hibát a $\mu = 21$ feltételezés mellett az ábrába és az első fajú hibát (feketével) szaggatottan!

> vonal := plot([[21, 0], [21, beta21]], [[20, 1-alpha], [20, 1]], linestyle = 3, color = [blue, black], thickness = 3); plots[display]([OC, vonal]);

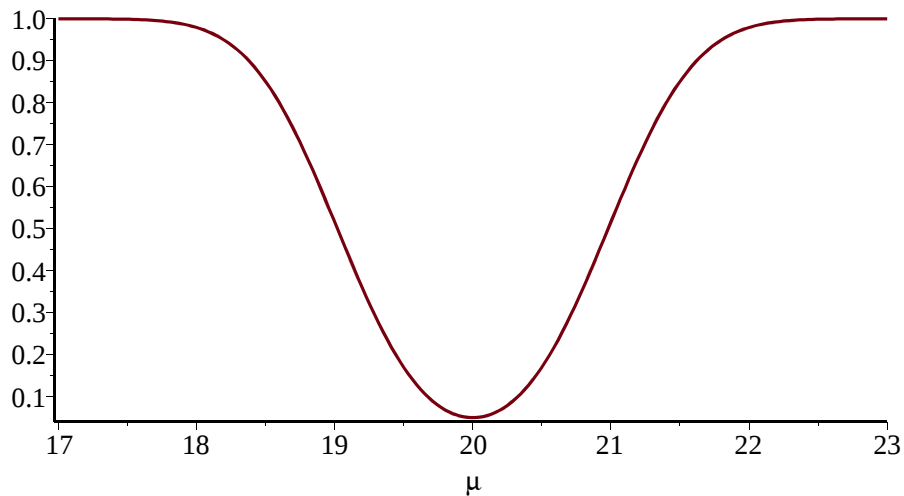
Kétoldalú teszt jelleggörbéje vagyis az Operating Characteristic (OC)-
görbe



Az erő függvény ábrája ebből egyszerűen úgy adódik, hogy kivonjuk 1-ből! Ennek minimuma van a $\mu = 20$ helyen. Vagyis itt a leggyengébb a módszer másodfajú hiba tekintetében!

> `plot(1 - beta, mu = 17..23, title = "A kétoldalú teszt erő függvénye");`

A kétoldalú teszt erő függvénye



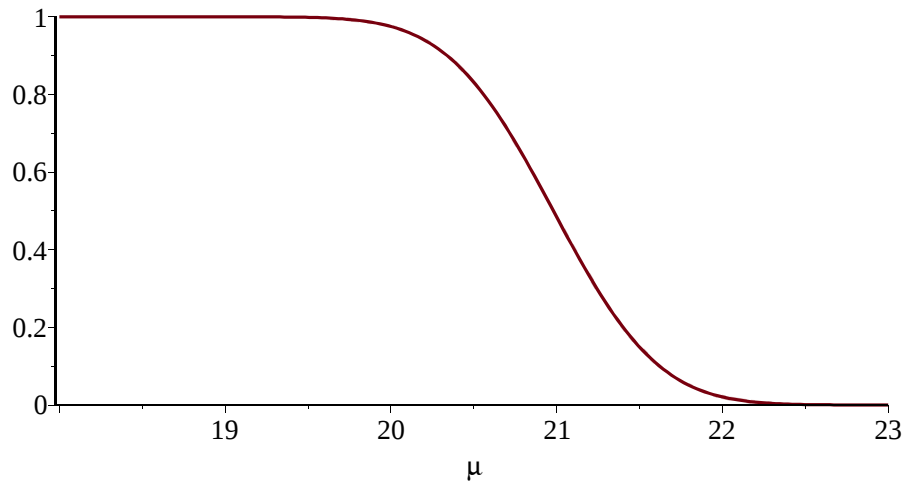
Amennyiben az alternatív hipotézis a $H_1: \mu_0 < \mu$ egy oldalú becslés, akkor ennek OC-görbéje a következő alakú.

> `OC := CDF(Y2, c2);`

```
plot(OC, mu = 18..23, title
     = "Egyoldalú teszt működési jelleggörbéje vagy Operating Characteristic görbéje");
```

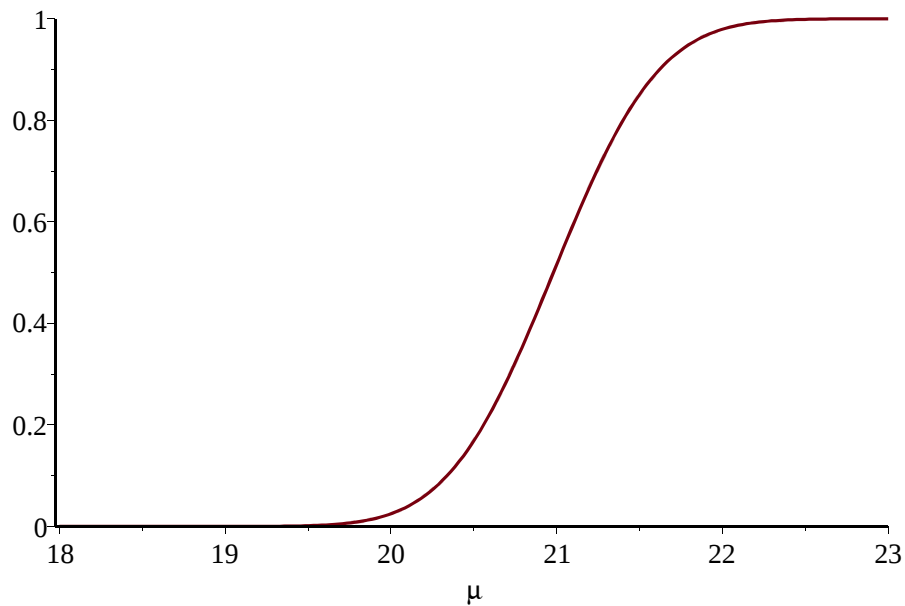
$$OC := 0.5000000000 - 0.5000000000 \operatorname{erf}(-29.67017506 + 1.414213562 \mu)$$

Egyoldalú teszt működési jelleggörbéje vagy Operating Characteristic görbéje



```
> plot(1 - OC, mu = 18..23, title = "Egyoldalú teszt erő függvénye");
```

Egyoldalú teszt erő függvénye



▼ 16.5. Fiúk és lányok születési arányának tesztje. Diszkrét eset közelítése normál eloszlással.

A következő hipotézis és tesztje látszólag a diszkrét eloszlásról szól, mégsem tudunk elszakadni a normál eloszlástól.

