TÁMOP- 4.1.2.A/1-11/1-2011-0098
„Műszaki és gazdasági szakok alapozó matematikai
ismereteinek e–learning alapú tananyag- és módszertani fejlesztése”

Lineáris algebra

Juhász Tibor

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638
MAGYARORSZÁG MEGÚJUL
A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.
ÚJ SZÉCHENYI TERV

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a jegyzet az Eszterházy Károly Főiskola Matematika, Programtervező informatikus, és Gazdaságinformatikus szakos hallgatói számára tartott Lineáris algebra I. előadások könnyebb követhetőségét szolgálja. Az anyag felépítésekor figyelembe vettük, hogy a kurzus hallgatói már rendelkeznek alapvető halmazelméleti és függvénytani ismeretekkel, hiszen azok a megelőző félévben a Kalkulus I., illetve Matematikai praktikum I. keretein belül elhangzanak, de a jegyzet nagy része stabil középiskolai ismeretek birtokában is követhető. Azokat az alapvető algebrai fogalmakat és tételeket, melyekre a későbbiekben magyarázat nélkül fogunk hivatkozni, az első fejezetben gyűjtöttük össze. Aki az alapvető algebrai struktúrák (csoport, gyűrű, test) fogalmaival tisztában van, ezt a fejezetet átugorhatja. Az utolsó két fejezet anyaga már inkább a Lineáris algebra II. tárgy témaköréhez tartozik, a jegyzet az ott tárgyalt anyaggal együtt válik majd teljes egésszé.

A matematika lényegében fogalomalkotásból és a fogalmak közötti logikai kapcsolatok felderítéséből áll. Itt amikor új fogalom értelmezése történik, magát a fogalmat *dőlt* betűvel írjuk, ezen felül a fontosabb, teljes precizitással bevezetett fogalmaknak kiemelt környezet (**Definíció**) is biztosítottunk. Az állítások megfogalmazására többnyire tételként kiemelve kerül sor, de van amelyet csak a környező szöveg részeként, és néha bizonyítás nélkül közlünk.

A fejezetek végén lévő feladatok általában alapszintűek, a tárgyalt anyag elmélyítésének mérését segítik. Azt javasoljuk, hogy az olvasó addig ne tekintsen feldolgozottnak egy fejezetet, amíg az ott kitűzött feladatokkal gondjai vannak.

A jegyzet célja nem a lineáris algebra egy minden eddigitől eltérő felépítése, hanem az, hogy az anyag tárgyalása közben felhívjuk a figyelmet a Maple komputeralgebrai rendszer kínálta lehetőségekre is. A Maple a feladatok megoldásának nagyon jó segédeszköze, az elméleti anyag megértését is segítheti, de az emberi gondolkodást nem helyettesíti. Feltételezzük, hogy az olvasó a Maple felépítésével, használatának szintaktikai alapjaival tisztába van, erre itt külön nem térünk ki. Az esetek nagy részében a Maple `LinearAlgebra` csomagjával dolgozunk, így annak betöltését, melyet a

```
> with(LinearAlgebra);
```

parancs segítségével lehet megtenni, alapértelmezettnek vesszük. A Maple parancsokat a továbbiakban is ilyen környezetben fogjuk feltüntetni, amennyiben a parancs outputja is érdekes, akkor azt közvetlen a parancs után, kék színnel jelenítjük meg. Az egyes fejezetekhez tartozó parancsok kipróbálását javasoljuk új munkalapon kezdeni.

Nem célunk a megemlített Maple eljárások lehetséges paraméterezéseinek teljeskörű bemutatása sem, az érdeklődő olvasó arról a Maple súgójában tájékozódhat. Az általunk írt eljárásoknál nem fordítottunk gondot a hibakezelésre, az eljárások korrekt paramétereket feltételeznek.

1. Algebrai struktúrák

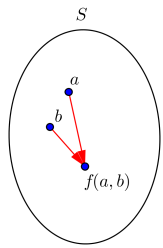
Korábbi tanulmányainkban megtapasztalhattuk, hogy műveleteket nem csak számokkal végezhetünk, hanem például halmazokkal, függvényekkel, irányított szakaszokkal is. Ebben a fejezetben megpróbálunk az objektumoktól elvonatkoztatni, és csak a műveletekre, valamint azok tulajdonságaira koncentrálni.

Először azt tisztázzuk, mit is értünk műveleten. A matematikában műveletvégzéskor tulajdonképpen az történik, hogy egy halmazból veszünk két elemet (ettől lesz kétváltozós a művelet), és ahhoz hozzárendeljük ugyanazon halmaz valamely elemét.

1.1. Definíció. Az S nemüres halmazon értelmezett *kétváltozós műveleten* egy

$$f\colon S \times S \to S$$

függvényt értünk.



1.1. ábra. Az S halmazon értelmezett kétváltozós művelet S bármely két eleméhez egyértelműen hozzárendel egy szintén S-beli elemet

Ilymódon az egész számok halmazán az összeadáson, a szorzáson, és a kivonáson kívül művelet lesz példul a legnagyobb közös osztó képzése is. De nem lesz művelet az osztás, hiszen az nem hajtható végre bármely két egész számmal. Megjegyezzük, hogy f helyett általában valamilyen „műveleti jelet” $(+, \cdot, \cup, \cap, \star, *, \dots)$ írunk, és ekkor $f(a, b)$ helyett pedig az $a + b, a \cdot b, a \cup b, a \cap b, a \star b, a * b, \dots$ szimbólumot használjuk.

1.2. Definíció. Az S halmazt a rajta értelmezett $f_1, f_2, \dots$ műveletekkel együtt *algebrai struktúrának* nevezzük, és erre az $(S, f_1, f_2, \dots)$ jelölést alkalmazzuk.

Tehát $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ egy algebrai struktúra. Továbbá, ha H egy nemüres halmaz, és $\mathcal{P}(H)$ jelöli H hatványhalmazát, $\mathbb{R}[x]$ az összes valós együtthatós polinomok halmazát, akkor akkor $(\mathcal{P}(H), \cup)$ és $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ is algebrai struktúrák.

1.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy az S halmazon értelmezett $*$ művelet *asszociatív*, ha minden $a, b, c \in S$ esetén

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

teljesül.

Asszociatív művelet például az összeadás és a szorzás az egész számok halmazán, az összeadás és a szorzás a polinomok halmazán, az összeadás és a szorzás a komplex számok halmazán, az unió egy nemüres halmaz hatványhalmazán, a függvények kompozíciója, stb. Viszont a kivonás az egész számok halmazán, az osztás a nemnulla valós számok halmazán már nem asszociatív műveletek.

A következő tétel azt állítja, hogy asszociatív művelet esetén a zárójelezés szabadsága nemcsak három, hanem teszőleges számú elemre fennáll.

1.4. Tétel. *Ha az S halmazon értelmezett $*$ művelet asszociatív, akkor véges sok elemen végrehajtott művelet eredménye független a zárójelezéstől.*

Bizonyítás. Legyen $n \geqslant 3$ és $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$, és legyen

$$A = (\ldots((a_1 * a_2) * a_3) * \cdots) * a_n,$$

továbbá jelölje az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elemeknek egy tetszőleges zárójelezés melletti műveleti eredményét B. Az n szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $A = B$. Ez $n = 3$-ra az asszociativitás következménye. Most tegyük fel, hogy $n > 3$, és az állítás igaz minden háromnál nagyobb vagy egyenlő és n-nél kisebb természetes számra. Világos, hogy B felírható $C * D$ alakban, ahol C és D legfeljebb $n-1$ elem valamilyen zárójelezés melletti eredménye. Ha a D kifejezés csak az a_n elemet tartalmazza, akkor $B = C * a_n$, és az indukciós feltevést alkalmazva C-re $B = A$ adódik. Ha pedig D legalább 2 elemet tartalmaz, akkor az indukciós feltevés szerint $D = E * a_n$, ahol E-ben az elemek száma már csak legfeljebb $n-2$. Alkalmazva az asszociativitást, majd az indukciós feltevést $C * E$-re, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} B = C * D = C * (E * a_n) = (C * E) * a_n = \\ = (\ldots((a_1 * a_2) * a_3) * \cdots) * a_n = A. \end{aligned}$$

$\square$

1.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(S, *)$ algebrai struktúra *félcsoport*, ha $*$ asszociatív.

Ilyen például az $(\mathbb{N}, +)$ és az $(\mathbb{N}, \cdot)$, stb.

1.6. Definíció. Legyen $*$ egy az S halmazon értelmezett művelet. Ha S-ben van olyan e elem, hogy $e * a = a$ és $a * e = a$ teljesülnek minden $a \in S$ esetén, akkor ezt az e elemet (a $*$ műveletre vonatkozó) *neutrális elemnek* nevezzük.

Ha a művelet összeadás, akkor a neutrális elemet *zéruselemnek*, míg szorzás esetén *egységelemnek* is nevezzük. Például

– az $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ halmazokon értelmezett összeadás és szorzás neutrális elemei rendre a 0 és az 1;

– a T feletti polinomok körében értelmezett összeadás és szorzás neutrális elemei rendre az azonosan nulla polinom és az $f(x) = 1$ polinom;

– egy H halmaz hatványhalmaza felett értelmezett unió műveletének a neutrális eleme az üres halmaz;

– az egész számok körében értelmezett legnagyobb közös osztó műveletének neutrális eleme a 0.

Könnyen belátható, hogy egy algebrai struktúrában műveletenként legfeljebb egy neutrális elem lehet, ugyanis ha e és f is neutrális elemek volnának a $*$ műveletre nézve, akkor egyrészt $e * f = e$, másrészt $e * f = f$, melyekből a művelet eredményének egyértelműsége miatt $e = f$ következik.

1.7. Definíció. Legyen $*$ az S halmazon értelmezett művelet, melyre vonatkozó neutrális elem az e. Azt mondjuk, hogy az S halmaz a elemének létezik inverze, ha van olyan $x \in S$, hogy $a * x = x * a = e$ teljesül. Ekkor az x elemet az a *inverzének* nevezzük és a^{-1}-gyel jelöljük.

Ha a művelet összeadás, akkor az a elem inverzét szokás $-a$ val is jelölni és az *a ellentettjének* nevezni. Ha a művelet a szorzás, akkor az inverz elemet gyakran *reciproknak* hívjuk.

A $(\mathbb{Z}, +)$ és $(\mathbb{Z}, \cdot)$ félcsoportok közül az elsőben a 2 inverze a -2, a másodikban azonban a 2 elemnek nem létezik inverze. Könnyű látni, hogy $(\mathbb{Z}, +)$ algebrai struktúrában minden elemnek van inverze, a $(\mathbb{Z}, \cdot)$-ban csak a -1 és 1 elemekenek létezik inverzük, és mindkettőnek az inverze önmaga.

1.8. Tétel. *Legyen $(S, *)$ neutrális elemmel rendelkező félcsoport. Ekkor:*

1. *S minden elemének legfeljebb egy inverze van.*
2. *Ha az $a \in S$-nek létezik inverze, akkor a^{-1}-nek is, és $(a^{-1})^{-1} = a$.*
3. *Ha az a és b S-beli elemeknek létezik inverzük, akkor $a*b$-nek is és $(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.*

Bizonyítás.

1. Tegyük fel, hogy b és c az a elem inverzei. Ekkor $b * a = a * b = e$ és $c * a = a * c = e$ és

$$c = c * e = c * (a * b) = (c * a) * b = e * b = b.$$

2. Mivel $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, így a tényleg inverze a^{-1}-nek, és az előző pont értelmében nem létezik másik inverz.

3. Az asszociativitás miatt

$$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = a * ((b * b^{-1}) * a^{-1}) = \\ = a * (e * a^{-1}) = a * a^{-1} = e,$$

és hasonlóan kapjuk azt is, hogy $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = e$. □

1.9. Definíció. Az S halmazon értelmezett $*$ művelet *kommutatív*, ha minden $a, b \in S$ esetén

$$a * b = b * a.$$

Ahogy azt a következő tétel mutatja, a kommutativitás és asszociativitás együtt egy igen kényelmes számolási lehetőséget biztosít.

1.10. Tétel. *Kommutatítv félcsoportban véges sok elemen végrehajtott művelet eredménye sem a zárójelezéstől, sem az elemek sorrendjétől nem függ.*

Bizonyítás. Nyilván, ha a műveletet véges sok elemen hajtjuk végre, abban bármely két szomszédos elem sorrendje felcserélhető, ugyanis az előző tétel miatt a zárójelezést irányíthatjuk úgy, hogy először a szóbanforgó két elemen kelljen a műveletet elvégezni, majd arra a két elemre alkalmazhatjuk a kommutativitást. Mivel szomszédos elemek véges sokszori felcserélésével az elemek bármely sorrendjéhez el lehet jutni, az állítás igaz. □

1.11. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(S, *)$ algebrai struktúra *csoport*, ha $*$ asszociatív, S-nek van neutrális eleme, és S minden elemének létezik inverze.

Ha az $(S, *)$ csoportban $*$ kommutatív, akkor a csoportot *kommutatív csoportnak* vagy *Abel-csoportnak* nevezzük. Például a $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ (Miért kell kivenni a nullát?), $(T[x], +)$ algebrai struktúrák mindegyike Abel-csoport. Nemkommutatív csoportokra a későbbiekben fogunk példát látni.

Megjegyezzük, hogy az 1.8. tétel 3. része miatt egy neutrális elemmel rendelkező S félcsoport invertálható elemeinek halmaza csoportot alkot a félcsoport műveletére nézve. Ezt a félcsoport egységcsoportjának nevezzük, és $U(S)$-sel jelöljük. Például $U(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$.

Könnyen látható, hogy ha csak a páros (2-vel osztható) egészek halmazát tekintjük, az szintén csoportot alkot az egész számok összeadására nézve, ugyanis két páros szám összege is páros, a 0 is páros, és minden páros szám ellentettje is páros.

1.12. Definíció. Legyen $(G, *)$ csoport és H egy részhalmaza a G-nek. Azt mondjuk, hogy H *részcsoportja G-nek*, ha $(H, *)$ is csoport, azaz H maga is csoportot alkot a G-beli csoportműveletre nézve.

Mint az imént láttuk, a $(\mathbb{Z}, +)$ csoportnak a páros számok halmaza részcsoportja. Annak eldöntése, hogy egy részhalmaz részcsoport-e vagy sem, általában az alábbi tétel segítségével történik:

1.13. Tétel (Részcsoport-kritérium)**.** *A $(G, *)$ csoport H nemüres részhalmaza akkor és csak akkor részcsoport, ha bármely $a, b \in H$ esetén $a^{-1} * b \in H$.*

Bizonyítás. Definíció szerint, ha H részcsoport, akkor bármely $a, b \in H$ esetén a^{-1}, továbbá $a^{-1} * b$ szintén elemei H-nak.

Fordítva, tegyük fel, hogy tetszőleges $a, b \in H$ esetén $a^{-1} * b \in H$. A b helyett a-t választva kapjuk, hogy $e = a^{-1} * a$ is benne van a H-ban, és ha b helyett e-t írunk, akkor azt kapjuk, hogy $a^{-1} * e = a^{-1}$ is a H-ban van, tehát H minden elemének az inverze is H eleme. Ekkor viszont választhatunk a helyett a^{-1}-gyet, így $a * b \in H$ adódik, tehát $*$ művelet a H halmazon. Mivel az asszociativitás öröklődik G-ből, a bizonyítás készen van. $\square$

A következőkben olyan algebrai struktúrákkal foglalkozunk, melyekben már két kétváltozós művelet van.

1.14. Definíció. Az $(S, +, \cdot)$ algebrai struktúrát *gyűrűnek* nevezzük, ha a következő tulajdonságok mindegyike teljesül:

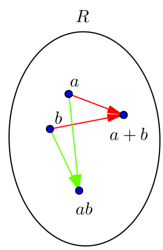
1. $(S, +)$ Abel-csoport;

2. minden $a, b, c \in S$ esetén

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{és} \qquad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a,$$

azaz a szorzás az összeadásra nézve *mindkét oldalról disztributív.*

Megjegyezzük, hogy a gyűrűműveletek nem feltétlenül az összeadás és a szorzás kell, hogy legyenek, de mivel a legtöbb esetben mégis azok, nem tartottuk indokoltnak a definícióban absztrakt műveleti jelek használatát. Gyűrűk például a $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(T[x], +, \cdot)$ és a $(P(H), \triangle, \cap)$ algebrai struktúrák. Ez utóbbinál $\triangle$ a halmazok szimmetrikus különbségét jelöli, azaz $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Itt most a szimmetrikus különbség játssza az összeadás, míg a metszet pedig a szorzás szerepét.



1.2. ábra. Gyűrűben bármely két elem összege mellett azok szorzata is eleme a gyűrűnek

Teljes indukcióval könnyen bizonyítható, hogy egy gyűrű tetszőleges $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_n$ elemeire érvényes, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i \cdot b_j .$$

Azt mondjuk, hogy a *gyűrű asszociatív*, ha a $\cdot$ asszociatív; *kommutatív*, ha a $\cdot$ kommutatív; *egységelemes*, ha $(S, \cdot)$-nak van neutrális eleme.

A részcsoportokéhoz hasonlóan értelmezzük a részgyűrű fogalmát.

1.15. Definíció. Azt mondjuk, hogy az R gyűrű egy H részhalmaza *részgyűrűje R-nek*, ha maga is gyűrű az R-beli gyűrűműveletre nézve.

1.16. Tétel (Részgyűrű-kritérium)**.** *A $(R, +, \cdot)$ gyűrű H nemüres részhalmaza akkor és csak akkor részgyűrű, ha bármely $a, b \in H$ esetén $a - b$ és $a \cdot b$ is elemei H-nak.*

Részgyűrűje például a páros számok halmaza az egész számoknak, az egész számok a valós számoknak a szokásos műveletekre nézve.

Most az egész számok bizonyos részhalmazai segítségével konstruálunk újabb gyűrűket. Legyen m egy rögzített, egynél nagyobb egész szám, és legyen

$$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Definiáljuk a Z_m halmazon az összeadást és a szorzást a következőképpen: $a +_m b$, illetve $a \cdot_m b$ alatt az $a+b$, illetve ab egész m-mel való osztási maradékát értjük. Az egész számokra vonatkozó maradékos osztás tétele és annak következményei miatt $+_m$ és $\cdot_m$ műveletek a $\mathbb{Z}_m$ halmazon, sőt, $\mathbb{Z}_m$ kommutatív és asszociatív egységelemes gyűrű, melyet az *egész számok modulo m szerinti maradékosztály gyűrűjének* hívunk. Az 1.3 ábrán megmutatjuk $\mathbb{Z}_2$, az 1.4. ábrán pedig a $\mathbb{Z}_6$ összeadó- és szorzótábláját.

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

1.3. ábra. $\mathbb{Z}_2$ összeadó- és szorzótáblája

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\cdot_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

1.4. ábra. $\mathbb{Z}_6$ összeadó- és szorzótáblája

1.17. Definíció. Az $(R, +, \cdot)$ gyűrű egy nullától különböző a elemét *nullosztónak* nevezzük, ha van olyan nullától különböző $b \in R$, hogy $a \cdot b = 0$ vagy $b \cdot a = 0$. Az R gyűrű *nullosztómentes*, ha nem tartalmaz nullosztót.

Könnyű látni, hogy a $\mathbb{Z}_6$ gyűrűben $2 \cdot_6 3 = 0$, tehát a 2 és a 3 nullosztók. A kommutatív, asszociatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrűket *integritás-tartományoknak* is nevezzük.

Emlékezzünk vissza, hogy a valós számok nullosztómentességét erősen kihasználtuk például az $x^3 - x = 0$ egyenlet megoldásakor. Ugyanis a bal oldalt szorzattá alakítva $x(x^2-1)=0$ adódik, ahonnan, mivel a valós számok körében egy szorzat csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, mondtuk, $x=0$ vagy $x^2-1=0$ következik. A gondolatmenet helyessége abból következik, hogy ha egy R gyűrű valamely a elemének van inverze a szorzásra nézve, akkor az nem lehet nullosztó. Ugyanis ha a mégis nullosztó lenne, akkor lenne olyan $b \in R \setminus \{0\}$ elem, hogy $ab=0$. Az egyenlet mindkét oldalát a^{-1}-gyel balról megszorozva $b=0$ adódik, ami ellentmondás. Mivel a valós számok körében minden nullától különböző elemnek van inverze, ezért $\mathbb{R}$ tényleg nem tartalmaz nullosztót.

1.18. Definíció. Az $(R,+,\cdot)$ gyűrűt *testnek* nevezzük, ha $(R\setminus\{0\},\cdot)$ Abel-csoport.

A középiskolában megismert számhalmazok közül a racionális számok és a valós számok alkotnak testet a szokásos összeadásra és szorzásra nézve. Ezen két test között további testek is léteznek: testet alkot például az

$$\{a+b\sqrt{2} \ : \ a,b \in \mathbb{Q}\}$$

halmaz is a valós számok összeadására és szorzására nézve. A valós számok testénél bővebb számtestet kapunk, ha tekintjük az $a+bi$ alakú formális kifejezések halmazát, ahol a és b valós számok, és ezek halmazán az összeadást és a szorzást a következőképpen definiáljuk:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

és

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

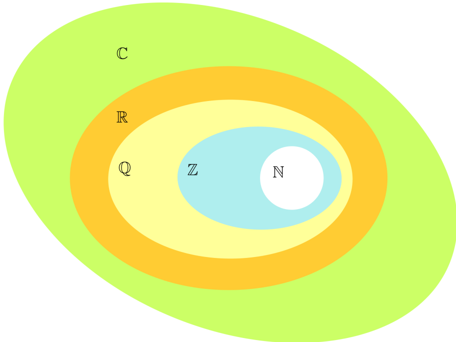
Ezek bizonyítását az olvasóra bízzuk. Az utóbbi testet a *komplex számok testének*, elemeit pedig *komplex számoknak* nevezzük. A komplex számok testét $\mathbb{C}$ fogja jelölni.

Van olyan test is, amely csak véges sok elemből áll. A legszűkebb ilyen a $\mathbb{Z}_2$. Belátható, hogy $\mathbb{Z}_m$ pontosan akkor test, ha m prím (1.9. feladat).

Legyen T egy test, és T egységelemét jelölje 1. Azt a legkisebb n pozitív egész számot, melyre

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ db}}=0,$$

a *T test karakterisztikájának* nevezzük. Ha nincs ilyen n, akkor azt mondjuk, hogy a *T test karakterisztikája nulla.* Világos, hogy a $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ és a $\mathbb{C}$ testek karakterisztikája 0,



1.5. ábra. Számhalmazok

míg a $\mathbb{Z}_p$ test karakterisztikája p. A test nullosztómentességét kihasználva könnyen igazolható, hogy egy test karakterisztikája vagy 0, vagy prím.

1.1. Feladatok

1.1. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges nemüres H halmaz félcsoport az $a * b = b$ művelettel! Van-e mindig neutrális eleme?

1.2. Feladat. Igazolja, hogy $(\mathbb{Q}^+, *)$ félcsoport, ahol $\mathbb{Q}^+$ a pozitív racionális számok halmaza és

$$a * b = \frac{ab}{a+b}!$$

Van-e neutrális eleme?

1.3. Feladat. Csoport-e a $(\mathbb{Z}, *)$, ahol

$$a * b = \begin{cases} a+b & \text{ha } a \text{ páros,} \\ a-b & \text{ha } a \text{ páratlan?} \end{cases}$$

1.4. Feladat. Csoport-e a $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$, ahol $a * b = a + b + ab$?

1.5. Feladat. Legyen c egy rögzített pozitív valós szám. Igazolja, hogy $(]-c, c[, *)$ csoport, ahol

$$a * b = \frac{a+b}{1+\frac{ab}{c^2}}!$$

1.6. Feladat. Igazolja, hogy az

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \quad \text{és} \quad C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

egyenlőségek közül az egyik igaz tetszőleges A, B és C halmazokra, a másik nem! Ez indokolja, hogy a gyűrű fogalmában a disztributivitást mindkét oldalról megköveteljük.

1.7. Feladat. Legyen H egy nemüres halmaz, és jelölje $P(H)$ a H összes részhalmazainak halmazát. Igazolja, hogy $P(H)$ gyűrű, ha az összeadás a szimmetrikus differencia, a szorzás pedig a metszetképzés!

1.8. Feladat. Írja fel $\mathbb{Z}_4$ és $\mathbb{Z}_5$ összeadó- és szorzótábláját! Keressen nullosztókat és invertálható elemeket ezekben a gyűrűkben!

1.9. Feladat. Igazolja, hogy $\mathbb{Z}_m$ egy k elemének pontosan akkor létezik inverze a $\cdot_m$ szorzásra nézve, ha k és m relatív prímek!

1.10. Feladat. Mutassa meg, hogy minden kettőtől különböző karakterisztikájú testben az $x + x = 0$ egyenletnek az $x = 0$ az egyetlen megoldása!

1.11. Feladat. Igazolja, hogy $\{a + b\sqrt{5} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ részgyűrűje $(\mathbb{R}, +, \cdot)$-nak!

1.12. Feladat. Igazolja, hogy $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ test, ahol

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d) \qquad \text{és} \qquad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ab + bc).$$

1.13. Feladat. Vegyen egy tetszőleges négyelemű halmazt, majd vezessen be rajta olyan összeadást és szorzást, melyre nézve testet alkot!

2. Mátrixok

Ebben a fejezetben egy olyan matematikai objektumot ismerünk meg, amely a jegyzet további részében végig kísér majd bennünket, és a matematikán kívül is nagy jelentősséggel bír. Ez tulajdonképpen egy valamely T test elemeiből álló, téglalap alakú táblázat lesz. Akinek a test fogalma még túlságosan absztrakt, nyugodtan gondolhat T elemeire, mint racionális (valós, vagy komplex) számokra.

2.1. Mátrixok értelmezése

2.1. Definíció. Legyenek m és n adott pozitív egész számok, és legyenek a_{ij}, ahol $1 \leqslant i \leqslant m$ és $1 \leqslant j \leqslant n$, egy rögzített T test elemei. Az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

táblázatot $m \times n$ típusú (T test feletti) *mátrixnak* nevezzük.

Ezek szerint egy $m \times n$ típusú mátrix egy olyan táblázat, melyben T-beli elemek m számú sorban és n számú oszlopban vannak elrendezve. Például a

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \pi \\ 2 & 7{,}5 & 83 & 11 \end{bmatrix}$$

táblázat tekinthető úgy, mint egy valós számok feletti 2×4 típusú mátrix.

Megjegyezzük, hogy néha a „testből" szoktunk kicsit engedni, és mátrixnak tekintünk olyan téglalap alakú táblázatokat is, melyben az elemek például polinomok, függvények, vagy általában: valamilyen kommutatív és asszociatív gyűrű elemei. A továbbiakban érdemes figyelemmel kísérni, hogy mely állítások bizonyításában van kihasználva az osztás elvégzésének lehetősége, és melyek azok, amik a fenti gyűrűk fölött értelmezett mátrixokra is igazak maradnak.

2.2. Definíció. Az $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ elemeket a mátrix *főátlóján* lévő elemeinek mondjuk, az $a_{m1}, a_{m-1,2}, a_{m-2,3}, \ldots$ elemeket a mátrix *mellékátlóján* lévő elemeinek. Egy mátrixot *diagonálisnak* mondunk, ha minden olyan eleme, ami nem a főátlóján van, nulla.

A főátló tehát a bal felső sarokból indulva átlósan lefelé, a mellékátló pedig a bal alsó sarokból átlósan felfelé indulva járható be. A B mátrix főátlóját az 1 és a 7,5, míg mellékátlóját a 2 és -3 elemek alkotják.

2.3. Definíció. Az A mátrix *transzponáltján* az

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

mártixot értjük.

Az A^T mátrix úgy is felfogható, mint az a mátrix, melyet az A mátrix sorainak és oszlopainak felcserélésével kapunk. Az előző példában szereplő B mátrix transzponáltja

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7{,}5 \\ 0 & 83 \\ \pi & 11 \end{bmatrix}.$$

2.4. Definíció. Két mátrixot *egyenlőnek* tekintünk, ha azonos típusúak, és azonos indexű elemeik megegyeznek.

Az A mátrixot *szimmetrikusnak* nevezzük, ha $A^T = A$. Az $n \times n$ típusú mátrixokat *kvadratikus*, vagy más szóval *négyzetes mátrixoknak* nevezzük.

Az A mártixot röviden úgy is írhatjuk, hogy $[a_{ij}]$, vagy ha a típusát is hangsúlyozni akarjuk, $[a_{ij}]_{m \times n}$, továbbá az i-edik sorának j-edik elemét néha $(A)_{ij}$-vel is jelöljük.

2.2. A Gauss-elimináció

Ebben a szakaszban a mátrixokon bizonyos átalakításokat végzünk, melyek segítségével a mátrixokat olyan alakra hozzuk, melyről – mint a későbbiekben látni fogjuk – számos fontos jellemzőjük „leolvashatóvá” válik.

2.5. Definíció. Egy mátrixon végrehajtott *elemi sor/oszlop átalakításon* a következő műveletek valamelyikét értjük:

– a mátrix sorainak vagy oszlopainak felcserélése,

– egy sor/oszlop minden elemének megszorzása egy nullától különböző skalárral (*skalárokon* a T test elemeit értjük);

– egy sor/oszlop skalárszorosának hozzáadása egy másik sorhoz/oszlophoz.

Az $A \sim B$ szimbólum azt fogja jelölni, hogy az A mátrixból a B elemi sor/oszlop átalakítással megkapható. Könnyen belátható, hogy $\sim$ ekvivalencia-reláció az azonos típusú mátrixok halmazán. Emiatt, ha $A \sim B$ teljesül, akkor azt is mondjuk, hogy az A és B mátrixok sok/oszlop ekvivalensek.

2.6. Definíció. Egy mátrix egy nem csupán nulla elemeket tartalmazó sorának *vezető eleme* alatt a sor első nullától különböző elemét értjük.

2.7. Definíció. Egy mátrixot *lépcsős alakúnak* mondunk, ha teljesülnek rá az alábbi tulajdonságok:

1. A nullától különböző elemet is tartalmazó sorok megelőzik a csupa nulla elemekből álló sorokat.

2. Két egymást követő, nem csupán nulla elemeket tartalmazó sor közül az első vezető elemének oszlopindexe kisebb, mint a másodiké.

A

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mártix például lépcsős alakú.

2.8. Definíció. Egy lépcsős alakú mátrixot *trapéz alakúnak* nevezünk, ha az egymást követő, nem csupán nulla elemeket tartalmazó sorok vezető elemei oszlopindexeinek különbsége 1.

A fenti lépcsős alakú mátrix nem trapéz alakú; a második és harmadik oszlopok felcserélésével lehetne azzá tenni. Általában is igaz, hogy lépcsős mátrix oszlopcserékkel mindig tarpéz alakúra hozható.

A Gauss-eliminációs módszer főtétele a következő:

2.9. Tétel. *Minden mátrixhoz létezik vele sorekvivalens lépcsős alakú mátrix.*

Bizonyítás. Tulajdonképpen az itt leírt eljárást nevezzük *Gauss-eliminációnak.* Válasszuk ki az első olyan oszlopot, melyben van nullától különböző elem. Ha nem eleve úgy van, sorcserével elérhető, hogy ennek az oszlopnak az első eleme nullától különböző legyen. Ezután az első sor alkalmas konstansszorosait a többi sorhoz hozzáadva elérhető, hogy a szóban forgó oszlop elemei a másodiktól kezdődően mind nullák legyenek. Utána áttérünk a következő oszlopra, melynek a harmadik elemétől kezdődően minden elemét az előbbihez hasonlóan nullázhatjuk ki. Mivel az oszlopok száma véges, így az eljárás véges sok lépésben véget ér, és nyilvánvaló, hogy olyan mátrixot eredményez, melyben két egymást követő, nem csupán nulla elemeket tartalmazó sor közül az első vezető elemének oszlopindexe kisebb, mint a másodiké. Végül arról, hogy nullától különböző elemet is tartalmazó sorok megelőzzék a csupa nulla elemekből álló sorokat, sorcserével gondoskodhatunk. □

Példaként az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 10 & -5 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

mátrixot hozzuk lépcsős alakra:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 10 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 11 & -6 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ez a következő lépéseken keresztül történt:

1. Kényelmi okok miatt felcseréltük az első két sort, ennek köszönhetően az első oszlop első elemének az oszlop összes többi eleme a többszöröse lesz.

2. Kivontuk az első sor kétszeresét a másodikból, majd az első sort a negyedikből.

3. Az eliminációt a második oszloppal folytattuk: a második sort kivontuk a harmadikból, majd a második sor kétszeresét kivontuk a negyedikből.

4. A nullától különböző elemet is tartalmazó sorok meg kell előzzék a csupa nulla elemekből álló sorokat, így a 3. és 4. sorokat felcseréltük.

2.3. Kapcsolódó Maple eljárások

A Maple számos lehetőséget biztosít mátrixok megadására. Ezek közül csak a legkézenfekvőbbeket közöljük, de előtte töltsük be a `LinearAlgebra` csomagot:

```
> with(LinearAlgebra):
```

1. Egy $n \times m$ típusú mátrix megadható egy n elemű listával, melynek elemei a mátrix sorai, mint m elemű listák:

   ```
   > B:=Matrix([[1,-3,0,Pi],[2,7.5,83,11]]);
   ```

2. Megadjuk a mátrix típusát, majd az elemeket egy listában, sorfolytonosan:

   ```
   > B:=Matrix(2,4,[1,-3,0,Pi,2,7.5,83,11]);
   ```

3. Egy további lehetőség sorfolytonos bevitelre:

   ```
   > B:=<<1|-3|0|Pi>,<2|7.5|83|11>>;
   ```

4. A B mátrix oszlopfolytonos létrehozása a következőképpen valósítható meg:

   ```
   > B:=<<1,2>|<-3,7.5>|<0,83>|<Pi,11>>;
   ```

Bármelyik opció mellett is döntünk, az output a következő:

$$B := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \pi \\ 2 & 7{,}5 & 83 & 11 \end{bmatrix}$$

Lesz majd arra is példa, amikor egy mátrix elemeit a sor- és oszlopindexek valamely függvénye segítségével képezzük. Ekkor mátrixot így is megadhatjuk:

```
> Matrix(3,3,(i,j)->(i-j)^2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A B mátrix elemeire természetesen sor-, és oszlopindexének megadásával hivatkozhatunk, a következőképpen:

```
> B[1,4];
```

$$\pi$$

de a `B[1][4]` is ugyanezt eredményezi. Egy mátrix típusának megállapítására a `RowDimension` és `ColumnDimension` függvények szolgálnak. Például:

```
> RowDimension(B);
```

$$2$$

A `Dimension` függvény a sorok és oszlopok számával egyszerre tér vissza. Egy példa a használatára:

```
> n,m:=Dimension(B);
```

$$2, 4$$

Ekkor az n változó a 2, míg az m a 4 értéket veszi fel.

Diagonális mátrixok megadására a Maple külön lehetőséget biztosít: megadhatjuk egy listában a főátlón lévő elemeket, majd a mátrix típusát a következőképpen:

```
> DiagonalMatrix([1,2,-1],3,3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A B mátrix transzponáltja a

```
> Transpose(B);
```

paranccsal érhető el.

Az A és B mátrixok egyenlőségére Maple-ben az `is(A=B)`, illetve `Equal(A,B)` paranccsal lehet rákérdezni, melyek a `true` és `false` válaszok egyikével térnek vissza.

A Maple az elemi sor és oszlop átalakítások végrehajtására a `RowOperation` és `ColumnOperation` parancsokat biztosítja. Ezek mindhárom átalakítás megvalósítására képesek, a paraméterezéssel adjuk meg, melyikre szeretnénk használni. Az A mátrix

- i-edik és j-edik sorainak felcserélése:

  ```
  > RowOperation(A,[i,j]);
  ```

- i-edik sorának szorzása c-vel:

```
> RowOperation(A,i,c);
```

– j-edik sora c-szeresének hozzáadása az i-edik sorához:

```
> RowOperation(A,[i,j],c);
```

Ha oszlopokkal szeretnénk tenni ugyanezeket, akkor a `RowOperation` helyett a `ColumnOperation` parancsot kell használni, a paraméterezés természetesen ugyanaz. Mielőtt példát nézünk ezen parancsok használatára, még annyit megjegyzünk, hogy alapértelmezésben a fenti parancsok eredménye egy új mátrix, amely az A mátrixtól éppen a paraméterekkel megadott módon tér el, az A mátrix pedig a régi marad. Ha azt szeretnénk, hogy az átalakítás magában az A mátrixban valósuljon meg, bővítsük a paraméterlistát az `inplace=true` kifejezéssel.

