Eszterházy Károly Főiskola
Matematikai és Informatikai Intézet

TÁMOP- 4.1.2.A/1-11/1-2011-0098
„Műszaki és gazdasági szakok alapozó matematikai
ismereteinek e–learning alapú tananyag- és módszertani fejlesztése”

Praktikum

Prokajné Dr. Szilágyi Ibolya
Dr. Makó Zita
Oláhné Téglási Ilona

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638
MAGYARORSZÁG MEGÚJUL
A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.
ÚJ SZÉCHENYI TERV

Matematika praktikum I.

1. Halmazok

Feladatok

1. Feladat

Legyen $A \coloneqq \{2; 3; 4\}$, $B \coloneqq \{2; 5; 6\}$, $C \coloneqq \{5; 6; 2\}$ és $E \coloneqq \{6\}$. Döntse el, hogy a következő állítások közül melyek igazak!

a) $4 \in C$ b) $6 \in E$ c) $B = C$ d) $A = B$

Megoldás:

```
> A:={2,3,4};
```

$$A := \{2, 3, 4\} \quad \textbf{(1.1.1.1)}$$

```
> B:={2,5,6};
```

$$B := \{2, 5, 6\} \quad \textbf{(1.1.1.2)}$$

```
> C:={5,6,2};
```

$$C := \{2, 5, 6\} \quad \textbf{(1.1.1.3)}$$

```
> E:={6};
```

$$E := \{6\} \quad \textbf{(1.1.1.4)}$$

```
> member(4,C);
```

$$\mathit{false} \quad \textbf{(1.1.1.5)}$$

```
> member(6,E);
```

$$\mathit{true} \quad \textbf{(1.1.1.6)}$$

```
> evalb(B=C);
```

$$\mathit{true} \quad \textbf{(1.1.1.7)}$$

```
> evalb(A=B);
```

$$\mathit{false} \quad \textbf{(1.1.1.8)}$$

2. Feladat

Legyen $A \coloneqq \{\mathrm{a}; \mathrm{b}; \mathrm{c}\}$, $B \coloneqq \{\mathrm{a}; \mathrm{b}; \mathrm{d}\}$, $C \coloneqq \{\mathrm{e}; \mathrm{f}; \mathrm{h}\}$. Döntse el, hogy a következő állítások közül melyek igazak!

a) $a \in A$ b) $c \in B$ c) $A = B$ d) $A = C$

Megoldás:

```
> A:={a,b,c};
```

$$A := \{a, b, c\} \quad \textbf{(1.1.2.1)}$$

```
> B:={a,b,d};
```
$$B := \{a, b, d\} \tag{1.1.2.2}$$

```
> C:={e,f,h};
```
$$C := \{e, f, h\} \tag{1.1.2.3}$$

```
> member(a,A);
```
$$true \tag{1.1.2.4}$$

```
> member(c,B);
```
$$false \tag{1.1.2.5}$$

```
> evalb(A=B);
```
$$false \tag{1.1.2.6}$$

```
> evalb(A=C);
```
$$false \tag{1.1.2.7}$$

3. Feladat

Legyen $A \coloneqq \{\text{az } \dfrac{x^2-1}{x-1} = 0 \text{ egyenlet egész gyökei}\}$, $B \coloneqq \{\text{az } x-1 \geq 0 \text{ egyenlőtlenség legkisebb egész megoldása}\}$, $C \coloneqq \{\text{a } 0 = 3\,x+6 \text{ egyenlet megoldása}\}$ és $E \coloneqq \{1\}$.
Adja meg a fenti halmazok elemeit! Válassza ki közülük az egyenlő halmazokat!

Megoldás:

```
> e1:=(x^2-1)/(x-1);
```
$$e1 := \frac{x^2-1}{x-1} \tag{1.1.3.1}$$

```
> A:={solve((1.1.3.1),x)};
```
$$A := \{-1\} \tag{1.1.3.2}$$

```
> e2:=x-1;
```
$$e2 := x-1 \tag{1.1.3.3}$$

```
> B:={solve((1.1.3.3),x)};
```
$$B := \{1\} \tag{1.1.3.4}$$

```
> e3:=3*x+6;
```
$$e3 := 3\,x+6 \tag{1.1.3.5}$$

```
> C:={solve((1.1.3.5),x)};
```
$$C := \{-2\} \tag{1.1.3.6}$$

```
> E:={1};
```
$$E := \{1\} \tag{1.1.3.7}$$

```
> evalb(A=B);
```

$$false \quad (1.1.3.8)$$

```
> evalb(A=C);
```

$$false \quad (1.1.3.9)$$

```
> evalb(A=E);
```

$$false \quad (1.1.3.10)$$

```
> evalb(B=C);
```

$$false \quad (1.1.3.11)$$

```
> evalb(B=E);
```

$$true \quad (1.1.3.12)$$

```
> evalb(C=E);
```

$$false \quad (1.1.3.13)$$

```
>
```

4. Feladat

Legyen $A := \{$az $x^2 - 4 = 0$ egyenlet valós gyökei$\}$, $B := \{$az $x^2 - 8\,x + 15 = 0$ egyenlet valós megoldásai$\}$, $C := \{$az $x^2 + x - 56 = 0$ egyenlet valós megoldásai$\}$, $E := \{$az $x^4 - 15\,x^3 + 80\,x^2 - 180\,x + 144 = 0$ egyenlet megoldásai$\}$. Adja meg a halmazok elemeit!

Megoldás:

```
> A:={solve(x^2-4,x)};
```

$$A := \{-2, 2\} \quad (1.1.4.1)$$

```
> B:={solve(x^2-8*x+15,x)};
```

$$B := \{3, 5\} \quad (1.1.4.2)$$

```
> C:={solve(x^2+x-56)};
```

$$C := \{-8, 7\} \quad (1.1.4.3)$$

```
> E:={solve(x^4-15*x^3+80*x^2-180*x+144,x)};
```

$$E := \{2, 3, 4, 6\} \quad (1.1.4.4)$$

5. Feladat

Legyen $A := \{a; e; i\}$ és $B := \{a; b; c\}$. Sorolja fel a $A \cup B$; $A \cap$ B; $A \backslash B$; $B \backslash A$ műveletek eredményeként kapott halmazok elemeit!

Megoldás:

```
> A:={a,e,i};
```

$$A := \{a, e, i\} \quad (1.1.5.1)$$

```
> B:={a,b,c};
```

(1.1.5.2)

$$B := \{a, b, c\} \quad (1.1.5.2)$$

```
> A union B;
```

$$\{a, b, c, e, i\} \quad (1.1.5.3)$$

```
> A intersect B;
```

$$\{a\} \quad (1.1.5.4)$$

```
> A minus B;
```

$$\{e, i\} \quad (1.1.5.5)$$

```
> B minus A;
```

$$\{b, c\} \quad (1.1.5.6)$$

```
>
```

6. Feladat

Legyen $A := \{-4, 2, \frac{5}{3}\}$, $B := \{\text{az } x^2 + 2\,x - 8 = 0 \text{ egyenlet gyökei}\}$. Sorolja fel az $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ halmazok elemeit!

Megoldás:

```
> B:={solve(x^2+2*x-8)};
```

$$B := \{-4, 2\} \quad (1.1.6.1)$$

```
> A:={-4,2,5/3};
```

$$A := \left\{-4, 2, \frac{5}{3}\right\} \quad (1.1.6.2)$$

```
> A union B;
```

$$\left\{-4, 2, \frac{5}{3}\right\} \quad (1.1.6.3)$$

```
> A intersect B;
```

$$\{-4, 2\} \quad (1.1.6.4)$$

```
> A minus B;
```

$$\left\{\frac{5}{3}\right\} \quad (1.1.6.5)$$

```
> B minus A;
```

$$\{\,\} \quad (1.1.6.6)$$

7. Feladat

Sorolja fel az alábbi véges halmazok elemeit: $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 4\}$; $B := \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 2\}$; $C := \{1, 3, 5\}$. Határozza meg a fenti halmazok metszetét!

Megoldás:

```
> A:={solve(x^2-4=0)};
```
$$A := \{-2, 2\} \quad (1.1.7.1)$$

```
> B:={solve(abs(x)=2)};
```
$$B := \{-2, 2\} \quad (1.1.7.2)$$

```
> C:={1,3,5};
```
$$C := \{1, 3, 5\} \quad (1.1.7.3)$$

```
> (A intersect B) intersect C;
```
$$\{\,\} \quad (1.1.7.4)$$

8. Feladat

Sorolja fel az alábbi véges halmazok elemeit: $A := \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 16\}$; $B := \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 1\}$; $C := \{2, 4, 6\}$. Sorolja fel az $(A \cup B) \setminus C$, $A \cap (B \cup C)$ halmazok elemeit!!