16.5.1. PÉLDA. Egy oldalú teszt

Vizsgáljuk a lányok és fiúk születési arányának tesztjét az egy gyermekes születések esetében. Jelölje p a fiúk születési arányát és legyen

$$H_0 : p = \frac{1}{2}.$$

a hipotézisünk, vagyis a fiúk és lányok egyenlő arányban születnek.

Grázban (Ausztria) egy adott periódus alatt megfigyelték, hogy $n=3000$ egy gyermekes születések esetén a fiúk száma $f=1578$ volt.

Igaz-e a hipotézis az adatokra, $\alpha = 0.01$ szignifikancia szinten?

Mivel a fiúk száma nagyobb, mint $\frac{3000}{2} = 1500$, ezért az alternatív hipotézisnek célszerű a

$$H_1 : \frac{1}{2} < p$$

kijelentést választani. Ugyanis, ha elvetjük a H_0 hipotézist, akkor azt kell helyette elfogadni,

hogy a fiúk születési aránya nagyobb, mint $\frac{1}{2}$.

MEGOLDÁS

Jelölje X a fiúk számát a 3000 születésből. Valójában $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ eloszlású, ahol $n=3000$ és $p = \frac{1}{2}$. Megmutatjuk, hogy ez a binomiális eloszlás valójában nem különbözik az

$N(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)})$ normál eloszlástól, mivel n értéke nagy.

> *restart : with(Statistics) :*

> $n, f, p, \alpha := 3000, 1578, \frac{1}{2}, 0.01$

$n, f, p, \alpha := 3000, 1578, \frac{1}{2}, 0.01$ (1.6.1)

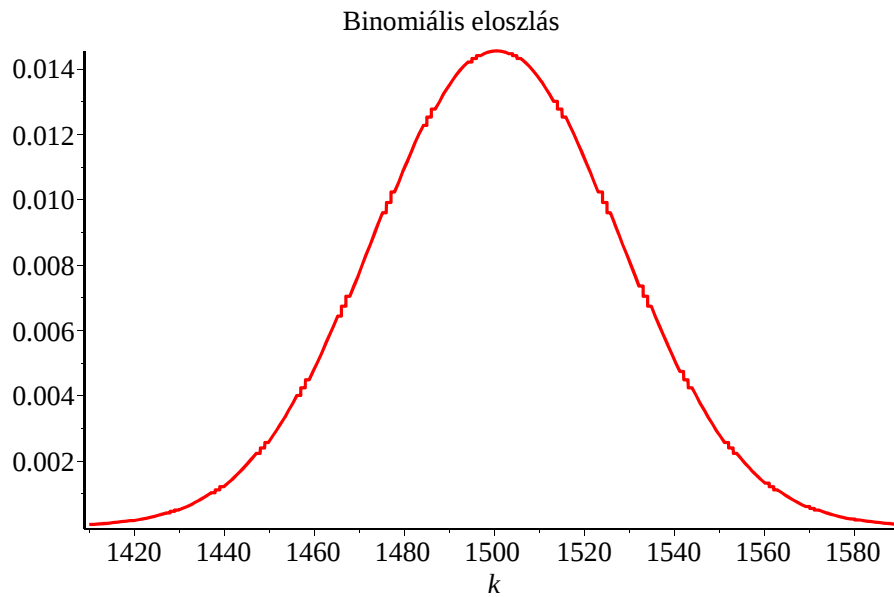
Rajzoljuk fel a binomiális eloszlást!

> $X := \text{RandomVariable}(\text{Binomial}(n, p)) :$

> $fX := \text{unapply}(\text{ProbabilityFunction}(X, k), k) : fX'(x) = fX(k)$

> $\text{surusegX} := \text{plot}(fX(\text{floor}(k)), k = 1410 .. 1590, \text{color} = \text{red}, \text{title} = \text{"Binomiális eloszlás"}) :$
 surusegX

$$fX(x) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \text{binomial}(3000, k) \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{3000-k} & \text{otherwise} \end{cases}$$



Adjuk meg azt a normál eloszlást, melynek várható értéke és szórása megegyezik a binomiális eloszlásával!

> *átlag := n·p; szórás := evalf(sqrt(n·p·(1-p)));*

átlag := 1500

szórás := 27.38612788

(1.6.2)

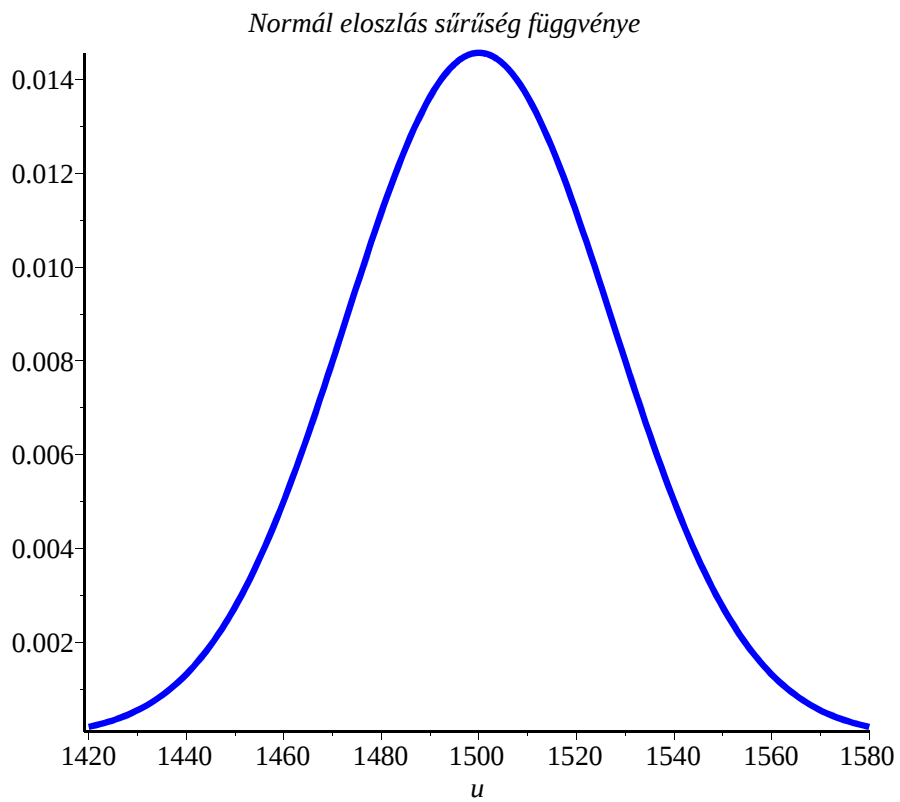
> *Y := RandomVariable(Normal(átlag, szórás))*