A fenti parancsok alkalmazásával trapéz alakra hozzuk a (2.1) mátrixot. A mátrix bevitelével kezdünk:

```
> A:=Matrix([[2,0,1,3,-1],[1,1,0,-1,1],[0,-2,1,5,-3],[1,-3,2,10,-5]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

1. A Maple-t nem kell kímélni, így a kézi számolás első lépésben megvalósított sorcserét mellőzzük.

2. Kivonjuk az első sor felét a másodikból, majd a negyedikből:

```
> RowOperation(A,[2,1],-1/2, inplace=true):
> RowOperation(A,[4,1],-1/2, inplace=true);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & \frac{3}{2} & \frac{17}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

3. Az eliminációt a második oszloppal folytatjuk: a második sor kétszeresét hozzáadjuk a harmadikhoz, a háromszorosát pedig a negyedikhez:

```
> RowOperation(A,[3,2],2, inplace=true):
> RowOperation(A,[4,2],3, inplace=true);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. A 3. és 4. sorok felcserélése után a nullától különböző elemet is tartalmazó sorok megelőzik a csupa nulla elemekből álló sorokat:

```
> RowOperation(A,[3,4], inplace=true);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Mostmár A lépcsős alakú, a trapéz alak a 3. és 4. oszlopok felcserélésével érhető el:

```
> ColumnOperation(A,[3,4], inplace=true);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy a Maple által adott eredmény eltér attól, melyet kézzel számolva kaptunk, ami csupán annyit jelent, hogy a mátrixok lépcsős alakja nem egyértelmű. Ha beérjük a lépcsős alakkal, akkor a fenti metódust egyetlen paranccsal kiválthatjuk. Mielőtt kipróbáljuk, ne felejtsük el az A mátrixot újradefiniálni, ugyanis annak értéke az `inplace=true` paraméter alkalmazása miatt már nem az eredeti.

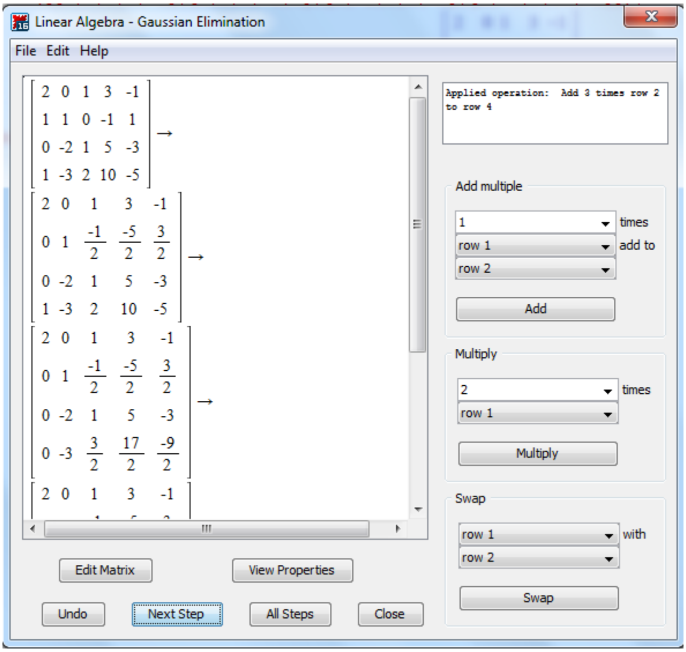
```
> A:=Matrix([[2,0,1,3,-1],[1,1,0,-1,1],[0,-2,1,5,-3],[1,-3,2,10,-5]]):
> GaussianElimination(A);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Végül a `GaussianEliminationTutor` eljárásra hívjuk fel a figyemet, amely segítségével az elimináció folyamatát lépésről-lépésre követhetjük:

```
> Student[LinearAlgebra]:-GaussianEliminationTutor(A);
```

Itt a `Student[LinearAlgebra]:-` előtag utal az eljárást tartalmazó csomag nevére. Ez elhagyható, ha a `with(Student[LinearAlgebra])` paranccsal a csomagot előre betöltjük.



2.1. ábra. Gauss-elimináció lépésről-lépésre

2.4. Feladatok

2.1. Feladat. Hozza lépcsős alakra az alábbi mártixokat!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

2.2. Feladat. Írjon Maple eljárást (a `GaussianElimination` függvény meghívása nélkül), amely tetszőleges mátrixot lépcsős alakra hoz!

3. A determináns

Ebben a fejezetben egy olyan fogalommal ismerkedünk meg, amely a továbbiakban hasznos algebrai segédeszköz lesz. Ehhez azonban szükség van a permutációk néhány tulajdonságának megismerésére.

3.1. Permutáció, mint bijektív leképezés

A permutáció fogalma már középiskolából ismerős lehet:

3.1. Definíció. n darab különböző elem egy rögzített sorrendjét az n darab elem egy (ismétlés nélüli) *permutációjának* nevezzük.

Könnyű belátni, hogy n elem összes permutációinak száma $n!$.
Legyen $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, ahol $n \geqslant 1$ egész, és legyen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja. Ekkor az az f függvény, melyre

$$f(1) = i_1,\ f(2) = i_2,\ \ldots,\ f(n) = i_n,$$

az M halmaz egy önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Például, ha $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, akkor a $2, 5, 4, 1, 3$ sorrendhez tartozó $f\colon M \to M$ függvény a következő:

$$f(1) = 2,\ f(2) = 5,\ f(3) = 4,\ f(4) = 1,\ f(5) = 3,$$

melyet majd úgy fogunk jelölni, hogy

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A gondolatmenet megfordítható: ha f az M halmaz egy önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése, akkor $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ az $1, 2, \ldots, n$ elemek egy átrendezése, vagyis permutációja. Az $1, 2, \ldots, n$ számok helyett n darab különböző elemet tekintve bizonyítást nyert, hogy n különböző elem egy permutációja nem más, mint az n elemből álló halmaz egy önmagára való kölcsönösen egyértelmű leképezése.

Jelölje S_M az M halmaz összes permutációinak halmazát. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $(S_M, \cdot)$ csoport, ahol a $\cdot$ művelet a leképezések kompozíciója. Ezt a csoportot az M halmaz *teljes transzformáció-csoportjának* nevezzük. Abban a speciális esetben, mikor $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, *n-ed fokú szimmetrikus csoportról* beszélünk, melyet S_n-nel jelölünk. Mint fentebb már előrevetítettük, S_n egy f elemét a következő alakban fogjuk megadni:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Az alábbi példa S_6 két elmének szorzását szemlélteti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

A szorzást – mint a leképezések szorzását – jobbról balra végezzük el: például a második permutáció az 1-hez a 6-ot, az első permutáció a 6-hoz a 4-et rendeli, ezért rendel a szorzat 1-hez 4-et.

3.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

permutációban *a k és l elemek inverzióban állnak*, ha $k < l$, de $f(k) > f(l)$. Jelölje $I(f)$ az f permutáció összes inverzióinak a számát. Azt mondjuk, hogy az f permutáció *páros*, ha $I(f)$ páros, egyébként f *páratlan*.

Például az

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

permutációban az 1 és 4, a 2 és 4, a 2 és 5, a 2 és 6, a 3 és 4, a 3 és 5, valamint a 3 és 6 elemek állnak inverzióban. Tehát $I(f) = 7$, így f páratlan permutáció.

Most megmutatjuk, hogy ha egy permutációban két elem képét felcseréljük, akkor a permutáció paritása az ellenkezőjére változik. Valóban, cseréljük fel az

$$f = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ f(1) & \cdots & f(i) & \cdots & f(j) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

permutációban az i és a j képét. Ekkor a

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ f(1) & \cdots & f(j) & \cdots & f(i) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

permutációhoz jutunk. A csere után az i és a j elemek egymás közötti inverziója biztosan megváltozik. Továbbá, könnyen látható, hogy az i elem inverziója egy i és j között lévő x számmal pontosan akkor változik meg (azaz ha nem voltak inverzióban, akkor abban lesznek, ha abban voltak, nem lesznek), ha az x és j közötti inverzió is megváltozik. Más inverziókban nem történik változás, így végül a változások száma páratlan. Páros permutációból tehát páratlan lesz, és fordítva.

Belátható, hogy az

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

identikus permutációból kiindulva bármely permutációhoz eljuthatunk csak elempárok egymás utáni cseréjével. Például ha

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

akkor a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

cseresorozat alkalmas. Az identikus permutációban egyetlen inverzió sincs, így az páros. Mivel elemek cseréjekor a paritás ellentettjére változik, így páros permutációhoz páros számú elempár-cserével, míg páratlanhoz páratlan számú cserével juthatunk. Mi történik, ha két páros permutációt összeszorzunk? Mivel a permutációk szorzása leképezések egymás után való elvégzését jelenti, így páros számú elemcsere után még páros számú elemcserét végzünk, tehát a szorzat is páros lesz. Ugyanígy kapjuk, hogy páratlan permutációk szorzata is páros, ellentétes paritású permutáció szorzata pedig páratlan. Legyen f egy páros permutáció, és legyen f^{-1} az inverze. Ekkor $ff^{-1} = I$, I páros, tehát f^{-1}-nek is párosnak kell lennie. A fent leírtak igazolják, hogy a páros permutációk S_n-ben részcsoportot alkotnak.

3.2. A determináns értelmezése

Vegyünk egy $n \times n$ típusú $A = [a_{ij}]$ mátrixot, és vegyük az S_n szimmetrikus csoport egy tetszőleges

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

elemét! Tekintsük az első sor $f(1)$-edik elemét: $a_{1f(1)}$, a második sor $f(2)$-edik elemét: $a_{2f(2)}$, és így tovább, végül az n-edik sor $f(n)$-edik elemét: $a_{nf(n)}$. Ilymódon minden sorból és minden oszlopból pontosan egy elemet vettünk. Szorozzuk össze ezeket az elemeket:

$$a_{1f(1)}a_{2f(2)}\cdots a_{nf(n)},$$

majd változtassuk a szorzat előjelét az ellentettjére, ha az f permutáció páratlan! Ha f páros, a szorzat változatlan marad. Ezen előjelkorrekció után a szorzatunk

$$(-1)^{I(f)}a_{1f(1)}a_{2f(2)}\cdots a_{nf(n)}$$

alakú. Készítsük el ezeket a szorzatokat S_n összes elemére, majd adjuk őket össze! Az így kapott összeget nevezzük az A mátrix determinánsának. Precízebben:

3.3. Definíció. *Determinánson* azt a T test feletti négyzetes mátrixok halmazán értelmezett, a T testbe képező det függvényt értjük, amely az

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixhoz a

$$\det A = \sum_{f \in S_n} (-1)^{I(f)}a_{1f(1)}a_{2f(2)}\cdots a_{nf(n)}$$

elemet rendeli. A $\det A$ elemet az A *mátrix determinánsának* nevezzük.

Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy a determináns egy függvény, míg egy adott mátrix determinánsa a T test egy eleme (ami általában egy szám).

A $(-1)^{I(f)}a_{1f(1)}a_{2f(2)}\cdots a_{nf(n)}$ szorzatot az A mátrix determinánsa (f permutációhoz tartozó) *tagjának* nevezzük.

Könnyű belátni, hogy egy 1×1 típusú mátrix determinánsa definíció szerint nem más, mint a mátrix egyetlen eleme. Most megnézzük, hogyan számítható ki egy 2×2 típusú mátrix determinánsa. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Az $1, 2$ elemeknek 2 permutációja van:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

f_1 inverzióinak száma 0, míg f_2 inverzióinak száma 1, ezért az f_1-hez tartozó tag $(-1)^0 a_{11}a_{22} = a_{11}a_{22}$, az f_2-höz tartozó tag pedig $(-1)^1 a_{12}a_{21} = -a_{12}a_{21}$. Az A mátrix determinánsa ezek összege:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{3.1}$$

Igazoltuk tehát, hogy egy 2×2 típusú mátrix determinánsát úgy is megkaphatjuk, hogy a főátlón lévő elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlón lévő elemek szorzatát. Csupán a teljesség kedvéért álljon itt egy példa:

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 1 = 17.$$

Legyen most

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

egy adott 3×3 típusú mátrix. Az A determinánsának kiszámításához szükségünk van az S_3 csoportra, melynek elemeit az alábbi táblázat első oszlopa tartalmazza.

$$
\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}
$$

3.1. ábra. 3×3 típusú mátrix determinánsának kiszámítása

f	$I(f)$	$\det A$ f-hez tartozó tagja
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	0	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	1	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	1	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	2	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	2	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	3	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Az A mátrix determinánsa tehát a táblázat harmadik oszlopában lévő elemek összege:

$$
\begin{aligned}
\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\
- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Valószínűleg senkinek sem támadt kedve ezt a képletet fejben tartani. Van azonban egy módszer, mely segítségével a képlet könnyen rekonstruálható. Írjuk az A mátrix mellé az első két oszlopát még egyszer, majd adjuk össze a főátlón és a vele párhuzamos átlókon lévő elemek szorzatait, és ebből az összegből vonjuk ki a mellékátlón, és a vele párhuzamos átlókon lévő elemek szorzatait (lásd: 3.1. ábra)! Ekkor (3.2) szerint éppen az A mátrix determinánsát kapjuk.

Egy konkrét példa erre:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$- 3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = -52.$$

Nagyon fontos, hogy az itt bemutatott módszerek csak 2×2, illetve 3×3 típusú mátrixokon működnek. Természetesen nagyobb méretű mátrixok determinánsát is kiszámíthatjuk definíció szerint, de ott az általános esetben olyan formulát kapunk eredményül, melyet nem tudunk a fentiekhez hasonló módon szemléltetni, könnyen megjegyezhetővé tenni. Nem beszélve arról, hogy egy 4×4 típusú mátrix esetén már az S_4 csoport $4! = 24$ eleme paritásának megállapítása is elég fárasztó lenne. Ahhoz, hogy nagyobb mátrixok determinánsa is barátibb mennyiségű számolással elérhetővé váljon, a determinánst jobban meg kell ismernünk.

3.3. A determináns tulajdonságai

Ebben a részben mátrix alatt minden esetben egy T test feletti $n \times n$ típusú mátrixot értünk, konstanson pedig T egy tetszőleges elemét.

3.4. Tétel. *Transzponált mátrix determinánsa megegyezik az eredeti mátrix determinánsával.*

Bizonyítás. Tekintsük az $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ és $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ mátrixokat. Ekkor

$$\det A = \sum_{f \in S_n} (-1)^{I(f)} a_{1f(1)} a_{2f(2)} \cdots a_{nf(n)}$$

és

$$\det B = \sum_{g \in S_n} (-1)^{I(g)} b_{1g(1)} b_{2g(2)} \cdots b_{ng(n)}.$$

Tegyük fel, hogy $B = A^T$. Ekkor

$$\det A^T = \det B = \sum_{g \in S_n} (-1)^{I(g)} a_{g(1)1} a_{g(2)2} \cdots a_{g(n)n}.$$

Mivel transzponáláskor csupán sor-oszlop csere történik, a determináns értékének kiszámításakor pedig olyan szorzatokkal dolgozunk, melyhez minden sorból és oszlopból pontosan egy elemet veszünk, következik, hogy a $\det A^T$ kiszámításához használt összes szorzat megjelenik az A determinánsának kiszámításánál is. A kérdés csak az, hogy az előjelük ugyanaz marad-e. Tegyük fel, hogy az $a_{1f(1)}a_{2f(2)}\cdots a_{nf(n)}$ és $a_{g(1)1}a_{g(2)2}\cdots a_{g(n)n}$ szorzatok ugyanazokat a tényezőket tartalmazzák, csak más sorrendben. Keressük meg azt a j-t, melyre $g(j) = 1$; ekkor $j = f(1)$ is teljesül. Végignézve ugyanezt a $2, \ldots, n$ számokra is, láthatjuk, hogy az f és g permutációk egymás inverzei. Ekkor viszont a paritásuk megegyezik. □

A tétel szerint tehát

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

melynek ellenőrzése az eddig elmondottak jó gyakorlása lehet az olvasó számára.

A fenti tétel értelmében a determináns kiszámításával kapcsolatos további tételekben a „mátrix sora" helyett mindig mondhatunk „mátrix oszlopát" is.

3.5. Tétel. *Ha egy mátrix egy sorának minden eleme nulla, akkor a mátrix determinánsa is nulla.*

Bizonyítás. A definícióból látszik, hogy ha egy sor minden eleme nulla, akkor a mátrix determinánsát adó összeg minden tagjában egy szorzótényező biztosan nulla. □

3.6. Tétel. *Ha egy mátrix egy sorát úgy változtatjuk meg, hogy a sor elemeihez konstansokat adunk hozzá, akkor az így kapott mátrix determinánsa egyenlő az eredeti mátrix determinánsának, és azon mátrix determinánsának az összegével, melynek a szóban forgó sorába csak a hozzáadott konstansokat írjuk, a többi sort pedig* *változatlanul hagyjuk. Formálisan:*

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+c_1 & a_{i2}+c_2 & \cdots & a_{in}+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

ahol a jobb oldalon lévő összeg második tagjában a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ elemek az i-edik sorban vannak, és minden más sorban az eredeti elemek szerepelnek.

Bizonyítás. Írjuk fel az eredeti mátrix determinánsát, majd alkalmazzuk a disztributivitást:

$$\begin{aligned} &\sum_{f \in S_n} (-1)^{I(f)} a_{1f(1)} \cdots (a_{if(i)} + c_{f(i)}) \cdots a_{nf(n)} = \\ &= \sum_{f \in S_n} (-1)^{I(f)} a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{nf(n)} + \\ &+ \quad \sum_{f \in S_n} (-1)^{I(f)} a_{1f(1)} \cdots c_{f(i)} \cdots a_{nf(n)}. \end{aligned}$$

□

3.7. Tétel. *Ha egy mátrix egy sorának minden elemét megszorozzuk ugyanazzal a c konstanssal, akkor a mártix determinánsa is c-szeresére változik.*

Bizonyítás. Szorozzuk meg egy mátrix egy sorának minden elemét ugyanazzal a c konstanssal! Ekkor a mátrix determinánsának minden tagja pontosan c-szeresére változik, ugyanis a szóbanforgó sorból minden tag pontosan egy elemet tartalmaz. Az összegből c-t kiemelve a maradó rész nyilván az eredeti mátrix determinánsa.

□

3.8. Tétel. *Ha egy mátrix két azonos sort tartalmaz, akkor a determinánsa nulla.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ mátrixban az i-edik és j-edik sorok megegyeznek. Tekintsük az A mátrix determinánsának egy adott f permutációhoz tartozó

$$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)}$$

tagját, így előjelkorrekció nélkül. Az i-edik és j-edik sorok egyenlősége miatt

$$a_{1f(1)} \cdots a_{if(i)} \cdots a_{jf(j)} \cdots a_{nf(n)} = a_{1f(1)} \cdots a_{jf(i)} \cdots a_{if(j)} \cdots a_{nf(n)},$$

és ez utóbbi szorzat pontosan a

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ f(1) & \cdots & f(j) & \cdots & f(i) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

permutációhoz tartozó tag, előjelkorrekció nélkül. Mivel az f és g permutációk pontosan két elem képében térnek el, paritásuk ellentétes. Tehát két azonos sort tartalmazó mátrix determinánsának minden tagjához hozzárendelhető egy másik, hogy a kettő összege nulla, így a determináns maga is nulla. □

3.9. Tétel. *Ha egy mátrix egyik sora egy másik sorának konstansszorosa, akkor a mátrix determinánsa nulla.*

Bizonyítás. Használva az előző tételeket

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = c \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

□

3.10. Tétel. *A determináns értéke nem változik, ha egy mátrix egy sorához hozzáadjuk egy másik sor konstansszorosát.*

Bizonyítás. Szintén az előző tételek következménye, hogy

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ca_{i1} & a_{j2}+ca_{i2} & \cdots & a_{jn}+ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & ca_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

□

Ez a tétel jól használható többek között a mátrixban lévő „nagy” számok csökkentésére a következő értelemben: ha az

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 15 & 12 \\ 20 & 15 & 12 & 10 \\ 105 & 84 & 70 & 60 \\ 170 & 140 & 120 & 105 \end{bmatrix}$$

mátrix első oszlopából kivonjuk a másodikat (vagy ha úgy tetszik, a mátrix első oszlopához hozzáadjuk a második -1-szeresét), a második oszlopból kivonjuk a harmadikat, végül a harmadikból a negyediket, akkor az

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 3 & 12 \\ 5 & 3 & 2 & 10 \\ 21 & 14 & 10 & 60 \\ 30 & 20 & 15 & 105 \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk, melynek determinánsa a fenti tétel értelmében megegyezik az A mátrixéval. A hatást tovább fokozhatjuk, ha az A_1 mátrix első oszlopából ismételten kivonjuk a másodikat, a másodikból a harmadikat, majd a negyedikből a harmadik négyszeresét, de ennek elvégzése már az olvasó feladata.

3.11. Tétel. *Ha egy mátrix két sorát felcseréljük, akkor a mátrix determinánsa előjelet vált.*

Bizonyítás. Vegyünk egy négyzetes mátrixot! Adjuk hozzá az i-edik sorhoz a j-ediket, majd a j-edik sorból vonjuk ki az i-ediket! Végül az i-edik sorhoz adjuk hozzá a j-ediket! A 3.9. és 3.10. tételek szerint

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= -\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

□

3.4. Kifejtési tételek

Egy $m \times n$ típusú mátrix egy *k-ad rendű aldeterminánsán* egy olyan $k \times k$ típusú mátrix determinánsát értjük, melyet az eredetiből úgy kapunk, hogy kiválasztunk k darab sort és k darab oszlopot, és vesszük a kiválasztott sorok és oszlopok metszéspontjain lévő elemeket. Az $n \times n$ típusú A mátrix *d aldeterminánshoz tartozó d^* komplementer aldeterminánsán* azon $(n-k) \times (n-k)$ típusú mátrix determinánsát értjük, melynek alkotóelemei nem szerepelnek a kijelölt sorokban illetve oszlopokban. Ha a kijelölt sorok illetve oszlopok indexei $i_1, \dots, i_k$ és $j_1, \dots, j_k$, akkor a *d-hez tartozó adjungált komplementer aldetermináns*

$$d^+ = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} d^*.$$

Például az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixban az 1. és 2. sorokat, valamint a 1. és 3. oszlopokat kiválasztva, azok metszéspontjain a

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

mátrix keletkezik, melynek determinánsa 6. Ez tehát az A egy másodrendű aldeterminánsa. Az ehhez tartozó komplementer aldetermináns

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 3,$$

az adjungált komplementer aldetermináns pedig $(-1)^{1+2+1+3} \cdot 3 = -3$.

Talán sejthető, hogy egy négyzetes mátrix aldeterminánsaiból valahogyan előállítható kell legyen az eredeti mátrix determinánsa. Az alábbiakban azt nézzük meg, hogyan.

3.12. Lemma. *Tekintsünk egy $n \times n$ típusú A mátrixot és annak egy d k-ad rendű aldeterminánsát. Ha d egy tetszőleges tagját megszorozzuk d^+ egy tetszőleges tagjával, akkor* $\det A$ *egy tagját kapjuk.*

Bizonyítás. Először az $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$ és $j_1 = 1, \ldots, j_k = k$ esetet tekintjük, vagyis amikor az aldeterminánshoz tartozó mátrix kiválasztásához az első k darab sort és oszlopot választjuk. Legyen $f \in S_n$ olyan permutáció, ami a $k+1, \ldots, n$ elemeket fixen hagyja. Ez nyilván felfogható mint egy S_k-beli permutáció, és d ehhez tartozó tagja

$$(-1)^{I(f)} a_{1f(1)} \cdots a_{kf(k)}$$

alakú. Hasonlóan, ha $g \in S_n$ az $1, \ldots, k$ elemeket hagyja fixen, akkor d^* g-hez tartozó tagja

$$(-1)^{I(g)} a_{k+1,g(k+1)} \cdots a_{ng(n)}$$

alakú, ami $(1 + \cdots + k) + (1 + \cdots + k)$ páros volta miatt éppen d^+-nak is tagja. A kettő szorzata

$$(-1)^{I(f)+I(g)} a_{1f(1)} \cdots a_{kf(k)} a_{k+1,g(k+1)} \cdots a_{ng(n)},$$

ami pontosan a $\det A$ fg permutációhoz tartozó tagja.

Tekintsük most az általános esetet, amikor a kiválasztott sorok és oszlopok $i_1, \dots, i_k$ és $j_1, \dots, j_k$ indexei tetszőlegesek. Ekkor az i_1 indexű oszlopot az összes őt megelőzővel megcserélve $i_1 - 1$ lépésben elérhetjük, hogy az első helyre kerüljön. Ugyanígy, az i_2 indexű oszlop $i_2 - 2$ oszlopcserével kerülhet a második helyre. Folytatva az eljárást az összes sorra és oszlopra,

$$t = (i_1 - 1) + \cdots + (i_k - k) + (j_1 - 1) + \cdots + (j_k - k)$$

számú sor- illetve oszlopcserével elérhetjük, hogy a kiválasztott aldetermináns a bal felső sarokban jelenjen meg. Ha B jelöli az így átrendezett mátrixot, akkor

$$\det A = (-1)^t \det B = (-1)^{i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k} \det B,$$

ahol a kitevőből a biztosan páros tagokat már elhagytuk. Ha α tagja d-nek, β pedig d^*-nak, akkor az előzőekben igazoltak miatt $\alpha\beta$ tagja $\det B$-nek és így

$$(-1)^{i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k} \alpha\beta$$

tagja $\det A$-nak. □

3.13. Tétel (Laplace-féle kifejtési tétel)**.** *Ha egy négyzetes mátrixból kiválasztunk k darab sort, és ezen sorok segítségével képezzük az összes k-ad rendű aldeterminánst, majd azokat mind megszorozzuk a saját adjungált komplementer aldeterminánsával, akkor ezen szorzatok összege éppen a mátrix determinánsa lesz.*

Bizonyítás. Ha veszünk egy k-ad rendű d aldeterminánst az A négyzetes mátrixból, akkor az előző lemma szerint d és d^+ tagjainak szorzatai tagjai $\det A$-nak. Ez $k!(n-k)!$ darab tagot jelent aldeterminánsonként. A kiválasztott k darab sor segítségével viszont

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

k-ad rendű aldetermináns képezhető, tehát összesen $n!$ tagot kapunk. Mivel ezek a tagok különbözőek, és mind tagjai a $\det A$-nak, az összegük nem lehet más, mint $\det A$. □

Ha a fenti A mátrix determinánsát a mátrix első két sora szerint fejtjük ki, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\det A = &\det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+2} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \\
&+ \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \\
&+ \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+4} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \\
&+ \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+3} \cdot \det \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \\
&+ \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+4} \cdot \det \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \\
&+ \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot (-1)^{1+2+3+4} \cdot \det \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \\
&= (-2) \cdot 9 + 6 \cdot (-1) \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 0 + 3 \cdot (-1) \cdot (-7) + (-9) \cdot (-5) = 45.
\end{aligned}$$

A negyedik összadandó helyére azért írtunk csak 0-t, mert az aldeterminánst kiszámolva 0-t kaptunk, és ha egy szorzat egyik tényezője 0, akkor már a szorzat a további tényezőktől függetlenül 0. Ezáltal megkíméltük magunkat egy újabb 2×2 típusú mátrix determinánsának kiszámításától.

Gyakran előfordul, hogy a Laplace-féle kifejtési tételt csak egy sorra alkalmazzuk. Ezt a verziót külön tételként is szokás megemlíteni:

3.14. Tétel (Kifejtési tétel)**.** *Ha egy négyzetes mátrix egy sorának minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó adjungált komplementer aldeterminánssal, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk, eredményül a mátrix determinánsát kapjuk.*

Bizonyítás. Mivel egy mátrix elsőrendű aldeterminánsai éppen a mátrix elemei, ez a tétel nem más, mint a Laplace-féle kifejtési tétel $k = 1$ esetén. □

Ha most az A mátrix determinánsát annak egy sora szerint szeretnénk kifejteni, akkor azt a sort célszerű választani, ami a legtöbb nullát tartalmazza, ugyanis a sor elemei determinánsok előtti szorzótényezőként jelennek meg, és amikor azok nullák, a hozzájuk tartozó determinánsok kiszámítása szükségtelenné válik. Tehát esetünkben a kifejtést az első sor szerint érdemes megtenni:

$$\det A = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} + 0 + 0 + 3 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A számolás befejezését (melynek lényegi része a két 3×3 típusú mátrix determinánsának valamilyen módszerrel való meghatározása) az olvasóra bízzuk.

A következő tétel pedig inkább elméleti jeletőségű.

3.15. Tétel (Ferde kifejtési tétel)**.** *Ha egy négyzetes mátrix egy sorának minden elemét megszorozzuk egy másik sor ugyanazon oszlopában lévő eleméhez tartozó adjungált komplementer aldeterminánssal, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk, eredményül nullát kapunk.*

Bizonyítás. Szorozzuk meg az $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ mátrix i-edik sorának minden elemét az i-től különböző j-edik sor megfelelő elemeihez tarozó adjungált komplementer aldeterminánsokkal, és legyen mindezek összege t; ekkor

$$t = a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn},$$

ahol A_{jk} jelöli az a_{jk} elemhez tartozó adjungált komplementer aldeterminánst. Könnyen látható, hogy t értéke független a j-edik sor elemeitől. Írjuk a j-edik sor elemei helyére az i-edik sor elemeit, legyen az így kapott mátrix B. Ekkor t nem változik, és alkalmazva a kifejtési tételt a j-edik sorra, kapjuk, hogy $t = \det B$. De mivel B két azonos sort tartalmaz, $t = 0$ adódik, amit bizonyítani kellett. □

Még egyszer megjegyezzük, hogy mivel mátrixnak és transzponáltjának a determinánsa megegyezik, a kifejtési tételekben is mondhatunk sor helyett oszlopot. Összefoglalva, a kifejtési tételek arra kínálnak lehetőséget, hogy egy $n \times n$ típusú mátrix determinánsára „kisebb" mátrixok determinánsaiból következtessünk. Segítségükkel a determináns függvény rekurzívan is megadható. Látható azonban, hogy „nagy" mátrixok determinásának a kiszámítása még mindig nagyon sok számolást igényel.

3.5. A determináns értékének kiszámítása eliminációval

3.16. Definíció. Egy négyzetes mátrixot *felső háromszögmátrixnak* nevezünk, ha főátlója alatt minden elem nulla:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

azaz $a_{ij} = 0$ teljesül minden olyan esetben, amikor $i > j$; továbbá *alsó háromszögmátrixnak*, ha a főátlója felett minden elem nulla:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

vagyis ha $a_{ij} = 0$ bármely $i < j$ esetén.

A felső háromszögmátrixok tehát pontosan a lépcsős alakú négyzetes mátrixok.

3.17. Tétel. *Ha egy mátrix felső vagy alsó háromszögmátrix, akkor determinánsa egyenlő a főátlón lévő elemek szorzatával.*

Bizonyítás. Mivel a felső háromszögmátrixok megkaphatók mint az alsó háromszögmátrixok transzponáltjai, a 3.4. tétel értelmében elég csak alsó háromszögmátrixokra igazolni az állítást. Alkalmazva a kifejtési tételt az első sorra

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

ahonnan az eljárást ismételve kapjuk az állítást. □

A 2.9. tétel szerint minden négyzetes mátrix elemi sorátalakításokkal felső háromszög alakúra hozható. A 3.7., 3.11. és 3.10. tételek pedig megmondják, hogy mi történik a determinánssal, ha a mátrixon elemi sorátlakítást hajtunk végre. Ilymódon a Gauss-elimináció által eredményezett felső háromszögmátrix determinánsából már következtethetünk az eredeti mátrix determinánsára. A fejezet zárásaként kiszámítjuk az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát eliminációs módszerrel is:

$$\det A = -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & 10 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} =$$

$$= -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 4{,}5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 4{,}5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 45.$$

Most pedig leírjuk, hogy az egyes lépésekben pontosan mit csináltunk.

1. Első lépésben az első oszlop első elemével kellene az alatta lévőket eliminálni. Ehhez kényelmi okokból célszerű az első két sort felcserélni, ugyanis ekkor az első oszlop első eleme 1 lesz, melynek minden alatta lévő elem többszöröse. Ekkor a determináns előjelet vált.

2. Kivonjuk az első sor kétszeresét a másodikból, hozzáadjuk az első sor háromszorosát a harmadikhoz, végül kivonjuk az első sort a negyedikből. Ekkor a determináns nem változik.

3. Az első oszloppal készen vagyunk, most a második oszlop főátló alatti elemeinek kinullázása következik. Itt most a következő két lehetőséget érdemes mérlegelni: vagy hozzáadjuk a 2. sor felét a harmadikhoz (ekkor törtek is megjelennek), és kivonjuk a második sort a negyedikből; vagy mint az első lépésben, először megcseréljük a második és a harmadik sorokat és utána eliminálunk. Mi az első mellett voksolunk, ekkor a determináns nyilván nem változik.

4. A harmadik oszlop következik, de ott az elimináció elkerülhető, ha megcse-

réljük a negyedik oszloppal. A determináns újra előjelet vált.

5. A jobb oldalon most már egy felső háromszögmátrix determinánsa áll, mely értéke a főátlón lévő elmek szorzata, azaz $1 \cdot 2 \cdot 4{,}5 \cdot 5$.

Még egyszer felhívjuk a figyelmet arra, hogy általában egy A mátrix, és annak A' lépcsős alakjának determinánsai nem feltétlen egyeznek meg. Csak annyit mondhatunk, hogy az A' determinánsából az A' megkonstruálásához vezető lépések ismeretében megmondható az A determinánsára.

3.6. Kapcsolódó Maple eljárások

Lévén a permutáció kombinatorikai fogalom, a Maple permutációk kezelésére hivatott eljárásai a `combinat` csomagban találhatók. Kezdjünk most ennek betöltésével.

```
> with(combinat):
```

Az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz összes permutációit a `permute(n)` parancs segítségével lehet kiíratni. Az egyes perutációk egy lista elemeiként jelennek meg, és a permutácók maguk is listák, úgy, hogy az

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

permutációhoz az $[f(1), f(2), \ldots, f(n)]$ lista tartozik. Nézzük meg mondjuk az $n = 3$ esetet:

```
> permute(3);
```

$$[[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]]$$

Ha pedig a paraméter helyére egy lista kerül, akkor az eredmény a listaelemek összes permutációit tartalmazó lista lesz:

```
> permute[a,b,c]);
```

$$[[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a]]$$

Az összes permutációk számát megkaphatjuk a `numbperm` paranccsal, melynek paraméterezése ugyanaz, mint a `combinat` parancsé:

```
> numbperm(3);
```

$$6$$

```
> numbperm([a,b,c,d,e]);
```

$$120$$

Most írunk egy eljárást, amely segítségével meghatározhatjuk egy adott permutáció inverzióinak a számát.

```
> Inv:=proc(perm)
  local i,j,k;
  k:=0;
  for i form 1 to nops(perm)-1 do
  for j from i to nops(perm) do
  if perm[i] > perm[j] then k:=k+1 end if;
  end do;
  end do;
  k;
  end proc;
```

Próbáljuk ki!

```
> Inv([2,5,6,1,3,4]);
```

$$7$$

A determináns kiszámításához már szükség lesz a `LinearAlgeba` csomagra is. Töltsük be!

```
> with(LinearAlgebra):
```

Először a determináns definíciójának elmélyítése érdekében írunk egy Maple eljárást, mely egyetlen paramétert vár: egy négyzetes mátrixot, és annak determinánsával tér vissza, melyet a definícióban leírt képlet szerint számol.

```
> MyDet:= proc(A)
  local i,j,d,n,m,p,L;
  d:=0;
  n,m:=Dimension(A);
  if n=m then
  L:=permute(n);
  for i from 1 to nops(L) do
  p:=1;
  for j from 1 to n do
  p:=p*A[j,L[i,j]]:
  end do;
```

```
d:=d+(-1)^Inv(L[i])*p:
end do;
end if;
end proc;
```

Nem árulunk el nagy titkot azzal, hogy a Maple `LinearAlgebra` csomagja is biztosít lehetőséget mátrixok determinánsának meghatározására. A `Determinant` függvény egyetlen kötelező paramétert vár, egy négyzetes mátrixot, visszatérési értéke pedig az adott mátrix determinánsa. Próbáljuk mi mindkettőt!

```
> A:=Matrix([[3,-2],[1,5]]):
> MyDet(A);
```

$$17$$

```
> Determinant(A);
```

$$17$$

Mivel a Maple formális számolásra is képes, a fenti eljárásokkal a (3.1) és a (3.2) formulák igazolása is lehetséges. Az utóbbihoz szükség van egy általános, 3×3 típusú mátrixra:

```
> A:=Matrix(3,3, symbol=a);
```

$$A := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Ennek determinánsa:

```
> Determinant(A);
```

az output pedig a (3.2) formulával egyenlő.

Nézzünk most egy kísérletet! Adjunk meg egy tetszés szerinti 8×8 típusú mátrixot! Akinek ehhez nincs kedve, bízza a Maple-re:

```
> A:=RandomMatrix(8,8);
```

Az eredmény egy 8×8 típusú mátrix, kétjegyű egész számokkal véletlenszerűen feltöltve. Számítsuk ki az A determinánsát a `MyDet` és a `Determinant` függvény segítségével is! Mindkét függvény nyilván ugyanazt az egész számot eredményezi, de nem ugyanannyi idő alatt. Látható, hogy a determináns definíció szerint történő kiszámítása meglehetősen számolásigényes, és így lassú, a `Determinant` eljárás

pedig gyorsan lefut, így az biztosan nem definíció szerint számol.
Természetesen a rendelkezésre álló memória méretétől függ, de a MyDet függvényünknek egy 8×8 típusú mátrix már feszegeti a határait. Jelenleg, 2013-ban majdnem biztos, hogy az olvasó a saját személyi számítógépén nem tudja vele egy 100×100 típusú mátrix determinánsát kiszámítani. A baj ott van, hogy az S_{100} csoport mind a 100! elemét előállítani időigényes, nem beszélve arról, hogy a permute függvény mindet egyszerre a memóriában szeretné tartani, ami lehetetlen.

A Maple az aldeterminánsok megkeresését is támogatja, a vonatkozó eljárásokat a 3.4. szakaszban vizsgált A mátrixon mutatjuk be.

```
> A:=Matrix([[2,0,0,3],[1,-1,3,4],[-3,2,1,-5],[1,1,2,-1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Ekkor a (3.3) almátrixot a

```
> SubMatrix(A,[1,2],[1,3]);
```

paranccsal kaphatjuk meg, ahol az első lista a kiválasztott sorok, a második pedig a kiválasztott oszlopok indexeit tartalmazza. Vigyázat! A SubMatrix parancsnál a sor- és oszlopindexek sorrendje is számít, míg a mi definíciónk szerint nem. Mi az almátrixban a sorok és oszlopok sorrendjét meghagyjuk úgy, ahogy azok az eredeti mátrixban voltak. Az almátrix determinánsa (aldetermináns) pedig a

```
> Determinant(%);
```

parancs eredménye.

Ha az $n \times n$ típusú $A = [a_{ij}]$ mátrixnak csak egyetlen sorát (az i-ediket) és egyetlen oszlopát (a j-ediket) választjuk ki, akkor a metszésponton csak az a_{ij} elem található, amely önmagában egy 1×1 típusú mátrixot alkot, melynek determinánsa maga a_{ij}. Ekkor a Maple a hozzá tartozó komplementer aldeterminánst is megadja: Minor(A,i,j), és ebből az adjungált komplementer aldetermináns már könnyen származtatható.

Az alábbi Maple eljárással tesztelhetjük mind a kifejtési, mind a ferde kifejtési tételt.