Megoldás:

```
> A:={solve(x^2-16=0)};
```
$$A := \{-4, 4\} \quad (1.1.8.1)$$

```
> B:={solve(abs(x)=1)};
```
$$B := \{-1, 1\} \quad (1.1.8.2)$$

```
> C:={2,4,6};
```
$$C := \{2, 4, 6\} \quad (1.1.8.3)$$

```
> (A union B) minus C;
```
$$\{-4, -1, 1\} \quad (1.1.8.4)$$

```
> A intersect (B union C);
```
$$\{4\} \quad (1.1.8.5)$$

9. Feladat

Adottak az alábbi halmazok: $A := \{a \in \mathrm{Z} \mid a^2 - 4 = 0\}$, $B := \{b \in \mathrm{Z} \mid -3 < b < 3\}$, $C := \{c \in \mathbb{N} \mid c \leqslant 7\}$. Sorolja fel az A, B, C halmaz elemeit, majd adja meg az alábbi halmazokat!
a) $(A \setminus B) \setminus C$ b) $(A \cup B) \setminus C$ c) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ d) $(A \cup B) \setminus (B \cup C)$ e) $(A \cap B) \setminus C$ f) $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Megoldás:

a) $(A \setminus B) \setminus C$

```
> A:={-2,2};
```
$$A := \{-2, 2\} \quad (1.1.9.1)$$

```
> B:={-2,-1,0,1,2};
```
$$B := \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad (1.1.9.2)$$

```
> C:={1,2,3,4,5,6,7};
```
$$C := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad (1.1.9.3)$$
```
> E:=A minus B;
```
$$E := \{\ \} \quad (1.1.9.4)$$
```
> E minus C;
```
$$\{\ \} \quad (1.1.9.5)$$

b) $(A \cup B) \backslash C$

```
> F:=A union B;
```
$$F := \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad (1.1.10.1)$$
```
> F minus C;
```
$$\{-2, -1, 0\} \quad (1.1.10.2)$$
```
>
```

c) $(A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

```
> G:=A minus C;
```
$$G := \{-2\} \quad (1.1.11.1)$$
```
> E intersect G;
```
$$\{\ \} \quad (1.1.11.2)$$
```
>
```

d) $(A \cup B) \backslash (B \cup C)$

```
> H:=B union C;
```
$$H := \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad (1.1.12.1)$$
```
> F minus H;
```
$$\{\ \} \quad (1.1.12.2)$$

e) $(A \cap B) \backslash C$

```
> J:=A intersect B;
```
$$J := \{-2, 2\} \quad (1.1.13.1)$$
```
> J minus C;
```
$$\{-2\} \quad (1.1.13.2)$$

f) $(A \cap B) \backslash (A \cap C)$

```
> K:=A intersect C;
```
$$K := \{2\} \quad (1.1.14.1)$$

```
> J minus K;
```

$\{-2\}$ **(1.1.14.2)**

10. Feladat

Adottak az alábbi halmazok: $A := \{a \in \mathbb{Z} \mid a^2-9=0\}$, $B := \{b \in \mathbb{Z} \mid b^3-2b^2-3b=0\}$, $C := \{c \in \mathbb{N} \mid c \leqslant 4\}$. Sorolja fel az A, B, C halmaz elemeit, majd adja meg az alábbi halmazokat!

a) $(A \setminus B)\setminus C$ b) $(A \cup B)\setminus C$ c) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ d) $(A \cup B)\setminus(B \cup C)$ e) $(A \cap B)\setminus C$ f) $(A \cap B)\setminus(A \cap C)$

Megoldás:

a) $(A \setminus B)\setminus C$

```
> A:={-3,3};
```

$A := \{-3, 3\}$ **(1.1.15.1)**

```
> B:={solve(b^3-2*b^2-3*b)};
```

$B := \{-1, 0, 3\}$ **(1.1.15.2)**

```
> C:={1,2,3,4};
```

$C := \{1, 2, 3, 4\}$ **(1.1.15.3)**

```
> E:=A minus B;
```

$E := \{-3\}$ **(1.1.15.4)**

```
> E minus C;
```

$\{-3\}$ **(1.1.15.5)**

b) $(A \cup B)\setminus C$

```
> F:=A union B;
```

$F := \{-3, -1, 0, 3\}$ **(1.1.16.1)**

```
> F minus C;
```

$\{-3, -1, 0\}$ **(1.1.16.2)**

```
>
```

c) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

```
> G:=A minus C;
```

$G := \{-3\}$ **(1.1.17.1)**

```
> E intersect G;
```

$\{-3\}$ **(1.1.17.2)**

```
>
```

d) $(A \cup B)\setminus(B \cup C)$

```
> H:=B union C;
```

$H := \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ **(1.1.18.1)**

```
> F minus H;
```

$\{-3\}$ **(1.1.18.2)**

e) $(A\cap B)\backslash C$

```
> J:=A intersect B;
```

$$J := \{3\} \tag{1.1.19.1}$$

```
> J minus C;
```

$$\{\ \} \tag{1.1.19.2}$$

f) $(A\cap B)\backslash(A\cap C)$

```
> K:=A intersect C;
```

$$K := \{3\} \tag{1.1.20.1}$$

```
> J minus K;
```

$$\{\ \} \tag{1.1.20.2}$$

Házi feladat

1. Feladat

Legyen $A := \{1;3;5\}$, $B := \{4;8;10\}$, $C := \{3;8;10\}$ és $E := \{3,5,1\}$. Döntse el, hogy a következő állítások közül melyek igazak!
a) $4 \in B$ b) $6 \in A$ c) $B = C$ d) $A = E$

2. Feladat

Legyen $A := \{a;b;c\}$ és $B := \{c;d;e\}$. Sorolja fel a $A\cup B$; $A\cap \mathrm{B}$; $A\backslash B$; $B\backslash A$ műveletek eredményeként kapott halmazok elemeit!

3. Feladat

Adottak az alábbi halmazok: $A := \{1;2;3;4\}$, $B := \{1;4\}$, $C := \{0;1;2\}$. Adja meg az alábbi halmazokat!
a) $(A\backslash B)\backslash C$ b) $(A\cup B)\backslash C$ c) $(A\cup B)\cap(A\backslash C)$ d) $(A\cap B)\backslash(B\cup C)$ e) $(A\cap B)\cup C$ f) $(A\cap B)\backslash(A\cup C)$

2. Elemi algebrai azonosságok

Feladatok

1. Feladat

Végezze el a kijelölt műveleteket, rendezze a polinomot x növekvő hatványai szerint, majd alakítsa szorzattá:
$p := (1-2x)^3-(2x-1)^2$

$$(1-2x)^3-(2x-1)^2 \tag{2.1.1}$$

Megoldás:

> $expand(p)$

$$-2x+8x^2-8x^3 \quad \textbf{(2.1.1.1)}$$

> $factor(p)$

$$-2x(2x-1)^2 \quad \textbf{(2.1.1.2)}$$

> $restart$

2. Feladat

Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket:

$a := (x+y)^2-x-y$

$$(x+y)^2-x-y \quad \textbf{(2.1.2)}$$

$b := x^4-x$

$$x^4-x \quad \textbf{(2.1.3)}$$

$c := x^3-y^3-x+y$

$$x^3-y^3-x+y \quad \textbf{(2.1.4)}$$

Megoldás:

> $factor(a)$

$$(x+y)(x+y-1) \quad \textbf{(2.1.2.1)}$$

> $factor(b)$

$$x(x-1)(x^2+x+1) \quad \textbf{(2.1.2.2)}$$

> $factor(c)$

$$(x-y)(x^2+xy-1+y^2) \quad \textbf{(2.1.2.3)}$$

3. Feladat

Adja meg az alábbi két polinom összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát a lehető legegyszerűbb alakban:

$A := 2x^3+7x^2+3x$

$$2x^3+7x^2+3x \quad \textbf{(2.1.5)}$$

$B := x^2+3x$

$$x^2+3x \quad \textbf{(2.1.6)}$$

Megoldás:

> $A+B$

$$2x^3+8x^2+6x \quad \textbf{(2.1.3.1)}$$

> $A-B$

$$2x^3+6x^2 \quad \textbf{(2.1.3.2)}$$

> $A \cdot B$

$$(2x^3+7x^2+3x)(x^2+3x) \quad \textbf{(2.1.3.3)}$$

> $expand(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B})$

$$2x^5+13x^4+24x^3+9x^2 \quad \textbf{(2.1.3.4)}$$

> $\frac{A}{B}$

$$\frac{2x^3+7x^2+3x}{x^2+3x} \quad (2.1.3.5)$$

> $simplify\left(\frac{A}{B}\right)$

$$2x+1 \quad (2.1.3.6)$$

4. Feladat

Határozza meg a következő algebrai törtek összegét és hányadosát!