> *fY := unapply(PDF(Y, u), u)*

> *surusegY := plot(fY(u), u = 1420..1580, color = blue, thickness = 3, title
= Normál eloszlás sűrűség függvénye) :*
surusegY

Y := _R0

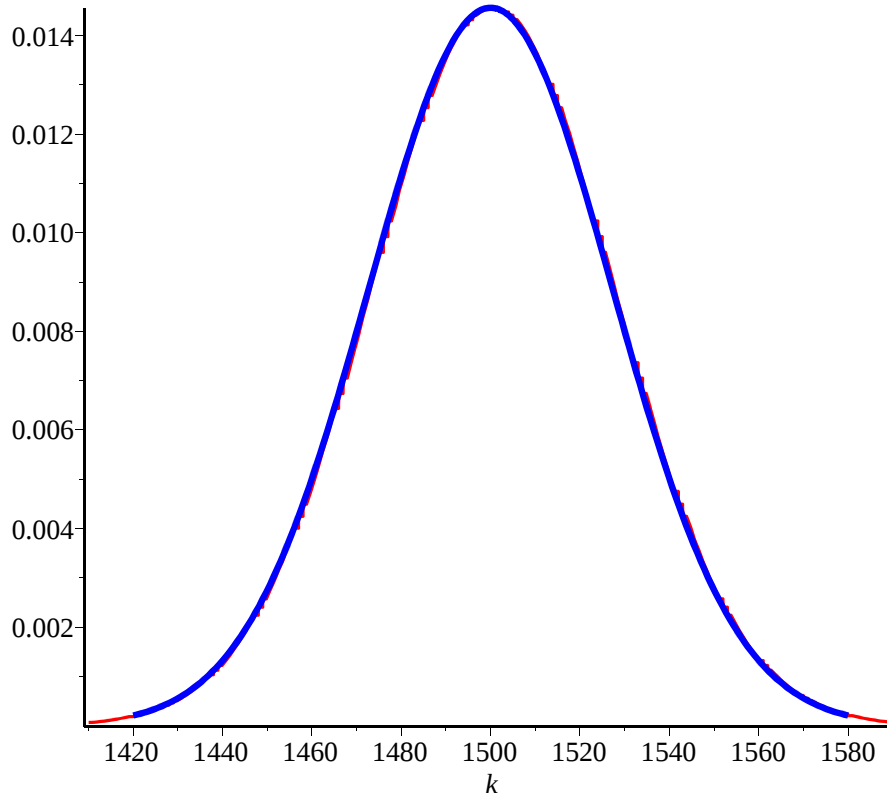
$$fY := u \rightarrow \frac{0.01825741858 \sqrt{2} e^{-0.0006666666665 (u - 1500)^2}}{\sqrt{\pi}}$$



Tegyük egybe a két ábrát!

```
> plots[display]([surusegX, surusegY], title  
= "A binomiális eloszlás és a normál eloszlás eloszlásfüggvénye");
```

A binomiális eloszlás és a normál eloszlás eloszlásfüggvénye

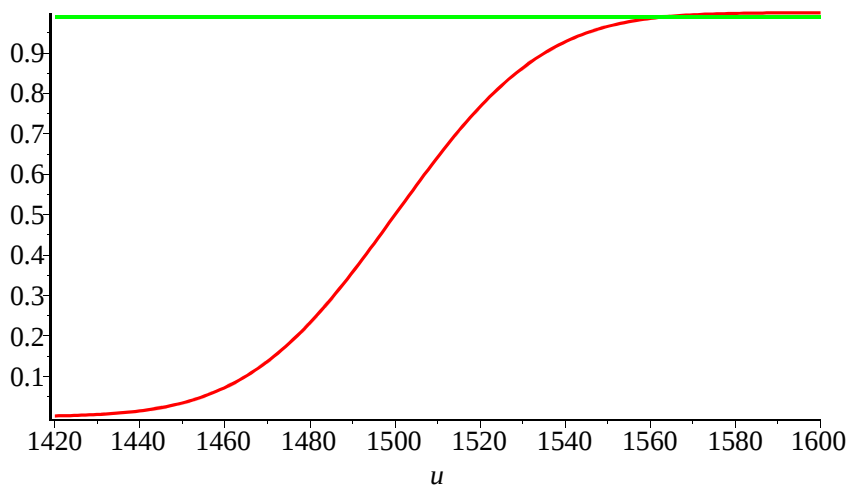


Mivel az ellen hipotézisünk egy oldalú, ezért a normál eloszlás eloszlásfüggvényéhez olyan u kritikus értéket kell keresnünk, melyre a

$$P(X > u \mid H_0) = \alpha = 0.01$$

feltétel teljesül! Ez az első fajú hiba!

> `plot([CDF(Y, u), 1 - alpha], u = 1420..1600, color = [red, green]);`



Felírjuk az egyenletet és megkeressük a közelítő megoldását az ábrán látható intervallumon!

> $u := 'u'; e := CDF(Y, u) = 1 - \alpha$

> $u := fsolve(e, 'u' = 1560 .. 1570);$

$$e := \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(0.01825741858 (u - 1500) \sqrt{2}\right) = 0.99$$

$$u := 1563.709660 \quad (1.6.3)$$

Összehasonlítjuk a kapott $u=1563.7$ értéket a megfigyelt $f=1578$ fiú születési számmal!

> $u < f;$

$$1563.7096600000 < 1578 \quad (1.6.4)$$

Mivel a **kritikus** $u=1563.7$ értéknél nagyobb a fiúk $f=1578$ **mért** születési száma, ezért a H_0 :

$p = \frac{1}{2}$ hipotézist $\alpha=0.01$ szignifikancia szinten elvetjük és így az alternatív hipotézis