```
> kif:=proc(M,i,j)
  local d,k;
  d:=0;
```

```
for k from 1 to 4 do
d:=d+M[i,k]*(-1)^(k+j)*Minor(M,j,k);
end do;
d;
end proc;
```

Ekkor `kif(A,i,j)` az A mátrix i-edik sorának minden elemét megszorozza a j-edik sor megfelelő eleméhez tartozó adjungált komplementer aldeterminánssal, majd a kapott szorzatokat összeadja. Ennek megfelelően, az $i = j$ esetben az eredmény $\det A$, míg $i \neq j$ esetén 0.

```
> kif(A,1,1);
```

$$45$$

```
> kif(A,1,2);
```

$$0$$

```
> Determinant(A);
```

$$45$$

3.7. Feladatok

3.1. Feladat. Előfordulhat-e, hogy egy csupa egész számokat tartalmazó négyzetes mátrix determinánsa nem egész szám? Válaszát indokolja!

3.2. Feladat. Az $[a_{ij}]_{6\times 6}$ mátrix determinánsában milyen előjellel szerepelnek az

a) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$

b) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$

szorzatok?

3.3. Feladat. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsait:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}!$$

3.4. Feladat. Mi a kapcsolat az A és B mátrixok determinánsa között?

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 3a_{12} & 5a_{13} \\ 2a_{21} & 3a_{22} & 5a_{23} \\ 2a_{31} & 3a_{32} & 5a_{33} \end{bmatrix}$$

3.5. Feladat. Hogyan változik egy mátrix determinánsa, ha a sorait fordított sorrendben írjuk fel?

3.6. Feladat. Mi a kapcsolat egy négyzetes mátrix és ellentettjének determinánsa között?

3.7. Feladat. Hogyan változik egy mátrix determinánsa, ha minden elemét ugyanazzal a konstanssal szorozzuk?

3.8. Feladat. Határozza meg x értékét, ha

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{bmatrix} = 0!$$

3.9. Feladat. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsait kifejtés segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.10. Feladat. Számítsa ki az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát eliminációs módszerrel!

3.11. Feladat. Határozza meg az alábbi $n \times n$ típusú mátrixok determinánsait!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

A V mátrix determinánsa (*Vandermonde-determináns*) mikor egyenlő nullával?

4. Műveletek mátrixokkal

Ebben a fejezetben a mátrixok körében értelmezünk műveleteket. Először az összeadást, mely csak azonos típusú mátrixokkal végezhető el.

4.1. Definíció. Az $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ és $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ *mátrixok összegén* azt az $A + B = [c_{ij}]_{m\times n}$ mátrixot értjük, melyre $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ minden $1 \leqslant i \leqslant m$ és $1 \leqslant j \leqslant n$ esetén.

Az $A + B$ mátrix kiszámításához tehát a megfelelő indexű elemeket kell összeadni. Például:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Különböző típusú mátrixok összegét nem értelmezzük.

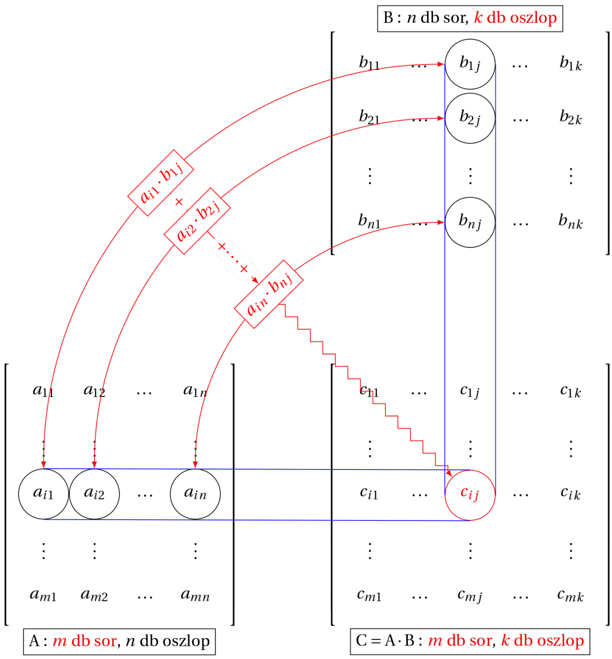
Jelölje $\mathcal{M}_{m\times n}(T)$ az összes T test feletti $m \times n$ típusú mátrixok halmazát. A fenti definíció szerint $+$ művelet az $\mathcal{M}_{m\times n}(T)$ halmazon, és mivel a mátrixok összeadásakor tulajdonképpen a T test elemeit adjuk össze, $+$ asszociatív és kommutatív. A zéruselem az az $m \times n$ típusú mátrix, melynek minden eleme nulla (*zérómátrix*), és az $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ mátrix ellentettje az a $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ mátrix, melyre $b_{ij} = -a_{ij}$ minden $1 \leqslant i \leqslant m$ és $1 \leqslant j \leqslant n$ esetén. Tehát $(\mathcal{M}_{m\times n}(T), +)$ Abel-csoport.

Kicsit komplikáltabb lesz a mátrixok szorzása. Először is, az A és B mártixok AB szorzatát csak akkor értelmezzük, ha az A mátrix oszlopainak száma megegyezik a B mátrix sorainak számával. Ekkor az A mátrixból egy sort (mondjuk az i-ediket), a B mátrixból pedig egy oszlopot (legyen ez a j-edik) kiválasztva a sornak és oszlopnak pontosan ugyanannyi eleme van. Szorozzuk ezt a sort és oszlopot oly módon össze, hogy az első elemet az elsővel, a másodikat a másodikkal, és így tovább, végül az utolsót az utolsóval. Ezen szorzatok összege lesz a szorzatmátrix i-edik sorának j-edik eleme. Ugyanez precízen:

4.2. Definíció. Az $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ és $B = [b_{ij}]_{n\times k}$ *mátrixok szorzatán* azt az $AB = [c_{ij}]_{m\times k}$ mátrixot értjük, melyre

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

minden $1 \leqslant i \leqslant m$ és $1 \leqslant j \leqslant k$ esetén.



4.1. ábra. Mátrixok szorzása

Legyenek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Az AB szorzat kiszámításának talán legszemléletesebb módszere, amikor a két mátrixot egy táblázatba helyezzük a következőképpen:

			2	1
			−3	2
			−5	7
1	2	0		
−1	3	4		

A beírt mátrixok sorait illetve oszlopait elválasztó vonalak behúzása után kirajzolódó négyzetrács szépen mutatja, hogy a szorzat egy 2×2 típusú mátrix lesz, amely

– első sorának első eleme: $1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-5) = -4$,

– első sorának második eleme: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 7 = 5$,

– második sorának első eleme: $(-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-5) = -31$,

– második sorának második eleme: $(-1) \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 33$.

Tehát

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -31 & 33 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi állítás következménye, hogy $(\mathcal{M}_{n\times n}(T), \cdot)$ félcsoport.

4.3. Tétel. *Ha $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times k}$ és $C = [c_{ij}]_{k\times l}$, akkor*

$$(AB)C = A(BC).$$

Bizonyítás. A mátrixszorzás definíciója szerint az AB szorzat létezik, és $m \times k$ típusú, és ekkor az $(AB)C$ szorzat is létezik, mely egy $m\times l$ típusú mátrix. Ugyanígy látható be, hogy az $A(BC)$ szorzat is létezik, ami szintén egy $m \times l$ típusú mátrix. Most megmutatjuk, hogy ez a két mátrix elemenként megegyezik. Valóban, felhasználva, hogy T test,

$$\begin{aligned}
((AB)C)_{ij} &= \sum_{u=1}^{k}(AB)_{iu}(C)_{uj} = \sum_{u=1}^{k}\left(\sum_{v=1}^{n}(A)_{iv}(B)_{vu}\right)(C)_{uj} \\
&= \sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{n}((A)_{iv}(B)_{vu})(C)_{uj} = \sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{n}(A)_{iv}((B)_{vu}(C)_{uj}) \\
&= \sum_{v=1}^{n}\sum_{u=1}^{k}(A)_{iv}((B)_{vu}(C)_{uj}) = \sum_{v=1}^{n}(A)_{iv}\sum_{u=1}^{k}(B)_{vu}(C)_{uj} \\
&= \sum_{v=1}^{n}(A)_{iv}(BC)_{vj} = (A(BC))_{ij}.
\end{aligned}$$

□

4.4. Tétel. $(\mathcal{M}_{n\times n}(T), +, \cdot)$ *nemkommutatív, asszociatív, egységelemes gyűrű.*

Bizonyítás. Ahhoz, hogy $(\mathcal{M}_{n\times n}(T), +, \cdot)$ asszociatív gyűrű, már csak a disztributivitást kell belátni. Ha $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ és $C = [c_{ij}]$ mind $n\times n$ típusú mátrixok, akkor a T-beli disztributivitás miatt

$$\begin{aligned}(A(B+C))_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(B+C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \\ &= (AB+AC)_{ij}.\end{aligned}$$

A jobb oldali disztributivitás is hasonlóan igazolható. Az egységelem szerepét az az $n \times n$ típusú mátrix tölti be, melynek a főátlójában minden eleme 1, máshol pedig minden eleme 0:

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezt a mátrixot *$n \times n$ típusú egységmátrixnak* nevezzük, és E_n-nel jelöljük.

Legyen például

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kiszámítva az AB és BA szorzatokat, láthatjuk, hogy a szorzás nem kommutatív.

$\square$

4.5. Tétel (Determinánsok szorzástétele)**.** *Ha A és B $n \times n$ típusú mátrixok, akkor*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Bizonyítás. Legyenek $A = [a_{ij}]$ és $B = [b_{ij}]$ $n \times n$ típusú mátrixok, és legyen C az a $(2n) \times (2n)$ típusú mátrix, melynek

- bal felső sarkában az A mátrix,
- jobb felső sarkában az $n \times n$ típusú zérómátrix,
- bal alsó sarkában az az $n \times n$ típusú mátrix, melynek főátlójában minden elem -1, máshol minden elem nulla,
- jobb alsó sarkában pedig a B mátrix van:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

A Laplace-féle kifejtési tétel első n sorra történő alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\det C = \det A \cdot (-1)^{(1+\cdots+n)+(1+\cdots+n)} \det B = \det A \cdot \det B.$$

Most adjuk hozzá az első sorhoz az $(n+1)$-edik sor a_{11}-szeresét, majd az $(n+2)$-edik sor a_{12}-szeresét, és így tovább, végül a $(2n)$-edik sor a_{1n}-szeresét! Utána adjuk hozzá a második sorhoz az $(n+1)$-edik sor a_{21}-szeresét, majd az $(n+2)$-edik sor a_{22}-szeresét, és így tovább, végül a $(2n)$-edik sor a_{2n}-szeresét! Az eljárást folytatva a többi sorra végül az n-edik sorhoz adjuk az $(n+1)$-edik sor a_{n1}-szeresét, majd az $(n+2)$-edik sor a_{n2}-szeresét, stb., végül a $(2n)$-edik sor a_{nn}-szeresét. Az így keletkezett mátrix a

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & (AB)_{11} & \cdots & (AB)_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (AB)_{1n} & \cdots & (AB)_{nn} \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

és a 3.10. tétel miatt $\det C_1 = \det C$. Alkalmazva ismét a Laplace-féle kifejtési tételt a C_1 mátrix első n sorára, azt kapjuk, hogy

$$\det C_1 = \det(AB) \cdot (-1)^{((n+1)+\cdots+2n)+(1+\cdots+n)} \cdot (-1)^n.$$

Mivel a -1 kitevőjében lévő összeg páros, ezért $\det C_1 = \det(AB)$, és így $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. □

Az alábbi tétel szerint az osztás még a négyzetes mátrixok körében sem végezhető el korlátlanul.

4.6. Tétel. *Egy négyzetes mátrixnak pontosan akkor létezik inverze a szorzásra* *nézve, ha determinánsa nem nulla.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az A $n \times n$ típusú mátrixnak létezik inverze, és legyen ez B. Ekkor $AB = E_n$, és a determinánsok szorzástétele miatt

$$\det A \cdot \det B = \det(AB) = \det E_n = 1,$$

tehát $\det A \neq 0$.

Fordítva, ha $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ olyan mátrix, melynek determinánsa nem nulla, akkor legyen $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ az a mátrix, melyre

$$b_{ji} = \frac{A_{ij}}{\det A},$$

ahol A_{ij} az A mátrix a_{ij} eleméhez tartozó adjungált komplementer aldeterminánsa. Ha ezzel a mátrixszal bármelyik oldalról megszorozzuk A-t, a kifejtési tétel garantálja, hogy a szorzat főátlójában csak egyesek lesznek, a ferde kifejtési tétel pedig azt, hogy máshol mindenütt nulla. Tehát $AB = E_n$, azaz B valóban az A inverze. □

A bizonyításból az is kiderült, hogy ha egy négyzetes mátrixnak létezik inverze, akkor az inverzmátrix hogyan állítható elő. Például ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

akkor $\det A = -1 \neq 0$ miatt A-nak létezik inverze, és

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^{1+1}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}{-1} & \frac{(-1)^{2+1}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}{-1} & \frac{(-1)^{3+1}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}{-1} \\ \frac{(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}}{-1} & \frac{(-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}}{-1} & \frac{(-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}{-1} \\ \frac{(-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}{-1} & \frac{(-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}{-1} & \frac{(-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hogy a kapott mátrix valóban az A inverze, arról az $AA^{-1} = E_3$ egyenlőség ellenőrzésével győződhetünk meg.

Végül megjegyezzük, hogy azon $n \times n$ típusú mátrixok, melyek determinánsa nem nulla, csoportot alkotnak a mátrixok szorzására nézve.

4.1. Kapcsolódó Maple eljárások

Tekintsük az alábbi mátrixokat:

```
> A:=Matrix([[1,2],[-3,4]]); B:=Matrix([[3,0],[5,-1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Lévén A és B azonos típusú négyzetes mátrixok, így velük az összeadás és a szorzás is elvégezhető. A Maple-ben a `+` operátor mátrixok összeadására is alkalmazható. Tehát ha az A és B mátrixokat már definiáltuk, és azok azonos típusúak, akkor `A+B` értéke éppen az A és B mátrixok összege lesz:

```
> A+B;
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Az $A+B$ mátrixot adják eredményül az `Add(A,B)` és a `MatrixAdd(A,B)` parancsok is.

A mátrixok szorzására azonban nem a `*`, hanem a `.` (pont) operátorral végezhető el. A már definiált A és B összeszorozható mátrixok esetén tehát `A.B` eredménye éppen az A és B mátrixok szorzata lesz:

```
> A.B;
```

$$\begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 11 & -4 \end{bmatrix}$$

Ugyanezt eredményezik a `Multiply(A,B)` és a `MatrixMatrixMultiply(A,B)` parancsok is. De:

```
> Multiply(B,A);
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

így ez a példa is alátámasztja azt, hogy a mátrixok szorzása nem kommutatív.

Egy négyzetes mátrix mindig megszorozható önmagával, így a négyzetes mátrixok hatványozása a szokásos módon, ismételt szorzásként értelmezhető. A Maple ^ operátora mátrixok esetén ebben az értelemben működik, tehát

```
> A^3;
```

$$\begin{bmatrix} -35 & 30 \\ -45 & 10 \end{bmatrix}$$

ami ugyanaz, mint

```
> A.A.A;
```

Ami a neutrális elemeket illeti, az $m \times n$ típusú zérómátrix megadására Maple-ban már több módszert is ismerünk. Mindemellett van rá külön eljárás is:

```
> ZeroMatrix(3,2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az $n \times n$ típusú egységmátrix előállítása pedig `IdentityMatrix(n)` paranccsal a legegyszerűbb.

Az A mártix inverzének kiszámítása:

```
> MatrixInverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

4.2. Feladatok

4.1. Feladat. Végezze el az alábbi műveleteket!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^3, \qquad \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n, \qquad \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{bmatrix}^n,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

4.2. Feladat. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Adja meg az

$$((A - B) \cdot C)^T$$

mátrixot!

4.3. Feladat. Igazolja, hogy ha $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ és $B = [b_{ij}]_{n\times k}$ típusú mátrix, akkor $(AB)^T = B^T A^T$!

4.4. Feladat. Keressen az $(\mathcal{M}_{n\times n}(T), +, \cdot)$ gyűrűben nullosztókat!

4.5. Feladat. Keresse meg azokat a 2×2 típusú mátrixokat, melyek a szorzásra nézve felcserélhetők az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixszal!

4.6. Feladat. Legyen

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} \;:\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Van-e G-nek neutrális eleme a mátrixszorzásra nézve? Igazolja, hogy $a \neq b$ megszorítással G csoportot alkot a mátrixszorzásra nézve!

4.7. Feladat. Keresse meg az alábbi mátrixok inverzeit!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{bmatrix}$$

4.8. Feladat. Igazolja, hogy ha A invertálható mátrix, akkor A^T is invertálható és $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

4.9. Feladat. Oldja meg a

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenletet!

4.10. Feladat. Igazolja, hogy mindazon $n \times n$ típusú mátrixok, melyek determinánsa 1, csoportot alkotnak a mátrixok szorzására nézve!

4.11. Feladat. Csoportot alkot-e a mátrixok szorzására nézve a

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \;:\; x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$$

halmaz?

4.12. Feladat. Legyen A egy olyan négyzetes mártix, melyre $A^n = 0$ valamely n esetén. Mutassa meg, hogy $\det A = 0$!

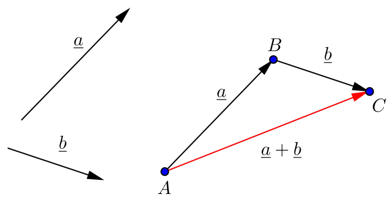
5. Szabadvektorok és analitikus geometria

Jelölje $\mathcal{E}$ az euklideszi geometriai teret. Az $\mathcal{E}$ tér pontjaiból képzett rendezett párokat *irányított szakasznak* mondjuk. Az (A, B) és (C, D) irányított szakaszokat ekvivalens szakaszoknak nevezzük, ha van a térnek olyan $p\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eltolása, amelyre $p(A) = C$ és $p(B) = D$ teljesül, azaz a p eltolás az első irányított szakasz kezdő-, illetve végpontját a másik kezdő-, illetve végpontjába viszi át. Könnyen látható, hogy ez reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz ekvivalencia-reláció. *Szabadvektorok* alatt ezen ekvivalencia-reláció osztályait értjük. Egy szabadvektor tehát egymásból párhuzamos eltolással megkapható szakaszoknak a halmaza. Egy szabadvektor egy elemét (ami egy irányított szakasz) a *szabadvektor reprezentánsának* mondjuk. Világos, hogy minden szabadvektor egyértelműen azonosítható bármely reprezentánsával. Minthogy egy szakasz a tér bármely pontjából felmérhető, minden szabadvektornak a tér bármely pontjából indul reprezentánsa. A szabadvektorokat ezentúl az ábécé aláhúzott kisbetűivel fogjuk jelölni, és a rövidség kedvéért sok esetben csak vektorokként hivatkozunk rájuk. Az (A, B) irányított szakasz által reprezentált szabadvektort $\overrightarrow{AB}$-vel is jelölhetjük.

Az *$\underline{a}$ szabadvektor hosszán* $\underline{a}$ tetszőleges reprezentánsának a hosszát értjük, melyet $|\underline{a}|$-val jelölünk. Ha $|\underline{a}| = 1$, akkor $\underline{a}$-t egységvektornak mondjuk.

Az összes szabadvektorok halmazát $V(\mathcal{E})$ fogja jelölni.

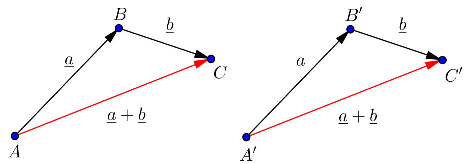
5.1. Szabadvektorok összeadása és skalárral való szorzása



5.1. ábra. Szabadvektorok összeadása

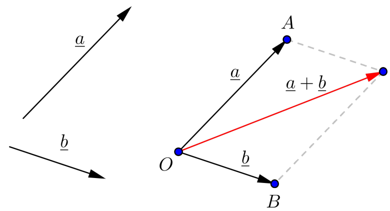
Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ adott szabadvektorok, vegyük az $\underline{a}$ egy (A, B) reprezentánsát. Ekkor van a $\underline{b}$ szabadvektornak B kezdőpontú reprezentánsa, legyen ez (B, C). Jelölje $\underline{c}$ azt a szabadvektort, melyhez az $\underline{a}$ fenti reprezentánsának kezdőpontjából induló, és a $\underline{b}$ reprezentánsának végpontjába érkező, azaz az (A, C) irányított szakasz tartozik. Az *$\underline{a}$ és $\underline{b}$ szabadvektorok összegén* éppen a $\underline{c}$ szabadvektort értjük, melyet ezentúl $\underline{a} + \underline{b}$-vel jelölünk. Geometriai megfontolásokkal könnyen igazolható

(l. 5.2. ábra), hogy az összeg nem függ az $\underline{a}$ reprezentánsának megválasztásától, tehát a definíció korrekt. A nempárhuzamos vektorok összegének meghatározására



5.2. ábra. A szabadvektorok összeadása nem függ a reprezentánsok megválasztásától

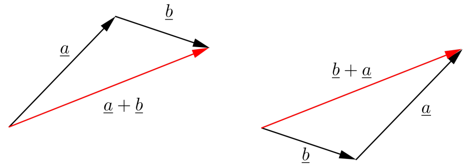
az úgynevezett paralelogramma módszer is használható: ekkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szabadvektoroknak egy tetszőleges O pontból induló (O, A) és (O, B) reprezentánsaival, mint oldalakkal szerkesztett paralelogramma O pontból induló átlója által reprezentált szabadvektor lesz az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ szabadvektorok összege.



5.3. ábra. Szabadvektorok összeadása paralelogramma módszerrel

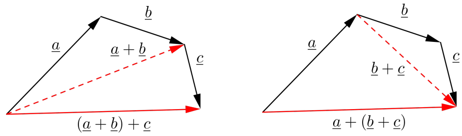
5.1. Tétel. $(V(\mathcal{E}), +)$ *Abel-csoport.*

Bizonyítás. A szabadvektorok összeadásának kommutativitása a paralelogramma módszer alapján, asszociatív tulajdonsága pedig a definíció alapján könnyen belátható (l. 5.4. és 5.5. ábrák).



5.4. ábra. A szabadvektorok összeadása kommutatív

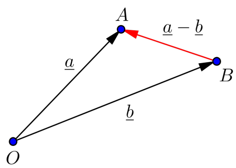
A zéruselem szerepét az (A, A) típusú, nulla hosszúságú szakasz által reprezentált szabadvektor tölti be, melyet ezentúl $\underline{0}$ fog jelölni.



5.5. ábra. A szabadvektorok összeadása asszociatív

Végül, ha az $\underline{a}$ szabadvektor egy reprezentánsa (A, B), akkor az $\underline{a}$ ellentettje az a $-\underline{a}$-val jelölt szabadvektor, melynek reprezentánsa (B, A). $\square$

Az ellentett vektor létezésének köszönhetően lehetővé válik a vektorok különbségének értelmezése úgy, mint a kivonandó ellentettjének hozzáadása a kisebbítendőhöz, azaz $\underline{a} - \underline{b} = \underline{a} + (-\underline{b})$. A különbség tehát az a szabadvektor, melyet $\underline{b}$-hez hozzáadva $\underline{a}$-t kapunk. Mint azt a 5.6. ábra mutatja, ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szabadvektoroknak vesszük egy közös O kezdőpontból induló (O, A) és (O, B) reprezentánsait, akkor a (B, A) irányított szakasz az $\underline{a} - \underline{b}$ különbség egy reprezentánsa lesz.



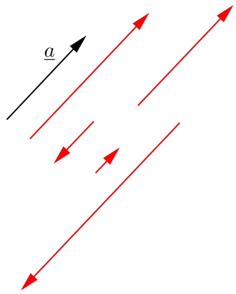
5.6. ábra. Szabadvektorok kivonása

Most definiáljuk az $\underline{a}$ szabadvektor egy λ valós számmal történő szorzását: ha λ pozitív valós szám, tekintsük $\underline{a}$-nak egy (O, A) reprezentánsát, és alkalmazzuk az O középpontú λ arányú hasonlóságot. Jelölje A' az A képét. Ekkor $\lambda\underline{a}$ alatt az (O, A') által reprezentált szabadvektort értjük. Ha λ negatív, akkor $|\lambda|$ arányú középpontos hasonlóság alkalmazásával, majd O-ra való tükrözéssel kapjuk az A' pontot. Legyen végül $0\underline{a} = \underline{0}$, bármely $\underline{a}$ szabadvekor esetén.

A valós számokat ezentúl többnyire skalároknak fogjuk nevezni. A szabadvektorok skalárral való szorzásának alapvető tulajdonságait a következő tételben foglaltuk össze. Ezek mindegyike a középpontos hasonlóság tulajdonságai alapján könnyen bizonyítható.

5.2. Tétel. *Bármely $\underline{a}, \underline{b}$ szabadvektorok és λ, μ skalárok esetén teljesülnek a következők:*

1. $\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b}$,



5.7. ábra. Az $\underline{a}$ vektor és néhány skalárszorosa

2. $(\lambda + \mu)\underline{a} = \lambda\underline{a} + \mu\underline{a}$,

3. $(\lambda\mu)\underline{a} = \lambda(\mu\underline{a})$,

4. $1\underline{a} = \underline{a}$.

Világos, hogy az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szabadvektorok pontosan akkor párhuzamosak, ha $\underline{a} = \lambda\underline{b}$ teljesül valamely λ skalárral.

5.2. Szabadvektorok lineáris kombinációja

Véges sok szabadvektorból kiindulva a szabadvektorok összeadása és skalárral való szorzása segítségével újabb vektorokat képezhetünk.

5.3. Definíció. Legynek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ szabadvektorok, és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adott skalárok. Ekkor a

$$\lambda_1\underline{a}_1 + \lambda_2\underline{a}_2 + \cdots + \lambda_n\underline{a}_n$$

szabadvektort az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ szabadvektorok $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ együtthatókkal képzett *lineáris kombinációjának* nevezzük.

5.4. Tétel. *Ha $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ nemkomplanáris (nem egy síkban lévő) szabadvektorok, akkor tetszőleges $\underline{a}$ szabadvektor egyértelműen írható fel*

$$\underline{a} = \lambda_1\underline{b}_1 + \lambda_2\underline{b}_2 + \lambda_3\underline{b}_3$$

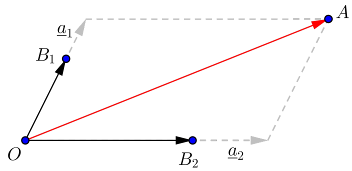
alakban.

Bizonyítás. Először azt az esetet tárgyaljuk, amikor $\underline{a}$ a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ vektorok közül valamely kettővel, mondjuk $\underline{b}_1$-gyel és $\underline{b}_2$-vel egy síkban van. Tekintsük ekkor az

$\underline{a}$ és a $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ vektorok egy közös O pontból kiinduló $(O,A),(O,B_1)$ és (O,B_2) reprezentánsait, majd húzzunk az A ponton át párhuzamosokat az OB_1 és OB_2 egyenesekkel. Ez a négy egyenes egy paralelogrammát határoz meg, melynek az egyik átlója éppen (O,A). Ha a paralelogramma O-ból induló irányított oldalait $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ jelöli, akkor a paralelogramma módszer szerint $\underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2$. Világos, hogy $\underline{a}_1 = \lambda_1 \underline{b}_1$, ahol λ_1 az $\underline{a}_1$ és $\underline{b}_1$ szabadvektorok hosszainak segítségével egyértelműen meghatározható. Ugyanígy kapjuk, hogy $\underline{a}_2 = \lambda_2 \underline{b}_2$, és innen

$$\underline{a} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + 0\underline{b}_3.$$

Az előállítás egyértelműsége a szerkesztés egyértelműségének következménye. Abban



5.8. ábra. Az $\underline{a}$ szabadvektor előállítása a $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ szabadvektorok lineáris kombinációjaként

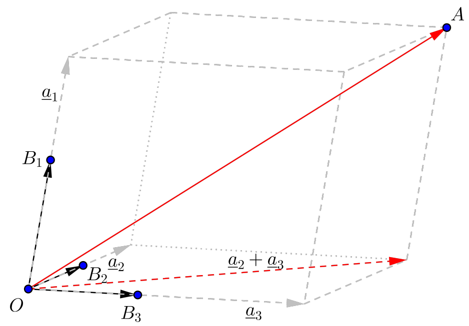
az esetben, amikor $\underline{a}$ nincs a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ vektorok közül semelyik kettővel egy síkban, hasonlóan járunk el. Vegyük föl az $\underline{a}$ és a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ vektorok egy közös O pontból kiinduló reprezentánsait, melyek végpontjait jelölje rendre A, B_1, B_2, B_3, majd az A pontból állítsunk párhuzamos síkokat az OB_1, OB_2, az OB_1, OB_3, és az OB_2, OB_3 metsző egyenespárok által meghatározott síkokkal. Ez a 6 sík egy paralelepipedont határoz meg, melynek (O,A) éppen az egyik testátlója lesz. A síkbeli esetnél elmondottakhoz hasonlóan látható, hogy (O,A) a paralelepipedon O pontból induló 3 irányított éleinek összege, az irányított élek pedig a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ vektorok alkalmas skalárszorosai. $\square$

5.5. Definíció. A tér egy *bázisán* a tér három nem komplanáris szabadvektorát értjük. Ha $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ egy bázisa a térnek, és

$$\underline{a} = \lambda_1 \underline{b}_1 + \lambda_2 \underline{b}_2 + \lambda_3 \underline{b}_3,$$

akkor a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ rendezett számhármast az $\underline{a}$ szabadvektor $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$ bázisára vonatkozó *koordinátáinak* nevezzük.

Könnyen belátható, hogy egy rögzített bázis esetén a koordinátáival adott $\underline{x} =$



5.9. ábra. Az $\underline{a}$ szabadvektor előállítása a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ szabadvektorok lineáris kombinációjaként

$= (x_1, x_2, x_3)$ és $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ vektorok összegének koordinátái $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, továbbá bármely λ skalár esetén a $\lambda\underline{x}$ koordinátái $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$.

5.3. Skaláris szorzat

Jóllehet a tér bármely három nem komplanáris szabadvektorai a tér egy bázisát alkotják, bázisnak általában egységnyi hosszúságú, páronként egymásra merőleges szabadvektorokat célszerű választani, ekkor ugyanis a szabadvektorok koordinátái a bázisvektorok egyeneseire eső merőleges vetületek lesznek. Ennek kiszámítására alkalmas az úgynevezett skaláris szorzás.

5.6. Definíció. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szabadvektorok *skaláris szorzatán* az

$$(\underline{a}, \underline{b}) = |\underline{a}||\underline{b}| \cos \angle(\underline{a}, \underline{b})$$

számot értjük.

A definícióban $\angle(\underline{a}, \underline{b})$ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szabadvektorok szögét jelöli, mely alatt a két szabadvektor közös kezdőpontból induló reprezentánsainak szögét értjük. A nullvektor szöge bármely szabadvektorral – definíció szerint – tetszőleges. Hangsúlyozzuk, hogy a skaláris szorzat eredménye egy szám (skalár), ez motiválja az elnevezést. Fontos, hogy a skaláris szorzás és a skalárral való szorzás a hasonló elnevezés ellenére két teljesen különböző dolog: az első két szabadvektorhoz rendel egy skalárt, míg az utóbbi egy skalárhoz és egy szabadvektorhoz rendel egy szabadvektort.

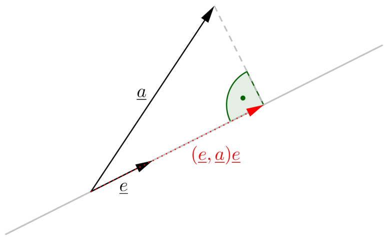
Látható, hogy ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok merőlegesek, akkor skaláris szorzatuk 0. Sőt, ez fordítva is igaz, ugyanis az $|\underline{a}||\underline{b}| \cos \angle(\underline{a}, \underline{b})$ szorzat csak úgy lehet 0, ha valamelyik tényezője 0. Ha $\cos \angle(\underline{a}, \underline{b}) = 0$, akkor $\angle(\underline{a}, \underline{b}) = 90°$, ha pedig mondjuk

$|\underline{a}| = 0$, akkor $\underline{a}$ csak a nullvektor lehet, amely – mint fent mondtuk – tekinthető bármely vektorra merőlegesnek.

Legyen $\underline{e}$ egységvektor és $\underline{a}$ tetszőleges vektor. Jelölje az $\underline{a}$ vektor $\underline{e}$ egyenesére eső merőleges vetületének hosszát m. Az 5.10. ábrán látottak szerint

$$m = |\underline{a}| \cos \angle(\underline{e}, \underline{a}) = |\underline{e}||\underline{a}| \cos \angle(\underline{e}, \underline{a}) = (\underline{e}, \underline{a}),$$

tehát a merőleges vetület hossza $(\underline{e}, \underline{a})$, a vetületvektor pedig $(\underline{e}, \underline{a})\underline{e}$.



5.10. ábra. Az $\underline{e}$ egységvektor és az $\underline{a}$ vektor skaláris szorzata

Most a skaláris szorzat alapvető tulajdonságait tekintjük át.

5.7. Tétel. *Bármely $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V(\mathcal{E})$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következők:*

1. $(\underline{a}, \underline{a}) \geqslant 0$, *és* $(\underline{a}, \underline{a}) = 0$ *pontosan akkor, ha* $\underline{a} = \underline{0}$;
2. $(\underline{a}, \underline{b}) = (\underline{b}, \underline{a})$;
3. $(\underline{a} + \underline{b}, \underline{c}) = (\underline{a}, \underline{c}) + (\underline{b}, \underline{c})$;
4. $(\lambda\underline{a}, \underline{b}) = \lambda(\underline{a}, \underline{b})$.

Bizonyítás. Az első és második tulajdonság nem szorul magyarázatra. Világos, hogy

$$(\lambda\underline{a}, \underline{b}) = |\lambda\underline{a}||\underline{b}| \cos \angle(\lambda\underline{a}, \underline{b}) = |\lambda||\underline{a}||\underline{b}| \cos \angle(\lambda\underline{a}, \underline{b}),$$

ahonnan ha $\lambda > 0$, akkor

$$(\lambda\underline{a}, \underline{b}) = \lambda|\underline{a}||\underline{b}| \cos \angle(\underline{a}, \underline{b}) = \lambda(\underline{a}, \underline{b}),$$

míg negatív λ esetén

$$(\lambda\underline{a}, \underline{b}) = -\lambda|\underline{a}||\underline{b}|(-\cos \angle(\underline{a}, \underline{b})) = \lambda(\underline{a}, \underline{b})$$

következik. Tehát a 4. tulajdonság is teljesül, így a harmadik tulajdonság igazolásánál már feltehető, hogy c egységvektor. Tekintsük az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok $(O, A), (A, B)$ és (O, C) reprezentánsait. Ekkor az $\underline{a} + \underline{b}$ vektornak (O, B) egy reprezentánsa, és ha a B pont OC egyenesre eső merőleges vetületeét B' jelöli, akkor (O, B') az $\underline{a}+\underline{b}$ vektor $\underline{c}$ egyenesére eső merőleges vetületvektorának reprezentánsa. Most vetítsük le külön-külön az (O, A) és (A, B) szakaszokat az OC egyenesre: jelölje az A pont vetületét A'. Ekkor az (O, A') és (A', B') szakaszok által reprezentált vektorok összegének egy reprezentánsa megintcsak (O, B'). Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok összeadása tehát felcserélhető a $\underline{c}$ egyenesére való merőleges vetítéssel, és ez a tény éppen a 3. tulajdonság geometriai megfelelője. □

A 3. tulajdonság szerint szabadvektorok összegét egy szabadvektorral skalárisan tagonként is szorozhatjuk. A 2. tulajdonság szerint ez akkor is fennáll, ha az összeg a második komponensben van.

A skaláris szorzás esetén asszociativitás szóba sem kerülhet, hiszen az $((\underline{a}, \underline{b}), \underline{c})$ kifejezés eleve értelmetlen.

Ezen szakasz bevezetőjében már utaltunk rá, hogy ha az $E = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ bázis vektorai páronként egymásra merőleges egységvektorok (az ilyen bázisokat *ortonormált bázisoknak* mondjuk), akkor tetszőleges $\underline{a}$ vektor koordinátái egyszerűen megkaphatók a skaláris szorzás segítségével, ugyanis ha $\underline{a}$ E-re vonatkozó koordinátái $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, akkor az előző tétel 3. és 4. pontjait alkalmazva

$$\begin{aligned}(\underline{a}, \underline{e}_i) &= (\alpha_1\underline{e}_1 + \alpha_2\underline{e}_2 + \alpha_3\underline{e}_3, e_i) = \alpha_1(\underline{e}_1, \underline{e}_i) + \alpha_2(\underline{e}_2, \underline{e}_i) + \alpha_3(\underline{e}_3, \underline{e}_i) = \\ &= \alpha_i(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = \alpha_i\end{aligned}$$

adódik bármely $i \in \{1, 2, 3\}$ esetén. Ennek felhasználásával két, koordinátáival adott vektor skaláris szorzata is könnyedén megadható: ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok E bázisra vonatkozó koordinátái $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ és $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, akkor

$$\begin{aligned}(\underline{a}, \underline{b}) &= (a, \beta_1\underline{e}_1 + \beta_2\underline{e}_2 + \beta_3\underline{e}_3) = \beta_1(\underline{a}, \underline{e}_1) + \beta_2(\underline{a}, \underline{e}_2) + \beta_3(\underline{a}, \underline{e}_3) = \\ &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.\end{aligned}$$

Ortonormált bázisra vonatkozó koordinátáival adott vektorok skaláris szorzata tehát úgy is megkapható, hogy a megfelelő koordinátákat összeszorozzuk, majd a kapott szorzatokat összeadjuk. Speciálisan,

$$(\underline{a}, \underline{a}) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

továbbá definíció szerint

$$(\underline{a}, \underline{a}) = |\underline{a}||\underline{a}| \cos 0^\circ = |\underline{a}|^2.$$

Innen kapjuk, hogy

$$|\underline{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2},$$

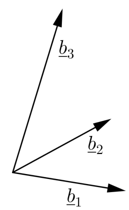
tehát koordinátákkal adott szabadvektor hossza is kiszámítható, mégpedig úgy, hogy négyzetgyököt vonunk a koordináták négyzetösszegéből. Következésképpen az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szöge

$$\cos \angle(\underline{a}, \underline{b}) = \frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}||\underline{b}|} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}},$$

tehát a koordináták ismeretében a vektorok szöge is megkapható.