$C1 := \frac{(1-x)}{x+1}$

$$\frac{1-x}{x+1} \quad (2.1.7)$$

$C2 := \frac{(x-x^2)}{x+1}$

$$\frac{x-x^2}{x+1} \quad (2.1.8)$$

Megoldás:

> $C1 + C2$

$$\frac{1-x}{x+1}+\frac{x-x^2}{x+1} \quad (2.1.4.1)$$

> $simplify(C1 + C2)$

$$1-x \quad (2.1.4.2)$$

> $\frac{C1}{C2}$

$$\frac{1-x}{x-x^2} \quad (2.1.4.3)$$

> $factor\left(\frac{C1}{C2}\right)$

$$\frac{1}{x} \quad (2.1.4.4)$$

>

5. Feladat

Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$1-x+x^2-\frac{x^3}{1+x}$

$$1-x+x^2-\frac{x^3}{1+x} \quad (2.1.9)$$

Megoldás:

> $simplify\left(1-x+x^2-\frac{x^3}{1+x}\right)$

(2.1.5.1)

$$\frac{1}{1+x} \tag{2.1.5.1}$$

6. Feladat

Alakítsa szorzattá a következő algebrai tört számlálóját és nevezőjét, majd egyszerűsítse a törtet!

$q := \dfrac{(x^2+4x-32)}{x^2-11x+28}$

$$\frac{x^2+4x-32}{x^2-11x+28} \tag{2.1.10}$$

Megoldás:

> *numer*(q)

$$x^2+4x-32 \tag{2.1.6.1}$$

> *factor*$(x^2+4x-32)$

$$(x+8)\,(x-4) \tag{2.1.6.2}$$

> *denom*(q)

$$x^2-11x+28 \tag{2.1.6.3}$$

> *factor*$(x^2-11x+28)$

$$(x-4)\,(x-7) \tag{2.1.6.4}$$

> *simplify*(q)

$$\frac{x+8}{x-7} \tag{2.1.6.5}$$

7. Feladat

Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét, ha x=-11/3!

$r := \left(\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{2x}{3x-6}+\dfrac{8x}{x^2-4}\right)\left(\dfrac{(x-2)}{x^2-4x}\right)$

$$\frac{\left(\frac{2x}{x+2}-\frac{2x}{3x-6}+\frac{8x}{x^2-4}\right)(x-2)}{x^2-4x} \tag{2.1.11}$$

Megoldás:

> simplify$\left(\left(\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{2x}{3x-6}+\dfrac{8x}{x^2-4}\right)\right)$

$$\frac{4}{3}\,\frac{x}{x-2} \tag{2.1.7.1}$$

> *simplify*$\left(\dfrac{4}{3}\,\dfrac{x}{x-2}\,(x-2)\right)$

$$\frac{4}{3}\,x \tag{2.1.7.2}$$

> *factor*(x^2-4x)

$$x\,(x-4) \tag{2.1.7.3}$$

> $\dfrac{\left(\frac{4}{3}\,x\right)}{x\,(x-4)}$

$$\frac{4}{3\,(x-4)} \tag{2.1.7.4}$$

> $eval\left(\dfrac{4}{3(x-4)}, x=-\dfrac{11}{3}\right)$

$$-\frac{4}{23} \tag{2.1.7.5}$$

8. Feladat

Mutassa meg, hogy nincs olyan természetes számokból álló szomszédos számhármas, ahol a középső szám reciprokának kétszerese egyenlő a két szélső szám reciprokának összegével!

Megoldás:

A három szomszédos természetes szám legyen x-1, x és x+1. A két szélső szám reciproka

$r1 := \dfrac{1}{\mathrm{x}-1}$

$$\frac{1}{x-1} \tag{2.1.8.1}$$

$r2 := \dfrac{1}{\mathrm{x}+1}$

$$\frac{1}{x+1} \tag{2.1.8.2}$$

> $r1+r2$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1} \tag{2.1.8.3}$$

> $simplify\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$

$$\frac{2\,x}{x^2-1} \tag{2.1.8.4}$$

> $solve\left(\dfrac{2\,x}{x^2-1} > \dfrac{2}{x}\right)$

$$RealRange(Open(-1), Open(0)), RealRange(Open(1), \infty) \tag{2.1.8.5}$$

> $solve\left(\dfrac{2\,x}{x^2-1} < \dfrac{2}{x}\right)$

$$RealRange(-\infty, Open(-1)), RealRange(Open(0), Open(1)) \tag{2.1.8.6}$$

9. Feladat

Adja meg a következő kifejezést polinom alakban, és határozza meg az együtthatók összegét!

$(2\,x+1)^7$

Megoldás:

> $expand\left((2\,x+1)^7\right)$

$$128\,x^7+448\,x^6+672\,x^5+560\,x^4+280\,x^3+84\,x^2+14\,x+1 \tag{2.1.9.1}$$

> $eval(128x^7+448x^6+672x^5+560x^4+280x^3+84x^2+14x+1, x=1)$

$$2187 \quad (2.1.9.2)$$

10. Feladat

Alakítsa szorzattá a következő polinomot, és határozza meg a t(x)=0 egyenlet gyökeit!

$t(x) := x^4-20x^3+140x^2-400x+384$

Megoldás:

> $t := x^4-20x^3+140x^2-400x+384$

$$t := x^4-20x^3+140x^2-400x+384 \quad (2.1.10.1)$$

> $factor(t)$

$$(x-6)(x-2)(x-8)(x-4) \quad (2.1.10.2)$$

> $fsolve(t=0)$

$$2., 4., 6., 8. \quad (2.1.10.3)$$

Házi feladat

1. Feladat

Egy derékszögű háromszög befogóinak nagysága $\sqrt{2n+1}$ és $\sqrt{2n(2n+1)}$, ahol n természetes szám. Mutassa meg, hogy a háromszög átfogója mindig természetes szám lesz! Mekkorák a háromszög oldalai, ha n=4?

2. Feladat

Az m paraméter milyen értékei mellett lehet a $2x^2+x+m$ polinomból $(x-3)$-at kiemelni?

3. Feladat

Egyszerűsítse a következő algebrai törtet: $\dfrac{(x^3-x^2-x+1)}{x^4-2x^2+1}$

3. Hatványozás, logaritmus

Feladatok

1. Feladat

Négy darab 2-es számjegyből, műveleti és egyéb matematikai jelek nélkül nyolcféle különböző számot lehet előállítani. Melyek ezek a számok? Tegye a nyolc számot növekvő sorrendbe!

Megoldás:

A nyolc szám: 2222, 222^2, 22^{22}, 22^{2^2}, 2^{222}, 2^{22^2}, $2^{2^{22}}$, $2^{2^{2^2}}$

> $eval(222^2)$

$$49284 \quad (3.1.1.1)$$

> $eval\left(22^{22}\right)$

$$341427877364219557396646723584 \quad \textbf{(3.1.1.2)}$$

> $eval\left(22^{2^2}\right)$

$$234256 \quad \textbf{(3.1.1.3)}$$

> $eval\left(2^{222}\right)$

673998666678765994866675377175490766840928610563514312027590256230\
04 **(3.1.1.4)**

> $eval\left(2^{22^2}\right)$

4994797680505587570210555676690660891977570282639538413746511354\
0059478211162499219248976490158715385572308979425059663271676 1\
0868612564900642816 **(3.1.1.5)**

> $eval\left(2^{2^{22}}\right)$

...Integer too large for display... **(3.1.1.6)**

> $with(numtheory) : length\left(2^{2^{22}}\right)$

$$1262612 \quad \textbf{(3.1.1.7)}$$

> **Tehát $2^{2^{22}}$ egy 1262612-jegyű szám! Ez több, mint ahány atom a csillagászok szerint az egész univerzumban lehet!**

> $eval\left(2^{2^{2^2}}\right)$

$$65536 \quad \textbf{(3.1.1.8)}$$

> **A számok növekvő sorrendben:** 2222, 222^2, $2^{2^{2^2}}$, 22^{2^2}, 22^{22}, 2^{222}, 2^{22^2}, $2^{2^{22}}$

2. Feladat

Hatványozás azonosságainak segítségével hozza a lehető legegyszerűbb alakra a következő számot: $\left(\dfrac{\dfrac{20^4\cdot 3^5}{(-5)^4}}{\dfrac{2^7\cdot 21^6}{7^6}}\right)^{-2}$.