$$H_1: \frac{1}{2} < p$$

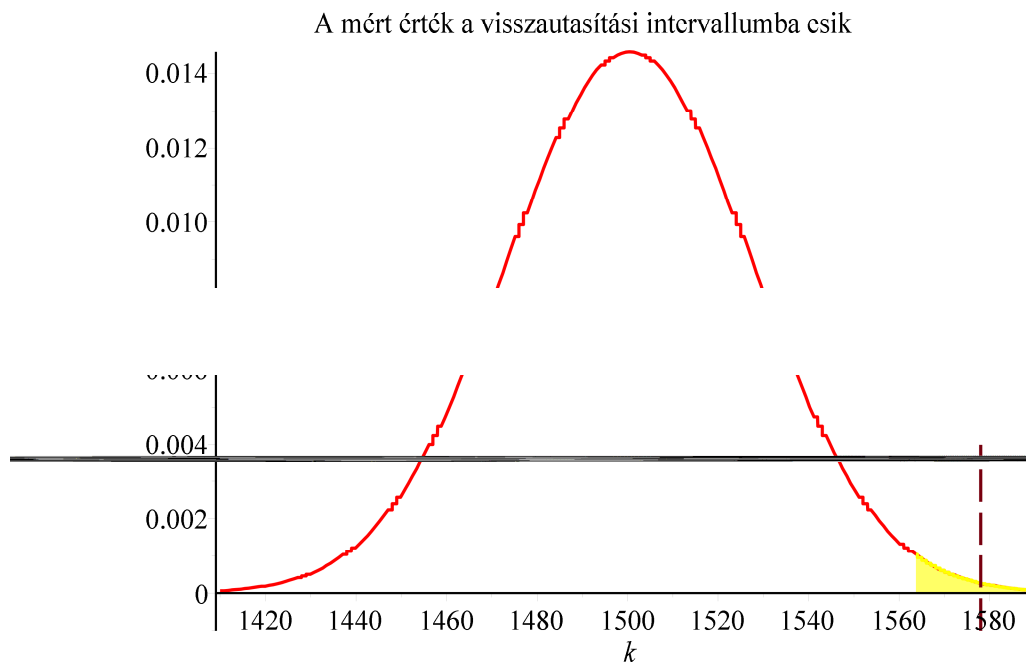
lép életbe!

> $fest := plot(fX(floor(k)), k = u .. 1590, color = yellow, filled = true) :$

$vonal := plot([f, -0.001], [f, 0.004], linestyle = 3) :$

$plots[display]([surusegX, fest, vonal], title$

$= "A \text{ mért érték a visszautasítási intervallumba esik}");$



Tehát 95%-os megbízhatósággal a fiúk születési aránya nagyobb, mint $\frac{1}{2}$.

▼ 16.6. Két normál eloszlás várható értékének összehasonlító tesztje. Kétmintás T-teszt.

Két adatsor esetén felmerül a kérdés, hogy vajon ugyanabból a populációból valók -e az adatok! Nem szükséges ismerni a populáció várható értékének mértékét, még magát az eloszlást sem! Feltesszük viszont, hogy a szórások azonosak.

A Maple *Statistics* csomagban levő **TwoSampleTTest** eljárását használjuk, amely eldönti a $H_0: E(X) = E(Y)$

null hipotézist, a

$H_1: E(X) \neq E(Y)$

alternatív hipotézissel szemben.

16.6.1. PÉLDA. Két mintás T-teszt

Vizsgáljuk az

$X = [105, 108, 86, 103, 103, 107, 124, 105]$ és $Y = [89, 92, 84, 97, 103, 107, 111, 97]$ adatsorokra, hogy azonos-e a várható értékük $\gamma=95\%$ -os megbízhatósági szinten?

Megoldás

> *restart* :

> $X := [105, 108, 86, 103, 103, 107, 124, 105]$:

> $Y := [89, 92, 84, 97, 103, 107, 111, 97]$:

Az adatszámok egyeznek, de nem feltétlenül kell egyenlőknek lenni!

> *with(Statistics)* :

> *n1 := Count(X); n2 := Count(Y)*

n1 := 8

n2 := 8

(1.7.1)

Az átlagok "jelentősen" különböznek!

> *átlag1 := Mean(X);*
átlag2 := Mean(Y);
különbség = átlag2 - átlag1;

átlag1 := 105.125000000000

átlag2 := 97.500000000000

különbség = -7.625000000000

(1.7.2)

A szórások eltérése úgy szintén jelentős!

> *V1 := StandardDeviation(X);*
V2 := StandardDeviation(Y);

V1 := 10.3016988890183

V2 := 9.16515138991168

(1.7.3)

Beállítjuk a szignifikancia szintet!

> *alpha := 0.05;*

α := 0.05

(1.7.4)

A két mintás T tesztet használjuk, mert a szórásokat a minta alapján számoljuk!

> *infolevel[Statistics] := 1;*

> *TwoSampleTTest(X, Y, 0, confidence = 0.95, equalvariances = true)*

Standard T-Test on Two Samples (Equal Variances)

Null Hypothesis:

Sample drawn from populations with difference of means equal to 0

Alt. Hypothesis:

Sample drawn from population with difference of means not equal to 0

Sample sizes: 8, 8

Sample means: 105.125, 97.5

Sample standard devs.: 10.3017, 9.16515

Difference in means: 7.625

Distribution: StudentT(14)

Computed statistic: 1.5641

Computed pvalue: 0.140111

Confidence interval: -2.83083490398164 .. 18.0808349039816
(difference of population means)

Result: [Accepted]

There is no statistical evidence against the null hypothesis

hypothesis = true, confidenceinterval = -2.83083490398164..18.0808349039816,

(1.7.5)

distribution = StudentT(14), pvalue = 0.140110702953864, statistic

$$= 1.56410256410256$$

Tehát a $H_0 : E(X) = E(Y)$ hipotézis igaz, vagyis 95%-os megbízhatósági szinten a két minta azonos várható értékű.

Az eloszlás, amit használt az eljárás a StudentT(14) eloszlás, melynek szabadsági foka = $(n - 1) + (m - 1) = 7 + 7 = 14$.

▼ 16.7. Élettartam eloszlás becslése, ismert paraméter esetén. Az illesztés jóságának tesztje, ha a gyakoriságok adottak.

16.7.1. PÉLDA

Háromszáz izzólámpa T élettartamát mérték órákban és az alábbi gyakoriság táblázatot kapták
Élettartam (órában) Izzók száma

$T < 100$	121
$100 \leq T < 200$	78
$300 \leq T$	58

	300

Vizsgáljuk a

H_0 : lámpa izzók T élettartama exponenciális eloszlású, melynek várható élettartama 200 óra hipotézis teljesülését.

(a) Teszteljük a H_0 hipotézist $\alpha = 0.05$ szignifikancia szinten az exponenciális eloszlás értékeinek összehasonlításával!

(b) Teszteljük a H_0 hipotézist a *ChiSquareGoodnessOfFitTest* eljárás segítségével $\alpha = 0.05$ szignifikancia szinten az (a) részben kiszámolt közelítést használva!

(c) Hasonlítsuk össze az (a) és (b) tesztből kapott statisztikai értékeket!

Megoldás

(a) Teszteljük a H_0 hipotézist $\alpha = 0.05$ szignifikancia szinten az exponenciális eloszlás értékeinek összehasonlításával!

Az osztásközök száma $n = 4$.

> restart : n := 4;

$$n := 4 \quad (1.8.1)$$

Megadjuk a mért gyakoriságok listáját és a megfelelő időközök listáját!