5.4. Vektoriális szorzat

Most a szabadvektorok körében egy algebrai értelemben vett műveletet definiálunk, mely két szabadvektorhoz egy szabadvektort rendel. Ehhez azonban szükségünk lesz a tér irányításának fogalmára, melyet itt most csak szemléletesen vezetünk be. Vegyünk a tér egy $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$ bázisát, és vegyük a bázisvektoroknak egy közös kezdőpontból induló reprezentánsait. Azt mondjuk, hogy B *jobbsodrású*, ha a $\underline{b}_3$ végpontjából nézve a $\underline{b}_1$ vektor 180° foknál kisebb szöggel forgatható a $\underline{b}_2$ irányába, az óramutató járásával ellentétes irányban. Az 5.11. ábrán például $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$



5.11. ábra. $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$ jobbsodrású bázis

egy jobbsodrású bázis, de ha mondjuk a b_3 vektort az ellentettjére cserélnénk, akkor már nem lenne az.

5.8. Definíció. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nempárhuzamos szabadvektorok *vektoriális szorzatán* azt a $\underline{c}$ szabadvektort értjük, mely

1. merőleges $\underline{a}$-ra is és $\underline{b}$-re is,

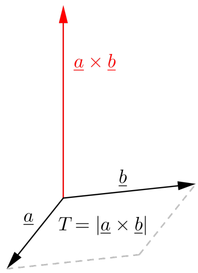
2. hossza $|\underline{a}||\underline{b}| \sin \angle(\underline{a}, \underline{b})$,

3. és $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ jobbsodrású bázis.

Párhuzamos szabadvektorok vektoriális szorzata a nullvektor. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szabadvektorok vektoriális szorzatát $\underline{a} \times \underline{b}$-vel jelöljük, melyet „$\underline{a}$ kereszt $\underline{b}$"-nek olvasunk.

A definíció korrekt, ugyanis ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nempárhuzamos szabadvektorok, akkor a rájuk merőleges $\underline{c}$ vektorral együtt nem alkothatnak komplanáris vektorrendszert, tehát az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorhármas valóban bázisa a térnek. Továbbá könnyű látni, hogy az első két feltételnek pontosan két szabadvektor tesz eleget, melyek egymás ellentettjei. E kettő közül pontosan az egyik tesz eleget a 3. feltételnek.

Könnyen látható, hogy nempárhuzamos vektorok vektoriális szorzata nem lehet a nullvektor. Továbbá, $\underline{a} \times \underline{b}$ hossza pontosan az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe.



5.12. ábra. Az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor hossza pontosan az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe

5.9. Tétel. *Bármely $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V(\mathcal{E})$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következők:*

1. $\underline{a} \times \underline{b} = -(\underline{b} \times \underline{a})$;

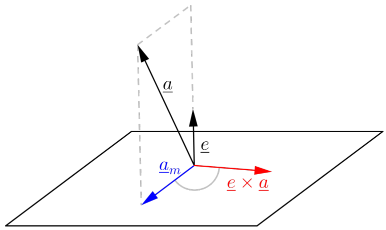
2. $(\lambda \underline{a} \times \underline{b}) = \lambda(\underline{a} \times \underline{b})$;

3. $(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \times \underline{c}) + (\underline{b} \times \underline{c})$.

Bizonyítás. Világos, hogy a $\underline{b} \times \underline{a}$ vektor merőleges $\underline{a}$-ra is és $\underline{b}$-re is, és hossza ugyanaz, mint az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektoré. Így tehát a $\underline{b} \times \underline{a}$ vektor csak $\underline{a} \times \underline{b}$, vagy az ellentettje lehet. Alapul véve azt, hogy $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b})$ jobbsodrású bázis, a $(\underline{b}, \underline{a}, -(\underline{a} \times \underline{b}))$ lesz szintén jobbsodrású, így $-(\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{b} \times \underline{a}$, és ez az 1. állítással ekvivalens.

A második állításban az $\underline{a}$ vektor λ-val való szorzása az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor hosszát $|\lambda|$-szorosára változtatja, a merőlegességre (a definíció 2. pontja) vonatkozóan nincs hatással. Pozitív λ esetén az irányítás is változatlan, azonban ha λ negatív, akkor $\lambda\underline{a}$ $\underline{a}$-val ellentétes irányú, ezért $\lambda\underline{a} \times \underline{b}$ iránya is $\underline{a} \times \underline{b}$ irányával ellentétes lesz.

Felhasználva, hogy a 2. állítás már igaz, a 3. bizonyítását elég arra az esetre elvégezni, amikor $\underline{c}$ egységvektor. Geometriai megfontolásokkal igazolható, hogy egy $\underline{e}$ egységvektor vektoriális szorzata bármely $\underline{a}$ vektorral megkapható úgy, hogy $\underline{a}$-t egy az $\underline{e}$-re merőleges síkra vetítjük, majd a kapott vektort ebben a síkban elforgatjuk 90°-kal $\underline{e}$ kezdőpontja körül, az óramutató járásával ellentétes irányban (l. 5.13. ábra). Ettől kezdve a 3. állítás igazát a fent leírt geometriai transzformáció illeszkedéstartó tulajdonsága garantálja. □



5.13. ábra. Az $\underline{e}$ egységvektor vektoriális szorzata az $\underline{a}$ vektorral

Az 5.13. ábráról az is leolvasható, hogy ha az $\underline{a}$ vektort egy $\underline{e}$ egységvektorral párhuzamos és egy arra merőleges szabadvektor összegére kívánjuk bontani, akkor a merőleges komponens éppen $\underline{a}_m$, és

$$\underline{a}_m = (\underline{e} \times \underline{a}) \times \underline{e}.$$

Ahogy az a skaláris szorzásnál is volt, koordinátáival adott vektorok vektoriális szorzata koordinátáinak kiszámítása ortonormált bázis rögzítése esetén válik egyszerűvé. Ha $E = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ egy ortonormált, jobbsodrású bázis, akkor könnyen láthatjuk, hogy

$$\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3, \quad \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1, \quad \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2.$$

5.10. Tétel. *Ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok E bázisra vonatkozó koordinátái $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ és $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, akkor $\underline{a} \times \underline{b}$ koordinátái*

$$(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\underline{a} \times \underline{b} = (&\alpha_1\underline{e}_1 + \alpha_2\underline{e}_2 + \alpha_3\underline{e}_3, \beta_1\underline{e}_1 + \beta_2\underline{e}_2 + \beta_3\underline{e}_3) = \\
&= \alpha_1\beta_1(\underline{e}_1 \times \underline{e}_1) + \alpha_1\beta_2(\underline{e}_1 \times \underline{e}_2) + \alpha_1\beta_3(\underline{e}_1 \times \underline{e}_3) + \\
&\quad + \alpha_2\beta_1(\underline{e}_2 \times \underline{e}_1) + \alpha_2\beta_2(\underline{e}_2 \times \underline{e}_2) + \alpha_2\beta_3(\underline{e}_2 \times \underline{e}_3) + \\
&\quad + \alpha_3\beta_1(\underline{e}_3 \times \underline{e}_1) + \alpha_3\beta_2(\underline{e}_3 \times \underline{e}_2) + \alpha_3\beta_3(\underline{e}_3 \times \underline{e}_3) = \\
&= \alpha_1\beta_2\underline{e}_3 - \alpha_1\beta_3\underline{e}_2 - \alpha_2\beta_1\underline{e}_3 + \alpha_2\beta_3\underline{e}_1 + \alpha_3\beta_1\underline{e}_2 - \alpha_3\beta_2\underline{e}_1 = \\
&= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\underline{e}_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\underline{e}_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\underline{e}_3
\end{aligned}$$

□

A tétel helyett inkább az

$$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

formulát érdemes fejben tartani, melynek helyessége a determináns első sora szerinti kifejtése után rögtön látszik.

Végül megjegyezzük, hogy a vektoriális szorzás nem asszociatív. Az asszociativitás helyett az úgynevezett Jacobi-azonosság teljesül, azaz minden $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V(\mathcal{E})$ esetén

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = 0.$$

5.5. Vegyesszorzat

A vegyesszorzatot a skaláris szorzás és a vektoriális szorzás kombinálásával értelmezzük, melynek értéke – mint látni fogjuk – egy önálló jelentéssel bíró skalár lesz.

5.11. Definíció. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ szabadvektorok *vegyesszorzatán* az

$$(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})$$

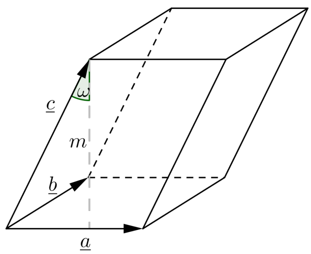
skalárt értjük, melyet $\underline{abc}$-vel jelölünk.

Először megmutatjuk, hogy a vegyesszorzat pontosan akkor 0, ha a három vektor komplanáris. Ha az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok párhuzamosak, akkor nyilván $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy síkban vannak, és $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$, majd $(\underline{0}, \underline{c}) = 0$ miatt az $\underline{abc}$ vegyesszorzat 0. Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nempárhuzamos vektorok, akkor meghatároznak egy síkot, melyre az ekkor nem nulla $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor merőleges. A $\underline{c}$ vektor pontosan akkor egysíkú az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorokkal, ha $\underline{c}$ is merőleges $\underline{a} \times \underline{b}$-re, ami pontosan akkor van, ha $\underline{a} \times \underline{b}$ és $\underline{c}$ skaláris szorzata, azaz az $\underline{abc}$ vegyesszorzat 0.

Legyenek most $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ nem komplanáris vektorok, és tekintsük az általuk kifeszített paralelepipedont. Ennek alapterülete az $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe, amely – mint már láttuk – $T = |\underline{a} \times \underline{b}|$, magassága pedig $m = |\underline{c}| \cos\omega$, ahol ω a magasság $\underline{c}$-vel bezárt szögét jelöli. Ekkor a paralelepipedon térfogata

$$V = T \cdot m = |\underline{a} \times \underline{b}||\underline{c}| \cos\omega = |(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c})| = |\underline{abc}|.$$

(Vigyázat! A fenti formulában a $|\cdot|$ zárójelpár két dolgot is jelöl: ha benne skalár



5.14. ábra. Három vektor vegyesszorzata a vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata

áll, akkor abszolút értékét jelent, míg ha vektor, akkor annak hosszát jelenti.) Nem komplanáris vektorok esetén tehát a vegyesszorzat abszolút értéke a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata.

Könnyen belátható továbbá, hogy az $\underline{abc}$ vegyesszorzat pontosan akkor pozitív, ha $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ jobbsodrású bázis.

A vegyesszorzat műveleti tulajdonságait csak felsoroljuk, a bizonyítás a skaláris és vektoriális szorzatok tulajdonságainak felhasználásával egyszerűen elvégezhető.

5.12. Tétel. *Bármely $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in V(\mathcal{E})$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következők:*

1. $\underline{abc} = \underline{bca} = \underline{cab} = -(\underline{cba}) = -(\underline{bac}) = -(\underline{acb})$;
2. $(\lambda\underline{a})\underline{bc} = \lambda(\underline{abc})$;
3. $\underline{ab}(\underline{c} + \underline{d}) = \underline{abc} + \underline{abd}$.

Az 1. tulajdonság értelmében a 2. tulajdonságnál a λ skalár bármelyik változóból kiemelhető, a 3. tulajdonságnál pedig az összeget bármelyik változó helyére írva fennáll a disztributív tulajdonság.

Legyenek az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok E ortonormált bázisra vonatkozó koordinátái rendre

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Ekkor vektoriális és skaláris szorzatok koordinátás alakra vonatkozó kiszámítási módjából közvetlenül adódik, hogy

$$\underline{abc} = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}.$$

Ezzel a determináns – mint térfogat – egy újabb jelentést kapott. A sorok felcserélésének determinánsra gyakorolt hatása (l. 3.11. tétel) szép összhangban van a fenti tételünk 1. pontjával.

5.6. Egyenesek és síkok egyenletei

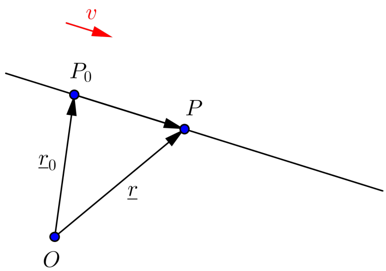
5.13. Definíció. Az euklideszi geometriai tér egy *koordináta-rendszere* alatt egy a tér egy rögzített O pontjából, és a szabadvektorok egy bázisából álló párt értünk. Az O pontot ekkor *origónak* nevezzük.

Rögzítsünk a térben egy koordináta-rendszert, és rendeljük hozzá minden szabadvektorhoz az O kezdőpontú reprezentánsának a végpontját. Ezáltal kölcsönösen egyértelmű leképezést létesítettünk a tér pontjai és a szabadvektorai között. A P pont koordinátái alatt ekkor a neki megfelelő $\overrightarrow{OP}$ vektor a koordináta-rendszer bázisára vonatkozó koordinátáit értjük.

A tér egy egyenesének *irányvektorán* egy az egyenessel párhuzamos nemzérus vektort értünk. Világos, hogy a tér minden egyenese egyértelműen meghatározható egy pontjával és egy irányvektorával.

Tekintsük a tér egy tetszőleges, P_0 ponton áthaladó egyenesét, és legyen ezen egyenes egy irányvektora $\underline{v}$. Ekkor a tér P pontja akkor és csak akkor illeszkedik az egyenesre, ha a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor párhuzamos az egyenessel, és így annak $\underline{v}$ irányvektorával is, azaz $\overrightarrow{P_0P} = \lambda\underline{v}$ valamely λ skalár esetén. Bevezetve az $\underline{r} = OP$ és $\underline{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ jelöléseket ez

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + \lambda\underline{v} \tag{5.2}$$



5.15. ábra. A P_0 ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes pontjainak előállítása

alakba írható, melyet az *egyenes paraméteres vektoregyenletének* nevezünk. Az $\underline{r}$ vektort ismeretlennek tekintve elmondható, hogy az (5.2) egyenletet azok és csak azok a szabadvektorok elégítik ki, melyek origóból induló reprezentánsának végpontja a P_0 ponton átmenő $\underline{v}$ irányvektorú egyenesen van. Továbbá λ minden értéke egyértelműen meghatározza az egyenes egy pontját, és fordítva is: az egyenes minden pontjához tartozik egy valós λ érték.

Ha a P_0 pont és a $\underline{v}$ vektor $P_0(x_0, y_0, z_0)$ és $\underline{v}(v_1, v_2, v_3)$ koordinátáival adottak, és az $\underline{r}$ vektor koordinátái $\underline{r}(x, y, z)$, akkor (5.2) az

$$x = x_0 + \lambda v_1$$
$$y = y_0 + \lambda v_2$$
$$z = z_0 + \lambda v_3$$

egyenletrendszerrel ekvivalens. Ezt az előállítást az *egyenes paraméteres egyenletrendszerének* nevezzük. Ha a v_1, v_2, v_3 koordináták egyike sem 0, akkor mindhárom egyenletből λ-t kifejezve az

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

egyenletrendszert kapjuk, melyet az *egyenes paramétermentes egyenletrendszerének* is nevezünk. Ennek megoldáshalmaza pontosan az egyenes pontjainak koordinátáiból áll. Ha például $v_1 = 0$, akkor az egyenletrendszerünk

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

alakú lesz. Például a $P_0(-1, 2, 3)$ ponton átmenő, $\underline{v}(2, 0, -3)$ vektorral párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$x = -1 + 2\lambda, \quad y = 2, \quad z = 3 - 3\lambda.$$

Ez, az 1. és 3. egyenletekből λ-t kifejezve

$$\frac{x+1}{2} = \frac{z+3}{3}, \quad y = 2$$

alakba írható.

A tér egy egyenesét annak két különböző P_1 és P_2 pontjai is egyértelműen meghatározzák. Ekkor P_1 és P_2 közül bármelyik tekinthető az egyenes adott pontjának, és a $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor nyilván párhuzamos az egyenessel, azaz egy irányvektora annak. Tehát $P_0 = P_1$ és $\underline{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ választással az (5.2) egyenlet felírható. Ha a P_1 és P_2 pontok $P_1(x_1, x_2, x_3)$ és $P_2(y_1, y_2, y_3)$ koordinátáival adottak, akkor felhasználva, hogy $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$, és hogy a P_1 és P_2 pontok koordinátái éppen az $\overrightarrow{OP_1}$ és $\overrightarrow{OP_2}$ vektorok koordinátái, kapjuk, hogy a $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektor koordinátái $(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$. Ekkor a P_1 és P_2 pontokon átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszere is könnyen felírható.

Például a $P_1(-1, 4, 4)$ és $P_2(2, -1, 3)$ pontok esetén $\overrightarrow{P_1P_2}$ koordinátái $(3, -5, -1)$, így a P_1 és P_2 pontokra illeszkedő egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 2 + 3\lambda \\ y &= -1 - 5\lambda \\ z &= 3 - \lambda, \end{aligned}$$

amely λ kifejezése után

$$\frac{x-2}{3} = \frac{1-y}{5} = 3 - z$$

alakban is felírható.

Most a síkok egyenleteinek leírására térünk át. A tér minden síkját egyértelműen meghatározhatjuk egy pontjának, és két nempárhuzamos vektorának megadásával. A fent bemutatott gondolatmenet minimális általánosításával kapjuk, hogy a tér egy adott P_0 pontján átmenő, az $\underline{u}, \underline{v}$ nempárhuzamos vektorok egy-egy reprezentánsát tartalmazó síkja jellemezhető az

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + \lambda\underline{u} + \mu\underline{v} \tag{5.3}$$

paraméteres vektoregyenlettel, ahol $\underline{r}_0$ az origóból a P_0 pontba mutató vektor, λ és μ pedig tetszőleges valós számok.

A P_0 pont és az $\underline{u}, \underline{v}$ koordinátáinak ismeretében (5.4) az

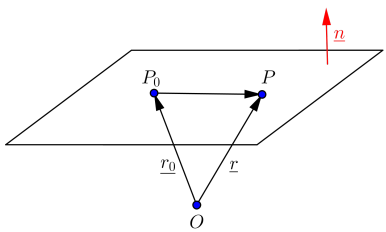
$$x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1$$
$$y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2$$
$$z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3$$

egyenletrendszerrel ekvivalens, melyet *a sík paraméteres egyenletrendszerének* nevezünk.

A sík egy *normálvektorán* egy a síkra merőleges nemzéró vektort értünk. Világos, hogy minden sík egyértelműen meghatározható egy adott P_0 pontjával és egy $\underline{n}$ normálvektorával. Ekkor egy P pont pontosan akkor van ezen a síkon, ha a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor merőleges az $\underline{n}$ normálvektorra, azaz skaláris szorzatuk 0. Tehát ha $\underline{r} = OP$ és $\underline{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$, akkor

$$(\underline{r} - \underline{r}_0, \underline{n}) = 0 \tag{5.4}$$

teljesül. Az (5.4) egyenletet a *sík vektoregyenletének* nevezzük. Egy sík vektoregyenletének megoldáshalmaza mindazon $\underline{r}$ szabadvektorok halmaza, melyek origóból induló reprezentánsainak végpontja a síkon van. Az $\underline{r}(x, y, z)$, $\underline{r}_0(x_0, y_0, z_0)$



5.16. ábra. A P_0 ponton átmenő, $\underline{n}$ normálvektorú sík pontjainak előállítása

és $\underline{n}(A, B, C)$ koordinátákkal számolva (5.4) az

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

egyenlettel ekvivalens, melyet a *sík vektoregyenletének* nevezünk. Ezt gyakran

$$Ax + By + Cz = D$$

alakban adjuk meg. Világos, hogy ha $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$, akkor minden ilyen egyenletnek megfeleltethető egy sík. Például a $2x+3y+5z = -5$ egyenlethez tartozó S sík egy normálvektora $\underline{n}(2, 3, 5)$, amely az egyenletből könnyen kiolvasható, egy pontja pedig megkapható két koordinátájának szabad megválasztása után: ha $x = = y = 0$, akkor az egyenletből $z = -1$ adódik, tehát a $P_0(0, 0, -1)$ pont illeszkedik az S síkra.

5.7. Kapcsolódó Maple eljárások

Szabadvektorok bevitele, összeadása, skalárral való szorzása. A szabadvektorok koordinátáikkal való reprezentációja, valamint a geometriai alakzatokhoz rendelt egyenletek lehetővé teszik geometriai jelenségek algebrai módszerekkel történő vizsgálatát. Maple-ben a szabadvektorokat valamely bázisra vonatkozó koordinátáikkal adhatjuk meg, tehát egy rendezett elem hármasként. Mint majd a skaláris és vektoriális szorzatok estén látni fogjuk, a Maple a háttérben egy ortonormált bázist feltételez. A bevitelnél döntenünk kell a vektor orientációjáról is, vagyis arról, hogy a vektort sorvektorként vagy oszlopvektorként kezelje a rendszer. A kettő között lényegében csak formai különbség van. Természetesen most is a `LinearAlgebra` csomag eljárásaival dolgozunk:

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
```

A sorvektorok megadására két lehetőséget mutatunk.

1. Az $\underline{a}$ szabadvektort úgy adjuk meg, hogy `<>` jelek között felsoroljuk a koordinátákat , a `|` szimbólummal elválasztva:

   ```
   > a:=<1|-1|2>;
   ```

   $$a := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. A $\underline{b}$ vektort pedig a `Vector` parancs használatával:

   ```
   > b:=Vector[row]([3,2,-5]);
   ```

   $$b := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Az oszlopvektorok bevitele is hasonlóan történhet.

1. Egy $\underline{c}$ vektor megadható koordinátáinak <> jelek közötti, vesszővel elválasztott felsorolásával:

```
> c:=<1,-1,2>;
```

$$c := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. A `Vector` parancs oszlopvektorok bevitelére is használható, a $\underline{d}$ vektort így adjuk meg:

```
> d:=Vector[column]([3,2,-5]);
```

$$d := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Az `a` és `c` számunkra ugyanazt a szabadvektort jelenti, a kettő között csupán alakbeli eltérés van. Az outputok által motiválva azt is gondolhatnánk, hogy `a` és `b` tulajdonképpen 1×3, a `c` és `d` pedig 3×1 típusú mátrixok. A Maple viszont nem így gondolja, ugyanis ha `a` egy 1×3 típusú mátrix volna, és például

```
> A:=Matrix(1,3,[1,1,-1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

akkor az

```
> a+A;
```

parancs a két mátrix összegét kellene, hogy produkálja; ehelyett hibaüzenetet kapunk. Ennek oka csak az lehet, hogy `a` mégsem mátrix. Nézzük csak!

```
> whattype(A);
```

$$Matrix$$

```
> whattype(a);
```

$$Vector_{row}$$

Sorvektor sorvektorral, illetve oszlopvektor oszlopvektorral összeadható, akár a `+` operátor, akár az `Add` vagy `VectorAdd` parancsok segítségével:

```
> a+b;
```

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> Add(c,d);
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

és sorvektorok esetén az összeg is sorvektor, míg oszlopvektorok esetén oszlopvektor lesz.

A skalárral való szorzás, ami szintén megőrzi az orientációt, elvégezhető a `*` operátorral:

```
> 2*a;
```

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

de a `ScalarMultiply` parancs is használható:

```
> ScalarMultiply(c,2);
```

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Az eddigiek alapján (azonosan orientált) vektorok lineáris kombinációja is előállítható:

```
> 2*a-3*b;
```

$$\begin{bmatrix} -7 & -8 & 19 \end{bmatrix}$$

Ha csupán két vektor lineáris kombinációjáról van szó (mint fent), akkor az kiszámítható az `Add` vagy `VectorAdd` parancsok megfelelően paraméterezett változatával. Például $2\underline{c} - 3\underline{d}$ értéke:

```
> VectorAdd(c,d,2,-3);
```

$$\begin{bmatrix} -7 \\ -8 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Skaláris-, vektoriális-, és vegyesszorzat. A szabadvektorok skaláris szorzását azzal a `.` operátorral végezhetjük el, melyet a mátrixok szorzására is használhatunk. Ez váratlan fordulat ahhoz képest, amit az összeadásnál láttunk. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok $(\underline{a}, \underline{b})$ skaláris szorzata:

```
> a.b;
```

$$-9$$

Az `a.d` változatra gyanakodva nézünk, mondván sorvektort oszlopvektorral... Pedig ez most működik, és az eredmény ugyanaz, mint előbb! És még nincs vége: a `.` operátor további lehetőségeiről a következő fejezetekben szólunk.

Van direkt parancs a vektorok hosszának kiszámítására is:

```
> VectorNorm(b,2);
```

$$\sqrt{38}$$

A vektor hossza tulajdonképpen a vektor úgynevezett euklideszi, vagy más szóval 2-normája, erre utal a második paraméter. Ha azt elhagyjuk, a visszatérési érték a koordináták abszolút értékeinek maximuma lesz, ami esetünkben 5.

A vektorok szöge is közvetlenül megkapható:

```
> VectorAngle(a,b);
```

$$\pi - \arccos\left(\frac{3}{76}\sqrt{6}\sqrt{38}\right)$$

melynek (kerekített) tizedestört alakja az `evalf(%)` paranccsal érhető el.

Két vektor vektoriális szorzatának kiszámításával folytatjuk, ami az `&x` operátorral, vagy a `CrossProduct` eljárással történhet. Egyik sem érzékeny az orientációra, legfeljebb annyira, hogy ha legalább az egyik tényező oszlopvektor, akkor az eredmény is oszlopvektor lesz. Például:

```
> a &x b;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> CrossProduct(d,a);
```

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -11 \\ -5 \end{bmatrix}$$

A példában a vektoriális szorzat antiszimmetrikus tulajdonsága is szépen visszaköszön.

Most bizonyítjuk az 5.10. tételt Maple segítségével:

```
> a:=<alpha[1]|alpha[2]|alpha[3]>:
> b:=<beta[1]|beta[2]|beta[3]>:
> a &x b;
```

$$\begin{bmatrix} \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 & \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{bmatrix}$$

Az (5.1) is egyszerűen belátható:

```
> A:=<<e[1]|e[2]|e[3]>,a,b>;
```

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(A);
```

$$e_1\alpha_2\beta_3 - e_1\alpha_3\beta_2 + \alpha_1\beta_2 e_- \alpha_1 e_2\beta_3 + \beta_1 e_2\alpha_3 - \beta_1\alpha_2 e_3$$

```
> collect(%,{e[1],e[2],e[3]});
```

$$e_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3$$

Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ szabadvektorok vegyesszorzatának kiszámítására alkalmas függvényt pedig már mi magunk is definiálhatunk:

```
> vs:= (a,b,c) -> (a &x b).c;
```

Egyenesek és síkok egyenletei. Ehhez a témakörhöz a `geom3d` csomag eljárásainak használatát javasoljuk:

```
> with(geom3d):
```

A térelemek megadása a következőképpen történhet:

1. A pontoknak a nevét és a koordinátáit adjuk meg. Például a

   ```
   > point(P,1,2,3);
   ```

   parancs a $P(1,2,3)$ pontot definiálja. A koordináták megadhatók listában is. Bármelyik utat is választjuk, az alábbi parancs a koordináták listájával válaszol:

```
> coordinates(P);
```

$$[1, 2, 3]$$

A koordináták egyenként is kinyerhetők az `xcoord`, `ycoord` és `zcoord` eljárásokkal.

2. Az egyenesek többféleképpen is megadhatók:

   a) Megadható az egyenes két különböző pontjával. Például az $A(1, -1, 2)$ és $B(2, 3, 1)$ pontokra illeszkedő egyenes a következőképpen:

   ```
   > point(A,1,-1,2): point(B,2,3,1):
   > line(e,[A,B]);
   ```

   $$e$$

   Mint látjuk, az output igen szerény. De mire vagyunk kíváncsiak? Az egyenes paraméteres egyenletrendszerére?

   ```
   > Equation(e,lambda);
   ```

   $$[1 + \lambda, -1 + 4\lambda, 2 - \lambda]$$

   ami természetesen úgy értelmezendő, mint $x = 1 + \lambda, y = -1 + 4\lambda, z = = 2 - \lambda$. Ha esetleg az egyenes egy irányvektora érdekel bennünket, azt is közvetlenül megkaphatjuk:

   ```
   > v:=ParallelVector(l);
   ```

   $$v := [1, 4, -1]$$

   Az eredmény a típusát illetően nem vektor, hanem lista. A `geom3d` csomag viszont így kezeli a vektorokat. Szükség esetén az irányvektor a

   ```
   > convert(v,Vector[row])
   ```

   parancs segítségével konvertálható (sor)vektor típusba.

   b) Megadhatunk egyenest egy pontjával és egy irányvektorával (háromelemű lista) is:

   ```
   > line(f,[A,v]);
   ```

   Az output és a lehetőségek ugyanazok, mint előbb.

   c) Végül megadhatjuk az egyenes paraméteres egyenletrendszerét is:

   ```
   > line(g,[1+lambda,-1+4*lambda,2-lambda],lambda);
   ```

3. A síkok bevitelének lehetőségei hasonlók:

   a) Megadhatjuk a síkot 3 különböző pontjával.

   ```
   > point(E,5,0,2): point(F,2,2,2): point(G,1,4,-3):
   > plane(s,[E,F,G]);
   ```

   Természetesen rákérdezhetünk a sík egyenletére és egy normálvektorára is:

   ```
   > Equation(s,[x,y,z]);
   ```

   $$58 - 10x - 15y - 4z = 0$$

   ```
   > n:=NormalVector(s);
   ```

   $$n := [-10, \, -15, \, -4]$$

   b) Ugyanezen síkot megadhatjuk egy pontjával és egy normálvektorával is:

   ```
   > plane(t,[A,n]);
   ```

   c) Síkot egyenletével a következőképpen definiálhatjuk:

   ```
   > plane(u,58-10*x-15*y-4*z=0,[x,y,z]);
   ```

Természetesen ábrázolhatjuk is ezeket az objektumokat. A csomag a `draw` eljárást kínálja erre, mely használatának legegyszerűbb módja, ha paraméter gyanánt egy listában felsoroljuk a megjelenítendő objektumokat:

```
> draw([s,e]);
```

Az 5.17. ábrán látható output szerint az egyenesnek és a síknak van közös pontja. Ennek meghatározására is van lehetőség. Mint ahogy a térelemek bevitelénél is történt, a metszetet (ami esetünkben egy pont) a paraméterlistán belül kell elnevezni.

```
> intersection(M,e,s);
```

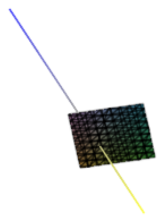
$$M$$

Az output itt sem túl beszédes. Kérdezzünk rá a koordinátákra!