Megoldás:

> $with(numtheory) : ifactor\left(20^4\cdot 3^5\right)$

$$(2)^8\,(3)^5\,(5)^4 \quad \textbf{(3.1.2.1)}$$

> $ifactor\left(\dfrac{20^4\cdot 3^5}{(-5)^4}\right)$

$$(2)^8\,(3)^5 \quad \textbf{(3.1.2.2)}$$

> $ifactor\left(2^7\cdot 21^6\right)$

$$(2)^7\,(3)^6\,(7)^6 \quad \textbf{(3.1.2.3)}$$

> $ifactor\left(\frac{2^7 \cdot 21^6}{7^6}\right)$

$$(2)^7\,(3)^6 \qquad \textbf{(3.1.2.4)}$$

> $\frac{((2)^8\,(3)^5)}{(2)^7\,(3)^6}$

$$\frac{2}{3} \qquad \textbf{(3.1.2.5)}$$

3. Feladat

A Föld felszínének mintegy kétharmadát tengerek és óceánok borítják, melyek átlagos mélysége 3, 8 *km*. Becsülje meg, hogy hány m^3 életterük van a tengeri élőlényeknek, ha a Föld sugarát 6370 *km*-nek vesszük, és a Földet közel gömb alakúnak tekintjük!

Megoldás:

A gömböv térfogata közelítőleg: $V := \frac{4(R^3 - r^3)\pi}{3}$, ha $R - r \gg 0$.

> $V := \frac{4(R^3 - r^3)\pi}{3}$

$$V := \frac{1}{3}\left(4R^3 - 4r^3\right)\pi \qquad \textbf{(3.1.3.1)}$$

> R := 6370

$$R := 6370 \qquad \textbf{(3.1.3.2)}$$

> $r := 6370 - 3.8$

$$r := 6366.2 \qquad \textbf{(3.1.3.3)}$$

> $eval\left(\frac{2}{3}V\right)$

$$4.109340000\ 10^8\,\pi \qquad \textbf{(3.1.3.4)}$$

> $simplify(4.109340000\ 10^8\,\pi)$

$$1.290987236\ 10^9 \qquad \textbf{(3.1.3.5)}$$

Tehát az óceánok térfogata közelítőleg $1.290987236\ 10^9$ km^3, ami m^3-ben:

> $1.290987236\ 10^9 \cdot 10^9$

$$1.290987236\ 10^{18} \qquad \textbf{(3.1.3.6)}$$

4. Feladat

Fejezze ki az $A = B \cdot c^{-kt}$ képletből a k változót, ha A, B, c pozitív számok! Számítsa ki k értékét, ha $A := 2 \cdot 10^{23}$, $B := 6 \cdot 10^{23}$, $c := 2,718$ és $t := 5700$!

Megoldás:

> $A := 2 \cdot 10^{23}$

$$A := 200000000000000000000000 \qquad \textbf{(3.1.4.1)}$$

> $B := 6 \cdot 10^{23}$

$$B := 600000000000000000000000 \qquad \textbf{(3.1.4.2)}$$

> $c := 2.718$

$$c := 2.718 \tag{3.1.4.3}$$

> $t := 5700$

$$t := 5700 \tag{3.1.4.4}$$

> $k := \dfrac{\ln(B) - \ln(A)}{t \cdot \ln(c)}$

$$k := 0.0001754567886 \ln(6000000000000000000000000) - 0.0001754567886 \ln(2000000000000000000000000) \tag{3.1.4.5}$$

> $\mathit{simplify}(k)$

$$0.000192758984 \tag{3.1.4.6}$$

5. Feladat

Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést, és állapítsa meg, hogy racionális, vagy irracionális szám-e: $\sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{\dfrac{(2+\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}}$!

Megoldás:

> $\mathit{simplify}\left(\sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{\dfrac{(2+\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}}}\right)$

$$2\sqrt{2} \tag{3.1.5.1}$$

> A szám irracionális.

6. Feladat

Mennyi a pontos értéke a következő számnak: $\left(\sqrt{16 + 2\sqrt{55}} - \sqrt{16 - \sqrt{220}}\right)^2$?

Megoldás:

> $\mathit{simplify}\left(\sqrt{16 + 2\sqrt{55}}\right)$

$$\sqrt{5} + \sqrt{11} \tag{3.1.6.1}$$

> $\mathit{simplify}\left(\sqrt{16 - \sqrt{220}}\right)$

$$\sqrt{11} - \sqrt{5} \tag{3.1.6.2}$$

> $\mathit{simplify}\left(\left((\sqrt{5} + \sqrt{11}) - (\sqrt{11} - \sqrt{5})\right)^2\right)$

$$20 \tag{3.1.6.3}$$

7. Feladat

Mennyi a pontos értéke a következő számnak:

$1 + \dfrac{1}{2}\log_5(175) + \log_5(15) + \log_5(\sqrt{28}) - \log_5(42)$?

Megoldás:

> $\mathit{simplify}\left(\dfrac{5 \cdot \sqrt{175} \cdot 15 \cdot \sqrt{28}}{42}\right)$

$$125 \tag{3.1.7.1}$$

> $simplify(\log_5(125))$

$$3 \qquad (3.1.7.2)$$

8. Feladat

A régészeti leletek radiokarbon kormeghatározásához használt egyik összefüggés: $A_t = A_0 \cdot 2^{\frac{t}{T}}$, ahol A_0 *és* A_t méréssel meghatározható értékek, T a 14-es szénizotóp felezési ideje, 5570 év, t pedig a vizsgált anyag életkora. Ha egy leleten elvégzett mérések alapján $A_t = 3 \cdot A_0$, akkor milyen idős lehet a lelet?

Megoldás:

Legyen $A_0 = 1$, ez a feladat megoldását nem befolyásolja. Így $3 = 2^{\frac{t}{T}}$ egyenletet kell megoldanunk t-re! Fejezzük ki ebből t-t:

> $solve\left(3 = 2^{\frac{x}{5570}}\right)$

$$\frac{5570 \ln(3)}{\ln(2)} \qquad (3.1.8.1)$$

> $simplify\left(\frac{5570 \ln(3)}{\ln(2)}\right)$

$$\frac{5570 \ln(3)}{\ln(2)} \qquad (3.1.8.2)$$

A lelet 8828 éves.

9. Feladat

Egy gáz adiatikus (hőcsere nélküli) állapotváltozását a $\frac{p^{\kappa-1}}{T^{\kappa}} = \mathit{áll.}$ egyenlet írja le, ahol p a gáz nyomása, T a hőmérséklete, κ pedig a gáz anyagi minőségére jellemző állandó (kompresszivitás). Mekkora a κ értéke héliumra, ha annak egy adiabatikus folyamatban 69%-kal nő a nyomása, miközben 23%-kal nő a hőmérséklete?

Megoldás:

A megoldandó egyenlet: $\frac{p^{\kappa-1}}{T^{\kappa}} = \frac{(1.69 \cdot p)^{\kappa-1}}{(1.23 \cdot T)^{\kappa}}$, ahol p és T adott értékek. Egyszerűsítés után kapjuk, hogy $1 = \frac{1.69^{\kappa-1}}{1.23^{\kappa}}$

> $\kappa := solve(1.23^x = 1.69^{x-1})$

$$\kappa := 1.651573223 \qquad (3.1.9.1)$$

A hélium kompresszivitásának értéke tehát $\kappa := 1.651573223$

10. Feladat

Fejezze ki b segítségével $\log_3(\sqrt[3]{24})$-et, ha $b := \log_3(2)$!

Megoldás:

> $b := \log_3(2)$

$$b := \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \qquad (3.1.10.1)$$

> $simplify\left(\log_3\left(\sqrt[3]{24}\right)\right)$

$$\frac{1}{3}\,\frac{3\ln(2)+\ln(3)}{\ln(3)} \qquad (3.1.10.2)$$

> $expand\left(\frac{1}{3}\,\frac{3\ln(2)+\ln(3)}{\ln(3)}\right)$

$$\frac{\ln(2)}{\ln(3)}+\frac{1}{3} \qquad (3.1.10.3)$$

Tehát a kifejezés: $b+\frac{1}{3}$

Házi feladat

1. Feladat

Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\ !$$

2. Feladat

Igazolja a következő egyenlőtlenséget: $\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8+\log_8 5>1$!

3. Feladat

A fényerősség folyadékban a következő képlet szerint változik: $I(d)=I_0\cdot a^d$, ahol I_0 a fényerősség a folyadékban belépésnél, *d* a fény folyadékban megtett útja, *I(d)* a fényerősség *d* út megtétele után, *a* pedig a folyadék anyagi minőségére jellemző fényelnyelési tényező. Milyen út megtétele után csökken a fényerősség az eredeti érték felére, tizedére, illetve 1%-ára abban a folyadékban, amelynek fényelnyelési tényezője 0,8?