> gyak := [121, 78, 43, 58]

> idok := [0..100, 100..200, 200..300, 300..∞]

$$gyak := [121, 78, 43, 58]$$

$$idok := [0..100, 100..200, 200..300, 300..∞] \quad (1.8.2)$$

Az összes $N = 300$ mérési adatszámot a gyakoriságok összegzésével kapjuk!

> N := add(gyak[k], k = 1..4);

$$N := 300 \quad (1.8.3)$$

A *Statistics* csomagban az exponenciális eloszlás λ paramétere a várható értéke (és nem ennek reciproka!). Ez 200 óra, a feltételezések alapján!

> with(Statistics) :

> λ := 200

$$(1.8.4)$$

$\lambda := 200$

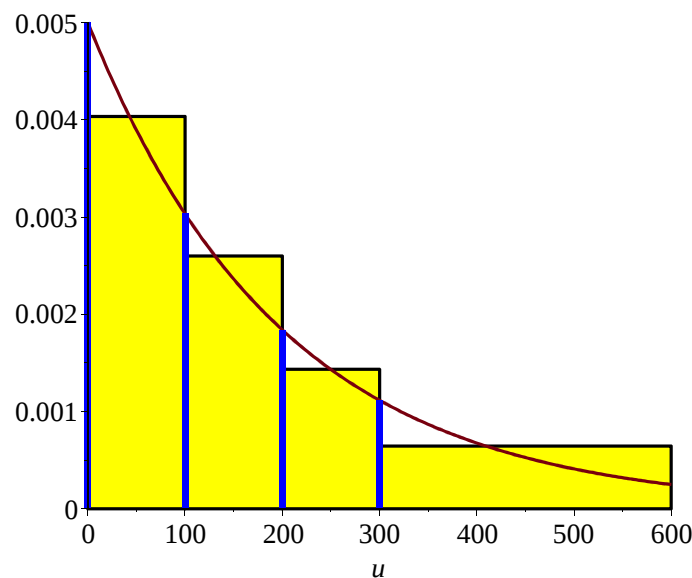
(1.8.4)

Vegyük fel az X exponenciális eloszlású véletlen változót és rajzoljuk fel **sűrűség függvényét** $T = 0 \dots 500$ óra idő intervallumon!

Rajzoljuk az ábrához a mért **relatív gyakoriságokat**!

```
> X := RandomVariable( Exponential(λ) ) :
> F := unapply( CDF( X, u ), u ) :
  f := unapply( PDF( X, u ), u ) : 'F'(u) = F(u), 'f'(u) = f(u);
> suruseg := plot( f(u), u = 0 .. 600 ) :
  kozok := plot( [ seq( [ [k, 0], [k, f(k)] ], k = 0 .. 300, 100 ) ], color = blue, thickness = 3 ) :
  teglak := seq( plots[polygonplot] ( [ [k*100, 0], [(k+1)*100, 0], [(k+1)*100,
     $\frac{gyak_{k+1}}{100 N}$  ], [k*100,  $\frac{gyak_{k+1}}{100 N}$  ] ], color = yellow ), k = 0 .. 2 ) :
  utolso := plots[polygonplot] ( [ [300, 0], [600, 0], [600,  $\frac{gyak_4}{300 N}$  ], [300,  $\frac{gyak_4}{300 N}$  ] ], color
    = yellow ) :
plots[display]( [suruseg, kozok, teglak, utolso] )
```

$$F(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{200} u} & \text{otherwise} \end{cases}, f(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ \frac{1}{200} e^{-\frac{1}{200} u} & \text{otherwise} \end{cases}$$



A (a) pont számításainak bemutatásához vegyük fel egy 5 oszlopból álló M mátrixot, melynek **oszlopait** folyamatosan töltjük fel a számítás lépéseinek megfelelően!
Az első oszlop az élettartamra vonatkozó intervallumokat, a második a megfigyelt gyakoriságokat tartalmazza! Az utolsó sorban mindig **összegeket** számolunk!

```

> k := 'k': M := Matrix(6, 5) : M1,1 := Intervallumok(Tk) : M1,2 := Gyakoriságok(fk) :
M1,3 := Valószínűségek(pk) : M1,4 := N pk :
> M1,5 :=  $\frac{f_k^2}{N \cdot p_k}$  : M6,1 := Összegek :
> for i from 2 to nops(gyak) + 1 do Mi,1 := idoki-1 : Mi,2 := gyaki-1 end do : M6,2 := N :
> M;

```

Intervallumok(T _k)	Gyakoriságok(f _k)	Valószínűségek(p _k)	300 p _k	$\frac{1}{300} \frac{f_k^2}{p_k}$
0..100	121	0	0	0
100..200	78	0	0	0
200..300	43	0	0	0
300..∞	58	0	0	0
Összegek	300	0	0	0

(1.8.5)

A harmadik oszlopba az elméleti eloszlás - mely jelen esetben $\lambda=200$ várható értékű exponenciális eloszlás - sűrűség függvénye alatti terület értékét írjuk a megfelelő intervallumokon!
A számítás a

$$P(T_i) = \int_{a_i}^{b_i} f(x) dx = F(b_i) - F(a_i) = p_i$$

Newton-Leibniz-képlet alapján megy, ahol az i-ik intervallum $[a_i, b_i]$.

```

> for i from 2 to 5 do
M[i, 3] := evalf(F(op(2, M[i, 1])) - F(op(1, M[i, 1])), 4)
od;

```

$$M_{2,3} := 0.3935$$

$$M_{3,3} := 0.2386$$

$$M_{4,3} := 0.1448$$

$$M_{5,3} := 0.2231$$

(1.8.6)

A teljes görbe alatti terület 1!

```

> M6,3 := evalf(add(Mi,3, i = 2..5), 4)
> M

```

$$M_{6,3} := 1.000$$

(1.8.7)

<i>Intervallumok</i> (T_k)	<i>Gyakoriságok</i> (f_k)	<i>Valószínűségek</i> (p_k)	$300 p_k$	$\frac{1}{300} \frac{f_k^2}{p_k}$
0..100	121	0.3935	0	0
100..200	78	0.2386	0	0
200..300	43	0.1448	0	0
300.. ∞	58	0.2231	0	0
<i>Összegek</i>	300	1.000	0	0

(1.8.7)

A negyedik oszlopba az ($N \cdot p_k$) szorzatokat, tehát a harmadik oszlop értékeit rendre megszorozzuk N=300-zal! Így nagyságrendileg a második oszloppal azonos számokat kapunk!

```
> for i from 2 to 5 do
    M[i, 4] := evalf(N·M[i, 3], 5)
od;
M[6, 4] := add(M[i, 4], i = 2..5);
M;
```

$$M_{2,4} := 118.05$$

$$M_{3,4} := 71.580$$

$$M_{4,4} := 43.440$$

$$M_{5,4} := 66.930$$

$$M_{6,4} := 300.000$$

<i>Intervallumok</i> (T_k)	<i>Gyakoriságok</i> (f_k)	<i>Valószínűségek</i> (p_k)	$300 p_k$	$\frac{1}{300} \frac{f_k^2}{p_k}$
0..100	121	0.3935	118.05	0
100..200	78	0.2386	71.580	0
200..300	43	0.1448	43.440	0
300.. ∞	58	0.2231	66.930	0
<i>Összegek</i>	300	1.000	300.000	0