```
> coordinates(M);
```

$$\left[\frac{11}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{6}\right]$$

Az `intersection` eljárás egyaránt alkalmas két egyenes, két sík, egyens és sík, valamit három sík metszéspontjának, illetve metszésvonalának meghatározására.



5.17. ábra. Az s sík és az e egyenes

Egyenes és sík esetén a sorrend lényeges: elsőként az egyenes azonosítóját, majd utána a sík azonosítóját kell megadni. Hasonlóan használható a `distance` eljárás térelemek távolságának a meghatározására.

5.8. Feladatok

5.1. Feladat. Adott $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nempárhuzamos vektorok esetén szerkessze meg az

$$\underline{a} - 2\underline{b}, \quad 2\underline{a} + 3\underline{b}, \quad \sqrt{2}\underline{a} - \sqrt{3}\underline{b}$$

vektorokat!

5.2. Feladat. Legyen $\underline{a}$ egy nemzérus szabadvektor. Adja meg az $\underline{a}$-val párhuzamos szabadvektorok halmazát!

5.3. Feladat. Fejezze ki az ABC háromszög súlyvonalvektorait az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

5.4. Feladat. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szöge $\pi/3$, hosszaik pedig rendre 3 és 4. Számítsa ki az

$$(\underline{a}, \underline{b}), \quad (\underline{a}, \underline{a}), \quad (3\underline{a} - 2\underline{b}, \underline{a} + 2\underline{b})$$

skaláris szorzatok értékeit!

5.5. Feladat. Legyenek $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ olyan egységvektorok, amelyre $\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 = \underline{0}$

teljesül. Számítsa ki az

$$(\underline{e}_1, \underline{e}_2) + (\underline{e}_1, \underline{e}_3) + (\underline{e}_2, \underline{e}_3)$$

értékét!

5.6. Feladat. Milyen λ értékek mellett lesznek az $\underline{a} + \lambda\underline{b}$ és az $\underline{a} - \lambda\underline{b}$ vektorok merőlegesek egymásra?

5.7. Feladat. Milyen λ értékek mellett lesz az $\underline{a}(1, \lambda, 1)$ és a $\underline{b}(-1, 2, 1)$ vektorok szöge $60°$?

5.8. Feladat. Állítsa elő az $\underline{a}$ vektort két olyan vektor összegeként, amelyek közül az egyik párhuzamos egy adott $\underline{b}$ vektorral, a másik pedig merőleges rá! Adja meg ezt a két vektort az $\underline{a}(3, 2, 2)$ és a $\underline{b}(4, -2, ,2)$ vektorok esetén!

5.9. Feladat. Végezze el az

$$((\underline{a} + 2\underline{b}) \times (2\underline{a} + \underline{b})) + ((\underline{a} - 2\underline{b}) \times (2\underline{a} - \underline{b}))$$

kifejezésben a vektoriális szorzásokat, majd hozza a kapott kifejezést egyszerűbb alakra!

5.10. Feladat. Adja meg $(\underline{a} \times \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b})$ értékét, ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egymásra merőleges egységvektorok!

5.11. Feladat. Igazolja a Jacobi-azonosságot!

5.12. Feladat. Legyenek az ABC háromszögben az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok koordinátái rendre $(2, -3, 1)$ és $(1, 4, 6)$. Számítsa ki az A csúcshoz tartozó magasság hosszát!

5.13. Feladat. Egy paralelogramma két, közös kezdőpontból induló élvektorai $\underline{a}(3, -1, 1)$ és $\underline{b}(\lambda, 2, 1)$. Számítsa ki λ értékét, ha a paralelogramma területe $3\sqrt{6}$!

5.14. Feladat. Az $\underline{a}(2, -1, 2)$, $\underline{b}(3, 1, 5)$ és $\underline{c}(\lambda, 2, -1)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata λ milyen értéke mellett lesz 10 egység?

5.15. Feladat. Az $\underline{a}(\lambda, 2, 1)$, $\underline{b}(3, -1, 0)$, $\underline{c}(2, 1, 0)$ vektorhármas λ milyen értéke mellett lesz komplanáris?

5.16. Feladat. Írja fel a $P(1, 2, 3)$ ponton áthaladó $\underline{v}(-3, 6, 2)$ irányvektorú egyenes paraméteres és paramétermentes egyenletrendszereit!

5.17. Feladat. Adja meg a $P_1(-2, 5, 6)$ és a $P_2(7, -1, 3)$ pontokra illeszkedő egyenes paraméteres és paramétermentes egyenletrendszereit!

5.18. Feladat. Írja fel az $x = 3 + 2\lambda, y = 2 - \lambda, z = 5 + 4\lambda$ egyenessel párhuzamos $P(-3, 2, -1)$ ponton áthaladó egyenes egyenletrendszerét!

5.19. Feladat. Legyen $A(0, -1, 3)$ és $B(1, 3, 5)$. Írja fel az A ponton átmenő, AB egyenesre merőleges sík egyenletét!

5.20. Feladat. Írja fel három nem komplanáris pontra illeszkedő sík egyenletét!

5.21. Feladat. Írja fel a $P(1, 3, 2)$ pontra illeszkedő, a $-2x + y + 3z = 1$ és $x - y - z + 2 = 0$ síkok metszésvonalával párhuzamos egyenes vektoregyenletét!

5.22. Feladat. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik a $P(-2, 3, 1)$ pontra, és az $x - y + 3z = 8$ és $2x + y - z = -2$ síkok metszésvonalára!

6. Vektorterek

Középiskolai tanulmányainkban vektor alatt az előző fejezetben tárgyalt szabadvektorokat értettük. Mint láttuk, a szabadvektorokat össze lehet adni, sőt meg lehet bármilyen valós számmal szorozni úgy, hogy az eredmény szintén szabadvektor lesz. A felsőbb matematikában a vektor fogalma ez utóbbi műveletek elvégezhetőségét, és azok bizonyos tulajdonságait ragadja meg.

Először a skalárral való szorzás fogalmát általánosítjuk.

6.1. Definíció. Legyen V egy adott csoport és T egy test. Azt mondjuk, hogy a V csoporton értelmezve van a (T-beli) *skalárokkal való szorzás*, ha adva van egy $\cdot\colon T \times V \to V$ függvény. Ekkor az $(\alpha, a) \in T \times V$ elem képét $\alpha \cdot a$-val jelöljük és az a α-szorosának mondjuk.

Példaként tekintsük a T test feletti $m \times n$ típusú mátrixok halmazát, és egy λ testbeli elem és egy A mátrix szorzatát értelmezzük úgy, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk λ-val. Általában ezt szoktuk a *mátrixok skalárral való szorzásán* érteni.

6.2. Definíció. Legyen $(V, +)$ egy Abel-csoport és T egy test. Azt mondjuk, hogy V *vektortér* (vagy lineáris tér) a T test felett, ha értelmezve van rajta a T-beli skalárokkal való szorzás, és minden $a, b \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén teljesülnek a következő tulajdonságok:

1. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$,
2. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$,
3. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$,
4. $1a = a$.

Ekkor V elemeit *vektoroknak* nevezzük.

Példák vektortérre:

1. $\mathcal{M}_{m\times n}(T)$ a fent bevezetett skalárral való szorzással vektortér a T test felett.
2. A T test elemeiből alkotott rendezett elem n-esek halmaza vektortér a T test felett, ha az összeadást és a skalárral való szorzást komponensenként végezzük el:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

és

$$\lambda \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Ezt a vektorteret T^n-nel jelöljük. Megjegyezzük, hogy T^n elemeit gyakran azonosítjuk az $n \times 1$ vagy $1 \times n$ típusú mátrixokkal.

3. Vektortér minden test bármely részteste felett.

4. Az összes T-beli együtthatós polinom a szokásos összeadással és konstanssal való szorzással vektorteret alkot a T test fölött.

5. Az összes valós számsorozatok halmaza vektortér a valós számtest fölött.

6. A szabadvektorok halmaza vektortér a valós számtest fölött.

Legyen V vektortér a T test felett, $\lambda \in T$ és $a \in V$. Nem nehéz igazolni, hogy $\lambda a = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\lambda = 0$ vagy $a = 0$.

6.3. Definíció. A V vektortér L részhalmazát *altérnek* nevezzük, ha L maga is vektortér a V-beli műveletekkel, ugyanazon test fölött.

Minden vektortérnek altere a $\{0\}$ és önmaga.

Az alábbi állítás a részcsoport-kritérium (1.13. tétel) egyenes következménye:

6.4. Tétel (Altérkritérium)**.** *A V vektortér L nemüres részhalmaza pontosan akkor altér, ha bármely $a, b \in L$ és $\lambda \in T$ esetén $a - b$ és λa is elemei L-nek.*

Néhány példa altérre:

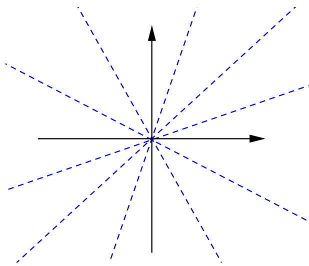
1. A szabadvektorok körében egy rögzített szabadvektor és annak összes skalárszorosai alteret alkotnak (ezek az alterek az euklideszi tér origón átmenő egyenesei lesznek).

2. Egy test fölötti polinomok vektorterében altér egy adott n-nél nem nagyobb fokszámú polinomok halmaza.

3. Az $\mathcal{M}_{n\times n}(T)$ vektortérben a felső háromszögmátrixok halmaza.

4. Szintén alteret alkot a valós számsorozatok vektorterében a konvergens sorozatok halmaza.

Tekintsük egy vektortér tetszőleges számú alterét és jelölje H mindezek metszetét. Ha $a, b \in H$, akkor a és b benne vannak mindegyik altérben, így az altérkritérium szerint $a - b$ is, és ha $\lambda \in T$, akkor λa is benne van mindegyik altérben, tehát



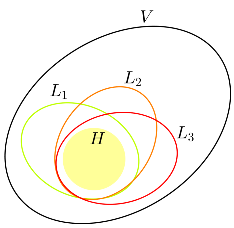
6.1. ábra. $\mathbb{R}^2$ alterei

$a - b \in H$ és $\lambda a \in H$. Ekkor viszont az altérkritérium szerint H altér. Igazoltuk tehát, hogy alterek metszete is altér. Nem mondható el ugyanez az alterek uniójáról: belátható, hogy két altér uniója csak úgy lehet altér, ha egyikük tartalmazza a másikat.

A továbbiakban *vektorrendszeren* a vektortér véges vagy végtelen számú vektorát értjük, úgy, hogy abban egy vektor akár többször is szerepelhet (valójában a vektorrendszer ennyiben különbözik vektorok egy halmazától). Következésképpen a vektortér részhalmazai is vektorrendszereknek tekinthetők.

6.5. Definíció. Legyen V vektortér és H egy nemüres vektorrendszere V-nek. A H *által generált altér* alatt V a H vektorrendszert tartalmazó altereinek a metszetét értjük. Ezt az alteret $\mathcal{L}(H)$ jelöli.

$\mathcal{L}(H)$ nyilván V „legszűkebb” olyan altere lesz, mely tartalmazza a H vektorrendszert. A legszűkebb jelző itt azt jelenti, hogy minden olyan altér, ami tartalmazza a H vektorrendszert, szükségképpen tartalmazza $\mathcal{L}(H)$-t is.



6.2. ábra. $\mathcal{L}(H)$ a V H-t tartalmazó altereinek metszete

6.6. Definíció. Legynek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a V vektortér vektorai, és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adott skalárok. Ekkor a

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$$

vektort az $a_1, a_2, \dots, a_n$ vektorok $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ együtthatókkal képzett *lineáris kombinációjának* nevezzük.

Mivel a lineáris kombináció tulajdonképpen vektorok skalárral való szorzása, majd azok összeadása, a lineáris kombináció nem vezet ki az altérből, azaz egy altér tetszőleges vektorainak tetszőleges együtthatókkal vett lineáris kombinációja is eleme az altérnek.

A lineáris kombináció segítségével le tudjuk írni $\mathcal{L}(H)$ elemeit.

6.7. Tétel. *Legyen V vektortér, és H egy nemüres vektorrendszere V-nek. Ekkor $\mathcal{L}(H)$ éppen a H-beli vektorok összes lineáris kombinációinak halmaza.*

Bizonyítás. Jelölje H^* a H-beli vektorok összes lineáris kombinációinak halmazát. Mivel $H \subset \mathcal{L}(H)$, az előző megjegyzés szerint $H^* \subset \mathcal{L}(H)$. Másrészt megmutatjuk, hogy H^* altér. Valóban, legyenek a és b tetszőleges lineáris kombinációi H-beli vektoroknak, és tegyük fel, hogy ezen lineáris kombinációkban szereplő összes H-beli vektorok az $a_1, a_2, \dots, a_n$, azaz léteznek olyan α_i és β_i skalárok, hogy

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \quad \text{és} \quad b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n.$$

Ekkor nyilván

$$a - b = (\alpha_1 - \beta_1)a_1 + (\alpha_2 - \beta_2)a_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)a_n$$

és

$$\lambda a = (\lambda\alpha_1)a_1 + (\lambda\alpha_2)a_2 + \cdots + (\lambda\alpha_n)a_n$$

is H-beli vektorok lineáris kombinációi, azaz H^* elemei. Tehát H^* egy H-t tartalmazó altér V-ben, $\mathcal{L}(H)$ pedig az ilyenek metszete, így $\mathcal{L}(H) \subseteq H^*$ is teljesül. □

A fenti tétel alapján az $\mathcal{L}(H)$ alteret a H vektorrendszer *lineáris lezártjának* is szokás nevezni.

Könnyű belátni, hogy egy vektorrendszer által generált altér nem változik, ha a vektorrendszeren az alábbi átalakításokat végezzük:

1. egy vektort szorzunk egy nemnulla skalárral,

2. egy vektorhoz hozzáadjuk egy másik vektor skalárszorosát,

3. elhagyunk a vektorrendszerből olyan vektort, mely előáll a megmaradók lineáris kombinációjaként,

ugyanis ezekben az esetekben a régi és az új vektorrendszer vektorai összes lineáris kombinációinak halmaza megegyezik.

6.8. Definíció. A V vektortér egy H vektorrendszerét a vektortér *generátorrendszerének* nevezzük, ha $\mathcal{L}(H) = V$, azaz V minden eleme előáll H-beli vektorok lineáris kombinációjaként. Egy vektortér *végesen generált*, ha van véges sok elemből álló generátorrendszere.

Az $\mathbb{R}^2$ vektortér végesen generált, mivel a $H = \{(1,0),(0,1)\}$ halmaz a vektortér egy véges (kételemű) generátorrendszere, ugyanis tetszőleges $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vektor előáll H elemeinek lineáris kombinációjaként, nevezetesen $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$. Könnyen belátható az is, hogy a polinomok vektorterének nincs véges sok elemből álló generátorrendszere, hiszen véges sok polinom semmilyen lineáris kombinációjának foka sem haladja meg az ezen polinomok közötti legmagasabb fokú polinom fokát.

6.9. Definíció. A V vektortér *K és L altereinek összegén* a

$$K + L = \{k + l : k \in K, l \in L\}$$

halmazt értjük.

A $K + L$ nem más tehát, mint K vektorainak az összes lehetséges módon vett összege L-beli vektorokkal. Például ha K a felső, és L az alsó háromszögmátrixok altere a T test feletti $n \times n$ típusú mátrixok vektorterében, akkor $K+L = \mathcal{M}_{n\times n}(T)$. Vagy a tér két egymást az origóban metsző egyeneseinek, mint altereknek az összege a két egyeneshez illeszkedő sík.

Az altérkritérium alapján látszik, hogy két altér összege is altér lesz, ugyanis ha a és b a $K + L$ altérösszeg elemei, akkor $a = k_1 + l_1$ és $b = k_2 + l_2$ alakban írható valamely $k_1, k_2 \in K$ és $l_1, l_2 \in L$ vektorokkal, így

$$a - b = (k_1 + l_1) - (k_2 + l_2) = (\underbrace{k_1 - k_2}_{\in K}) + (\underbrace{l_1 - l_2}_{\in L}) \in K + L,$$

és bármely λ skalár esetén

$$\lambda a = \lambda(k_1 + l_1) = \underbrace{\lambda k_1}_{\in K} + \underbrace{\lambda l_1}_{\in L} \in K + L.$$

Könnyen belátható az is, hogy $K + L$ nem más, mint a $K \cup L$ halmaz által generált altér.

Definíció szerint $K + L$ minden eleme felírható egy K és egy L-beli vektor összegeként. Külön figyelmet érdemel az az eset, amikor ez a felírás egyértelmű.

6.10. Definíció. Ha a V vektortér K és L altereinek összegében bármely a vektor $a = k + l$ alakú felírása, ahol $k \in K$ és $l \in L$ egyértelmű, akkor a $K + L$ összeget *direkt összegnek* nevezzük, melyet a későbbiekben $K \oplus L$ fog jelölni.

Ha a K és az L alterek metszete csak a nullvektorból áll, akkor a $K + L$ direkt összeg. Valóban, ha a metszet ilyen, és az $a \in K + L$ vektor $k_1 + l_1$, illetve $k_2 + l_2$ alakban is felírható, ahol $k_1, k_2 \in K$ és $l_1, l_2 \in L$, akkor $k_1 + l_1 = k_2 + l_2$, azaz $k_1 - k_2 = l_2 - l_1$ teljesül. Ebből következik, hogy a $k_1 - k_2$ és az $l_2 - l_1$ vektorok a K és az L altérnek is eleme, ami a feltevés miatt csak úgy lehet, ha mindkettő a nullvektor, vagyis $k_1 = k_2$ és $l_1 = l_2$. Igaz az állítás megfordítása is: ha a $K + L$ direkt összeg, azaz az altér minden eleme egyértelműen előáll $k + l$ alakban, ahol $k \in K$ és $l \in L$, akkor $K \cap L = \{0\}$, ugyanis ha valamely nemnulla x vektor a metszetben volna, akkor az az $x = x + 0$ és az $x = 0 + x$ különböző előállításokat eredményezné.

Direkt összeg például a sík bármely két origót tartalmazó egyenesének összege. De ha K a felső, és L az alsó háromszögmátrixok altere $M_{n\times n}(T)$-nek, akkor a $K + L$ nem direkt összeg, ugyanis $K \cap L$ éppen a diagonális mátrixok halmaza.

Az alterek összegének definíciója könnyedén kiterjeszthető véges sok altér összegére: a V vektortér $L_1, L_2, \ldots, L_n$ altereinek összegén az

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_n = \{l_1 + l_2 + \cdots + l_n : l_1 \in L_1, l_2 \in L_2, \ldots, l_n \in L_n\}$$

halmazt értjük. Továbbá azt mondjuk, hogy ezen alterek összege direkt összeg, ha $L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ minden eleme egyértelműen írható fel $l_1 + l_2 + \cdots + l_n$ alakban, ahol $l_1 \in L_1, l_2 \in L_2, \ldots, l_n \in L_n$. Bizonyítható, hogy $L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ pontosan akkor direkt összeg, ha bármely $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ esetén

$$L_i \cap (L_1, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_n) = \{0\}.$$

6.1. Vektorok lineáris függősége

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adott vektorai a V vektortérnek. Most nézzük meg, hogy milyen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ skalárok esetén lesz a

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$$

lineáris kombináció a zérusvektor. A legnyilvánvalóbb válasz erre, hogy például akkor, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ha ettől különböző esetben ez nem fordulhat elő, akkor azt mondjuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok lineárisan függetlenek, vagy más szóval lineárisan független vektorrendszert alkotnak. Egyébként pedig lineárisan függő vektorokról beszélünk.

6.11. Definíció. Egy vektortér adott véges sok vektorát *lineárisan függetleneknek* mondjuk, ha azok lineáris kombinációjaként a zérusvektor csak úgy állítható elő, hogy minden együttható nulla. Egyébként a vektorokat *lineárisan függőeknek* mondjuk. Végtelen sok vektort tartalmazó vektorrendszerre akkor mondjuk, hogy lineárisan független, ha annak bármely véges alrendszere lineárisan független, azaz közülük bárhogyan is választunk ki véges sok vektort, azok lineárisan függetlenek lesznek.

Könnyen igazolható, hogy ha H lineárisan független vektorrendszer (azaz vektorai lineárisan függetlenek), akkor minden H-ból vektorok elhagyásával nyert nemüres vektorrendszer szintén lineárisan független.

6.12. Tétel. *A V vektortér $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorai, ahol $n \geqslant 2$, pontosan akkor lineárisan függőek, ha közülük valamelyik felírható a többi lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás. Valóban, ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok lineárisan függőek, akkor a

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$$

egyenlőség úgy is teljesül, hogy az együtthatók között van nullától különböző. Legyen ez mondjuk λ_1. A fenti egyenlőséget λ_1-gyel osztva, majd átrendezve kapjuk, hogy

$$a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} a_n,$$

vagyis az a_1 vektor előáll a többi lineáris kombinációjaként. Fordítva, ha például

$$a_1 = \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n,$$

akkor teljesül a

$$0 = -a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$$

egyenlőség, melyben a_1 együtthatója nem nulla. Tehát az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok lineárisan függőek. $\square$

A tételből könnyen következik, hogy

1. ha egy vektorrendszer tartalmazza a zérusvektort, akkor lineárisan függő;
2. ha egy vektorrendszer két azonos vektort tartalmaz, akkor lineárisan függő;
3. két vektor pontosan akkor lineárisan függő, ha egyik a másiknak skalárszorosa.

6.13. Definíció. Egy vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a vektortér *bázisának* nevezzük.

Könnyen látható, hogy a T^n vektortérben az

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

vektorok bázist alkotnak, melyet a vektortér *természetes bázisának* nevezünk. Továbbá, a polinomok vektorterének egy bázisa $1, x, x^2, \ldots$

Nem nehéz igazolni, hogy a bázis tulajdonképpen egy „minimális" generátorrendszer. Hamel tétele szerint minden vektortérnek van bázisa.

6.14. Definíció. A V *maximális lineárisan független vektorrendszerén* olyan lineárisan független vektorrendszert értünk, amely bármely V-beli vektor hozzávétele után már lineárisan függő lesz.

6.15. Tétel. *Legyen B a V vektortér egy vektorrendszere. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. *B bázisa V-nek.*
2. *B maximális lineárisan független vektorrendszere V-nek.*
3. *V minden eleme egyértelműen felírható B elemeinek lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. Mivel B bázis, így generátorrendszer is, és tetszőleges $a \in \in V$ vektor előáll B-beli vektorok lineáris kombinációjaként. Ekkor a 6.12. tétel értelmében B a-val kiegészítve már lineárisan függő, tehát B maximális lineárisan független vektorrendszer.

2. $\Rightarrow$ 3. Válasszunk egy tetszőleges $a \in V$ vektort! Mivel B maximális lineárisan független vektorrendszer, léteznek olyan $a_1, a_2, \dots, a_n \in B$ vektorok, hogy a

$$\lambda a + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$$

egyenlőség teljesül úgy, hogy a $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ skalárok nem mindegyike nulla. Itt feltehető, hogy $\lambda \neq 0$, ugyanis ellenkező esetben B-nek lineárisan függőnek kellene lennie. Kaptuk tehát, hogy

$$a = -\frac{\lambda_1}{\lambda} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} a_2 + \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda} a_n,$$

melyből következik, hogy minden $a \in V$ előáll B-beli vektorok lineáris kombinációjaként, azaz B generátorrendszer.

Tegyük fel, hogy az $a \in V$ vektor kétféleképpen is előáll az $a_1, a_2, \dots, a_n$ különböző B-beli vektorok lineáris kombinációjaként:

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

és

$$a = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n.$$

Kivonva egymásból a kettőt, kapjuk, hogy

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1) a_1 + (\alpha_2 - \beta_2) a_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) a_n.$$

Mivel B lineárisan független, ez csak úgy lehet, ha

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n,$$

tehát az előállítás egyértelmű.

3. $\Rightarrow$ 1. Feltéve, hogy V minden eleme egyértelműen előáll B-beli vektorok lineáris kombinációjaként, kapjuk, hogy B generátorrendszer. Nyilván a zérusvektor is csak egyféleképpen áll elő B elemeinek lineáris kombinációjaként, ez nem lehet más, mint a csupa nulla együtthatókkal vett lineáris kombináció, ezért B lineárisan

független. Tehát B bázis. □

Ismert, hogy végesen generált vektortérben minden bázis egyenlő számosságú. Egy végesen generált V vektortér bázisainak közös számosságát a vektortér *dimenziójának* nevezzük. Jele: $\dim V$. Mint azt az előbb láthattuk, $\dim T^n = n$.

Ha egy vektortér nem végesen generált, akkor azt mondjuk, hogy *a vektortér dimenziója végtelen*. Például $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$.

Mi a továbbiakban csak végesen generált vektorterekkel foglalkozunk.

Megjegyezzük, hogy ha a V vektortér dimenziója n, akkor belátható, hogy minden n elemű lineárisan független vektorrendszer bázist alkot V-ben, és minden n-nél kisebb elemszámú lineárisan független vektorrendszer bázissá egészíthető ki további vektorok hozzávételével.

Legyen $a_1, \ldots, a_n$ a V vektortér egy bázisa. Most szükségünk lesz arra a feltevésre, hogy a bázisvektorok sorrendje rögzített, ezért az n darab bázisvektort egy rendezett elem n-es komponenseinek tekintjük, és a bázist ennek megfelelően $(a_1, \ldots, a_n)$-nel jelöljük. Ha $a \in V$, akkor azon $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ skalárokat, melyekre $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$, az a vektor $(a_1, \ldots, a_n)$ *bázisra vonatkozó koordinátáinak* nevezzük. Ha az a vektort az előre rögzített $(a_1, \ldots, a_n)$ bázisban koordinátáival adjuk meg, akkor azt írjuk, hogy $a = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Ez a jelölés első ránézésre megtévesztő lehet, mert ez így olyan, mintha a egy T^n-beli vektor lenne. Könnyen látszik azonban, hogy ha az x és y vektorok koordinátái az adott bázisra vonatkozóan rendre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ és $\beta_1, \ldots, \beta_n$, akkor az $x + y$ vektor koordinátái ugyanebben a bázisban $\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n$, továbbá tetszőleges λ skalár esetén a λx vektor koordinátái pedig $\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n$ lesznek. Következésképpen, koordinátákkal adott vektorokkal „ugyanúgy" kell a vektortér alapműveleteit elvégezni, mint a T^n elemeivel, ezért nyugodtan kezelhetjük a koordinátákat T^n elemeiként. Ezt a koncepciót a Lineáris leképezések című fejezetben tovább pontosítjuk.

Definíció szerint T^n vektorainak a tér természetes bázisára vonatkozó koordinátái pontosan a vektor komponensei lesznek.

Most megmutatjuk, hogy az $\mathbb{R}^2$ vektortérben az $a_1 = (3, 2)$ és $a_2 = (-1, -2)$ vektorok bázist alkotnak, és felírjuk a $b = (1, -3)$ vektor koordinátáit az (a_1, a_2) bázisban. Lévén $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, ahhoz, hogy az a_1, a_2 vektorok bázist alkotnak, elég belátni, hogy lineárisan függetlenek, vagyis azt kell megmutatni, hogy a

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0 \tag{6.1}$$

egyenlőség csak a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ esetben teljesülhet. Az egyenlőség bal oldalán lévő kifejezés

$$\lambda_1(3,2)+\lambda_2(-1,-2)=(3\lambda_1,2\lambda_1)+(-\lambda_2,-2\lambda_2)=(3\lambda_1-\lambda_2,2\lambda_1-2\lambda_2),$$

amely nyilván csak úgy lehet egyenlő a $0=(0,0)$ vektorral, ha

$$3\lambda_1-\lambda_2=0,$$

és

$$2\lambda_1-2\lambda_2=0.$$

Ez egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer, melynek megoldása történhet például úgy, hogy az első egyenletből λ_2-t kifejezzük: $\lambda_2=3\lambda_1$, majd ezt a második egyenletbe helyettesítjük:

$$2\lambda_1-2\cdot 3\lambda_1=0,$$

ahonnan $-4\lambda_1=0$, azaz $\lambda_1=0$ adódik. Ekkor $\lambda_2=2\lambda_1=0$, tehát az a_1,a_2 vektorok lineárisan függetlenek, és így egy bázisát alkotják az $\mathbb{R}^2$ vektortérnek. Ahhoz, hogy kiszámoljuk a $b=(1,-3)$ vektor koordinátáit az (a_1,a_2) bázisban, a

$$\lambda_1a_1+\lambda_2a_2=b$$

egyenlet megoldására van szükség, melynek bal oldala megegyezik az imént megoldott (6.1) egyenlet bal oldalával. Ugyanazt az eljárást alkalmazva a

$$\begin{aligned}3\lambda_1-\lambda_2&=1\\2\lambda_1-2\lambda_2&=-3\end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk, melynek $\lambda_1=5/4$ és $\lambda_2=11/4$ megoldására az olvasó valamely általa ismert módszerrel bizonyára könnyen rábukkan. A b vektor új koordinátái tehát $5/4$ és $11/4$, melyet úgy jelölünk, hogy $(5/4,11/4)$. A bázisvektorok sorrendjének fontosságának hangsúlyozása céljából megemlítjük, hogy a b vektor koordinátái az (a_2,a_1) bázisban nyilván $(11/4,5/4)$ lennének.

Láthatjuk, hogy a lineáris egyenletrendszerek megoldása a feladat megoldásának fontos eszköze. Ha magasabb dimenzióban számolunk, kettőnél több ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszerek megoldására lesz szükség. Többek között emiatt szenteljük a következő fejezetet a lineáris egyenletrendszerek elméletének áttekintésére.

6.2. Vektorrendszer rangja

6.16. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy *vektorrendszer rangja* r, ha a vektorrendszerből kiválasztható r darab lineárisan független vektor, de $r+1$ már nem. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorrendszer rangját $\operatorname{Rank}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jelöli.

Egy vektorrendszer rangja megegyezik az általa generált altér dimenziójával.

6.17. Tétel. *Ha egy vektorrendszer vektoraihoz hozzáveszünk egy olyan vektort, amely előáll a vektorrendszer vektorainak lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer rangja nem változik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorrendszer rangja r, és legyen b egy olyan vektor, mely előáll ezek lineáris kombinációjaként, azaz

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \tag{6.2}$$

valamely $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ skalárokkal. Megmutatjuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ vektorrendszer rangja nem lehet $r+1$. Valóban, ha a rangja $r+1$ lenne, akkor kiválaszthatnánk belőle $r+1$ lineárisan független vektort, amely nyilván tartalmazná a b vektort, és az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a többi vektor az $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Ekkor az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok mindegyike előáll az $a_1, a_2, \ldots, a_r$ vektorok lineáris kombinációjaként, ugyanis r darab lineárisan független vektorról van szó. Ezen előállításokat a (6.2) egyenlőségbe helyettesítve láthatjuk, hogy a b vektor előáll az $a_1, a_2, \ldots, a_r$ vektorok lineáris kombinációjaként, ezért az $a_1, a_2, \ldots, a_r, b$ vektorrendszer már lineárisan függő, ami ellentmond a feltevésünknek. Ez azt mutatja, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ vektorrendszer rangja nem lehet $r+1$, tehát marad r. □

Világos, hogy egy T test feletti $m \times n$ típusú mátrix sorait tekinthetjük mint T^n-beli vektorokat (ezeket a mátrix sorvektorainak nevezzük), oszlopait pedig mint T^m vektorait (ezek a mátrix oszlopvektorai). Egy *mátrix rangján* a sorvektor-rendszere rangját értjük. Az A mátrix rangját $\operatorname{Rank} A$ jelöli.

Miért pont a sorokat tüntettük ki? A kövekező tétel szerint ennek nincs jelentősége.

6.18. Tétel (Rangszámtétel)**.** *A következő állítások ekvivalensek.*

1. *Az A mátrix rangja r.*
2. *Az A mátrix oszlopvektor-rendszerének rangja r.*

3. *Az A mátrixnak van r-ed rendű nemnulla aldeterminánsa, de nincs $r+1$-ed rendű nemnulla aldeterminánsa.*

Tehát a tétel szerint egy mátrix oszlopvektor-rendszerének rangja, sorvektor-rendszerének rangja, valamint a mátrix legnagyobb rendű nemnulla aldeterminánsának a rendje mindig megegyezik.

A tétel harmadik pontja lehetővé teszi a mátrixok rangjának eliminációs módszerrel való kiszámítását, ugyanis egy mátrix lépcsős alakjából egyszerűen leolvasható a legnagyobb nemnulla aldeterminánsának a rendje. Az eliminációs módszernél mutatott példában a (2.1) mátrixot hoztuk lépcsős, sőt trapéz alakra, melyről látszik, hogy a mátrix rangja 3, hiszen harmadrendűnél nagyobb nemnulla aldeterminánst nem tartalmazhat, harmadrendűt viszont igen, ilyen például az 1.,2. és a 4. sorok és ugyanezen indexű oszlopok által kimetszett aldetermináns. Ebből az is következik, hogy az A mátrix sorvektorai és oszlopvektorai között az 1., 2. és a 4. lineárisan függetlenek.

Általában igaz, hogy egy mátrix rangja a lépcsős alakjában maradó, nem csupa nulla elemeket tartalmazó sorok számával egyenlő.

6.3. Kapcsolódó Maple eljárások

A vektorok bevitele, összeadása, és skalárral való szorzása ugyanúgy történik, ahogy azt a szabadvektoroknál láttuk, ugyanis az ott bemutatott operátoroknál és eljárásoknál nem előírás, hogy a koordináták száma 3 legyen. Emiatt itt ezekre már nem térünk ki újra. Induljunk ki inkább a fent is idézett a 2.1 mátrixból!

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
> A:=Matrix([[2,0,1,3,-1],[1,1,0,-1,1],[0,-2,1,5,-3],[1,-3,2,10,-5]]):
```

A mátrix rangját közvetlenül megkaphatjuk:

```
> Rank(A);
```

$$3$$

Ez egyezik az általunk kapott eredménnyel. Ezek szerint az A mátrix sorvektorai közül kiválaszthatunk egy 3 elemű lineárisan független vektorrendszert, de 4 eleműt már nem. Más szóval, az A mátrix sorvektorai $\mathbb{R}^4$ egy 3-dimenziós alterét generálják. Ezt erősíti meg a következő parancs is:

```
> RowSapce(A);
```

$$\left[\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0, & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\right]$$

Az eredmény itt egy bázisa az A mátrix sorvektorai által generált altérnek. Mivel már tudtuk, hogy annak dimenziója 3, nem meglepő, hogy egy 3 vektorból álló listát kaptunk. Ha megnézzük az A mátrix lépcsős alakját (lásd 2.2. szakasz), láthatjuk, hogy a lépcsős alak nem csupán nulla elemeket tartalmazó soraihoz tartozó sorvektorokat kaptuk vissza. Ha nem követtük volna a lépcsős alakra hozást lépésről-lépésre, az output alapján nem tudnánk megmondani, hogy a mátrix melyik 3 sorvektorából álló vektorrendszer lesz lineárisan független. Most ezt fogjuk kideríteni. Először „szedjük szét” az A mátrixot sorvektorokra:

```
> a[1]:=Row(A,1):
> a[2]:=Row(A,2):
> a[3]:=Row(A,3):
> a[4]:=Row(A,4):
```

Alkalmazzuk a `Basis` függvényt erre a vektorrendszerre, melynek eredménye a vektorrendszer egy maximális lineárisan független alrendszere lesz.

```
> Basis([a[1],a[2],a[3],a[4]]);
```

$$\left[\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 3 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 10 & -5\end{bmatrix}\right]$$

Tehát az A mátrix 1., 2. és 4. soraiból képzett sorvektorok lineárisan független vektorrendszert alkotnak, a négy sorvektor alkotta rendszer viszont már lineárisan függő.

Végül megemlítjük, hogy `Row` és `RowSpace` eljárásoknak természetesen léteznek oszlopokra vonatkozó társaik: a `Column` és a `ColumnSpace` metódusok, melyek működése értelemszerű.

6.4. Feladatok

6.1. Feladat. Vektorteret alkotnak-e a pontosan n-ed fokú polinomok a polinomok összeadására és konstanssal való szorzására nézve?

6.2. Feladat. Igazolja, hogy V kommutatív voltát nem szükséges a vektortér definíciójában feltenni, hiszen azt az $1.-4.$ tulajdonságok teljesülése maga után vonja! (Útmutatás: alkalmazza az említett tulajdonságokat az $(1+1)(a+b)$ vektorra!)

6.3. Feladat. Mutassuk meg, hogy T^4-ben a $H_1 = \{(a,0,b,0)\ :\ a,b \in T\}$ és $H_2 = \{(a,b,a,c)\ :\ a,b,c \in T\}$ halmazok alterek! Adjon meg egy-egy bázist ezekben az alterekben!

6.4. Feladat. Mutassuk meg, hogy a 3×2 típusú mátrixok körében alteret alkotnak azon $A = [a_{ij}]_{3\times 2}$ mátrixok, melyre $a_{11} = a_{31} = 0$!

6.5. Feladat. Adottak az x és x^2 polinomok $\mathbb{R}[x]$-ben. Mely polinomokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

6.6. Feladat. Mutassa meg, hogy minden altér tartalmazza a vektorainak összes lineáris kombinációját!

6.7. Feladat. Mutassa meg, hogy az $a = (1, 2), b = (1, 0)$ vektorrendszer generátorrendszere $\mathbb{R}^2$-nek!

6.8. Feladat. Mutassa meg, hogy az $(1, 3)$ és $(-1, 5)$ lineárisan független vektorai $\mathbb{R}^2$-nek!

6.9. Feladat. Mutassa meg, hogy a $b_1 = (-1, 4)$ és $b_2 = (2, -3)$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^2$-ben, és adja meg az $x = (2, 3)$ vektor ezen bázisra vonatkozó koordinátáit!

6.10. Feladat. Mutassa meg, hogy egy adott A mátrixon végrehajtott elemi sor/oszlop átalakítások mindegyike megvalósítható az A mátrix egy-egy alkalmas mátrixszal (balról vagy jobbról) való szorzásával!

6.11. Feladat. Adjon alsó és felső korlátot az olyan $m \times n$ típusú mátrixok rangjára, melyeknek van legalább egy nullától különböző eleme!

6.12. Feladat. Határozza meg az alábbi vektorok által generált alterek egy bázisát és dimenzióját!

a)

$$x_1 = (2, 1, 3, 1), \quad x_2 = (1, 2, 0, 1), \quad x_3 = (-1, 1, -3, 0)$$

b)

$$x_1 = (2, 0, 1, 3, -1), \quad x_2 = (1, 1, 0, -1, 1),$$
$$x_3 = (0, -2, 1, 5, -3), \quad x_4 = (1, -3, 2, 9, -5)$$

c)

$$x_1 = (2, 1, 3, -1), \quad x_2 = (-1, 1, -3, 1),$$
$$x_3 = (4, 5, 3, -1), \quad x_4 = (1, 5, -3, 1)$$

d)

$$x_1 = (1, 0, 0, -1), \quad x_2 = (1, 1, 1, 0),$$
$$x_3 = (1, 1, 1, 1), \quad x_4 = (1, 2, 3, 4), \quad x_5 = (0, 1, 2, 3)$$

e)

$$x_1 = (-3, 1, 5, 3, 2), \quad x_2 = (2, 3, 0, 1, 0),$$
$$x_3 = (1, 2, 3, 2, 1), \quad x_4 = (3, -5, -1, -3, -1), \quad x_5 = (3, 0, 1, 0, 0)$$

f)

$$x_1 = (1, 2, 2, -1), \quad x_2 = (2, 3, 2, 5),$$
$$x_3 = (-1, 4, 3, 1), \quad x_4 = (2, 9, 3, 5)$$

7. Lineáris egyenletrendszerek

A

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ x + 5y &= -1 \end{aligned} \tag{7.1}$$

egyenletrendszer megoldása vélhetően senki számára nem okoz gondot. Középiskolában legalább két módszert tanultunk a fenti egyenletrendszer megoldásainak megkeresésére: valamelyik ismeretlent az egyik egyenletből kifejezzük, majd a másikba helyettesítjük; vagy az egyik egyenlet alkalmas konstansszorosát a másikhoz hozzáadva elérjük, hogy az összeg már csak egy ismeretlent tartalmazzon. Célunk ennek továbbfejlesztése olyan esetekre, amikor az ismeretlenek és az egyenletek száma is tetszőleges, továbbá az együtthatók nem feltétlenül valós számok.

7.1. Definíció. Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

objektumot, ahol $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ és $B = [b_i]_{m\times 1}$ adott T test feletti mátrixok, (n változós, m egyenletből álló) *lineáris egyenletrendszernek* nevezzük. Az A mátrixot az egyenletrendszer *alapmátrixának*, elemeit az *egyenletrendszer együtthatóinak*, B-t a *szabadtagok vektorának*, az

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

$m \times (n+1)$ típusú mátrixot pedig az egyenletrendszer *kibővített mátrixának* nevezzük.

Azt mondjuk, hogy a lineáris egyenletrendszer *megoldható*, ha létezik olyan $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ T^n-beli vektor, hogy az $x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n$ helyettesítéssel az egyenletrendszerben minden egyenlőség fennáll. Egyébként *ellentmondásosnak* nevezzük.

Jelölje a_i az egyenletrendszer alapmátrixának i-edik oszlopvektorát, valamint X az ismeretlenek oszlopvektorát. Ekkor a lineáris egyenletrendszer *mátrixos alakja*

$$AX = B,$$

vektoros alakja

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = B.$$

Ez utóbbi alakból látszik, hogy ha az egyenletrendszer megoldható, akkor a B vektor felírható az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, így a 6.17. tétel miatt

$$\operatorname{Rank}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \operatorname{Rank}(a_1, a_2, \ldots, a_n, B).$$

Fordítva, ha a rangok megegyeznek (mindkettő r), akkor az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok közül kiválasztható r darab vektor úgy, hogy azok lineáris kombinációjaként előállítható a B vektor. Megőrizve az itt fellépő együtthatókat, a többit pedig nullának választva az egyenletrendszer egy megoldását kapjuk. Ezzel beláttuk a következő állítást:

7.2. Tétel (Kronecker-Capelli)**.** *Egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha alapmártixának rangja megegyezik a kibővített mátrixának rangjával.*

Ha a lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor léteznek olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ skalárok, hogy

$$\alpha_1a_1 + \alpha_2a_2 + \cdots + \alpha_na_n = B.$$

Ha ez az egyenlőség a $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ skalárokkal is fennállna, azaz

$$\beta_1a_1 + \beta_2a_2 + \cdots + \beta_na_n = B$$

is teljesülne, akkor a kettőt egymásból kivonva kapnánk, hogy

$$(\alpha_1 - \beta_1)a_1 + (\alpha_2 - \beta_2)a_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)a_n = 0.$$

Világos, hogy az alapmátrix rangja nem lehet nagyobb, mint n, mely az ismeretlenek száma. Ha $\operatorname{Rank} A = n$, akkor az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok lineárisan függetlenek, így az előző egyenlőségben $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$ kell, hogy teljesüljön.

Tehát, ha egy megoldható lineáris egyenletrendszer alapmátrixának rangja egyenlő az ismeretlenek számával, akkor pontosan egy megoldása van.

Most tegyük fel, hogy az egyenletrendszer megoldható, de alapmátrixának rangja kisebb, mint az ismeretlenek száma. Ekkor az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok lineárisan függőek, azaz vannak olyan $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ skalárok, melyek nem mindegyike nulla, hogy

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = 0.$$

Ha $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ az egyenletrendszer egy megoldása, akkor

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = B,$$

és így

$$(\alpha_1 + \beta_1)a_1 + (\alpha_2 + \beta_2)a_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)a_n = B,$$

azaz $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots \alpha_n + \beta_n)$ egy másik, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$-től különböző megoldása az egyenletrendszernek. Ebből az következik, hogy ha egy megoldható lineáris egyenletrendszer alapmátrixának rangja kisebb, mint az ismeretlenek száma, akkor végtelen sok megoldása van (feltéve, hogy a test karakterisztikája 0).

Most, hogy a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságával és a megoldásainak számával már tisztában vagyunk, nézzük meg, hogyan lehet egy lineáris egyenletrendszer összes megoldásait megkeresni!

7.1. Cramer-szabály

7.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy egy lineáris egyenletrendszer A alapmátrixa négyzetes, és determinánsa nem nulla. Ekkor a lineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható, és*

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\det A},$$

ahol Δ_k annak a mátrixnak a determinánsa, melyet az A alapmátrixból úgy kapunk, hogy annak k-adik oszlopa helyére a B oszlopvektort írjuk.

Bizonyítás. Mivel $\det A \neq 0$, a Kronecker-Capelli tétel értelmében az egyenletrendszer megoldható, és egyetlen megoldása van. Az $AX = B$ mátrixos alak alapján ez a megoldás: $X = A^{-1}B$. Ekkor az inverzmátrix konstrukciója és a kifejtési tétel szerint

$$x_i = \sum_{u=1}^{n} (A^{-1})_{iu} b_u = \sum_{u=1}^{n} \frac{A_{ui}}{\det A} b_u = \frac{1}{\det A} \sum_{u=1}^{n} b_u A_{ui} = \frac{\Delta_i}{\det A}.$$

□

Példaként a (7.1) lineáris egyenletrendszert oldjuk meg. Abban az egyenletek és az ismeretlenek (reméljük nem okoz gondot, hogy x_1 és x_2 helyett x és y szerepel) száma is 2, az alapmátrix determinánsa pedig

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 13 \neq 0,$$

tehát a tétel feltételei maradéktalanul teljesülnek. A megoldás pedig:

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}}{13} = \frac{17}{13}, \quad \text{és} \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}{13} = -\frac{6}{13}.$$

A módszer előnye az egyszerűsége, hátránya, hogy csak speciális esetben működik (lásd a sok feltételt), és ha az alapmártix „nagy”, akkor sok számolással jár.