4. Középértékek, nevezetes egyenlőtlenségek

Feladatok

1. Feladat

Két pozitív szám mértani közepe 6-tal nagyobb a kisebb számnál, és 1,5-del kisebb a két szám számtani közepénél. Melyik ez a két szám?

Megoldás:

Legyen a két szám x és y, legyen $x>y$. A feltételeknek megfelelő egyenletek ekkor:

I. $\sqrt{x\cdot y}=y+6$ és II. $\sqrt{x\cdot y}=\frac{(x+y)}{2}-1.5$

```
> polynomials:={sqrt(xy)=y+6, sqrt(xy)=(x+y)/2+1.5}:
> fsolve( polynomials );
```

$$\{x=27.00000000,\ y=12.00000000\} \qquad (4.1.1.1)$$

>

A keresett két szám a 27 és a 12.

> *restart*

2. Feladat

Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $x, y > 0$ esetén $\frac{lgx + lgy}{2} \le lg\left(\frac{x+y}{2}\right)$!

Megoldás:

A logaritmus azonosságait alkalmazva: $\frac{lgx + lgy}{2} = \frac{lg(xy)}{2} = lg(xy)^{\frac{1}{2}} = lg\sqrt{xy}$.

Az egyenlőtlenség tehát $lg\sqrt{xy} \le lg\left(\frac{x+y}{2}\right)$ alakra hozható. Mivel az $x \mapsto lg(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő, az egyenlőtlenség két oldaláról elhagyható a lg jel, így kapjuk, hogy $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, ami a számtani és mértani közép nevezetes egyenlőtlensége, minden pozitív számra igaz.

3. Feladat

Mutassuk meg, hogy ha két pozitív szám szorzata nagyobb az összegüknél, akkor a két szám összege nagyobb 4-nél!

Megoldás:

A következő összefüggést kell bizonyítanunk: $a, b > 0$ esetén, ha $a \cdot b > a + b$, akkor $a + b > 4$.
Alkalmazzuk a harmonikus és számtani középre vonatkozó egyenlőtlenséget:
$\frac{a+b}{2} \ge \frac{2\,ab}{a+b}$. Mivel $a \cdot b > a + b$, ezért $\frac{ab}{a+b} > 1$.
Tehát: $\frac{a+b}{2} \ge \frac{2\,ab}{a+b} > 2 \quad \Rightarrow \quad a + b > 4$.

4. Feladat

Egy briliáns értéke az m tömegének négyzetével arányos: $E(m) := 2\,m^2$. Hogyan változik a briliáns értéke, ha két részre vágjuk? Milyen arányú vágás esetén lesz a legnagyobb az értékváltozás?

Megoldás:

Legyen az eredeti briliáns tömege egységnyi, azaz $m = 1$ (ennek nagysága nem befolyásolja a két rész arányát.A vágással kapott két rész tömegei legyenek x és $1 - x$. Ekkor a briliáns értéke: $\mathrm{E}(x) + E(1-x) = 2\,x^2 + 2(1-x)^2$

> $expand(2\,x^2 + 2(1-x)^2)$

$$4\,x^2 + 2 - 4\,x \qquad \textbf{(4.1.4.1)}$$

Az eltérés az eredeti briliáns értékétől: $2 - (4\,x^2 + 2 - 4\,x)$

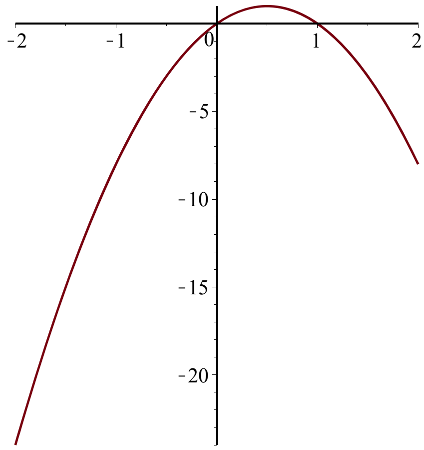
$$-4\,x^2 + 4\,x \qquad \textbf{(4.1.4.2)}$$

```
> with(plottools):
> with(plots):
```

> $f(x) := -4\,x^2 + 4\,x$

$$f := x \rightarrow -4\,x^2 + 4\,x \qquad \textbf{(4.1.4.3)}$$

> plot(f, -2 ..2)



> $diff(-4\,x^2 + 4\,x, x)$

$$-8\,x + 4 \qquad \textbf{(4.1.4.4)}$$

> $solve(-8\,x + 4 = 0)$

$$\frac{1}{2} \qquad \textbf{(4.1.4.5)}$$

A különbség függvény maximuma tehát $x = \frac{1}{2}$-nél van, tehát a legnagyobb értékvesztést akkor kapjuk, ha két egyenlő részre vágjuk a briliánst.

5. Feladat

Igazoljuk, hogy minden 1-nél nagyobb n természetes számra: $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Megoldás:

Legyen n páros természetes szám. Ekkor definíció szerint $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... (n-1) \cdot n = (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot ... < \left(\frac{1+n}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2+n-1}{2}\right)^2 \cdot$ ..., a számtani és mértani közép közötti egynlőtlenség miatt (=-ség csak abban az esetben lehet, ha mindegyik szám egyenlő, de ez esetünkben nem teljesül). A jobb oldalon $\frac{n}{2}$ egyforma szám szorzata van, azaz: $\left(\frac{1+n}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2+n-1}{2}\right)^2 \cdot ... = \left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Tehát

$$n! < \left(\frac{(n+1)}{2}\right)^n.$$

Ha n páratlan természetes szám, akkor

$$1\cdot 2\cdot \ldots (n-1)\cdot n = (1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{2} < \left(\frac{1+n}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{2+n-1}{2}\right)^2\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{2}$$

, vagyis van $\frac{n-1}{2}$ "párunk", a középső szám pedig egyedül van. Tehát az egyenlőtlenség jobb oldalán $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{2\cdot(n-1)}{2}+1} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ áll, azaz páratlan sok számra is igaz az egyenlőtlenség.

6. Feladat

Egy túrista két órán keresztül $\frac{4\ km}{h}$ sebességgel gyalogolt, majd a közeledő sötétedést észrevéve a következő két órában $\frac{6\ km}{h}$ sebességgel haladt. Mekkora utat tett meg összesen? Mekkora volt az átlagsebessége? Egy másik alkalommal 10 km-t $\frac{4\ km}{h}$ sebességgel tett meg, a következő 10 km-t pedig $\frac{6\ km}{h}$ sebességgel. Mennyi ideig tartott a túra? Most mennyi volt az átlagsebessége?

Megoldás:

> $s1 := 4\cdot 2$

$$s1 := 8 \tag{4.1.6.1}$$

> $s2 := 6\cdot 2$

$$s2 := 12 \tag{4.1.6.2}$$

> $v1 := \frac{(s1+s2)}{4}$

$$v1 := 5 \tag{4.1.6.3}$$

Első esetben az átlagsebesség: 5 km/h

> $t1 := \frac{10}{4}$

$$t1 := \frac{5}{2} \tag{4.1.6.4}$$

> $t2 := \frac{10}{6}$

$$t2 := \frac{5}{3} \tag{4.1.6.5}$$

> $v2 := \frac{20}{t1+t2}$

$$v2 := \frac{24}{5} \tag{4.1.6.6}$$

Második eseetben az átlagsebesség: 4.8 km/h.

7. Feladat

Van két díszgyertyánk, mindkettő szabályos négyoldalú gúla alakú. A magasságuk egyforma, az alapjuk azonban különböző: az egyiké 9 cm oldalú, a másiké 6 cm oldalú négyzet. A két gyertya egybeolvasztásával egy szintén négyzetalapú gúla alakú gyertyát szeretnénk készíteni, amelynek magasága az eredeti gúlák magasságának kétszerese. Igazolja, hogy az új gyertya alapterülete a két eredeti gyertya alapterületének számtani közepe!

Megoldás:

Legyen a két eredeti gyertya magassága y, az új gyertya alapéle pedig x. Ekkor:

> $V1 := \frac{6^2 \cdot y}{3}$

$$V1 := 12\,y \qquad \textbf{(4.1.7.1)}$$

> $V2 := \frac{9^2 \cdot y}{3}$

$$V2 := 27\,y \qquad \textbf{(4.1.7.2)}$$

> $V := V1 + V2$

$$V := 39\,y \qquad \textbf{(4.1.7.3)}$$

>

Az új gyertya térfogata: $V = \frac{2\,yx^2}{3}$, ami egyenlő a két eredeti gyertya térfogatának összegével. Ebből y-nal egyszerűsítve kapjuk a $39 = \frac{2\,x^2}{3}$ egyenletet.