(1.8.8)

Az utolsó oszlopot úgy kapjuk, hogy a második oszlopban levő n_k értékeket rendre elosztjuk a negyedik oszlopbeli ($N \cdot p_k$) megfelelő értékekkel!

```
> for i from 2 to 5 do
    M[i, 5] := evalf(
        M[i, 2]^2 / M[i, 4], 5
    )
od;
M[6, 5] := add(M[i, 5], i = 2..5);
M;
```

$$M_{2,5} := 124.02$$

$$M_{3,5} := 84.996$$

$$M_{4,5} := 42.564$$

$$M_{5,5} := 50.261$$

$$M_{6,5} := 301.841$$

$Intervallumok(T_k)$	$Gyakoriságok(f_k)$	$Valószínűségek(p_k)$	$300 p_k$	$\frac{1}{300} \frac{f_k^2}{p_k}$	
0..100	121	0.3935	118.05	124.02	
100..200	78	0.2386	71.580	84.996	
200..300	43	0.1448	43.440	42.564	
300..∞	58	0.2231	66.930	50.261	
Összegek	300	1.000	300.000	301.841	(1.8.9)

Az ötödik (utolsó) oszlop összegéből vonjuk ki a negyedik oszlop összegét (mely az N=300 kell, hogy legyen kis kerekítési hibával)!

> *statisztika* := $M_{6,5} - N$;

$$statisztika := 1.841 \quad (1.8.10)$$

A kapott értéket össze kell hasonlítani az $(n - 1)$ szabadságfokú khi-négyzet eloszlásból számolt azon értékkel, melyre az eloszlásfüggvény értéke eléri a $0.95 = 1 - \alpha$ megbízhatósági szintet.

> $Y := RandomVariable(ChiSquare(n-1))$; $e := CDF(Y, u) = 0.95$;

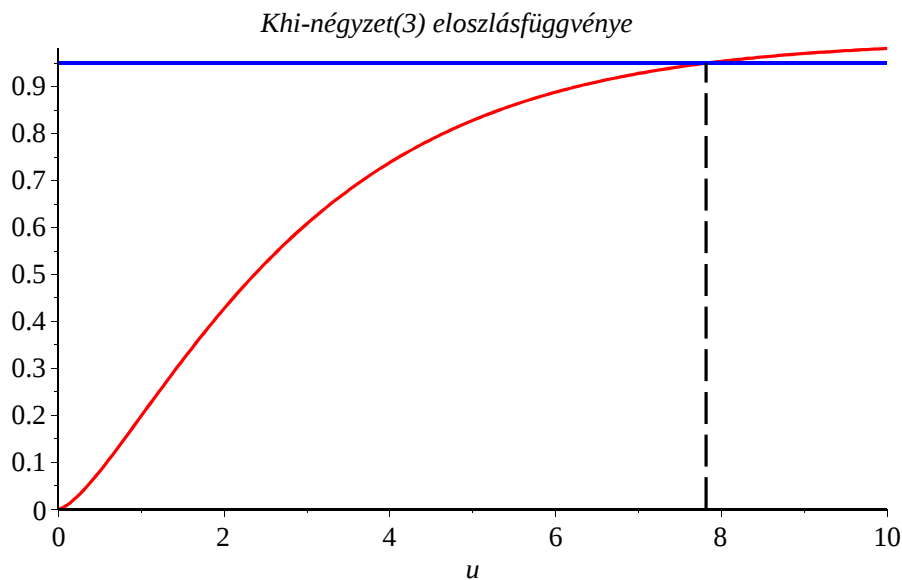
$$e := \begin{cases} 0 & u < 0 \\ 1 - \frac{2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{u} e^{-\frac{1}{2}u} + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{u}\right) \right)}{\sqrt{\pi}} & \text{otherwise} \end{cases} = 0.95 \quad (1.8.11)$$

> $(\chi^2)_{n-1} = fsolve(e, u)$; $kritikus := rhs(\%)$;

$$(\chi^2)_3 = 7.814727903 \quad (1.8.12)$$

Tehát a 7.8147 kritikus helyen éri el a 3 szabadsági fokú khi-négyzet eloszlás eloszlásfüggvénye a 0.95 szintet! A számítást az alábbi ábra szemlélteti!

> *rajz1* := $plot([lhs(e), rhs(e)], u = 0..10, color = [red, blue])$;
rajz2 := $plot([[kritikus, 0], [kritikus, rhs(e)]], color = black, linestyle = 3)$;
 $plots[display]([rajz1, rajz2], title = \text{Khi-négyzet(3) eloszlásfüggvénye})$;



Mivel az adatokból számolt 1.84 **statisztikai érték** kisebb, mint a 7.814 kritikus khi-négyzet érték, ezért a H_0 hipotézist, mely szerint az izzó élettartama exponenciális eloszlású átlagosan 200 óra élettartammal, elfogadjuk 0.95 megbízhatósági szinten.

(b) Teszteljük a hipotézist a **ChiSquareGoodnessOfFitTest** eljárás segítségével is $\alpha = 0.05$ szignifikancia szinten!

> *infolevel[Statistics] := 1 :*

> *statisztika := ChiSquareGoodnessOfFitTest(gyak, [seq($M_{k,4}$, $k = 2 \dots 5$)], level = 0.05)*

Chi-Square Test for Goodness-of-Fit

Null Hypothesis:

Observed sample does not differ from expected sample

Alt. Hypothesis:

Observed sample differs from expected sample

Categories:	4
Distribution:	ChiSquare(3)
Computed statistic:	1.84545
Computed pvalue:	0.605095
Critical value:	7.81472828803626

Result: [Accepted]

There is no statistical evidence against the null hypothesis

statisztika := hypothesis = true, criticalvalue = 7.81472828803626, distribution

(1.8.13)

= ChiSquare(3), pvalue = 0.605094639471105, statistic = 1.845451575

A kétféleképpen kapott statisztikai értékek megegyeznek, amely azt igazolja, hogy az (a) részben leírt algoritmus megegyezik a **ChiSquareGoodnessOfFitTest** Maple eljárásba beépített számítási módszerrel!