7.2. Gauss-elimináció lineáris egyenletrendszerekre

Két lineáris egyenletrendszert *ekvivalensnek* mondunk, ha megoldáshalmazaik megegyeznek. Könnyen igazolható, hogy az alábbi átalakítások egy lineáris egyenletrendszert vele ekvivalens lineáris egyenletrendszerbe visznek át:

– egyenlet szorzása nullától különböző konstanssal,

– egy egyenlethez egy másik egyenlet konstansszorosának hozzáadása,

– olyan egyenlet elhagyása, amely a megmaradók lineáris kombinációja,

– egyenletek sorrendjének felcserélése,

– az ismeretlenek sorrendjének felcserélése együtthatóikkal együtt minden egyenletben.

Ebből következően, ha egy lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixán elemi sorátalakításokat végzünk, akkor vele ekvivalens lienáris egyenletrendszer kibővített mátrixához jutunk. A következő tételben azt tárgyaljuk, hogyan következtethetünk a kibővített mátrix lépcsős alakjából az egyenletrendszer megoldhatóságára és megoldásaira.

7.4. Tétel. *Egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha kibővített mátrixának lépcsős alakjában nincs olyan sor, melynek csak az utolsó eleme nem nulla.*

Bizonyítás. Ha a kibővített mátrix lépcsős alakjában van olyan sor, melyben az utolsó elem $a \neq 0$, de az összes többi elem 0, akkor ahhoz a $0 = a$ egyenlet tartozik, ami nyilván ellentmondás. Így tehát a lépcsős alakhoz tartozó lineáris egyenletrendszer nem oldható meg, és nyilván a vele ekvivalens eredeti sem. Ellenkező esetben a csupa nulla sorokat elhagyva, az egyes egyenletekben a tagok átrendezésével, majd az együtthatók és az ismeretlenek indexének megfelelő átírásával elérhető, hogy az egyenletrendszer a következő alakú legyen:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + a_{2,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{kk}x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k,
\end{aligned}$$

ahol $a_{11}, a_{22}, \dots a_{kk}$ egyike sem nulla. Ebből a megoldás a következőképpen kapható meg: az utolsó egyenletben az $x_{k+1}, \dots, x_n$ ismeretlenek értéke szabadon megválasztható, legyenek ezek rendre a T test $u_{k+1}, \dots u_n$ elemei (erre nyilván csak akkor van szükség, ha az utolsó egyenlet több, mint egy ismeretlent tartalmaz), majd fejezzük ki az utolsó egyenletből x_k-t:

$$x_k = -\frac{a_{k,k+1}}{a_{kk}}x_{k+1} - \cdots - \frac{a_{kn}}{a_{kk}}x_n.$$

Az egyenleteken visszafelé haladva, a következőből hasonlóan fejezhető ki x_{k-1}, és így tovább, végül az utolsóból x_1. $\square$

Oldjuk meg az

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\
2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 4 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3
\end{aligned} \tag{7.2}$$

lineáris egyenletrendszert a valós számok felett! Ennek kibővített mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

mely lépcsős alakra hozva

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -5 & 3 & -6 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az ehhez tartozó

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ -x_2 + 2x_4 &= -2 \\ -5x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer ekvivalens az eredetivel. Az utolsó egyenlet

$$-5x_3 - 3x_4 = 0,$$

melyben x_3 vagy x_4, legyen most x_4, szabadon megválasztható: legyen $x_4 = u$, és ekkor

$$x_3 = -\frac{3}{5}u.$$

Behelyettesítve ezt a második egyenletbe

$$-x_2 + 2u = -2$$

adódik, ahonnan $x_2 = 2 + 2u$. Végül az első egyenletből

$$x_1 + 2(2 + 2u) - \frac{3}{5}u - u = 5,$$

majd átrendezés után $x_1 = 1 - \frac{12}{5}u$. Az egyenletrendszernek tehát végtelen sok megoldása van. Az általános megoldás:

$$x_1 = 1 - \frac{12}{5}u,\ x_2 = 2 + 2u,\ x_3 = -\frac{3}{5}u,\ x_4 = u, \tag{7.3}$$

ahol u tetszőleges valós szám. Konkrét megoldásokat úgy kaphatunk, ha u helyébe konkrét valós számot írunk. Például $u = 0$ esetben a megoldásvektor:

$$(1, 2, 0, 0).$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a lépcsős alakra hozás közben a kibővített mátrix utolsó oszlopa nem cserélhető fel a mátrix egyetlen más oszlopával sem.

7.2.1. Szimultán elimináció

Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ vektortér $E = (e_1, e_2, e_3)$ bázisát, ahol

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, -1, 1), \\ e_2 &= (2, 1, -3), \\ e_3 &= (3, 2, -5), \end{aligned}$$

és határozzuk meg az $a = (6, 2, -7)$ és $b = (0, -2, 3)$ vektorok E bázisra vonatkozó koordinátáit! Kezdjünk az a vektorral: keressük meg azokat a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valós számokat, melyekre

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = a.$$

Innen

$$\lambda_1(1, -1, 1) + \lambda_2(2, 1, -3) + \lambda_3(3, 2, -5) = (6, 2, -7),$$

a skalárral való szorzás elvégzése után

$$(\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, -3\lambda_2) + (3\lambda_3, 2\lambda_3, -5\lambda_3) = (6, 2, -7),$$

majd összeadás után

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 - 3\lambda_2 - 5\lambda_3) = (6, 2, -7)$$

adódik. Az egyenlőséget koordinátánként kifejtve a

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 6 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 2 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 - 5\lambda_3 &= -7 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk, melynek alapmátrixa az az A mátrix, melynek oszlopaiba rendre az e_1, e_2 és e_3 vektorok koordinátái kerülnek, a szabadtagok vektora pedig az a vektor. Világos, hogy a b vektor koordinátáinak keresésekor kapott egyenletrendszer alapmátrixa szintén A lesz, szabadtagjainak vektora pedig b. Mivel az eliminációnál az alapmátrix dominál, a szabadtagokkal csupán „számolunk", természetes gondolat, hogy a két egyenletrendszert egyszerre is meg lehetne oldani, ha az alapmátrixot nem csupán egy, hanem most két oszloppal bővítenénk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -5 & -7 & 3 \end{bmatrix},$$

és ezen végezzük el az eliminációt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -5 & -7 & 3 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 8 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & -13 & 3 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ezt az eljárást nevezzük *szimultán eliminációnak*, mely nyilván nem csak két, hanem tetszőleges számú oszloppal elvégezhető.

A két egyenletrendszer megoldásához a visszahelyettesítéseket a két utolsó oszloppal külön-külön kell elvégezni:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 6 \\ 3\lambda_2 + 5\lambda_3 &= 8 \\ \frac{1}{3}\lambda_3 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_2 + 5\lambda_3 &= -2 \\ \frac{1}{3}\lambda_3 &= -\frac{1}{3}, \end{aligned}$$

ahonnan a megoldások már rögtön adódnak.

7.2.2. Gauss-Jordan-elimináció

Láthattuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer megoldása során az elimináció elvégzése még csak az útnak a fele, annak eredményeképpen csak egy, az eredetinél már sokkal egyszerűbb egyenletrendszert kapunk, melyet még meg kell oldanunk. Sőt, szimultán elimináció esetén nem is csak egy egyenletrendszerről van szó. A lépcsős alak elérése után akkor van a legkönnyebb dolgunk, ha az alapmátrix helyén az egységmátrix jelenik meg, mert akkor a megoldás számolás nélkül leolvasható (a megoldásvektor pontosan a szabadtagok oszlopában foglal helyet). Ilyen szerencsénk azonban ritkán van, de ha nagyon akarjuk, tehetünk érte. A fenti példánkban az eliminációt a következőképpen folytatjuk:

- a harmadik sort osztjuk 1/3-dal, annak érdekében, hogy a sor harmadik eleme 1 legyen:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$
- a harmadik sor háromszorosát kivonjuk az elsőből, az ötszörösét pedig a másodikból:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$
így a harmadik oszlop főátló feletti elemei már mind nullák lesznek;
- fölfelé haladva most a második sort osztjuk 3-mal:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

– majd a kétszeresét kivonjuk az első sorból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ezt az eljárást nevezzük *Gauss-Jordan-eliminációnak*, melynek eredményeképpen a megoldások leolvashatók: az a és b vektor koordinátái az E bázisban rendre $(1, 1, 1)$ és $(1, 1, -1)$.

Megjegyezzük, hogy a Gauss-Jordan-elimináció alkalmazása csak szimultán elimináció esetén kifizetődő, ha csak egyetlen konstansoszlop van, általában az egységmátrix kialakítása több számolást igényel, mint a lépcsős alakból a megoldás kiszámítása.

A Gauss-Jordan-elimináció hatékonyan alkalmazható mátrixok inverzeinek a meghatározására, úgy, hogy azt azon a mátrixon hajtjuk végre, melyet úgy kapunk, hogy az invertálandó mátrix mellé a vele megegyező típusú egységmátrixot írjuk. Ha a Gauss-Jordan-elimináció következtében az invertálandó mátrix helyén az egységmátrix előállt, akkor az egységmátrix mellett pontosan a keresett inverzmátrix szerepel. Ha pedig az elimináció megakad (az invertálandó mátrix valamely sora kinullázódik), akkor a mátrixnak nem létezik inverze.
A 4. fejezetben az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

mátrix inverzét már meghatároztuk. Most megtesszük ugyanezt Gauss-Jordan-eliminációval. A kiinduló mátrix az

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

az elimináció lépései pedig (a magyarázatot most mellőzzük) a következők:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

A keresett inverzmátrix tehát:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

A módszer helyessége könnyen látható, ugyanis az $A \cdot A^{-1} = E$ egyenlőségből a mátrixok szorzásának definíciója alapján látható, hogy ha az A mátrixot az A^{-1} mátrix j-edik oszlopával (X_j) mint oszlopmátrixszal szorozzuk, akkor éppen az E egységmátrix j-edik oszlopát (E_{nj}) kapjuk. Az inverzmátrix oszlopai tehát megkaphatók az

$$AX_1 = E_{n1},\ AX_2 = E_{n2},\ \dots,\ AX_n = E_{nn}$$

lineáris egyenletrendszerek megoldásaiként. Az inverzmátrix meghatározására alkalmazott Gauss-Jordan eliminációval pedig pontosan ezeket oldjuk meg egyszerre.

7.3. Homogén lineáris egyenletrendszerek

Egy lineáris egyenretrendszert *homogénnek* nevezünk, ha $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, azaz az összes szabadtag nulla. Egyébként *inhomogénnek* nevezzük.

Világos, hogy homogén egyenletrendszernek mindig van megoldása: mikor az összes isemerelen 0, ezt triviális megoldásnak nevezzük. Kérdés, hogy vannak-e ettől különböző megoldásai. Mivel az előző részben sehol nem használtuk ki, hogy a szabadtagok nem nullák, így a kérdés eliminációval ugyanúgy megválaszolható.

Továbbá az is igaz, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldásainak halmaza alteret alkot T^n-ben (n az ismeretlenek száma), melynek dimenziója $n - \text{Rank}(A)$.

A következőkben a lineáris egyenletrendszerek megoldáshalmazának szerkezetét vizsgáljuk.

Legyen H altere a V vektortérnek és $a \in V$. Ekkor az

$$a + H = \{a + h \ : \ h \in H\}$$

halmazt *lineáris sokaságnak* nevezzük. Az a elemet az $a + H$ lineáris sokaság reprezentánsának nevezzük.

7.5. Tétel. *Legyen V egy vektortér a T test felett, H altere V-nek, $a, b \in V$ és $\alpha \in T$. Ekkor*

1. *$a + H = b + H$, akkor és csak akkor, ha $a - b \in H$;*

2. *az $\{a + H \ : \ a \in V\}$ lineáris sokaságok halmaza vektortér T felett, ha*

$$(a + H) + (b + H) = (a + b) + H \qquad \textit{és} \qquad \alpha(a + H) = (\alpha a) + H$$

(ezt hívjuk a V H altere szerinti faktorterének).

7.6. Tétel. *Ha az $AX = B$ inhomogén lineáris egyenletrenszer megoldható, akkor összes megoldásainak halmaza $c + H$ alakú lineáris sokasága T^n-nek, ahol $c \in T^n$ az egyenletrendszer egy tetszőleges megoldása, H pedig az $AX = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere.*

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $h \in H$ esetén $A(c + h) = Ac + Ah = B$, így $c + H$ minden eleme valóban megoldás. Fordítva, ha $d \in T^n$ egy teszőleges megoldás, akkor $Ad = B$ és $A(d - c) = Ad - Ac = B - B = 0$ miatt $d - c$ megoldása a homogén egyenletrendszernek. Ekkor $d - c \in H$, azaz $d \in c + H$. □

Végül megoldjuk az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= \S \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert a valós számok felett (melynek a (7.2) inhomogén változatát a Gauss-elimináció ismertetése közben már megoldottuk). Ennek alapmátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

melynek lépcsős alaja

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Az ehhez tartozó, az eredetivel ekvivalens homogén lineáris egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_2 + 2x_4 &= 0 \\ -5x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet

$$-5x_3 - 3x_4 = 0,$$

melyben x_4 szabadon megválasztható: legyen $x_4 = u$, és ekkor

$$x_3 = -\frac{3}{5}u.$$

Behelyettesítve ezt a második egyenletbe

$$-x_2 + 2u = 0$$

adódik, ahonnan $x_2 = 2u$. Végül az első egyenletből kapjuk, hogy

$$x_1 + 2(2u) - \frac{3}{5}u - u = 0,$$

ahonnan $x_1 = -\frac{12}{5}u$. Az egyenletrendszer megoldástere tehát

$$H = \left\{ \left(-\frac{12}{5}u, 2u, -\frac{3}{5}u, u \right) : u \in \mathbb{R} \right\},$$

amely egydimenziós altere $\mathbb{R}^4$-nek. A fenti tétel alapján (7.2) megoldásainak halmaza leírható az

$$(1, 2, 0, 0) + H$$

lineáris sokasággal.

7.4. Kapcsolódó Maple eljárások

A Maple lineáris egyenletrendszerek megoldására nyújtott lehetőségeit a (7.2) példán keresztül fogjuk bemutatni. Az egyenletrendszer bevitelével kezdünk, amely egyenletek listájaként (halmazaként) történhet:

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
```

```
> er:=[x[1]+2*x[2]+x[3]-x[4]=5,
  2*x[1]+x[2]-3*x[3]+x[4]=4,
  x[1]+x[2]+x[3]+x[4]=3]:
```

Érdemes az ismeretleneket külön listában (halmazban) is megadnunk:

```
> X:=[x[1],x[2],x[3],x[4]]:
```

Az alapmátrix és a szabadtagok vektorának leolvasása egy menetben:

```
> A,B:=GenerateMatrix(er,X);
```

$$A, B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A kibővített mátrix pedig így kapható meg:

```
> K:=GenerateMatrix(er,X,augmented=true);
```

$$K := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A kibővített mátrix „összerakható” az A és B mátrixokból is a `K:=<A|B>` paranccsal, vagy fordítva, ha először a K mátrixot határozzuk meg, akkor abból az alapmátrix az `A:=DeleteColumn(K,5)`, a szabadtagok mátrixa pedig a `B:=Column(K,5)` paranccsal származtatható.

A Kronecker-Capelli-tétel szerint az egyenletrendszer alap- és kibővített mátrixai rangjainak ismeretében a megoldások száma megállapítható. A rangok:

```
> Rank(A),Rank(K);
```

$$3, 3$$

tehát az egyenletrendszer megoldható, és lévén az ismeretlenek száma nagyobb, mint az alapmátrix rangja, végtelen sok megoldásra számíthatunk.

A Maple a megoldások megkeresésére több lehetőséget is biztosít.

1. Megoldhatjuk az egyenletrendszert a `solve` paranccsal. Ekkor elég egyetlen paraméter: az egyenletek listája.

   ```
   > M:=solve(er);
   ```

   $$M := \left\{x_1 = 1 + 4x_3, x_2 = 2 - \frac{10}{3}x_3, x_3 = x_3, x_4 = -\frac{5}{3}x_3\right\}$$

Az M és a (7.3) által leírt hamazok közötti formai eltérésnek az az oka, hogy mi az x_4 változót tekintettük szabadnak, a Maple pedig az x_3-at. Bízunk benne, hogy a két megoldáshalmaz egyenlőségének bizonyítása nem okoz gondot az olvasó számára.
Konkrét megoldás előállítása érdekében helyettesítsünk x_3 helyére konkrét valós számot! Például, az $x_3 = 0$ esetben

```
> subs(x[3]=0,M);
```

$$\{0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_4 = 0\}$$

tehát a $(1, 2, 0, 0)$ vektor megoldása az egyenletrendszernek.

2. Másik lehetőség a `LinearAlgebra` csomag `LinearSolve` eljárásának használata. Ekkor az egyenletrendszer alapmátrixa és a szabadtagok vektora lesznek a paraméterek.

```
> LinearSolve(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} 1 + 4\_t_3 \\ 2 - \frac{10}{3}\_t_3 \\ \_t_3 \\ -\frac{5}{3}\_t_3 \end{bmatrix}$$

A megoldás értelmezése talán könnyebb, ha a paraméterlistában azt is megadjuk, hogy a szabadváltozó helyére milyen szimbólum kerüljön:

```
> LinearSolve(A,B,free='v');
```

$$\begin{bmatrix} 1 + 4v_3 \\ 2 - \frac{10}{3}v_3 \\ v_3 \\ -\frac{5}{3}v_3 \end{bmatrix}$$

A mi jelölésünket használva a megoldás tehát

$$x_1 = 1 + 4v_3, \ x_2 = 2 - \frac{10}{3}v_3, \ x_3 = v_3, \ x_4 = -\frac{5}{3}v_3,$$

ahol v_3 tetszőleges valós számot jelöl.

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a `LinearSolve` eljárást az A és B paraméterek helyett csak a K kibővített mátrixszal hívjuk meg:

```
> LinearSolve(K,free='v');
```

3. A `Student[LinearAlgebra]` csomag `LinearSolveTutor` eljárása pedig bevisz minket a színfalak mögé: lépésről-lépésre bemutatja az egyenletrendszer Gauss-eliminációval, vagy akár Gauss-Jordan eliminációval történő megoldását.

   ```
   > Student[LinearAlgebra]:-LinearSolveTutor(A,B);
   ```

4. Végül nézzünk egy félautomata megoldási módszert! Először a kibővített mátrixot (a már ismert módon) lépcsős alakúra hozzuk:

   ```
   > L:=GaussianElimination(K);
   ```

   $$L := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Van a Maple-ben a visszahelyettesítések elvégzésére egy külön parancs:

   ```
   > M:=BackwardSubstitute(L);
   ```

   $$\begin{bmatrix} 1 - \frac{12}{5}\_t_1 \\ 2 + 2\_t_1 \\ -\frac{5}{3}\_t_1 \\ \_t_1 \end{bmatrix}$$

   A

   ```
   > subs(_t[1]=u,M);
   ```

   parancs végrehajtása után a megoldás pont olyan alakot ölt, ahogy azt korábban mi magunk is megkaptuk.

A `LinearSolve` parancs fel van készítve szimultán Gauss-eliminációra is: ha a második paraméterként megadott mátrixnak több oszlopa van, akkor minden egyes oszlopra elvégzi az eliminációt. Megoldjuk így a 7.2.1. szakaszban tárgyalt példánkat, de most az egyenletek helyett egyből az alapmátrixot, és a szabadtagok (oszlop)vektorait tartalmazó mátrixot adjuk meg:

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
> A:=Matrix([[1,2,3],[-1,1,2],[1,-3,-5]]):
> B:=Matrix([[6,0],[2,-2],[-7,3]]):
> LinearSolve(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ahol az eredménymátrix oszlopai a B mátrix megfelelő oszlopaihoz tartozó megoldást tartalmazzák.

A Gauss-Jordan elminációhoz először rakjuk össze az A és B mátrixokból az egyenletrendszer kibővített mátrixát:

```
> K:=<A|B>;
```

melyen a Gauss-Jordan elimináció a `ReducedRowEchelonForm` parancs segítségével hajtható végre:

```
> ReducedRowEchelonForm(K);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A parancs elnevezése arra utal, hogy a Gauss-Jordan elimináció eredménye egy olyan lépcsős alakú mátrix, melyben minden nem csupán nulla elemeket tartalmazó sor vezető eleme 1, és ezen vezető 1-esek alatt és fölött is minden elem 0.

Az előző szakaszban meghatároztuk a (7.4) mátrix inverzét Gauss-Jordan elimináció alkalmazásával. Most rábízzuk ugyanezt a Maple-re!

```
> restart;
> with(LinearAlgebra):
> A:=Matrix([[1,-2,0],[1,-1,1],[-1,0,-3]]):
> B:=<A|IdentityMatrix(3)>;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(B);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

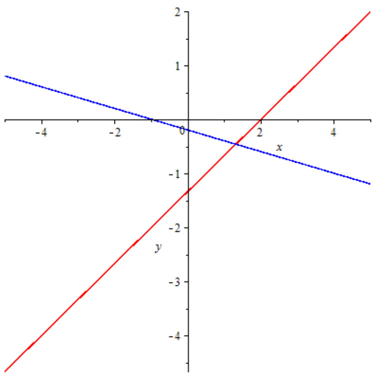
Az inverzmátrix:

```
> DeleteColumn(%,[1..3]);
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Középiskolában egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer grafikus módszerrel történő megoldásán azt az eljárást értettük, amikor az egyenleteket egyenesek egyenleteinek tekintettük, majd ezeket az egyeneseket közös koordináta-rendszerben ábrázoltuk, és a metszéspont (ha volt) koordinátáit leolvastuk. Ez utóbbi az egyenletrendszer megoldása. A módszer hátránya, hogy csak akkor használható eredményesen, ha az egyenletek lehetővé teszik az egyenesek megfelelelő pontosságú ábrázolását. A Maple az egyenesek ábrázolásában tud segíteni:

```
> plots:-implicitplot([2*x-3*y=4,x+5*y=-1],x=-5..5,y=-5..5,color=[red,blue]);
```



de a megoldások leolvasása a mi dolgunk. Ez teljes pontossággal általában nem tehető meg.

Befejezésként megnézzük, hogy grafikus úton mit tudunk kezdeni a

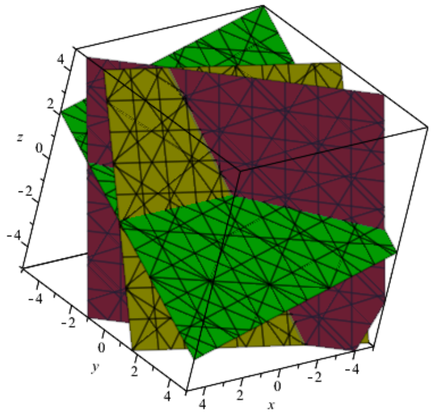
$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

háromismeretlenes lineáris egyenletrendszerrel. Itt az egyenleteket síkok egyenleteinek tekinthetjük, ám ez kézi rajzolás esetén nem annyira jó hír. A Maple-nek azonban a síkok ábrázolása sem okoz gondot. Először bevisszük az egyenleteket:

```
> s:=[2*x+3*y+z=2,
  2*x+4*y+7*z=5,
  3*x+10*y+5*z=7]:
```

majd ábrázoljuk a hozzájuk tartozó síkokat:

```
> plots:-implicitplot3d(s,x=-5..5,y=-5..5,z=-5..5,
  color=[red,green,yellow],axes=boxed);
```



Az ábrán szépen látszik, hogy a három sík egy pontban metszi egymást, a metszéspont koordinátáinak leolvasása viszont éleslátással is reménytelen. Ne is fáradjunk vele:

```
> solve(s);
```

$$\left\{x = \frac{6}{59}, y = \frac{27}{59}, z = \frac{25}{59}\right\}$$

7.5. Feladatok

7.1. Feladat. Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 &= 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 &= 1 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 8x_2 - 6x_3 &= -5 \\ 6x_1 + 10x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 10x_4 &= 13 \end{aligned}$$

7.2. Feladat. Igazolja, hogy egy n ismeretlenes, T test feletti, homogén lineáris egyenletrendszer megoldástere valóban altere T^n-nek!

7.3. Feladat. Oldja meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszereket a valós számok halmazán, majd adja meg a megoldástér dimenzióját és egy bázisát!

a)

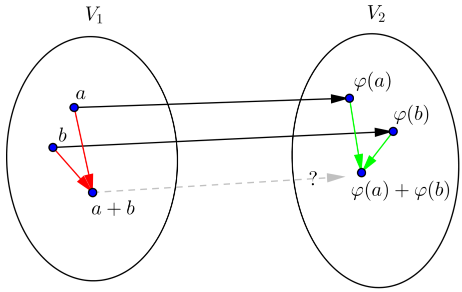
$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8. Lineáris leképezések

Legyenek V_1 és V_2 vektorterek ugyanazon T test felett, és tekintsünk egy $\varphi\colon V_1 \to V_2$ függvényt. Vegyünk V_1-ben két tetszőleges a és b vektort, ekkor nyilván az $a+b$ vektor is eleme V_1-nek, továbbá ezek φ általi $\varphi(a), \varphi(b)$ és $\varphi(a+b)$ képei pedig mind a V_2 tér elemei. De ekkor a $\varphi(a)+\varphi(b)$ vektor is V_2 eleme, és a kérdés az, hogy ez vajon egybeesik-e a $\varphi(a+b)$ vektorral. Ha igen, az tulajdonképpen úgy is

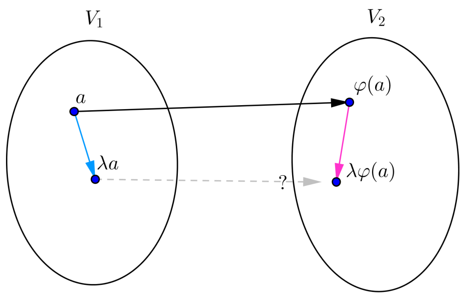


8.1. ábra. Leképezések additív tulajdonsága

értelmezhető, hogy a vektorok összeadása és a φ leképezés végrehajtása felcserélhetők egymással. A továbbiakban azt mondjuk, hogy a $\varphi\colon V_1 \to V_2$ leképezés *additív*, ha bármely $a, b \in V_1$ esetén

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Az a vektorral együtt λa is eleme V_1-nek bármely $\lambda \in T$ esetén, és így azok képei, a $\varphi(a)$ és a $\varphi(\lambda a)$ vektorok V_2 elemei. Mivel V_2 ugyanazon T test feletti vektortér, mint V_1, így a $\lambda\varphi(a)$ vektor is V_2 eleme. A $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ egyenlőség vizsgálata arra



8.2. ábra. Leképezések homogén tulajdonsága

a kérdésre keresi a választ, hogy vajon ugyanazt a vektort kapjuk-e eredményül, ha először az a vektort szorozzuk meg a λ skalárral, majd az eredménynek vesszük a φ általi képét, mint amikor fordítva cselekszünk: először az a vektorra a φ leképezéssel hatunk, majd az a vektor képét szorozzuk meg λ-val. A $\varphi\colon V_1 \to V_2$ leképezést *homogénnek* fogjuk nevezni, ha bármely $a \in V_1$ és $\lambda \in T$ esetén

$$\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a).$$

8.1. Definíció. Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon T test feletti vektorterek. A $\varphi\colon V_1 \to V_2$ leképezést *lineáris leképezésnek* nevezzük, ha additív és homogén.

Példák:

- Az azonosan nulla leképezés bármely két, ugyanazon test feletti vektortér között lineáris leképezés, azaz a $\varphi\colon V_1 \to V_2$, $\varphi(x) = 0$ leképezés lineáris.
- Lineáris leképezés a szabadvektorok úgynevezett λ-nyújtása ($\varphi(\underline{a}) = \lambda\underline{a}$), valamint a vektorok adott szöggel való elforgatása.
- Legyen $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x_1, x_2) = x_1$, vagyis φ az a leképezés, amely a sík minden pontjához hozzárendeli annak első koordinátáját. Ekkor φ lineáris leképezés.
- Legyen A adott T test feletti $n \times m$ típusú mátrix. Ekkor $\varphi\colon T^m \to T^n$, $\varphi(x) = Ax$ is lineáris leképezés, ahol a szorzás alatt mátrixszorzást értünk úgy, hogy T^n elemeit $m \times 1$ típusú mátrixnak tekintjük.
- Végül megmutatjuk, hogy a $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ leképezés is lineáris. Az additivitás ellenőrzéséhez vegyünk két teszőleges (a, b) és (c, d) pontot $\mathbb{R}^2$-ből. Ekkor

  $$\varphi((a, b) + (c, d)) = \varphi(a + c, b + d) = a + c$$

  és

  $$\varphi(a, b) + \varphi(c, d) = a + c,$$

  tehát φ valóban additív. Továbbá tetszőleges λ valós szám esetén

  $$\varphi(\lambda(a, b)) = \varphi(\lambda a, \lambda b) = \lambda a,$$

  úgymint $\lambda\varphi(a, b) = \lambda a$, tehát φ homogén is.

Mivel bármely test tekinthető mint önmaga feletti vektortér, így a $V_2 = T$ eset is szóba jöhet. A $\varphi\colon V \to T$ lineáris leképezéseket *lineáris formáknak* nevezzük.

A következő tétel a lineáris leképezések legalapvetőbb tulajdonságait veszi sorra.

8.2. Tétel. *A $\varphi\colon V_1 \to V_2$ lineáris leképezésre igazak a következő állítások:*

1. $\varphi(0) = 0$.
2. *Minden $a \in V_1$ esetén $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.*
3. *Ha L a V_1 altere, akkor a $\varphi(L) = \{\varphi(l) : l \in L\}$ halmaz altere V_2-nek.*
4. *Ha $a \in V_1$ és $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$, akkor*
$$\varphi(a) = \lambda_1\varphi(a_1) + \lambda_2\varphi(a_2) + \cdots + \lambda_n\varphi(a_n).$$
5. *V_1 lineárisan függő vektorrendszerének φ általi képe is lineárisan függő.*
6. *Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ generátorrendszere a V_1 vektortér L alterének, akkor*
$$\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$$
generátorrendszere $\varphi(L)$-nek, és $\dim\varphi(L) \leqslant \dim L$.

Bizonyítás.

1. Az állítás a
$$\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0)$$
egyenlőség átrendezésével adódik.
2. Felhasználva az 1. állítást, tetszőleges $a \in V_1$ esetén teljesül, hogy
$$0 = \varphi(0) = \varphi(a + (-a)) = \varphi(a) + \varphi(-a),$$
ahonnan $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ következik. Megjegyezzük, hogy az állítás φ homogenitásából is kijön $\lambda = -1$ választással.
3. Legyenek a' és b' $\varphi(L)$-beli vektorok. Ekkor vannak olyan a és b vektorok L-ben, hogy $a' = \varphi(a)$ és $b' = \varphi(b)$. A φ lineáris volta miatt
$$\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = a' - b'.$$

Mivel $\varphi(a-b) \in \varphi(L)$, ezért $a'-b' \in \varphi(L)$. Továbbá tetszőleges λ skalárral

$$\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a) = \lambda a' \in \varphi(L),$$

tehát az altérkritérium szerint $\varphi(L)$ valóban altér.

4. Indukcióval könnyen belátható, hogy az additivitás tetszőleges n számú vektorra igaz.

5. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lineárisan függő vektorrendszere V_1-nek, akkor

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$$

teljesül úgy, hogy valamelyik $\lambda_i \neq 0$, és a 4. pont szerint

$$\lambda_1\varphi(a_1) + \lambda_2\varphi(a_2) + \cdots + \lambda_n\varphi(a_n) = 0,$$

tehát a $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ lineárisan függő.

6. Tetszőleges $a \in L$ vektor előáll az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok lineáris kombinációjaként. Az előzőek szerint pedig a $\varphi(a)$ ekkor előáll

$$\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$$

lineáris kombinációjaként, tehát ez utóbbi generátorrendszere V_2-nek. Továbbá bázis képe is generátorrendszer, bázis pedig minimális számosságú generátorrendszer, így $\dim\varphi(L) \leqslant \dim L$.

□

Az első tulajdonság alapján könnyű látni, hogy a szabadvektorok körében a $d \neq = 0$ vektorral való eltolás ($\varphi\colon \mathbb{V}(\mathcal{E}) \to \mathbb{V}(\mathcal{E})$, $\varphi(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{d}$) nem lineáris leképezés, ugyanis ott $\varphi(\underline{0}) = \underline{0} + \underline{d} = \underline{d} \neq \underline{0}$. Megjegyezzük továbbá, hogy lineárisan független vektorrendszer képe nem feltétlenül lineárisan független: például az azonosan nulla leképezés minden lineárisan független vektorrendszerhez a csupán a nullvektorból álló „vektorrendszert” rendeli, amely nyilván lineárisan függő. Megemlítendő még a 4. állítás azon következménye, miszerint egy lineáris leképezés értékeit elegendő csak báziselemeken ismerni; valamint ha két lineáris leképezés a vektortér egy bázisán megegyezik, akkor a két lineáris leképezés egyenlő.

8.3. Tétel (Lineáris leképezések alaptétele)**.** *Legyen* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *egy bázisa a* V_1*, és* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *tetszőleges vektorrendszere a* V_2 *vektortérnek. Ekkor pontosan egy olyan* $\varphi\colon V_1 \to V_2$ *lineáris leképezés létezik, melyre*

$$\varphi(a_1) = b_1, \varphi(a_2) = b_2, \dots, \varphi(a_n) = b_n.$$

Bizonyítás. Az előző megállapítás szerint elegendő csak φ létezését igazolni. Legyen φ az a leképezés, amely az $a \in V_1$ vektorhoz a

$$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$$

vektort rendeli, ahol $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ az a vektor $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ bázisra vonatkozó koordinátái. Megmutatjuk, hogy φ lineáris leképezés. Valóban, ha $a, b \in V_1$ és $a = {}$ $= \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ és $b = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i$, akkor

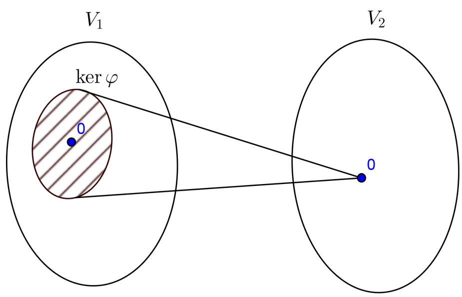
$$\begin{aligned}\varphi(a+b) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) a_i\right) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i) b_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i + \sum_{i=1}^n \mu_i b_i \\ &= \varphi(a) + \varphi(b).\end{aligned}$$

Hasonlóan győződhetünk meg φ homogenitásáról is. □

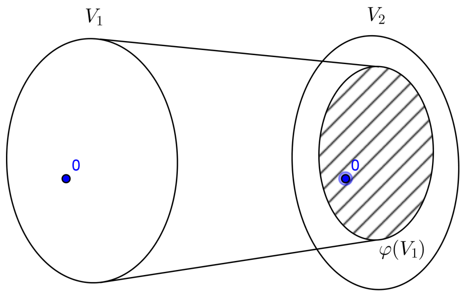
A $\varphi\colon V_1 \to V_2$ lineáris leképezés *magjának* a

$$\ker\varphi = \{a \in V_1 : \varphi(a) = 0\}$$

halmazt, míg *képterének* a $\varphi(V_1)$ halmazt nevezzük. A fentebb már vizsgált



8.3. ábra. A $\varphi\colon V_1 \to V_2$ lineáris leképezés magja V_1 vektorainak azon részhalmaza, mely elemeinek képe V_2 nullvektora



8.4. ábra. A $\varphi\colon V_1 \to V_2$ lineáris leképezés képtere a $\varphi(V_1) = \{\varphi(x) : x \in V_1\}$ halmaz

$$\varphi_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi_1(x_1, x_2) = x_1 \qquad \text{és} \qquad \varphi_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

lineáris leképezések magjai a

$$\ker\varphi_1 = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\} \qquad \text{és} \qquad \ker\varphi_2 = \{(b, -b) : b \in \mathbb{R}\}$$

halmazok.

A képtér a 8.2. tétel 3. pontja értelmében altér V_2-ben, és most megmutatjuk, hogy a mag is alteret alkot V_1-ben.

8.4. Tétel. *A $\varphi\colon V_1 \to V_2$ lineáris leképezés magja altere V_1-nek.*

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \ker\varphi$. Ekkor nyilván $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ és φ linearitása miatt

$$\varphi(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b) = 0 - 0 = 0,$$

továbbá tetszőleges λ skalárra $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a) = \lambda 0 = 0$. Az altérkritérium szerint $\ker\varphi$ valóban altér V_1-ben. □

8.5. Tétel. *A $\varphi\colon V_1 \to V_2$ lineáris leképezés pontosan akkor injektív, ha* $\ker\varphi = \{0\}$.

Bizonyítás. Világos, hogy ha φ injektív, akkor a 0 nem lehet több vektornak is a képe, tehát $\ker\varphi = \{0\}$. Most tegyük fel, hogy $\ker\varphi = \{0\}$, és $\varphi(a) = \varphi(b)$. Ekkor $\varphi(a - b) = 0$, azaz $a - b \in \ker\varphi$. Innen adódik, hogy $\ker\varphi = \{0\}$ esetben $\varphi(a) = \varphi(b)$ csak $a = b$ esetén lehetséges, tehát φ injektív. □

8.6. Tétel. *Injektív lineáris leképezés lineárisan független vektorrendszerhez lineárisan független vektorrendszert rendel.*

Bizonyítás. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lineárisan független vektorrendszere V_1-nek, és tegyük fel, hogy

$$\lambda_1\varphi(a_1) + \lambda_2\varphi(a_2) + \cdots + \lambda_n\varphi(a_n) = 0,$$

ahol $\varphi\colon V_1 \to V_2$ egy injektív lineáris leképezés. Mivel φ lineáris, így

$$\varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n) = 0$$

következik, vagyis

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \in \ker\varphi.$$

Az előbb igazolt tétel miatt $\ker\varphi = \{0\}$, tehát

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0.$$

Mivel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lineárisan független vektorrendszere V_1-nek, így

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

azaz $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ lineárisan független vektorrendszere V_2-nek. □

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt:

8.7. Tétel (Dimenziótétel)**.** *Legyenek V_1 és V_2 végesen generált vektorterek, és $\varphi\colon V_1 \to V_2$ egy lineáris leképezés. Ekkor*

$$\dim V_1 = \dim\ker\varphi + \dim\varphi(V_1).$$

A $\varphi(V_1)$ dimenzióját a φ leképezés *rangjának*, míg $\ker\varphi$ dimenzióját a leképezés *defektusának* is szokás nevezni.

8.1. Izomorfizmus

A bijektív lineáris leképezéseket *izomorfizmusoknak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy a V_1 és V_2 vektorterek *izomorfak*, ha létezik $\varphi\colon V_1 \to V_2$ izomorfizmus. Könnyen igazolható, hogy a vektorterek közötti izomorfia ekvivalencia reláció.

8.8. Tétel. *Két végesen generált vektortér pontosan akkor izomorf, ha dimenziójuk megegyezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy φ egy izomorfizmus a V_1 és V_2 vektorterek között, és legyen B egy bázisa V_1-nek. A 8.2. tétel 4. pontja szerint $\varphi(B)$ generátorrendszere V_2-nek, amely a 8.6. tétel szerint lineárisan független is, így bázis. Mivel a B és $\varphi(B)$ bázisok számossága megegyezik, így a dimenziók is.

A fordított állítás bizonyításához azt mutatjuk meg, hogy egy tetszőleges n dimenziós T test feletti vektortér izomorf T^n-nel. Ehhez rögzítsünk egy bázist V_1-ben és φ rendelje minden V_1-beli vektorhoz a vektor adott bázisra vonatkozó koordinátáit. Ez a hozzárendelés nyilván injektív és lineáris. Mivel tetszőleges koordinátasorhoz tartozik valamely vektor, ezért a hozzárendelés szürjektivitása is fennáll. □

Az izomorfizmus tehát két ugyanazon test feletti vektortér vektorainak olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetése, amely „megőrzi" mind a vektorok összeadását, mind a skalárral való szorzást. Ha visszagondolunk arra, mit is tanultunk eddig a vektorokról, láthatjuk, hogy minden ebből a két műveletből és tulajdonságaikból ered, így elmondható, hogy izomorf vektorterek között algebrai szempontból (vagyis a mi szempontunkból) nincs lényegi különbség. Az előző tétel állítása szerint két n dimenziós vektortér mindig izomorf, hiszen mindkettő izomorf a T^n vektortérrel, ahol T a közös skalártartomány. Tehát aki az n dimenziós vektorterekről mindent szeretne tudni, annak elegendő a T^n vektorteret alaposan megismerni.

8.2. Lineáris leképezések mátrix-reprezentációja

Legyenek $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ és $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ egy-egy bázisa a T test feletti V_1 és V_2 vektortereknek, és legyen $\varphi\colon V_1 \to V_2$ egy lineáris leképezés. Ekkor az E bázis elemeinek képei a V_2 vektortér elemei, így egyértelműen előállíthatók F elemeinek lineáris kombinációjaként. A *φ lineáris leképezés E és F bázispárra vonatkozó mátrixa* alatt azt az $n \times m$ típusú mátrixot értjük, melynek i-edik oszlopában a $\varphi(e_i)$ vektor F bázisra vonatkozó koordinátaoszlopa áll. Mint azt a következő tétel mutatja, egy bázispár rögzítése után egy koordinátákkal adott vektor lineáris leképezés általi képének koordinátái megkaphatók a lineáris leképezés mátrixának a vektor koordinátáit tartalmazó oszlopmátrixszal való szorzásával.

8.9. Tétel. *Legyenek $E = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ és $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ egy-egy bázisa a T test feletti V_1 és V_2 vektortereknek, és legyen $\varphi\colon V_1 \to V_2$ egy lineáris leképezés, melynek az E és F bázispárra vonatkozó mátrixa A. Ha $a = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_me_m$*

és $\varphi(a) = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \cdots + y_n f_n$, *akkor*

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T = A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix}^T.$$

Bizonyítás. Legyen $A = [a_{ij}]_{n\times m}$. Mivel

$$\sum_{k=1}^{n} y_k f_k = \varphi(a) = \varphi\left(\sum_{l=1}^{m} x_l e_l\right) = \sum_{l=1}^{m} x_l \varphi(e_l) = \sum_{l=1}^{m}\left(x_l \sum_{k=1}^{n} a_{kl} f_k\right) =$$
$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{kl} x_l f_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m} a_{kl} x_l\right) f_k,$$

így $\sum\limits_{l=1}^{m} a_{kl} x_l = y_k$ következik, azaz

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T = A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T.$$

□

Jelölje $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ az összes V_1-ről V_2-be ható lineáris leképezések halmazát, ahol V_1 és V_2 ugyanazon T test feletti vektorterek. Definiáljuk ezen a halmazon az összeadást és skalárral való szorzást a következőképpen: ha $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ és $\lambda \in T$, akkor legyen

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$$

és

$$(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x).$$

Könnyen bizonyítható, hogy $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ vektortér a T test felett, továbbá, ha a $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ lineáris leképezések E, F bázispárra vonatkozó mátrixai A és B, akkor a $\varphi + \psi$ és $\lambda\varphi$ lineáris transzformációk mátrixai $A + B$ és λA. Ebből következik, hogy ha V_1 egy m, és V_2 egy n dimenziós vektortér, akkor az a $\Phi\colon \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \to \mathcal{M}_{n\times m}(T)$ leképezés, amely minden $\varphi\colon V_1 \to V_2$ lineáris leképezéshez hozzárendeli egy rögzített E, F bázispárra vonatkozó mátrixát, egy lineáris leképezés. Világos, hogy különböző lineáris leképezések mátrixa is különböző. Továbbá bármely $n \times m$ típusú A mátrixnak van pontosan egy ősképe, hiszen a mátrix oszlopai, mint F-re vonatkozó koordináta-oszlopok, definiálnak m darab vektort a V_2 térben, és a 8.2. tétel szerint pontosan egy olyan φ lineáris leképezés létezik, amely az E bázis elemeihez rendre ezeket a vektorokat rendeli. Nyilván az A mátrix pontosan ennek a φ leképezésnek lesz a mátrixa. Igazoltuk, hogy a Φ lineáris leképezés egyszerre injektív és szürjektív, vagyis izomorfizmus, tehát a $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ és az $\mathcal{M}_{n\times m}(T)$ vektorterek izomorfak. Következésképpen, egy lineáris leképezés helyett dolgozhatunk annak mátrixával, ami mind elméletben, mind gyakorlatban hasznosnak bizonyul.

A fent elmondottakból

$$\dim \mathrm{Hom}(V_1, V_2) = \dim V_1 \cdot \dim V_2$$

is következik.

8.3. Lineáris transzformációk

Ebben a szakaszban külön figyelmet fordítunk arra az esetre, amikor V_1 és V_2 ugyanazon vektorterek.

8.10. Definíció. Legyen V egy vektortér. A $\varphi\colon V \to V$ lineáris leképezést (V-n ható) *lineáris transzformációnak* nevezzük.

Például az identikus leképezés, az azonosan nulla leképezés, illetve a $\varphi\colon V \to V$, $\varphi(a) = \lambda a$, ahol λ adott skalár, lineáris transzformációk. Ez utóbbit neveztük λ-nyújtásnak.

8.11. Tétel. *Egy végesen generált vektortéren ható lineáris transzformáció pontosan akkor injektív, ha szürjektív.*

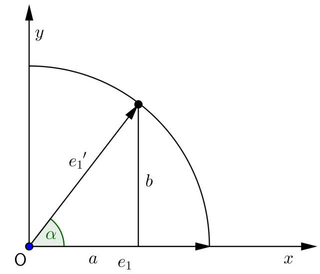
Bizonyítás. Legyen $\varphi\colon V \to V$ egy lineáris transzformáció. A 8.5. tétel szerint ha φ injektív, akkor $\ker\varphi = \{0\}$. Továbbá, $\dim V = \dim\ker\varphi + \dim\varphi(V) = \dim\varphi(V)$, így φ szürjektív is. A fordított állítás bizonyítása hasonló. $\square$

Az állítás végtelen dimenzióban már nem igaz. Például a valós együtthatós polinomok vektorterén ható $\varphi(f(x)) = xf(x)$ leképezés egy olyan lineáris transzformáció, amely injektív, de nem szürjektív.

8.12. Definíció. Legyen E egy bázisa a V vektortérnek. A φ V-n ható lineáris transzformáció E bázisra vonatkozó mátrixa alatt φ-nek, mint lineáris leképezésnek az E, E bázispárra vonatkozó mátrixát értjük.

Lineáris transzformáció mátrixának felírásához tehát a bázispár mindkét bázisát ugyanannak választjuk.

Példaként tekintsük a sík szabadvektorainak vektorterét, amely az $\mathbb{R}^2$ vektortérrel izomorf, és legyen φ az origó körüli α szöggel való elforgatás, pozitív irányba. Ez – mint tudjuk – lineáris transzformáció. Most felírjuk φ mátrixát $\mathbb{R}^2$ természetes



8.5. ábra. Az e_1' koordinátáinak kiszámítása

bázisára vonatkozóan. Ehhez meg kell határoznunk a bázisvektorok képeinek koordinátáit. Az $e_1 = (1, 0)$ vektor forgatás utáni képét jelölje e_1'. Az ábrát követve, e_1' koordinátái a és b, melyek éppen egy egységnyi átfogójú derékszögű háromszög befogóinak hosszai, ezért $a = \cos\alpha$ és $b = \sin\alpha$. Hasonlóan kapjuk, hogy az $e_2 = (0, 1)$ vektor képének koordinátái rendre $-\sin\alpha$ és $\cos\alpha$. A φ természetes bázisra vonatkozó mátrixa ekkor úgy állítható elő, hogy első oszlopába beírjuk az e_1', második oszlopába pedig az e_2' koordinátáit:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Jóllehet a levezetésünk csak $0°$ és $90°$ közötti α esetén korrekt, az olvasó könnyen meggyőződhet róla, hogy ugyanez a mátrix adódik tetszőleges α-ra.

Mint azt a 8.9. tétel is mutatja, a lineáris transzformációk mátrixának ismerete azért hasznos, mert ha ismerjük egy vektor koordinátáit, akkor a vektor képének kooridnátái megkaphatók mátrixszorzás segítségével. Minthogy a sík pontjainak origó körüli $60°$-kal való elforgatásának mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}5 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0{,}5 \end{bmatrix},$$

bármely pont elforgatás utáni képének koordinátái megkaphatók úgy, hogy az A mátrixot szorozzuk a pont koordinátáit tartalmazó 2×1 típusú mátrixszal. Például az $(1,3)$ pont képe a

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 - 3\sqrt{3}/2 \\ 1{,}5 + \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

alapján a $(0{,}5 - 3\sqrt{3}/2, 1{,}5 + \sqrt{3}/2)$ pont.

Legyen újra V egy T test feletti vektortér. Mint korábban láttuk, $\mathrm{Hom}(V, V)$, melyet ezentúl egyszerűen csak $\mathrm{Hom}(V)$-vel jelölünk, vektortér a T test felett. Sőt, ennél még kicsivel több is igaz. Könnyű belátni, hogy bármely φ és ψ V-n ható lineáris transzformációk esetén a $\varphi \circ \psi$ kompozíció is V-n ható lineáris transzformáció. Továbbá ha φ és ψ mátrixai az $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ bázisra vonatkozóan A és B, akkor $\varphi \circ \psi$ mátrixa AB, ugyanis

$$\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)(e_j) &= \varphi(\psi(e_j)) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} \varphi(e_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} \left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_{lk} e_l\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (\beta_{kj} \alpha_{lk} e_l) = \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{lk} \beta_{kj} e_l) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{lk} \beta_{kj}\right) e_l = \sum_{l=1}^{n} (AB)_{lj} e_l,
\end{aligned}$$

tehát az AB mátrix j-edik oszlopa valóban a $(\varphi \circ \psi)(e_j)$ vektor E bázisra vonatkozó koordináta-oszlopát tartalmazza. Mindezek alapján elmondható, hogy ha a $\mathrm{Hom}(V)$ vektortérben a vektorok szorzatán a leképezések kompozícióját értjük, akkor a fent tárgyalt Φ leképezés a szorzást is megőrzi.

8.13. Definíció. Azt mondjuk, hogy a T test feletti V vektortér *algebra* T felett, ha értelmezve van a V halmazon egy $\cdot$ szorzás úgy, hogy $(V, +, \cdot)$ gyűrű, és bármely $a, b \in V$ és $\lambda \in T$ esetén

$$\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$$

teljesül.

Az előbb tulajdonképpen azt bizonyítottuk, hogy $\mathrm{Hom}(V)$ algebra a T test felett. Ennek néhány következménye:

– ha a φ V-n ható lineáris transzformáció invertálható (injektív), akkor annak bármely bázisra vonatkozó mátrixának létezik inverze, és az inverzmátrix éppen az inverzleképezés mátrixa lesz, természetesen ugyanarra a bázisra vonatkozóan;

– mint tudjuk, a mátrixok szorzása nem kommutatív, így lineáris transzformációk kompozíciója sem az.

Most a szorzás műveletének megőrzését kihasználva megmutatjuk, hogy a véges dimenziós V vektortéren ható λ-nyújtás felcserélhető bármely V-n ható lineáris transzformációval. Legyen $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ egy bázisa V-nek, λ adott skalár, és legyen $\varphi\colon V \to V$, $\varphi(a) = \lambda a$. Ekkor $\varphi(e_j) = \lambda e_j$ minden $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén, a λe_j vektor koordinátái pedig az E bázisban $(0, 0, \ldots, \lambda, \ldots, 0)$, ahol λ a rendezett elem n-es j-edik komponense. Tehát φ mátrixa az E bázisra vonatkozóan az az $n \times n$ típusú A mátrix, melynek főátlóján minden eleme λ, és minden más eleme 0, azaz $A = \lambda E_n$. Az $n \times n$ típusú mátrixok körében A felcserélhető bármely mátrixszal, így ugyanez mondható el a neki megfelelő φ lineáris transzformációról a V-n ható lineáris transzformációk körében.

8.4. Bázis és koordináta transzformáció

Legyenek $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ és $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ bázisok a T test feletti V vektortérben. Ekkor a Lineáris leképezések alaptétele (8.3. tétel) szerint pontosan egy olyan $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció létezik, melyre

$$\varphi(e_1) = f_1, \varphi(e_2) = f_2, \ldots, \varphi(e_n) = f_n.$$

Jelölje φ mátrixát az E bázisra vonatkozóan S. Ekkor S olyan $n \times n$ típusú T test feletti mátrix, melynek j-edik oszlopában a $\varphi(e_j) = f_j$ vektor E bázisra vonatkozó koordináta-oszlopa szerepel. Ezt az S mátrixot nevezzük az *E-ről F-re történő bázisátmenet mátrixának.* Mivel φ kölcsönösen egyértelmű leképezés, így S invertálható, és az inverze nyilván a fordított, F-ről E-re történő bázisátmenet mátrixa.

Például ha

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 2, 1), & f_1 &= (3, 1, 4), \\ e_2 &= (2, 3, 3), & f_2 &= (5, 2, 3), \\ e_3 &= (3, 7, 1), & f_3 &= (1, 1, 6), \end{aligned}$$

akkor az $E = (e_1, e_2, e_3)$-ról az $F = (f_1, f_2, f_3)$-ra való bázisátmenet mátrixának felírásához meg kell határoznunk az f_1, f_2, f_3 vektorok E bázisra vonatkozó koordinátáit. Ezeket egyszerre is megkereshetjük szimultán eliminációval, melynek kiinduló mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Gauss-Jordan-elimináció végrehatjása esetén a kapott mátrix utolsó 3 oszlopa éppen a keresett báziscsere mátrix oszlopai lesznek. Itt csak az elimináció végeredményét közöljük:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -27 & -61 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 18 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 10 & -4 \end{bmatrix},$$

a keresett báziscsere-mátrix tehát

$$S = \begin{bmatrix} -27 & -61 & 19 \\ 9 & 18 & -3 \\ 4 & 10 & -4 \end{bmatrix}.$$

Most pedig megnézzük, miért jó nekünk ennek az S mátrixnak az ismerete.

8.14. Tétel. *Legyenek $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ és $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ bázisok V-ben, és legyen S az E-ről F-re történő bázisátmenet mátrixa. Ha $b \in V$, valamint $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a b vektor E, illetve F bázisra vonatkozó koordinátái, akkor*

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T = S^{-1} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T.$$

Bizonyítás. Legyen $S = [a_{ij}]_{n\times n}$. Mivel

$$\sum_{k=1}^{n} x_k e_k = b = \sum_{l=1}^{n} y_l f_l = \sum_{l=1}^{n} y_l \sum_{k=1}^{n} a_{kl} e_k = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} y_l a_{kl} e_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l \right) e_k,$$

így $\sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l = x_k$ következik, azaz

$$S \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T.$$

□

A fenti tétel alapján az S^{-1} mátrixot az *E-ről F-re történő bázisátmenethez* *tartozó koordináta-transzformáció mátrixának* nevezzük.

Az utolsó tételünk arra ad választ, hogy báziscsere után hogyan változik egy lineáris transzformáció mátrixa.

8.15. Tétel. *Legyenek $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ és $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ bázisok V-ben, és legyen S az E-ről F-re történő bázisátmenet mátrixa. Legyenek továbbá a φ V-n ható lineáris transzformáció E és F bázisra vonatkozó mátrixai rendre A és B. Ekkor $B = S^{-1}AS$.*

Bizonyítás. Legyen $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ és $S = [c_{ij}]$. Ekkor

$$\varphi(f_j) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} c_{kj} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj}\varphi(e_k) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{lk} e_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{kj} a_{lk} e_l =$$
$$= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{lk} c_{kj}\right) e_l = \sum_{l=1}^{n} (AS)_{lj} e_l,$$

másrészt

$$\varphi(f_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} f_k = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\left(\sum_{l=1}^{n} c_{lk} e_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{kj} c_{lk} e_l =$$
$$= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} c_{lk} b_{kj}\right) e_l = \sum_{l=1}^{n} (SB)_{lj} e_l,$$

ahonnan $AS = SB$, azaz $B = S^{-1}AS$ következik. □

8.5. Kapcsolódó Maple eljárások

A lineáris leképezéseket egy rögzített bázisra vonatkozó mátrixukkal adjuk meg. Például legyen a $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés mátrixa

```
> A:=<<1|2|3|4>,<2|3|4|4>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

és nézzük meg mi lesz az

```
> x:=<1,0,2,-3>;
```

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

vektor φ általi képe. Ehhez az x vektort, 4×1 típusú mátrixnak tekintve, meg kell szoroznunk balról az A mátrixszal. Szerencsére típuskonverzióra nincs szükség, mert a `.` operátor a szorzást így is el tudja végezni:

```
> A.x;
```

$$x := \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Az eredmény típusa (a `whattype` paranccsal lekérdezhető) természetesen vektor lesz, ahogy annak lennie kell.

A `NullSpace` eljárás a lineáris leképezés magjának egy bázisát adja eredményül.

```
> B:=NullSpace(A);
```

$$x := \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Ezek szerint φ magja 2-dimenziós altere $\mathbb{R}^4$-nek, és a két bázisvektor bármilyen lineáris kombinációjának a képe $\mathbb{R}^2$ nullvektora. Nézzük csak!

```
> A.(alpha*B[1]+beta*B[2]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8.6. Feladatok

8.1. Feladat. Határozza meg, hogy az alábbi leképezések közül melyek lineárisak!

1. $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(a,b) = (a,-b)$
2. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(a,b,c) = (a,c)$
3. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(a,b,c) = (a,b,c) + (1,1,1)$
4. $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(a,b) = (a-b, a+b)$
5. $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(a,b) = ab$

8.2. Feladat. Ha V egy n dimenziós vektortér, akkor mennyi a $\mathrm{Hom}(V)$ vektortér dimenziója?

8.3. Feladat. Legyenek $\varphi, \psi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3) \quad \text{és} \quad \psi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, x_2).$$

Adja meg a $\varphi\psi$, $\psi\varphi$, φ^{99} és $(\varphi\psi)^{99}$ transzformációkat!

8.4. Feladat. Mutasson a szabadvektorok vektorterének egymással felcserélhető, és egymással nem felcserélhető lineáris transzformációit!

8.5. Feladat. A $\mathrm{Hom}(V)$ vektortérben alteret alkotnak-e azok a transzformációk, melyek

a) izomorfizmusok;

b) nem izomorfizmusok;

c) egy adott alteret önmagába képeznek?

8.6. Feladat. Egybeeshet-e egy lineáris transzformáció képtere és magtere?

8.7. Feladat. Lineáris leképezés-e az, amely a valós együtthatós polinomokhoz az 1 helyen vett helyettesítési értéküket rendeli?

8.8. Feladat. Határozza meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát, magját és képterét!

a) $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, 0)$

b) $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$

c) $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3)$

d) $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1, x_2, x_3)$

8.9. Feladat. Adja meg az (e_1, e_2, e_3, e_4) bázisról az (f_1, f_2, f_3, f_4) bázisra történő átmenet mátrixát!

a)
$$\begin{array}{ll} e_1 = (1, 0, 0, 0) & f_1 = (1, 1, 0, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, 0) & f_2 = (1, 0, 1, 0) \\ e_3 = (0, 0, 1, 0) & f_3 = (1, 0, 0, 1) \\ e_4 = (0, 0, 0, 1) & f_4 = (1, 1, 1, 1) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ll} e_1 = (1, 2, -1, 0) & f_1 = (2, 1, 0, 1) \\ e_2 = (1, -1, 1, 1) & f_2 = (0, 1, 2, 2) \\ e_3 = (-1, 2, 1, 1) & f_3 = (-2, 1, 1, 2) \\ e_4 = (-1, -1, 0, 1) & f_4 = (1, 3, 1, 2) \end{array}$$

c) $$\begin{array}{ll} e_1 = (1,1,1,1) & f_1 = (1,0,3,3) \\ e_2 = (1,2,1,1) & f_2 = (-2,-3,-5,-4) \\ e_3 = (1,1,2,1) & f_3 = (2,2,5,4) \\ e_4 = (1,3,2,3) & f_4 = (-2,-3,-4,-4) \end{array}$$

8.10. Feladat. Igazolja, hogy egy lineáris transzformáció bármely bázisra vonatkozó mátrixának ugyanaz a determinánsa!

8.11. Feladat. Igazolja, hogy ha V véges dimenziós vektortér a T test felett, akkor a V és $\mathrm{Hom}(V,T)$ vektorterek izomorfak!

9. Lineáris transzformációk spektrálelmélete

Az előző fejezetben már láthattuk, hogy bármely vektortér esetén a nyújtás egy lineáris transzformáció. De egy nyújtástól különböző lineáris transzformáció is hathat a tér bizonyos zérustól különböző vektorain nyújtásként. Az ilyen vektorokat nevezzük a lineáris transzformáció sajátvektorainak, míg a nyújtás mértékét pedig a transzformáció sajátértékének. Precízebben:

9.1. Definíció. Legyen V egy T test feletti vektortér, és $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$. Ha a $\lambda \in T$ skalár és az $a \in V$ nemnulla vektor olyanok, hogy

$$\varphi(a) = \lambda a,$$

akkor λ-t a φ transzformáció *sajátértékének*, a-t pedig a φ *λ-hoz tartozó sajátvektorának* nevezzük

A nullvektor kizárása nem véletlen: az $a = 0$ esetet megengedve $\varphi(0) = \lambda 0$ miatt T minden eleme sajátérték lenne.

Abban az esetben, ha a lineáris transzformáció maga a nyújtás, akkor annak egyetlen sajátértéke a nyújtás mértéke, és minden nemnulla vektor a sajátvektora, míg például a síkon az origó körüli forgatásnak sem sajátértéke, sem sajátvektora nincsen. Könnyű látni, hogy minden sajátvektor csak egyetlen sajátértékhez tartozhat, de egy sajátértékhez általában nem csak egy sajátvektor tartozik:

9.2. Tétel. *Legyen V egy vektortér, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$, és legyen λ egy sajátértéke φ-nek. Ekkor φ λ-hoz tartozó sajátvektorainak halmaza a nullvektorral kiegészítve altere V-nek.*

Bizonyítás. Ha a is és b is λ-hoz tartozó sajátvektorai φ-nek, akkor

$$\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = \lambda a - \lambda b = \lambda(a-b)$$

és

$$\varphi(\alpha a) = \alpha\varphi(a) = \alpha(\lambda a) = \lambda(\alpha a)$$

teljesül bármely α skalárra, így $a - b$ és αa is λ-hoz tarozó sajátvektorok. Az altérkritérium szerint tehát az állítás igaz. □

A V vektortér φ λ-hoz tartozó sajátvektorai és a nullvektor által alkotott alterét φ *λ-hoz tartozó sajátalterének* nevezzük, melyet majd L_λ fog jelölni.

Legyen a φ transzformáció V egy tetszőleges bázisára vonatkozó mátrixa A. Jelölje X az $a \in V$ vektor ezen bázisra vonatkozó koordináta-oszlopát. Az a pontosan akkor λ-hoz tartozó sajátvektora φ-nek, ha teljesül az $AX = \lambda X$ egyenlőség, ami rendezés és X kiemelése után

$$(\lambda E_n - A)X = 0$$

alakba írható. A λ-hoz tartozó sajátaltér tehát nem más, mint ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek a megoldástere.

9.3. Tétel. *Legyen V egy vektortér és $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekkor φ különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független.*

Bizonyítás. A bizonyítás teljes indukcióval történik: egyetlen sajátvektor – lévén az nem nulla – lineárisan független. Most tegyük fel, hogy $k \geqslant 2$, és a páronként különböző $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ sajátértékekhez tartozó $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ sajátvektorok lineárisan függetlenek. Legyen λ_k az előzőektől különböző sajátértéke φ-nek, és a_k egy λ_k-hoz tartozó sajátvektor. Tegyük fel, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vektorok valamely lineáris kombinációja nulla:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = 0. \tag{9.1}$$

A φ lineáris transzformációt (9.1) mindkét oldalán alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lambda_1 \alpha_1 a_1 + \lambda_2 \alpha_2 a_2 + \cdots + \lambda_k \alpha_k a_k = 0,$$

továbbá (9.1) mindkét oldalát λ_k-val szorozva

$$\lambda_k \alpha_1 a_1 + \lambda_k \alpha_2 a_2 + \cdots + \lambda_k \alpha_k a_k = 0$$

adódik. A két utóbbi egyenlőséget egymásból kivonva kapjuk, hogy

$$(\lambda_1 - \lambda_k)\alpha_1 a_1 + (\lambda_2 - \lambda_k)\alpha_2 a_2 + \cdots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\alpha_{k-1} a_{k-1} = 0,$$

ahol az indukciós feltevés szerint az együtthatók mind nullák kell legyenek. Mivel a sajátértékek különböznek ez csak az

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$$

esetben állhat fenn. De ekkor a (9.1) egyenlet $\alpha_k a_k = 0$ alakra redukálódik, ahonnan $\alpha_k = 0$ következik. $\square$

9.4. Tétel. *Legyen V egy vektortér és $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekkor φ különböző sajátértékeihez tartozó sajátalterek összege direkt összeg.*

Bizonyítás. Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ különböző sajátértékei φ-nek, és legyen $a \in \in L_{\lambda_1} + L_{\lambda_2} + \dots + L_{\lambda_k}$. Tegyük fel, hogy vannak olyan $l_i, l_i' \in L_{\lambda_i}$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ vektorok, hogy

$$a = l_1 + l_2 + \dots + l_n \quad \text{és} \quad a = l_1' + l_2' + \dots + l_n'.$$

Kivonva egymásból ezt a két egyenlőséget

$$0 = (l_1 - l_1') + (l_2 - l_2') + \dots + (l_n - l_n')$$

adódik, ahol a zárójelekben φ különböző sajátértékeihez tartozó vektorai állnak, melyek az előző tétel értelmében lineárisan függetlenek. A jobb oldalon lévő összeg ezek lineáris kombinációja, amely csak úgy lehet nulla – ha már az együtthatók nem nullák –, hogy maguk a vektorok nullák, azaz $l_i = l_i'$ minden $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ esetén. Az a vektor előállítása tehát egyértelmű. $\square$

9.1. Karakterisztikus polinom

Az előző részben már említettük, hogy a V-n ható φ lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorai a $(\lambda E_n - A)X = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaiként érhetők tetten, ahol A a φ egy rögzített bázisra vonatkozó mátrixa. Ez úgy is megközelíthető, hogy λ pontosan akkor sajátértéke φ-nek, ha ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy az egyenletrendszer mátrixának determinánsa nullával egyenlő, azaz $\det(\lambda E_n - A) = 0$. A $\det(\lambda E_n - A)$ determináns egy olyan n-ed fokú polinom, melyben λ a határozatlan, és a λ^n együtthatója 1, míg a konstans tag éppen $(-1)^n \det A$.

9.5. Definíció. A T test feletti $n \times n$ típusú A *mátrix karakterisztikus polinomján* az $f(x) = \det(xE_n - A)$ polinomot értjük.

Jelen állás szerint a φ lineáris transzformációhoz hozzárendelhetjük valamely mátrixának a karakterisztikus polinomját. Azonban ha változik a bázis, φ mátrixa is változik. Vajon változik-e ekkor a φ-hez rendelt karakterisztikus polinom?

9.6. Tétel. *Ugyanazon lineáris transzformáció mátrixainak karakterisztikus polinomjai egyenlők.*

Bizonyítás. Ha A és B a V-n ható φ lineáris transzformáció mátrixai, akkor a 8.15. tétel szerint $B = S^{-1}AS$, ahol S az A-ról B-re történő bázisátmenet mátrixa. Ekkor

$$\begin{aligned}\det(xE_n - B) &= \det(xE_n - S^{-1}AS) = \det(xS^{-1}E_nS - S^{-1}AS) = \\ &= \det(S^{-1}(xE_n - A)S) = \det(S^{-1})\det(xE_n - A)\det S = \\ &= \det(xE_n - A).\end{aligned}$$

□

A tétel alapján lehetőség nyílik arra, hogy egy *lineáris transzformáció karakterisztikus polinomján* a transzformáció bármely mátrixának karakterisztikus polinomját értsük. A fent elmondottak szerint egy lineáris transzformáció sajátértékei pontosan a karakterisztikus polinomjának skalártartományba eső gyökei lesznek.

9.7. Definíció. Legyen λ a V-n ható φ lineáris transzformáció egy sajátértéke. Ekkor

- λ *algebrai multiplicitása* alatt azt a legnagyobb n természetes számot értjük, melyre $(x - \lambda)^n$ osztója φ karakterisztikus polinomjának (vagyis azt, ahányszoros gyöke λ a karakterisztikus polinomnak);
- λ *geometriai multiplicitása* alatt a hozzá tartozó sajátaltér dimenzióját értjük.

Könnyű belátni, hogy bármely sajátérték algebrai multiplicitása legalább akkora, mint a geometriai multiplicitása.

9.8. Definíció. A $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$ lineáris transzformáció *spektruma* alatt φ sajátértékeinek a rendszerét értjük, mindegyiket annyiszor véve, amennyi az algebrai multiplicitása. A φ spektrumát teljesnek mondjuk, ha pontosan annyi elemből áll, mint amennyi V dimenziója.

Világos, hogy komplex számtest feletti n-dimenziós vektortér esetén minden lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja egy n-ed fokú komplex együtthatós polinom, melynek az algebra alaptételéből következően pontosan n darab komplex gyöke van. Így tehát egy komplex vektortér minden lineáris transzformációjának spektruma teljes. Valós vektortér esetén azonban megtörténhet, hogy a valós együtthatós karakterisztikus polinomnak van nem valós gyöke, és ekkor a spektrum nyilván nem teljes.

Előfordulhat tehát, hogy V bázisai között van olyan, amely φ sajátvektoraiból áll. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy egy ilyen bázisra vonatkozóan φ mátrixa olyan diagonális mátrix lesz, melynek főátlójában azok a sajátértékek vannak, melyekhez a bázist alkotó sajátvektorok tartoznak, minden más eleme pedig nulla. Mivel diagonális mátrixokkal könnyű számolni, ilyen bázis találni kívánatos cél lehet.

9.9. Tétel. *A V vektortérnek pontosan akkor létezik a $\varphi \in \mathrm{Hom}(V)$ sajátvektoraiból álló bázisa, ha φ spektruma teljes, és φ minden λ sajátértéke esetén λ algebrai és geometriai multiplicitásai egybeesnek.*

Bizonyítás. Legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ különböző sajátértékei φ-nek. Ha φ spektruma teljes, és ezen sajátértékek algebrai multiplicitásainak összege n, akkor $n = \dim V$. Továbbá, ha mindegyik sajátérték algebrai multiplicitása megegyezik a geometriai multiplicitásával, akkor

$$\dim L_{\lambda_1} + \dim L_{\lambda_2} + \cdots + \dim L_{\lambda_k} = n.$$

A 9.4. tétel szerint az $L_{\lambda_1}, L_{\lambda_2}, \dots, L_{\lambda_k}$ sajátalterek összege direkt összeg, így

$$\dim(L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_k}) = n,$$

ami csak úgy lehet, ha $L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus L_{\lambda_k} = V$. A direkt összegben szereplő sajátalterek bázisainak egyesítése nyilván V egy φ sajátvektoraiból álló bázisa.

Fordítva, tegyük fel, hogy V-nek létezik φ sajátvektoraiból álló bázisa, és a bázisvektorok a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ sajátértékekhez tartoznak. Jelölje k_i a λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektorok számát, $m(\lambda_i)$ pedig a λ_i algebrai multiplicitását. A bázisvektorok lineáris függetlensége miatt $k_i \leqslant \dim L_{\lambda_i} \leqslant m(\lambda_i)$, és

$$\begin{aligned}\dim V = k_1 + k_2 + \cdots + k_s &\leqslant \dim L_{\lambda_1} + \dim L_{\lambda_2} + \cdots + \dim L_{\lambda_s} \leqslant \\ &\leqslant m(\lambda_1) + m(\lambda_2) + \cdots + m(\lambda_s) \leqslant dimV,\end{aligned}$$

ami csak úgy teljesülhet, ha megengedő egyenlőtlenségek esetén az egyenlőség áll fenn. Innen φ spektrumának teljessége, és a $\dim L_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$ egyenlőségek minden $i \in \{1, 2, \dots, s\}$-re egyaránt következnek. □

Példaként meghatározzuk azon $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés sajátértékeit és sajátaltereit, melynek természetes bázisra vonatkozó mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

A mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} f(x) &= \det \begin{bmatrix} x-1 & -2 & -2 \\ -2 & x-1 & -2 \\ -3 & -3 & x-2 \end{bmatrix} = \\ &= (x-1)(x-1)(x-2) - 12 - 12 + 6(x-1) + 6(x-1) + 4(x-2) = \\ &= x^3 - 4x^2 - 11x - 6. \end{aligned}$$

A sajátértékek tehát az

$$x^3 - 4x^2 - 11x - 6 = 0$$

harmadfokú egyenlet valós megoldásai. Ha ezt „puszta kézzel” szeretnénk megoldani, vissza kellene nyúlnunk az algebrai egyenletekről tanult ismereteinkhez: megoldhatnánk ezt például a harmadfokú egyenletek megoldóképletének alkalmazásával, de akár próbálkozhatnánk a racionális gyökteszttel is. Most természetesen a Maple-höz fordulunk:

```
> solve(x^3-4*x^2-11*x-6=0,x);
```

$$6, -1, -1$$

ezek tehát φ sajátértékei. A hozzájuk tartozó sajátalterek meghatározásához a

$$(\lambda E_3 - A)X = 0 \tag{9.2}$$

homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldani, λ helyére 6-ot, majd -1-gyet helyettesítve. A $\lambda = 6$ esetben

$$6E_3 - A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

melynek lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & 21/5 & -14/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így a (9.2) egyenletrendszer az

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ \frac{21}{5}x_3 - \frac{14}{5}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel ekvivalens. A második egyenletből $x_3 = u$ paraméterválasztás után $x_2 = \frac{2}{3}u$, majd az első egyenletből $x_1 = \frac{2}{3}u$ adódik. A megoldástér tehát, amely egyben a $\lambda = 6$-hoz tartozó sajátaltér

$$L_6 = \left\{ \left(\frac{2}{3}u, \frac{2}{3}u, u \right) : u \in \mathbb{R} \right\},$$

amely egy egydimenziós altere $\mathbb{R}^3$-nak, és ennek egy bázisa például a $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ vektor.

Maradt a $\lambda = -1$ eset, amikor

$$(-1)E_3 - A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ennek lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így a $-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$ „lineáris egyenletrendszer” megoldása szükséges, ahonnan $x_2 = u, x_3 = v$ paraméterválasztás után $x_1 = -u - v$ adódik. A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér tehát

$$L_{-1} = \{(-u - v, u, v) : u, v \in \mathbb{R}\}.$$

Mivel

$$(-u - v, u, v) = (-u, u, 0) + (-v, 0, v) = u(-1, 1, 0) + v(-1, 0, 1),$$

megállapítható, hogy L_{-1} kétdimenziós altere az $\mathbb{R}^3$ térnek, melynek egy bázisa $(-1,1,0)$ és a $(-1,0,1)$ vektorokból álló vektorrendszer.

A fejezetben értelmezett fogalmakat használva elmondhatjuk, hogy φ spektruma $6,-1,-1$, amely teljes, továbbá a 6 sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása is 1, míg a -1 sajátértéknél mindkét multiplicitás 2. Az $E = (e_1, e_2, e_3)$ vektorrendszer, ahol

$$e_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right),\ e_2 = (-1,1,0),\ e_3 = (-1,0,1)$$

pedig $\mathbb{R}^3$ egy a φ sajátvektoraiból álló bázisa, φ E bázisra vonatkozó mátrixa pedig

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

9.2. Kapcsolódó Maple eljárások

A Maple lineáris transzformációk sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározására szolgáló eszközeit a fent megoldott példán keresztül mutatjuk be.

Adjuk meg először a lineáris transzformáció mátrixát:

```
> A:=<<1|2|2>,<2|1|2>,<3|3|2>>:
```

Ekkor a mátrix karakterisztikus polinomja a definíciónk szerint a következő:

```
> Determinant(x*IdentityMatrix(3)-A);
```

$$-6 + x^3 - 4x^2 - 11x$$

Az $xE_3 - A$ mátrix előállítása a

```
> CharacteristicMatrix(x*IdentityMatrix(3)-A);
```

paranccsal is megtörténhet, akár ezt is megadhattuk volna a `Determinant` függvény paramétereként. De maga a karakterisztikus polinom is megkapható közvetlen paranccsal:

```
> CharacteristicPolynomial(A,x);
```

$$-6 + x^3 - 4x^2 - 11x$$

A sajátértékek a karakterisztikus polinom skalártartományba eső gyökei lesznek. A gyököket a következőképpen határozhatjuk meg:

```
> solve(%,x);
```

$$6, -1, -1$$

ezek tehát a transzformációnk sajátértékei (lévén mindhárom valós szám). A sajátértékek direkt paranccsal is elérhetők:

```
> Eigenvalues(A);
```

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Itt az output egy oszlopvektor (ez paraméterben megváltoztatható), melynek elemei a sajátértékek. Megjegyezzük, hogy a Maple skalártartománynak a komplex számtestet tekinti.

Először a sajátalterek meghatározásának egy lépésenkénti lehetőségét mutatjuk meg. A `CharacteristicMatrix(A,lambda)` parancs a $\lambda E_3 - A$ mátrixot állítja elő, amely éppen a megoldandó lineáris egyenletrendszer alapmátrixa. Például, $\lambda = 6$ esetén

```
> B:=CharacteristicMatrix(A,6);
```

$$B := \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Oldjuk meg azt a homogén lineáris egyenletrendszert, melynek alapmátrixa B:

```
> LinearSolve(B,<0,0,0>,free='u');
```

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_2 \\ \frac{3}{2}u_2 \end{bmatrix}$$

A $\lambda = 6$ sajátértékhez tartozó sajátaltér tehát egy egydimenziós altere $\mathbb{R}^3$-nak, melynek egy bázisa

```
> subs(u[2]=1,%);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Játsszuk el ugyanezt a $\lambda = -1$ esetben is!

```
> C:=CharacteristicMatrix(A,-1);
```

$$C := \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

A C mátrixhoz, mint alapmátrixhoz tartozó homogén lineáris egyenletrendszer fejben is megoldható, de a gyakorlás kedvéért bízzuk a Maple-re!

```
> LinearSolve(C,<0,0,0>,free='u');
```

$$\begin{bmatrix} u_2 - u_3 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

A megoldás két paramétert is tartalmaz, ami arra utal, hogy a megoldástér, ami esetünkben a $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója 2. A sajátaltér egy bázisát megkaphatjuk például így:

```
> subs({u[2]=1,u[3]=0},%), subs({u[2]=0,u[3]=1},%);
```

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Végül a közvetlen parancsot is megmutatjuk:

```
> Eigenvectors(A);
```

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -1 & -1 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A függvény nevéből adódóan a sajátvektorok meghatározására szolgál, az output a következőképpen értelmezendő. A kapott kifejezéssorozat első eleme a sajátvektorokat tartalmazó oszlopvektor, a második helyen szereplő mátrix i-edik oszlopa pedig egy az ezen oszlopvektor i-edik komponenséhez tartozó sajátvektorként értendő. Az azonos sajátértékekhez tartozó sajátvektorok együtt az adott sajátértékhez tartozó sajátaltér egy generátorrendszerét (ha lineárisan függetlenek, akkor bázisát) adják. A $\lambda = 6$ sajátértékhez tehát a $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ sajátvektor tartozik, mely egyben a hozzá tartozó egydimenziós sajátaltér egy lehetséges bázisvektora, a $\lambda = -1$ sajátértékhez kapott $(-1, 0, 1)$ és $(-1, 1, 0)$ sajátvektorok pedig a hozzá tartozó sajátaltér egy bázisát alkotják.