> $solve\left(39 = \frac{2\,x^2}{3}\right)$

$$-\frac{3}{2}\sqrt{26},\ \frac{3}{2}\sqrt{26} \qquad \textbf{(4.1.7.4)}$$

> $simplify\left(\left(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{26}\right)^2\right)$

$$\frac{117}{2} \qquad \textbf{(4.1.7.5)}$$

Az eredeti gyertyák alapterületeinek számtani közepe pedig:

> $\frac{(6^2 + 9^2)}{2}$

$$\frac{117}{2} \qquad \textbf{(4.1.7.6)}$$

8. Feladat

Mely számot írhatjuk az x helyébe, hogy az $|x - 1.2| + |x - 2.1| + |x - 3.6|$ összeg a lehető legkisebb legyen? Mennyi ez a legkisebb érték?

Megoldás:

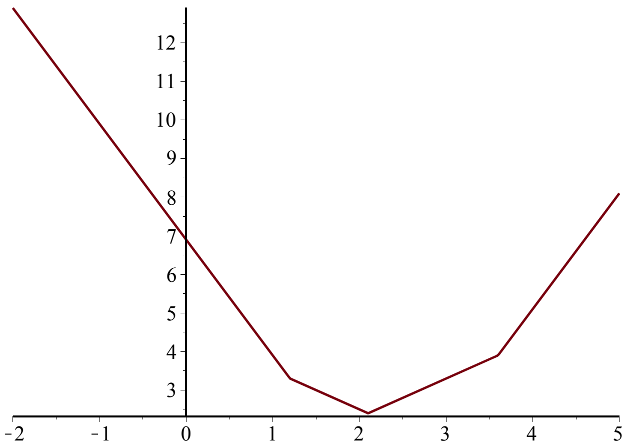
Ábrázolva a kifejezést, mint függvényt :

```
> with(plottools):
> with(plots):
```

> $f(x) := |x - 1.2| + |x - 2.1| + |x - 3.6|$

$$f := x \rightarrow |x - 1.2| + |x - 2.1| + |x - 3.6| \qquad \textbf{(4.1.8.1)}$$

> plot(f, -2 ..5)



A grafikon alapján a függvény minimuma $x = 2.1$-nél van. Ekkor a kifejezés értéke:

> $eval(|x - 1.2| + |x - 2.1| + |x - 3.6|, x = 2.1)$

$$2.4 \tag{4.1.8.2}$$

9. Feladat

Három különböző pozitív egész szám szorzata 24, közülük az egyik a másik kettő számtani közepe. Melyek ezek a számok?

Megoldás:

Legyen a három szám x, y,és z, legyen $x \le y \le z$. Ekkor a megoldandó egyenletek:
$x \cdot y \cdot z = 24$ és $y = \dfrac{x+z}{2}$.
A második egyenletből kifejezve y-t, és behelyettesítve az elsőbe kapjuk, hogy
$x \cdot z \cdot (x+z) = 48$

$$x\,z\,(x+z) = 48 \tag{4.1.9.1}$$

> $solve(\ x\,z\,(x+z) = 48)$

$$z \tag{4.1.9.2}$$

$$\left\{x = \frac{1}{2}\,\frac{-z^2 + \sqrt{z^4 + 192\,z}}{z},\ z = z\right\},\ \left\{x = -\frac{1}{2}\,\frac{z^2 + \sqrt{z^4 + 192\,z}}{z},\ z = z\right\} \tag{4.1.9.3}$$

Vizsgáljuk meg az egész megoldásokat! A 48 prímtényezős felbontása:

> $ifactor(48)$

$$(2)^4\,(3) \tag{4.1.9.4}$$

A 48 osztói ezért: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, és 48. Ezek közül kell x és z egész értékeit megtalálnunk (adjuk z értékének sorra az osztókat, és nézzük, mely érték(ek) mellett lesz x egész), melyek a feltételeknek megfelelnek. .

> $x1 := (1/2) * (-z\text{^}2 + \mathrm{sqrt}(z\text{^}4 + 192 * z))/z$

$$x1 := \frac{1}{2}\,\frac{-z^2+\sqrt{z^4+192\,z}}{z} \quad (4.1.9.5)$$

eval$(x1, z=4)$

$$-2+\frac{1}{8}\sqrt{1024} \quad (4.1.9.6)$$

simplify$\left(-2+\frac{1}{8}\sqrt{1024}\right)$

$$2 \quad (4.1.9.7)$$

A keresett három szám $x=2$, $z=4$, $y=3$. ami a feltételeknek megfelel.

> *restart*

10. Feladat

Adott kerületű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe? Válaszát indokolja!

Megoldás:

A téglalap oldalai legyenek x és y. Ekkor a téglalap kerülete $k := 2(x+y)$. A téglalap területe $t := xy$. Fejezzük ki a kerületből az y oldalt:
$y=\frac{k}{2}-x$. Ezt behelyettesítve kapjuk, hogy $t=x\left(\frac{k}{2}-x\right)$.Ennek keressük a maximumát.
Alkalmazzuk az x és $\left(\frac{k}{2}-x\right)$ pozitív számokra a mértani és számtani középre vonatkozó egyenlőtlenséget: $x\left(\frac{k}{2}-x\right) \le \left(\frac{x+\left(\frac{k}{2}-x\right)}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{16}$, ami állandó, tehát akkor kapunk legnagyobb területet, ha az =-ség teljesül. Az egyenlőség pedig $x=\left(\frac{k}{2}-x\right)$ esetben teljesülhet csak, azaz: $x=\frac{k}{4}$, és ekkor $y=\frac{k}{2}-\frac{k}{4}=\frac{k}{4}$. Tehát a legnagyobb területű téglalap adott kerület esetén a négyzet.

Házi feladat

1. Feladat

Igazolja, hogy bármely valós $x, y > 0$ esetén $\frac{(x^2+1)}{x}+\frac{(y^2+1)}{y} \ge 4$!

2. Feladat

Határozza meg, milyen számot kell x helyébe írni, hogy az $(x-1,2)^2+(x-1,4)^2+(x-3,4)^2$ kifejezés a legkisebb legyen? Mennyi ez a legkisebb érték?

3. Feladat

Három természetes szám közül az egyik mértani közepe a mésik kettőnek. A három szám összege 19, a legnagyobb és a legkisebb különbsége 5. Melyik ez a három szám?

5. Relációk, műveletek, leképezések

Feladatok

1. Feladat

Legyen $M_1 := \{-1; 1\}$, $M_2 := \{a; b; c\}$, *és* $M_3 := \{a\}$. Határozza meg az $M_1 \times M_2$, $M_1 \times M_3$,

$M_2 \times M_3$, és az $M_1 \times M_2 \times M_3$ halmazokat!

Megoldás:

$$M_1 \times M_2 = \{(-1, a), (-1, b), (-1, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$$
$$M_1 \times M_3 = \{(-1, a), (1, a)\}$$
$$M_2 \times M_3 = \{(\mathrm{a}, \mathrm{a}), (\mathrm{b}, \mathrm{a}), (\mathrm{c}, \mathrm{a})\}$$
$$M_1 \times M_2 \times M_3 = \{(-1, a, a), (-1, b, a), (-1, c, a), (1, a, a), (1, b, a), (1, c, a)\}$$

2. Feladat

Vizsgálja meg, milyen tulajdonságokkal (reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív) rendelkeznek a következő alaphalmazokon értelmezett relácók:
a) A:={ fiúk}, ϱ1:= "X fivére Y-nak"
b) B:={adott síkbeli egyenesek}, ϱ2:="e merőleges f-re"
c) C:={emberek}, ϱ3:="Z ugyanabban a hónapban született, mint V"
d) D:={egész számok}, ϱ4:="|a - b| páros"

Megoldás:

a) A ϱ1 reláció szimmetrikus, mivel ha X fivére Y-nak, akkor Y is fivére X-nek, minden X, Y ∈A esetén.
b) A ϱ2 reláció szimmetrikus, mivel ha e merőleges f-re, akkor f is merőleges e-re, minden e,f∈B esetén.
c) A ϱ3 reláció reflexív, mivel Z ugyanabban a hónapban született, mint Z igaz minden Z∈C esetén; szimmetrikus, mivel ha Z ugyanabban a hónapban született, mint V, akkor V is ugyanabban a hónapban született, mint Z, minden Z,V∈C esetén; tranzitív, mivel ha Z ugyanabban a hónapban született, mint V, és V ugyanabban a hónapban született, mint U, akkor Z is ugyanabban a hónapban született, mint U.
d) A ϱ4 reláció reflexív, mert $|a-a|=0$, ami páros szám; szimmetrikus, mivel $|a-b|=|b-a|$ minden a,b∈D esetén; tranzitív, mivel $|a-b|=2\,k$, ($k\in\mathbb{N}$) esetén $a=b\pm 2\,k$, és $|b-c|=2\,l$, ($l\in\mathbb{N}$), ekkor $|a-c|=|b\pm 2\,k-c|=|b-c\pm 2\,k|=|\pm 2\,l\pm 2\,k|=2\cdot|\pm l\pm k|$ szintén páros.