ILLESZTÉS JÓSÁGÁNAK TESZTJE

Legyen n_i a megfigyelések száma az i -ik kategóriában, ahol $i = 1, 2, \dots, k$ és $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

$$H_0 : p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}, \dots, p_k = p_{k0}$$

$$H_1 : p_i \neq p_{i0} \text{ legalább egy } i \text{ esetén.}$$

$$\text{Teszt statisztika: } \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n \cdot p_{i0})^2}{n \cdot p_{i0}}$$

A null hipotézis mellett χ^2 eloszlása közelítőleg khi-négyzet $(k - 1)$ szabadságfokkal és a közelítés megfelelő, ha $n \cdot p_{i0} \geq 5$ teljesül minden $i = 1, 2, \dots, k$ esetén.

$$\text{Feltétel: } \chi^2 > \chi_{\alpha, k-1}^2$$

ahol $P(X > \chi_{\alpha, k-1}^2) = \alpha$, X eloszlása khi-négyzet $(k - 1)$ szabadságfokkal.

16.8. Elméleti ellenőrző kérdések

16.8.1. Mit nevezünk statisztikai hipotézisnek? Mondjon példát!

16.8.2. Hogyan tesztelünk egy hipotézist?

16.8.3. Mikor nevezzük egyszerűnek és mikor összetettnek a hipotézist? Mondjon példát!

16.8.4. Milyen állítás az alternatív hipotézis? Mondjon példát!

16.8.5. Mit értünk a hipotézis kritikus tartomány alatt?

16.8.6. Hogyan értelmezzük egy hipotézis elsőfajú hibáját szavakkal és hogyan feltételes valószínűséggel?

16.8.7. Hogyan értelmezzük egy hipotézis másodfajú hibáját szavakkal és hogyan feltételes valószínűséggel?

16.8.8. Mit tesztel az egy mintás Z-teszt?

16.8.9. Hogyan lehet egy teszt elfogadását és visszautasítását megfogalmazni a p -értékkel?

16.8.10. Mit értünk egy teszt működési jelleggörbéje (OC-görbe) alatt?

16.8.11. Mit értünk egy teszt erő függvénye alatt?

16.8.12. Hogyan szól a két mintás T-teszt H_0 hipotézise?

16.8.13. Milyen hipotézist tesztelhetünk az illesztés jóságának tesztjével?

16.9. Gyakorló feladatok

16.9.1. feladat

A repülőgép személyzetének menekülési rendszerét szilárd hajtóanyaggal szerelik fel. Ennek a hajtóanyagnak egyik fontos jellemzője az égés sebessége, melynek értéke normál eloszlás szerint változik. A követelmény kötelezően előírja, hogy az égés átlagos v sebessége 50 centiméter legyen másodpercenként. Ismert, hogy az égés sebességének szórása $\sigma = 2$ centiméter másodpercenként. A kísérletet tervezők elhatározták, hogy az I. típusú hiba valószínűségét $\alpha = 0.05$ szignifikancia szinten tartják és $n=25$ elemű véletlen mintát vesznek. A vizsgált minták átlagos égési sebessége 51.3 centiméter volt másodpercenként.

(a) Milyen következtetés vonható le az adatok alapján?

(b) Mekkora legyen a minta n mérete, ha a várható értékre $L=1$ [cm/sec] összhosszúságú konfidencia intervallumot szeretnének kapni $\alpha=0.05$ szignifikancia szinten!

(c) Rajzoljuk fel a $\beta(\mu)$ másodfajú hiba függvényt és az $(1 - \beta(\mu))$ erő függvényt, a μ tényleges

várható érték függvényében!

16.9.2. feladat

A "Transactions of the American Fisheries Society" folyóirat 1993-as kötetének egyik jelentése a tengeri süllőben található higany szennyeződés méréséről közölt adatokat. Megmérték 53 hal izom szövetének higany koncentrációját! Az alábbi adatokat közölték a higany koncentrációkra:

1.230,1.330,0.040,0.044,1.200,0.270,0.490,0.190,0.830,0.810,0.710,0.500,0.490,1.160,0.050, 0.150,0.190,0.770,1.080,0.980,0.630,0.560,0.410,0.730, 0.590,0.340,0.340,0.840,0.500,0.340, 0.280,0.340,0.750,0.870,0.560,0.170,0.180,0.190,0.040,0.490,1.100,0.160,0.100,0.210,0.860, 0.520,0.650,0.270, 0.940,0.400,0.430,0.250,0.270

(a) Rajzoljuk fel a higany koncentráció hisztogramját és a normál eloszlás sűrűség függvényét együtt!

(b) Állíthatjuk-e 95%-os megbízhatósággal, hogy a higany szennyeződés eloszlása normál eloszlást követ?

(c) Ellenőrizzük 5%-os konfidencia szinten annak a hipotézisnek az igazságát, hogy a higany szennyeződés koncentrációja 0.5! (Használjuk a **OneSampleTTest** eljárást is és számoljunk részletesen is!)

(d) Adjunk meg a higany szennyeződésre olyan intervallumot, melybe 95%-os megbízhatósággal az 53 mérés átlagának bele kell esni!

(e) Mennyi mintát kell venni, hogy 95%-os megbízhatósággal $L=0.14$ hosszúságú konfidencia intervallumot kapjunk koncentrációk átlagára?

16.9.3. feladat

Egy félvezetőket gyártó cég által készített termékeket felhasználja a személyi számítógépek központi egységeihez. Az eszközök sebessége (megahertz-ben mérve) fontos jellemző, mert ez határozza meg az eszközök értékét. Az alábbi táblázat 120 CPU sebességi adatát tartalmazza megahertz-ben.

CPU:=[680, 669, 719, 699, 670, 710, 722, 663, 658, 634, 720, 690, 677, 669, 700, 718, 690, 681, 702, 696, 692, 690, 694, 660, 649, 675, 701, 721, 683, 735, 688, 763, 672, 698, 659, 704, 681, 679, 691, 683, 705, 746, 706, 649, 668, 672, 690, 724, 652, 720, 660, 695, 701, 724, 668, 698, 668, 660, 680, 739, 717, 727, 653, 637, 660, 693, 679, 682, 724, 642, 704, 695, 704, 652, 664, 702, 661, 720, 695, 670, 656, 718, 660, 648, 683, 723, 710, 680, 684, 705, 681, 748, 697, 703, 660, 722, 662, 644, 683, 695, 678, 674, 656, 667, 683, 691, 680, 685, 681, 715, 665, 676, 665, 675, 655, 659, 720, 675, 697, 663]

(a) Rajzoljuk fel a gyakoriság hisztogramot és közelítsük normál eloszlással!

(b) Teszteljük 95%-os megbízhatósági szinten, hogy a mérési adatok normális eloszlásúak!