9.3. Feladatok

9.1. Feladat. Igazolja, hogy komplex számtest feletti véges dimenziós vektortérben minden lineáris transzformációnak van sajátvektora!

9.2. Feladat. Adjon példát az $\mathbb{R}^3$ vektortérben olyan lineáris transzformációkra, melyeknek 1, 2, illetve 3 különböző sajátértéke van! Van-e olyan, melynek nincs sajátértéke?

9.3. Feladat. Határozza meg annak a lineáris leképezésnek a sajátértékeit és sajátaltereit, melynek a mátrixa valamely bázisra vonatkozóan

a)
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix};$$

b)
$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

c)
$$\begin{bmatrix} 2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

d)
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}!$$

9.4. Feladat. Lehetnek-e az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ és a } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixok ugyanazon lineáris transzformáció különböző bázisokra vonatkozó mátrixai?

9.5. Feladat. Adjon meg az $\mathbb{R}^3$ térben olyan bázist, melyre nézve az alábbi lineáris transzformációk mátrixa diagonális!

a) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, -3x_1 - x_2)$

b) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 + 3x_3, -2x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_3)$

10. Bilineáris formák

Ebben a fejezetben a szabadvektorok köréből ismert skaláris szorzat általánosítása fog megtörténni. A skaláris szorzás tulajdonképpen egy olyan kétváltozós függvény, ami bármely két szabadvektorhoz egy skalárt rendel, és – az 5.7. tétel szerint – mindkét változójában lineáris.

10.1. Definíció. Legyen V vektortér a T test felett. Az $L\colon V \times V \to T$ függvényt (V-n értelmezett) *bilineáris formáknak* nevezzük, ha bármely $a, b, c \in V$ és $\lambda \in T$ esetén teljesülnek az alábbiak:

1. $L(a + b, c) = L(a, c) + L(b, c)$;
2. $L(a, b + c) = L(a, b) + L(a, c)$;
3. $L(\lambda a, b) = \lambda L(a, b)$;
4. $L(a, \lambda b) = \lambda L(a, b)$.

Az 1-4. tulajdonságokat úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az L függvény mindkét változójában lineáris.

Mint már említettük, a szabadvektorok vektorterén értelmezett skaláris szorzás bilineáris forma, amely ortonormált bázisra vonatkozó koordinátákkal adott vektorok esetén azonosítható az

$$L\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad L((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

leképezéssel. Ezt a következőképpen általánosíthatjuk: tetszőleges V vektortérben rögzítsünk egy E bázist, és tetszőleges $x, y \in V$ vektorok esetén legyen

$$L(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n, \tag{10.1}$$

ahol $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ rendre az x és y vektorok E bázisra vonatkozó koordinátái. Ekkor L bilineáris forma a T^n vektortéren, melyet tekinthetünk akár V-n értelmezett skaláris szorzásnak is.

Továbbá bilineáris forma $\mathbb{R}^2$-en például az $L((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 + 2x_2y_1$ is. Ennek ellenőrzése az olvasó feladata.

A lineáris formák definíciójának közvetlen következménye, hogy

$$L(a, 0) = L(0, a) = 0,$$

és

$$L\left(\sum_{i=1}^{k} a_i, \sum_{j=1}^{l} b_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} L(a_i, b_j),$$

ahol $a, a_1, a_2, \dots a_k$ és $b_1, b_2, \dots, b_l$ mind V-beli vektorok.

Ha a függvényeknél megszokott módon definiáljuk a V-n értelmezett bilineáris formák összegét és skalárszorosát, akkor a V-n értelmezett bilineáris formák összessége vektorteret alkot T felett.

Könnyen igazolható a lineáris leképezések alaptételének bilineáris formákra vonatkozó megfelelője is:

10.2. Tétel. *Ha $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ egy bázisa V-nek, és α_{ij}, ahol $1 \leqslant i, j \leqslant n$, adott skalárok, akkor pontosan egy olyan $L\colon V \times V \to T$ bilineáris forma létezik, melyre $L(e_i, e_j) = \alpha_{ij}$ teljesül minden $1 \leqslant i, j \leqslant n$ esetén.*

10.3. Definíció. Az $L\colon V \times V \to T$ bilineáris forma $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ *bázisra vonatkozó mátrixán* azt az $A = [\alpha_{ij}]_{n\times n}$ mátrixot értjük, melyre $\alpha_{ij} = L(e_i, e_j)$ minden $1 \leqslant i, j \leqslant n$ esetén.

Az előző tétel értelmében az n dimenziós V vektortérben egy bázis rögzítése után kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn a V-n értelmezett bilineáris formák és az alaptest feletti $n \times n$ típusú mátrixok között. Mint a lineáris leképezéseknél, a bilineáris forma mátrixa is függ a bázistól, és koordinátáival adott vektorok képe megkapható mátrixszorzás segítségével.

10.4. Tétel. *Legyen az $L\colon V \times V \to T$ bilineáris forma $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ bázisra vonatkozó mátrixa $A = [\alpha_{ij}]_{n\times n}$. Ha az $x, y \in V$ vektorok koordinátái az E bázisban*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{\textit{és}} \quad (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

akkor

$$L(x, y) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j. \tag{10.2}$$

Bizonyítás. L bilineáris tulajdonsága miatt

$$L(x, y) = L\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j L(e_i, e_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \alpha_{ij} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T .$$

□

Most pedig azt nézzük meg, hogy a bázis változása hogyan hat a bilineáris forma mátrixára.

10.5. Tétel. *Legyenek $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ és $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ bázisok V-ben, és legyen S az E-ről F-re történő bázisátmenet mátrixa. Ha a φ V-n értelmezett bilineáris forma E és F bázisra vonatkozó mátrixai rendre A és B, akkor $B = S^T AS$.*

Bizonyítás. Ha $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{ij}]$ és $S = [c_{ij}]$, akkor

$$\beta_{ij} = L(f_i, f_j) = L\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} c_{lj} e_l\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ki} c_{lj} L(e_k, e_l) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ki} \alpha_{kl} c_{lj} = (S^T AS)_{ij},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. □

10.1. Szimmetrikus bilineáris formák

Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk, hogy adott L bilineáris forma esetén létezik-e olyan bázisa V-nek, melyre nézve L mátrixa diagonális.

10.6. Definíció. A V-n értelmezett L bilineáris forma *szimmetrikus*, ha bármely $a, b \in V$ esetén $L(a, b) = L(b, a)$ teljesül.

A szabadvektorok körében értelmezett skaláris szorzás az 5.7. tétel 1. pontja értelmében szimmetrikus. Világos, hogy az L bilineáris forma pontosan akkor szimmetrikus, ha (bármelyik bázisra vonatkozó) mátrixa szimmetrikus. Valóban, ha L szimmetrikus, és $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ egy bázisa V-nek, $A = [\alpha_{ij}]$ pedig L E-re vonatkozó bázisa, akkor

$$\alpha_{ij} = L(e_i, e_j) = L(e_j, e_i) = \alpha_{ji},$$

tehát $A^T = A$. Ha pedig $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, akkor a (10.2) szerint $L(x, y) = L(y, x)$.

Emlékszünk, hogy a szabadvektorok körében két vektor pontosan akkor merőleges (ortogonális) egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla. Ezáltal motiválva:

10.7. Definíció. Legyen L V-n értelmezett szimmetrikus bilineáris függvény. Azt mondjuk, hogy az $a, b \in V$ vektorok *L-ortogonálisak*, ha $L(a, b) = 0$. A V egy bázisát *L-ortogonális bázisnak* mondjuk, ha páronként ortogonális vektorokból áll.

A bilineáris forma mátrixának értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy az L szimmetrikus bilineáris forma E bázisra vonatkozó mátrixa pontosan akkor diagonális, ha E L-ortogonális bázis.

10.8. Tétel. *Bármely V-n értelmezett L szimmetrikus bilineáris formához létezik olyan bázisa V-nek, melyre nézve L mátrixa diagonális.*

Bizonyítás. Legyen az $L\colon V \times V \to T$ bilineáris forma $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ bázisra vonatkozó mátrixa $A = [\alpha_{ij}]_{n \times n}$. Először azt gondoljuk végig, hogy az E bázison elkövetett „elemi" változtatások milyen változást implikálnak az A mátrixon.

- Az e_i és e_j bázisvektorok felcserélésével az A mátrix i-edik és j-edik sorai és oszlopai is felcserélődnek.
- Az e_i vektort λ-val szorozva az A mátrix i-edik sorának és oszlopának minden eleme λ-szorosára változik. Ilymódon a α_{ii} elem λ^2-szeresére változik.
- Az e_i vektorhoz a tőle különböző e_j vektor λ-szorosát hozzáadva az A mátrix i-edik sorához a j-edik sor λ-szorosa, majd az így kapott mátrixban az i-edik oszlophoz a j-edik oszlop λ-szorosa kerül hozzáadásra. Ekkor az i-edik sor i-edik eleme $\alpha_{ii} + \lambda\alpha_{ji} + \lambda\alpha_{ij} + \lambda^2\alpha_{jj}$ lesz.

Ezek mindegyike közvetlenül következik a bilineáris forma mátrixának definíciójából.

Most a mátrixot ezekkel a „sorokon és oszlopokon egyszerre végrehajtott" elemi átalakításokkal hozzuk diagonális alakúra (ez tulajdonképpen a Gauss-Jordan-elimináció egy speciális változata), miközben azt is megfigyelhetjük, mi történik a bázissal.
Első lépésben, ha a főátló első eleme nem nulla, az első sor, illetve oszlop alkalmas konstansszorosainak a többi sorhoz, illetve oszlophoz való hozzáadásával elérjük, hogy az első sor és oszlop összes többi eleme nulla legyen. Ha az első sor első eleme nulla, de a főátlón van nullától különböző elem, sor-, illetve oszlopcsere alkalmazásával elérhető, hogy a bal felső sarokba nullától különböző eleme kerüljön. Ha

pedig a főátló minden eleme nulla, akkor keressünk az első oszlopban (vagy sorban, a szimmetria miatt mindegy) egy nemnulla elemet. Ha találtunk, mondjuk a j-edik sorban, akkor adjuk hozzá az első sorhoz a j-edik sort, majd az így kapott mátrix első oszlopához a j-edik oszlopot. A bal felső sarokba ekkor $\alpha_{j1} + \alpha_{1j} + \alpha_{jj} = = 2\alpha_{j1} \neq 0$ kerül. Egy esetet nem kezeltünk még: amikor a főátló, és az első oszlop és sor minden eleme nulla: ekkor nem csinálunk semmit.
Ezen a ponton tehát a mátrix első sora és oszlopa úgy néz ki, mint ahogy egy diagonális mátrixban kell: az első elemtől eltekintve minegyik eleme nulla. Megismételve az eljárást a második, harmadik, stb. sorra és oszlopra, végül diagonális mátrixhoz jutunk. $\square$

A fent leírt eljárást azon az $\mathbb{R}^3$ vektortéren értelmezett L bilineáris formán hajtjuk végre, melynek $\mathbb{R}^3$ valamely $E = (e_1, e_2, e_3)$ bázisára vonatkozó mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ha a diagonalizálás alábbi lépéseit Maple-ben is követni kívánjuk, definiáljuk először az A mátrixot:

```
> with(LinearAlgebra):
> A:=Matrix([[0,1,-3],[1,0,1],[-3,1,0]]):
```

1. Mivel az A mátrix bal felső sarkában, és a főátlón mindenhol 0 áll, így a második sort az első sorhoz, majd a második oszlopot az első oszlophoz hozzáadva elérjük, hogy a főátló első eleme nullától különbözzék.

   ```
   > RowOperation(A,[1,2],1,inplace = true):
   > ColumnOperation(A,[1, 2],1,inplace = true);
   ```

   $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Kivonva az első sor felét a másodikból, majd az első oszlop felét a másodikból, továbbá az első sort és oszlopot a harmadik sorhoz, illetve oszlophoz hozzáadva a első sor és oszlop nem főátlón lévő elemei mind nullák lesznek.

   ```
   > RowOperation(A,[2,1],-1/2,inplace=true):
   > ColumnOperation(A,[2,1],-1/2,inplace=true);
   ```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> RowOperation(A,[3,1],1,inplace=true):
> ColumnOperation(A,[3,1],1,inplace=true);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Most a második sor és oszlop segítségével elimináljuk a második sor és oszlop nem főátlón lévő elemeit: a második sor négyszeresét hozzáadjuk a harmadikhoz, majd ugyanezt tesszük az oszlopokkal is. Az eredmény már diagonális mátrix lesz.

```
> RowOperation(A,[3,2],4,inplace=true):
> ColumnOperation(A,[3,2],4,inplace=true);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Ha arra is kíváncsiak vagyunk, hogy L ezen mátrixa $\mathbb{R}^3$ melyik (L-ortogonális) bázisához tartozik, akkor vegyük sorra, hogy az egyes lépéseknél hogyan módosult a bázis:

1. $(e_1 + e_2, e_2, e_3)$;

2. $$\begin{aligned}(e_1 + e_2, e_2 - \frac{1}{2}(e_1 + e_2), e_3 + e_1 + e_2) &= \\ &= (e_1 + e_2, -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, e_1 + e_2 + e_3);\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}(e_1 + e_2, -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, e_1 + e_2 + e_3) &= \\ &= (e_1 + e_2, -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, e_1 + e_2 + e_3 - 2e_1 + 2e_2) = \\ &= (e_1 + e_2, -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2, -e_1 + 3e_2 + e_3),\end{aligned}$$

így ha az E bázis mondjuk a természetes bázis, akkor a kapott diagonális mátrix az

$$F = \left((1,1,0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), (-1,3,1)\right)$$

bázishoz tartozik.

Van egy másik módszer is, amely a V vektortér egy tetszőleges $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ bázisából kiindulva előállít egy $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ L-ortogonális bázist. Ez az úgynevezett *Gram-Schmidt ortogonalizáció*, amely csak akkor működik, ha az L bilineáris formára teljesül az is, hogy $a \neq 0$ estén $L(a,a) \neq 0$ (a skaláris szorzat természetesen ezt is tudja). Legyen $f_1 = e_1$, és keressük az $f_2, \ldots, f_n$ vektorokat

$$\begin{aligned}
f_2 &= e_2 + \alpha_{21} f_1, \\
f_3 &= e_3 + \alpha_{31} f_1 + \alpha_{32} f_2, \\
&\vdots \\
f_n &= e_n + \alpha_{n1} f_1 + \alpha_{n2} f_2 + \cdots + \alpha_{n,n-1} f_{n-1}
\end{aligned}$$

alakban. Az egyenlőségek átrendezése után látszik, hogy bármelyik e_j bázisvektor előáll az $f_1, f_2, \ldots, f_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, így $f_1, f_2, \ldots, f_n$ generátorrendszere, és mivel n darab vektorból áll, bázisa is V-nek. Most megválasztjuk az α_{ij} skalárokat úgy, hogy ez a bázis L-ortogonális legyen, pontosabban úgy, hogy az f_k vektor L-ortogonális legyen az $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ vektorok mindegyikére, bármely $1 < k \leqslant n$ esetén. Az f_1 megválasztáshoz nincs tennivalónk. Tegyük fel, hogy az $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ vektorokat már megtaláltuk. Ekkor az f_k vektor L-ortogonális kell legyen bármelyik f_i-re, ahol $1 \leqslant i \leqslant k$, azaz

$$\begin{aligned}
L(f_k, f_i) &= L(e_k + \alpha_{k1} f_1 + \alpha_{k2} f_2 + \cdots + \alpha_{k,k-1} f_{k-1}, f_i) = \\
&= L(e_k, f_i) + \alpha_{k1} L(f_1, f_i) + \alpha_{k2} L(f_2, f_i) + \cdots + \alpha_{k,k-1} L(f_{k-1}, f_i) = 0
\end{aligned}$$

kell, hogy teljesüljön. Az indukciós feltevés szerint $j \neq i$ esetén f_j és f_i ortogonálisak, így a fenti egyenlőség

$$L(f_k, f_i) = L(e_k, f_i) + \alpha_{ki} L(f_i, f_i) = 0$$

alakra redukálódik, ahonnan – mivel a feltevésünk szerint $L(f_i, f_i) \neq 0$ – az α_{ki}

értéke megkapható:

$$\alpha_{ki} = -\frac{L(e_k, f_i)}{L(f_i, f_i)}.$$

Tehát az $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots, \alpha_{k,k-1}$ együtthatók valóban megválaszthatók úgy, hogy az f_k vektor az $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ vektorok mindegyikére L-ortogonális legyen.

Mivel az előző példában $L((1,0,0),(1,0,0)) = 0$, így a Gram-Schmidt ortogonalizációt azon nem tudjuk szemléltetni. Tekintsük most azt az $\mathbb{R}^3$ vektortéren értelmezett L bilineáris formát, melynek $\mathbb{R}^3$ természetes bázisára vonatkozó mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ha az $x, y \in \mathbb{R}^3$ vektorok természetes bázisra vonatkozó koordinátái (x_1, x_2, x_3) és (y_1, y_2, y_3), akkor ez a bilineáris forma az

$$L(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_3y_1 + x_3y_3. \tag{10.3}$$

Látható, hogy L szimmetrikus, így van olyan bázisa $\mathbb{R}^3$-nak, melyre vonatkozó mátrixa L-nek diagonális. Most alkalmazzuk a Gram-Schmidt ortogonalizációt ennek megkeresésére. Az

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1)$$

természetes bázisból kiindulva, a konstrukció szerint

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1, \\ f_2 &= e_2 + \alpha_{21} f_1, \\ f_3 &= e_3 + \alpha_{31} f_1 + \alpha_{32} f_2, \end{aligned}$$

ahol az $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{31}$ skalárok meghatározása a cél. Az α_{21} értékét az $L(f_2, f_1) = 0$ feltételből kapjuk:

$$\begin{aligned} L(f_2, f_1) = L(e_2, f_1) + \alpha_{21} L(f_1, f_1) &= \\ = L((0,1,0),(1,0,0)) + \alpha_{21} L((1,0,0),(1,0,0)) &= \\ = 2 + \alpha_{21} = 0&, \end{aligned}$$

ahonnan $\alpha_{21} = -2$ adódik. Ekkor

$$f_2 = (0,1,0) - 2(1,0,0) = (-2,1,0).$$

Tovább folytatva,

$$f_3 = e_3 + \alpha_{31} f_1 + \alpha_{32} f_2,$$

ahonnan az $L(f_3, f_1) = 0$ feltétel miatt

$$\begin{aligned} L(f_3, f_1) &= L(e_3, f_1) + \alpha_{31} L(f_1, f_1) = \\ &= L((0,0,1),(1,0,0)) + \alpha_{31} L((1,0,0),(1,0,0)) = \\ &= 3 + \alpha_{31} = 0, \end{aligned}$$

és így $\alpha_{31} = -3$, míg az $L(f_3, f_2) = 0$ feltételből

$$\begin{aligned} L(f_3, f_2) &= L(e_3, f_2) + \alpha_{32} L(f_2, f_2) = \\ &= L((0,0,1),(-2,1,0)) + \alpha_{32} L((-2,1,0),(-2,1,0)) = \\ &= -6 - 5\alpha_{32} = 0, \end{aligned}$$

és $\alpha_{32} = -6/5$ adódik. Tehát

$$f_3 = (0,0,1) - 3(1,0,0) + \frac{6}{5}(-2,1,0) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 1\right).$$

Az L bilineáris forma (f_1, f_2, f_3) bázishoz tartozó mátrixa pedig az a $B = [\beta_{ij}]_{3\times 3}$ mátrix, melyre $\beta_{ij} = L(f_i, f_j)$. Nevezetesen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix},$$

amely már láthatóan diagonális.

Vegyük észre, hogy a feltétel teljesülését, amitől a Gram-Schmidt ortogonalizáció alkalmazhatóságát függővé tettük, nem ellenőriztük le. Baj azonban nem származott belőle, hiszen az $L(a,a) \neq 0$ feltételt csak az f_1 és f_2 vektorokra használtuk, azokra pedig teljesült. Hogy más vektoroknál mi a helyzet, az nem lényeges.

Világos, hogy egy L-ortogonális bázis bármely vektorát nemnulla skalárral megszorozva L-ortogonális bázist kapunk. Emiatt az $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ L-ortogonális bázisról az $F' = (f'_1, f'_2, \dots, f'_n)$ bázisra áttérve, ahol valós vektortér esetén

$$f'_i = \begin{cases} f_i & \text{ha } L(f_i, f_i) = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{|L(f_i,f_i)|}} & \text{egyébként,} \end{cases}$$

komplex vektortér esetén pedig

$$f'_i = \begin{cases} f_i & \text{ha } L(f_i, f_i) = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{L(f_i,f_i)}} & \text{egyébként,} \end{cases}$$

L mátrixa továbbra is diagonális lesz, de annak főátlóján már csak $\varepsilon_i = \pm 1$ vagy 0 lehetnek. Ilyen bázisban L

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i y_i$$

alakú, ahol $\varepsilon_i = \pm 1$ vagy 0, és $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, illetve $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ rendre az x és y vektorok F' bázisra vonatkozó koordinátái. Emlékezzünk, hogy az $\mathbb{R}^n$-re kiterjesztett skaláris szorzás (l. (10.1)) esetén $\varepsilon_i = 1$ minden $i \in \{1,2, \dots, n\}$ esetén. A szimmetrikus bilineáris foma mátrixának diagonális alakja azonban még így sem egyértelmű. Annyi viszont igazolható, hogy ugyanazon szimmetrikus bilineáris forma bármely mártixában a pozitív (negatív) elemek száma megegyezik. Ez a tétel *Sylvester-féle tehetetlenségi törvényként* ismert.

10.2. Kvadratikus formák

Ha a szimmetrikus bilineáris formák egy olyan megszorításáról fogunk szólni, amikor mindkét változó helyére ugyanazt a vektort írjuk. Az így származtatott függvények a geometriában, és a matematika más területein is fontos szerephez jutnak.

10.9. Definíció. Legyen $L\colon V \times V \to T$ egy szimmetrikus bilineáris forma. A $Q\colon V \to T$, $Q(x) = L(x, x)$ függvényt (V-n értelmezett, L-ből származó) *kvadratikus formának* nevezzük.

Az előző példában szereplő (10.3) szimmetrikus bilineáris formából származó kvadratikus forma

$$Q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - x_2^2 + x_3^2. \tag{10.4}$$

Ha a T test karakterisztikája nem 2, akkor kölcsönösen egyértelmű a kapcsolat a V-n értelmezett szimmetrikus bilineáris formák és kvadratikus formák között. Ehhez csak annyit kell belátni, hogy minden kvadratikus forma egyértelműen meghatározza azt a szimmetrikus bilineáris formát, amelyből származik: ha $x, y \in V$, akkor

$$\begin{aligned} Q(x+y) = L(x+y, x+y) &= L(x,x) + 2L(x,y) + L(y,y) = \\ &= Q(x) + 2L(x,y) + Q(y), \end{aligned}$$

ahonnan

$$L(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$$

adódik. Tehát a Q kvadratikus formából az L bilineáris forma visszaállítható.

A (10.2) alapján az L bilineáris formából származó Q kvadratikus forma

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

alakba írható, ahol $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ az x vektor koordinátái egy adott bázisban. A V egy L-ortogonális bázisában a fenti egyenlőség

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 \tag{10.5}$$

alakú, ahol $\alpha_i \in T$. Ezt hívjuk a Q kvadratikus forma *kanonikus alakjának.*

Folytatva az előző példát, ha (x_1, x_2, x_3) az x vektor koordinátái $\mathbb{R}^3$ természetes bázisában, akkor az L-ből származó Q kvadratikus forma (10.4) alakú, az $F = (f_1, f_2, f_3)$ bázisban pedig, melyben L mátrixa B,

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 - 5\bar{x}_2^2 - \frac{4}{5}\bar{x}_3^2,$$

ahol $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ az x vektor F bázisra vonatkozó koordinátái. Most megnézzük, hogyan kaphatók meg ezek a koordináták az eredeti (x_1, x_2, x_3) koordinátákból. Ehhez nem kell más, mint az E-ről F-re történő bázisátmenethez tartozó koordinátatranszformáció mátrixának megkeresése. Mivel E a $\mathbb{R}^3$ természetes bázisa volt, így a bázisátmenet mátrixa az a 3×3 típusú mátrix, melynek oszlopaiba rendre az

f_1, f_2, f_3 vektorok kerülnek:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A koordináta-transzformáció mátrixa a bázisátmenet mátrixának inverze:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A 8.14. tétel szerint

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2 + \frac{6}{5}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

melyből

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 - 5\bar{x}_2^2 - \frac{4}{5}\bar{x}_3^2 = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - 5\left(x_2 + \frac{6}{5}x_3\right)^2 - \frac{4}{5}x_3^2$$

következik. A négyzetre emelések, majd összevonások elvégzése után éppen a (10.4) jobb oldalán lévő kifejezést kapjuk, ami persze még nem bizonyítja a módszer helyességét, de mindenképp megnyugtató.

10.10. Definíció. A V valós vektortéren értelmezett Q nem azonosan nulla kvadratikus forma

- *pozitív definit*, ha minden $x \neq 0$ esetén $Q(x) > 0$;
- *negatív definit*, ha minden $x \neq 0$ esetén $Q(x) < 0$;
- *pozitív szemidefinit*, ha minden $x \in V$ esetén $Q(x) \geqslant 0$, és van olyan $x \neq 0$, hogy $Q(x) = 0$;
- *negatív szemidefinit*, ha minden $x \in V$ esetén $Q(x) \leqslant 0$, és van olyan $x \neq 0$, hogy $Q(x) = 0$;
- *indefinit*, ha pozitív és negatív értékeket is felvesz.

Ezen a ponton a 5.7. tétel a következőképpen fogalmazható meg: a szabadvektorok vektorterén értelmezett skaláris szorzat egy olyan szimmetrikus bilineáris forma, melyből származó kvadratikus forma pozitív definit. A (10.4) viszont indefinit.

A kvadratikus forma kanonikus alakjáról (vagy ha úgy tetszik, a származtató szimmetrikus bilineáris forma egy diagonális mátrixáról) a definitség egyszerűen leolvasható: például Q pontosan akkor pozitív definit, ha $\alpha_i > 0$ minden $i \in \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén. A többi eset megfogalmazása és belátása az olvasó feladata. A kvadratikus formák ezen jellege a hozzá tartozó szimmetrikus bilineáris forma akármelyik mátrixából eldönthető.

10.3. Kapcsolódó Maple eljárások

A Maple `LinearAlgebra` csomagja a bilineáris formák definiálását egy mátrixának megadásával várja. Legyen L az $\mathbb{R}^3$ vektortéren értelmezett bilineáris forma, melynek $\mathbb{R}^3$ valamely $E = (e_1, e_2, e_3)$ bázisára vonatkozó mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg ezt a mátrixot:

```
> with(LinearAlgebra):
> A:=Matrix([[0,1,-3],[1,0,1],[-3,1,0]]):
```

Ekkor az így definiált bilineáris forma értékét a koordinátáival adott (x, y) vektorpáron a `BilinearForm(x,y,A,conjugate=false)` paranccsal kaphatjuk meg. Az utolsó, `conjugate=false` paraméter használatával azt jelöljük ki, hogy az A mátrix egy bilineáris forma, és nem egy úgynevezett Hermite-bilineáris forma mátrixa. A Hermite-bilineáris formákat komplex számtest feletti vektortereken szokás értelmezni, az eltérés csupán a definíció 3. pontjában van: a Hermite-bilineáris formáknál $L(\lambda a, b) = \overline{\lambda} L(a, b)$ kell teljesüljön, ahol $\overline{\lambda}$ a λ komplex konjugáltját jelenti. Ennek a módosításnak köszönhetően a valós vektorterek bilineáris formáinak a későbbiekben hasznos tulajdonságait komplex vektorterek esetén is kamatoztathatjuk.
Próbáljuk ki a parancsot az általános esetre:

```
> BilinearForm(<x[1],x[2],x[3]>,<y[1],y[2],y[3]>,A,conjugate=false);
```

$$x_1(y_2 - 3y_3) + x_2(y_1 + y_3) + x_3(-3y_1 + y_2),$$

Az eredmény (10.2) alakját az **expand** parancs szolgáltatja:

```
> expand(%);
```

$$x_1y_2 - 3x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 - 3x_3y_1 + x_3y_2.$$

Akinek nem tetszik a BilinearForm függvény, az definiálhatja az A mátrixhoz tartozó bilineáris formát az

```
> L:=(X,Y)-> Transpose(X).A.Y;
```

előírással is. Ekkor a bilineáris forma (10.3) általános alakját a következőképpen kaphatjuk meg:

```
> L(<x[1],x[2],x[3]>,<y[1],y[2],y[3]>):
> expand(%);
```

A Gram-Schmidt ortogonalizáció megvalósítását a fent megoldott (10.3) példán keresztül szemléltetjük. Először megadjuk a bilineáris forma mátrixát:

```
> A:=Matrix([[1,2,3],[2,-1,0],[3,0,1]]):
```

A bilineáris forma értékét célszerűbb lesz ezen mátrix segítségével kiszámítani, így definiálunk egy függvényt, amely két koordinátákkal adott vektorhoz hozzárendeli a bilineáris forma értékét (l. (10.2)):

```
> L:=(X,Y)-> Transpose(X).A.Y;
```

Ekkor a bilineáris forma (10.3) általános alakját megkaphatjuk a következőképpen:

```
> L(<x[1],x[2],x[3]>,<y[1],y[2],y[3]>):
> expand(%);
```

$$y_1x_1 + 2y_1x_2 + 3y_1x_3 + 2y_2x_1 - y_2x_2 + 3y_3x_1 + y_3x_3$$

Definiáljuk az induló bázist, amely most $\mathbb{R}^3$ természetes bázisa:

```
> e[1]:=<1,0,0>:
> e[2]:=<0,1,0>:
> e[3]:=<0,0,1>:
```

Megadjuk a konstrukciót, az egyszerűség kedvéért az indexelt görög betűvel jelölt változókat átnevezve:

```
> f[1]:=e[1]:
> f[2]:=e[2]+a*f[1]:
> f[3]:=e[3]+b*f[1]+c*f[2]:
```

Kiszámítjuk az a, b, c változók értékét:

```
> a:=solve(L(f[2],f[1])=0,a);
```

$$a := -2$$

```
> b:=solve(L(f[3],f[1])=0,b);
```

$$b := -3$$

```
> c:=solve(L(f[3],f[2])=0,c);
```

$$c := -\frac{6}{5}$$

majd megnézhetjük az f_1, f_2, f_3 vektorokat:

```
> f[1],f[2],f[3];
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Végül a bilineáris forma (f_1, f_2, f_3) bázisra vonatkozó mátrixát a következőképpen állíthatjuk elő:

```
> B:=Matrix(3,3,(i, j)->L(f[i],f[j]));
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Az általunk alkalmazott Gram-Schmidt eljárás egy adott bázisból kiindulva előállít egy L-ortogonális bázist. Abban a speciális esetben, ha az L éppen (10.2), akkor ezt a Maple közvetlenül is tudja: a `GramScmidt` eljárás segítségével.

A kvadratikus forma származtatása Maple-ben a következőképpen tehető meg:

```
> Q:=X->L(X,X);
```

Az általános alak pedig:

```
> Q(<x[1],x[2],x[3]>):
> expand(%);
```

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - x_2^2 + x_3^2$$

Mint láttuk, a kvadratikus formából a származtató bilineáris forma visszaállítható. Érdemes ezt is a példánkon kipróbálni:

```
> 1/2*(Q(<x[1],x[2],x[3]>+<y[1],y[2],y[3]>)-Q(<x[1],x[2],x[3]>)-
  Q(<y[1],y[2],y[3]>)):
> expand(%);
```

amely éppen az L (10.3) alakját eredményezi.

A definitség eldöntésére a Maple `LinearAlgebra` csomagja az `IsDefinite` függvényét biztosítja. Ennek

```
> IsDefinite(A,'query'='positive_definite');
```

alakja a fenti példában szereplő A mátrix esetén `false` választ eredményez, tehát a hozzá tartozó bilineáris formából származó kvadratikus forma nem pozitív definit. A paraméterben a `positive_definite` helyére a `positive_semidefinite`, `negative_definite`, `negative_semidefinite` és `indefinite` kifejezések bármelyike írható, esetünkben az utolsó fog `true` választ eredményezni.

10.4. Feladatok

10.1. Feladat. Bilineáris forma-e a valós együtthatós polinomok vektorterén az a leképezés, amely az f és g polinomokhoz az $f(1) \cdot g(2)$ számot rendeli?

10.2. Feladat. Legyenek $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, T)$. Mutassa meg, hogy az $L\colon V \times V \to T$, $L(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ leképezés bilineáris forma!

10.3. Feladat. Az alábbi leképezések közül melyek bilineáris formák? Amelyik igen, írja fel a mátrixát, és a belőle származó kvadratikus formát!

a) $L\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 + y_1$

b) $L\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1$

c) $L\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1y_1 + 2x_2y_3$

d) $L\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 - 2x_3y_1^2$

10.4. Feladat. Írja fel azt a $L\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bilineáris formát, melynek természetes bázisra vonatkozó mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}!$$

Adja meg az $L((1, 2, -1), (1, -1, 2))$ és $L((1, -1, 2), (1, 2, -1))$ értékeket! Szimmetrikus-e ez a bilineáris forma? Ha igen, minden jelen esetben használható tanult módszerrel adjon meg az $\mathbb{R}^3$ térben olyan bázist, melyre nézve L mátrixa diagonális!

10.5. Feladat. Kvadratikus forma-e a $Q\colon \mathbb{R}^2 \to R$, $Q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ leképezés? Ha igen, mely szimmetrikus bilineáris formából származik?

10.6. Feladat. Hozza kanonikus alakra a

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

kvadratikus formát, majd állapítsa meg a definitségét!

Irodalomjegyzék

[1] Freud Róbert: Lineáris algebra. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996.

[2] Gaál István, Kozma László: Lineáris algebra. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2009.

[3] Kiss Emil: Bevezetés az algebrába. Typotex, 2007.

[4] Kovács Zoltán: Feladatgyűjtemény lineáris algebra gyakorlatokhoz. Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2002.