3. Feladat

A természetes számok halmazán definiáljuk a következő műveleteket: $a \circ b := a+b+ab$ és $a * b := a^2+b^2$. Milyen tulajdonságúak ezek a műveletek (kommutatív, asszociatív, idempotens)? Van-e neutrális elem valamelyik műveletre nézve?

Megoldás:

A $\circ$ művelet tulajdonságai:
1. kommutatív, azaz $a \circ b = b \circ a$, mert a természetes számok halmazán értelmezett összeadás és szorzás kommutatív, tehát $a+b+ab=b+a+ba$.
2. asszociatív, azaz $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, mivel
$$(a \circ b) \circ c = (a+b+ab) \circ c = a+b+ab+c+(a+b+ab)\cdot c = a+b+c+ab + ac+bc+abc$$
és
$$a \circ (b \circ c) = a \circ (b+c+bc) = a+b+c+bc+a(b+c+bc) = a+b+c+ab + ac+bc+abc$$

.

3. nem idempotens, mert $a \circ a = a + a + a \cdot a = 2\,a + a^2 \neq a$, bármely $a \in \mathbb{N}$ esetén.
4. Neutrális elem $\circ$ műveletre nézve olyan $u \in \mathbb{N}$, amelyre $a \circ u = a$, azaz $a + u + au = a$, amely $u = 0$ esetén bármely $a \in \mathbb{N}$-re igaz.

A $*$ művelet tulajdonságai:
1. kommutatív, azaz $a * b = b * a$, mert a természetes számok halmazán értelmezett összeadás kommutatív, tehát $a^2 + b^2 = b^2 + a^2$.
2. asszociatív, azaz $(a * b) * c = a * (b * c)$, mert a természetes számok halmazán értelmezett összeadás asszociatív, tehát $\left(a^2 + b^2\right) + c^2 = a^2 + \left(b^2 + c^2\right) = a^2 + b^2 + c^2$.
3. nem idempotens, mert $a * a = a^2 + a^2 = 2\,a^2 \neq a$, bármely $a \in \mathbb{N}$ esetén.
4. Neutrális elem $*$ műveletre nézve olyan $u \in \mathbb{N}$, amelyre $a * u = a$, azaz $a^2 + u^2 = a$, ami ekvivalens az $u^2 = a(1 - a)$ egyenlőséggel, amelynek nincs természetes szám megoldása bármely $a \in \mathbb{N}$-re. Tehát $*$-ra nincs neutrális elem.

4. Feladat

Algebrai műveletek-e a következők (ha nem, miért nem):
a) egész számok halmazán az osztás?
b) pozitív racionális számok halmazán az osztás?
c) páros egész számok halmazán a számtani közép képzése?
d) pozitív páros számok halmazán a legnagyobb közös osztó képzése?

Megoldás:

a) nem, mert van olyan $(a, b) \in \mathbb{Z}$ számpár, hogy $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$. Például: $a = 2$, $b = 3$ esetén $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.
b) igen
c) igen
d)igen

5. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy az első n darab páratlan szám összege az n-dik négyzetszám,azaz bármely n természetes számra: $1 + 3 + 5 + ... + (2\,n - 1) = n^2$

Megoldás:

Teljes indukcióval bizonyíthatjuk az összegképletet:
1. lépés: n=1-re $1 = 1^2$ igaz.
2. lépés létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $1 + 3 + 5 + ... + (2\,\mathrm{k} - 1) = k^2$ (i), ekkor $k + 1$-re igaz-e az összefüggés:
$1 + 3 + 5 + ... + (2\,\mathrm{k} - 1) + (2\,k + 1) = ?$
Az egyenlőség bal oldalára helyettesítsük be (i)-t:
$k^2 + (2\,k + 1)$

$$k^2 + 2\,k + 1 \qquad \textbf{(5.1.5.1)}$$

> $factor\left(k^2 + 2\,k + 1\right)$

$$(k + 1)^2 \qquad \textbf{(5.1.5.2)}$$

Ami a bizonyítandó összefügés volt. Így Peano 5. axiómája alapján az összefüggés igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

6. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy $1+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$, minden n természetes számra!

Megoldás:

Teljes indukcióval bizonyíthatjuk az összegképletet:

1. lépés: n=1-re $1 = \frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$ igaz.

2. lépés létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $1+2^2+3^2+...+k^2 = \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}$ (ii), ekkor $k+1$-re igaz-e az összefüggés:

$1+2^2+3^2+...+k^2+(k+1)^2 = ?$

Az egyenlőség bal oldalára helyettesítsük be (ii)-t:

$$\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2 \quad \textbf{(5.1.6.1)}$$

> $expand\left(\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\right)$

$$\frac{1}{3}k^3+\frac{3}{2}k^2+\frac{13}{6}k+1 \quad \textbf{(5.1.6.2)}$$

> $factor\left(\frac{1}{3}k^3+\frac{3}{2}k^2+\frac{13}{6}k+1\right)$

$$\frac{1}{6}(2k+3)(k+2)(k+1) \quad \textbf{(5.1.6.3)}$$

Ami a bizonyítandó összefüggés volt. Így Peano 5. axiómája alapján az összefüggés igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

7. Feladat

Definiáljuk az a_n sorozatot a következőképpen: $a_1 := 3$, $a_{n+1} := a_n + \frac{5}{1-4n^2}$. Adja meg a sorozat első 6 tagját!

Megoldás:

$a_1 := 3$

$$3 \quad \textbf{(5.1.7.1)}$$

$a_2 := 3 + \frac{5}{1-4\cdot 2^2}$

$$\frac{8}{3} \quad \textbf{(5.1.7.2)}$$

$a_3 := a_2 + \frac{5}{1-4\cdot 3^2}$

$$\frac{53}{21} \quad \textbf{(5.1.7.3)}$$

$$a_4 := a_3 + \frac{5}{1 - 4 \cdot 4^2}$$

$$\frac{22}{9} \tag{5.1.7.4}$$

$$a_5 := a_4 + \frac{5}{1 - 4 \cdot 5^2}$$

$$\frac{79}{33} \tag{5.1.7.5}$$

$$a_6 := a_5 + \frac{5}{1 - 4 \cdot 6^2}$$

$$\frac{92}{39} \tag{5.1.7.6}$$

8. Feladat

Hány egyenes húzható a síkon n olyan ponton keresztül, amelyek közül semelyik 3 sem kollineáris?

Megoldás:

Nézzük a pontok növekvő sorrendjében az egyenesek számát!

1 pont esetén: $e_1 = 0$ egyenes

2 pont esetén: $e_2 = 1$ egyenes

3 pont esetén: $e_3 = 3$ egyenes

4 pont esetén: $e_4 = 6$ egyenes

...

n pont esetén $e_n = e_{n-1} + (n-1)$ egyenes, ahol e_{n-1} jelenti az előző egyenesszámot.

A rekurzív képletet adjuk meg explicit alakban is, visszafelé fejtve:

$e_n = e_{n-1} + (n-1) = e_{n-2} + (n-2) + (n-1) = e_{n-3} + (n-3) + (n-2) + (n-1) = 0 + 1 + 2 + ... + (n-3) + (n-2) + (n-1)$

.

A számtani sorozat összegképlete alapján $e_n = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$.

9. Feladat

Írjuk fel a következő tizedes törteket közönséges tört alakban: 0.91785, 0.42574257 ..., 1.2727 ... !

Megoldás:

$$0.91785 = \frac{91785}{100000}$$

$$0.91785 = \frac{18357}{20000} \tag{5.1.9.1}$$

$0.42574257 .. = \dfrac{4257}{10^4} + \dfrac{4257}{10^8} + ...$, olyan végtelen mértani sor összege, amelynek első tagja $a_1 = \dfrac{4257}{10^4}$, hányadosa pedig $q = 10^{-4}$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4257}{10^{4i}}$$

$$\frac{43}{101} \quad \textbf{(5.1.9.2)}$$

$1.2727\ldots = 1 + \frac{27}{10^2} + \frac{27}{10^4} + \ldots$, a törtrész olyan végtelen mértani sor összege, amelynek első tagja $b_1 = \frac{27}{10^2}$, hányadosa pedig $q' = 10^{-2}$.

$$1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{27}{10^{2i}}$$

$$\frac{14}{11} \quad \textbf{(5.1.9.3)}$$

10. Feladat

Egész számok halmazán definiáljuk a következő műveletet: $a \triangle b := a + 2\,b$. Vizsgálja meg a műveleti tulajdonságokat a $\triangle$műveletre!