(c) Ellenőrizzük 5%-os konfidencia szinten annak a H_0 hipotézisnek az igazságát, hogy a CPU sebességek átlaga $\mu_0 = 690$ (MHz)! (Használjuk a **OneSampleTTest** eljárást is és számoljunk részletesen is!)

(d) Mennyi mintát kell venni, hogy 95%-os megbízhatósággal $L = 8$ hosszúságú konfidencia intervallumot kapjunk CPU sebességek átlagára?

(e) Rajzoljuk fel a (c) kérdéshez tartozó másodfajú hiba és az erő függvények grafikonjait a $\mu \neq \mu_0$ változtatásával!

16.9.4. feladat

Egy mobil telefonokat árúsító üzlet 4 különböző gyártó (A, B, C és D) telefonjait árúsítja. A tavalyi eladások cégek szerinti aránya az alábbiak szerint alakultak

	Tavalyi mobil eladások
--	---------------------------

Cégek	A	B	C	D
Százalékok	55%	25%	15%	5%

Ebben az évben az eladott 200 (ezer) darab mobil telefon eladásainak megoszlása az alábbiak szerint alakult

	Idei mobil eladások			
Cégek	A	B	C	D
Darabok	120	47	21	12

Az adatok alátámasztják-e azt a véleményt, hogy az eladási arányok átrendeződtek? Használjuk a khi-négyzet illesztés jóságának tesztjét $\alpha=0.05$ szignifikancia szinten!

16.9.5. feladat

Az alábbi adatok egy bizonyos akkumulátor fajta élettartamára vonatkozó mérések ipari alkalmazási környezetben. A feljegyzett élettartamok években adottak és egy tizedes jegyre kerekítettek.

akkumulátor:=[4.1, 5.2, 2.8, 4.9, 5.6, 4.0, 4.1, 4.3, 5.4,
4.5, 6.1, 3.7, 2.3, 4.5, 4.9, 5.6, 4.3, 3.9,
3.2, 5.0, 4.8, 3.7, 4.6, 5.5, 1.8, 5.1, 4.2,
6.3, 3.3, 5.8, 4.4, 4.8, 3.0, 4.3, 4.7, 5.1]

- Rajzoljuk fel az akkumulátorok élettartamának gyakoriság hisztogramját!
- Rajzoljuk be a gyakoriság hisztogramba annak a normál eloszlásnak a sűrűség függvényét, melynek várható értékét és szórását az adatokból számítjuk!
- Vajon az akkumulátorok élettartama normál eloszlást követ-e 95%-os megbízhatósággal?
- Adjunk meg konfidencia intervallumot az átlagos élettartamhoz $\alpha=0.05$ szignifikancia szinten!
- Teszteljük a H_0 : az élettartam átlaga = 4.5 (év) hipotézist $\alpha=0.05$ szignifikancia szinten, melynek alternatív hipotézise legyen a H_1 : az élettartam *átlaga* $\neq$ 4.5 (év) hipotézis!
- Mennyi mérést kell végezni ahhoz, hogy az élettartam várható értékére 95%-os megbízhatósági szinten $L=0.6$ összhosszú konfidencia intervallum adódjon?
- Rajzoljuk fel az (e) pontban felírt hipotézis $\beta(\mu)$ másodfajú hiba függvényét vagy OC-görbét és az erő függvényt!

16.9.6. feladat

Az alábbi adatokat 60 egymást követő napon mérték egy zöldségfélét tároló raktár relatív páratartalmára. A feljegyzett napi páratartalom adatok %-ban értendők!

paratartalom:=[60, 63, 64, 71, 67, 73, 79, 80, 83, 81,
86, 90, 96, 98, 98, 99, 89, 80, 77, 78,
71, 79, 74, 84, 85, 82, 90, 78, 79, 79,
78, 80, 82, 83, 86, 81, 80, 76, 66, 74,
81, 86, 84, 72, 79, 72, 84, 79, 76, 79,
74, 66, 84, 78, 91, 81, 64, 76, 78, 82]

- Rajzoljuk fel a páratartalom gyakoriság hisztogramját!
- Rajzoljuk be a gyakoriság hisztogramba annak a normál eloszlásnak a sűrűség függvényét, melynek várható értékét és szórását az adatokból számítjuk!
- Vajon a páratartalom adatsor normál eloszlást követ-e 95%-os megbízhatósággal?
- Számoljunk konfidencia intervallumot az átlagos páratartalomhoz $\alpha=0.05$ szignifikancia szinten!
- Teszteljük a

H_0 : a páratartalom átlaga = 80 (%) hipotézist $\alpha=0.05$ szignifikancia szinten, melynek alternatív hipotézise legyen a H_1 : a páratartalom *átlaga* $\neq$ 80 (%) hipotézis!

(f) Mennyi mérést kell végezni ahhoz, hogy a páratartalom várható értékére 95%-os megbízhatósági szinten $L=0.6$ összhosszú konfidencia intervallum adódjon?

(g) Rajzoljuk fel az (e) pontban felírt hipotézis $\beta(\mu)$ másodfajú hiba függvényét vagy OC-görbéjét és az erő függvényt!

16.9.7. feladat

A fonal szakító ereje - melyet a függöny anyaghoz használnak - előírás szerint legalább 100 [psi].

A vizsgálatok szerint a szakító erő normál eloszlású $\sigma = 3$ szórással. Véletlenszerűen $n=9$ elemű mintát vettek és az átlagos szakító erőre $\bar{x}_{\text{átlag}}=98$ [psi] értéket kaptak.

(a) Határozzuk meg a szakító erő átlagának 95%-os kétoldali konfidencia intervallumát!

(b) Teszteljük 95%-os szinten a hipotézist, hogy az átlagos szakító erő $\mu=100$ [psi].

(c) Hány elemű mintát kell kivenni, hogy a 95%-os kétoldali konfidencia intervallum hossza ± 2 [psi] legyen?

16.9.8. feladat

A televízió képcsövének fényerejét az áramerősség mértékével lehet szabályozni. Egy bizonyos fényességi szint eléréséhez 10 elemű mintában mérték az áramerősséget microamperben. A minta átlagára $\bar{x}_{\text{átlag}}=317.2$ [μA] értéket kaptak és a szórásra $\sigma= 15.7$ [μA] adódott.

(a) Határozzuk meg a az áramerősség átlagának 95%-os kétoldali konfidencia intervallumát! (2 p.)

(b) Teszteljük 95%-os szinten a hipotézist, hogy az átlagos áramerősség erő $\mu=310$ [μA]. (2 p.)

(c) Hány elemű mintát kell megmérni, hogy a 95%-os kétoldali konfidencia intervallum hossza ± 9 [μA] legyen?