Megoldás:

Vizsgáljuk a Δ művelet tulajdonságait:
1. Kommutativitás: $a \triangle \mathrm{b} = \mathrm{a} + 2\,b$, $b \triangle \mathrm{a} = \mathrm{b} + 2\,a$, nem egyenlő, tehát a művelet nem kommutatív.
2. Asszociativitás: $(a \triangle b) \triangle c = (a + 2\,b) \triangle c = (a + 2\,b) + 2\,c = a + 2\,b + 2\,c$, $a \triangle (b \triangle c) = a \triangle (b + 2\,c) = a + 2(b + 2\,c) = a + 2\,b + 4\,c$, nem egyenlő,tehát a művelet nem asszociatív.
3. Idempotencia: $a \triangle a = a + 2\,a = 3\,a \neq a$, tehát a művelet nem is idempotens.
4. Invertálhatóság: bármely $a \in \mathbb{Z}$ esetén létezik-e megoldása az $x \triangle a = b$ és az $a \triangle x = b$ egyenleteknek: $x + 2\,a = b$-ből kifejezve x-et: $x = b - 2\,a$, ami egész szám; $a + 2\,x = b$ -ből kifejezve x-et: $x = \frac{b - a}{2}$, ami nem minden a, $b \in \mathbb{Z}$ esetén egész szám;tehát a két egyenlet közül az egyiknek vna egész megoldása, a másiknak nem minden esetben: a művelet nem invertálható (de nem is kancellatív).

Házi feladat

1. Feladat

Halmazok között definiáltuk az unió, metszet, szimmetrikus differencia műveleteket. Vizsgálja meg, milyen tulajdonságúak ezek a műveletek, disztributív-e valamelyik egy másikra nézve?

2. Feladat

Bizonyítsa be, hogy $4^n + 15\,n - 1$ osztható 9-cel minden pozitív természetes n esetén!

3. Feladat

Rekurzív definícióval adja meg az úgy nevezett háromszögszámokat (azokat a természetes számokat nevezzük háromszögszámnak, amelyek esetén ennyi egységből szabályos háromszög alakzat kirajzolható)! Az első néhány háromszögszám: $h_1 = 1$, $h_2 = 3$, $h_3 = 6$, $h_4 = 10$, ...

6. Elemi függvények és grafikonjuk, függvénytranszformációk

Feladatok

1. Feladat

Fejezze ki $f(a+2)-f(a-2)$ értékét, ha $a \in \mathbb{R}$ és

a) $f(x) = -x^2+3x,\ x \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) = 3^x,\ x \in \mathbb{R}$!

Megoldás:

a)

```
> f:=-x^2+3*x;
```

$$f := -x^2+3x \quad (6.1.1.1)$$

```
> b:=eval(f,x=a+2);
```

$$b := -(a+2)^2+3a+6 \quad (6.1.1.2)$$

```
> c:=eval(f,x=a-2);
```

$$c := -(a-2)^2+3a-6 \quad (6.1.1.3)$$

```
> d:=b-c;
```

$$d := -(a+2)^2+12+(a-2)^2 \quad (6.1.1.4)$$

```
> expand(d);
```

$$-8a+12 \quad (6.1.1.5)$$

b)

```
> f:=3^x;
```

$$f := 3^x \quad (6.1.2.1)$$

```
> e:=eval(f,x=a+2);
```

$$e := 3^{a+2} \quad (6.1.2.2)$$

```
> g:=eval(f,x=a-2);
```

$$g := 3^{a-2} \quad (6.1.2.3)$$

```
> h:=e-g;
```

$$h := 3^{a+2}-3^{a-2} \quad (6.1.2.4)$$

```
> expand(h);
```

$$\frac{80}{9}\,3^a \quad (6.1.2.5)$$

```
>
```

2. Feladat

Határozza meg a következő függvények grafikonjának a koordinátatengelyekre illeszkedő pontjait (ha vannak)!

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x+7$

b) $g : \mathbb{N} \setminus \{4\} \to \mathbb{Q},\ x \mapsto \dfrac{1}{x-4}$

c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto -7x$

d) $i : \mathbb{Z} \setminus \{3\} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto \dfrac{x^2+x-12}{x-3} - 4$

Megoldás:

a)

```
> f:=x+7;
```

$$f := x + 7 \tag{6.1.3.1}$$

```
> solve(f=0,x);
```

$$-7 \tag{6.1.3.2}$$

```
> eval(f,x=0);
```

$$7 \tag{6.1.3.3}$$

```
>
```

b)

```
> g:=1/(x-4);
```

$$g := \frac{1}{x-4} \tag{6.1.4.1}$$

```
> solve(g=0,x);
```

```
> eval(g,x=0);
```

$$-\frac{1}{4} \tag{6.1.4.2}$$

c)

```
> h:=-7*x;
```

$$h := -7\,x \tag{6.1.5.1}$$

```
> solve(h=0,x);
```

$$0 \tag{6.1.5.2}$$

```
> eval(h,x=0);
```

$$0 \tag{6.1.5.3}$$

```
>
```

d)

```
> i:=(x^2+x-12)/(x-3)-4;
```

$$i := \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} - 4 \tag{6.1.6.1}$$

```
> solve(i=0,x);
```

$$0 \tag{6.1.6.2}$$

```
> eval(i,x=0);
```

$$0 \tag{6.1.6.3}$$

```
>
```

3. Feladat

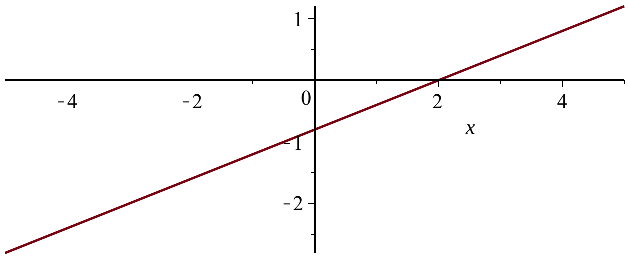
Ábrázolja az $f(x) = \dfrac{2x-4}{5}$, $x \in \mathbb{R}$ függvényt! Mik a grafikonnak a tengelyekkel való metszéspontjai?

Megoldás:

```
> f:=(2*x-4)/5;
```

$$f := \frac{2}{5}x - \frac{4}{5} \quad (6.1.7.1)$$

```
> plot(f,x=-5..5,scaling=constrained);
```




```
> solve(f=0,x);
```

$$2 \quad (6.1.7.2)$$

```
> eval(f,x=0);
```

$$-\frac{4}{5} \quad (6.1.7.3)$$

```
>
```

4. Feladat

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az f és a g függvényt, ha mindkettő értelmezési tartománya a $\mathbb{R}$ halmaz és $f(x) = 8x - 5$ és $g(x) = (x+2)^2 - (x-2)^2$.

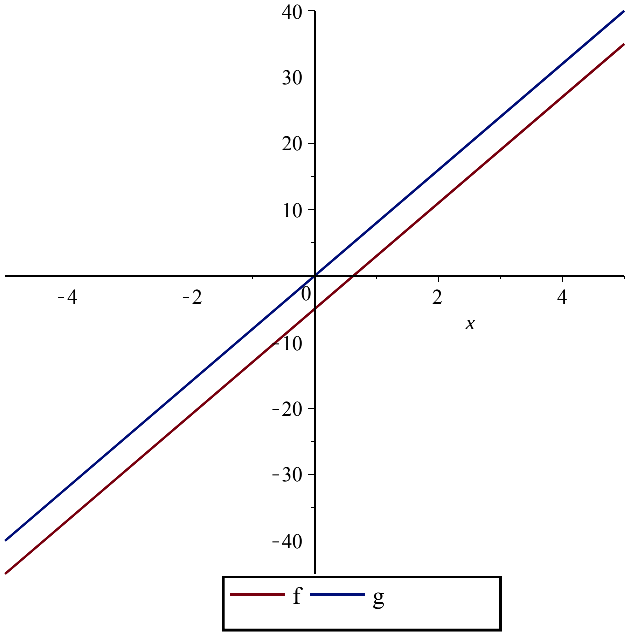
```
> f:=8*x-5;
```

$$f := 8\,x - 5 \quad (6.1.8.1)$$

```
> g:=(x+2)^2-(x-2)^2;
```

$$g := (x+2)^2 - (x-2)^2 \quad (6.1.8.2)$$

```
> plot([f,g],x=-5..5);
```



5. Feladat

Ábrázolja az $x \mapsto 3\,x^2 - 1$ függvényt!

Megoldás:

```
> f:=3*x^2-1;
```

$$f := 3\,x^2 - 1 \quad (6.1.9.1)$$

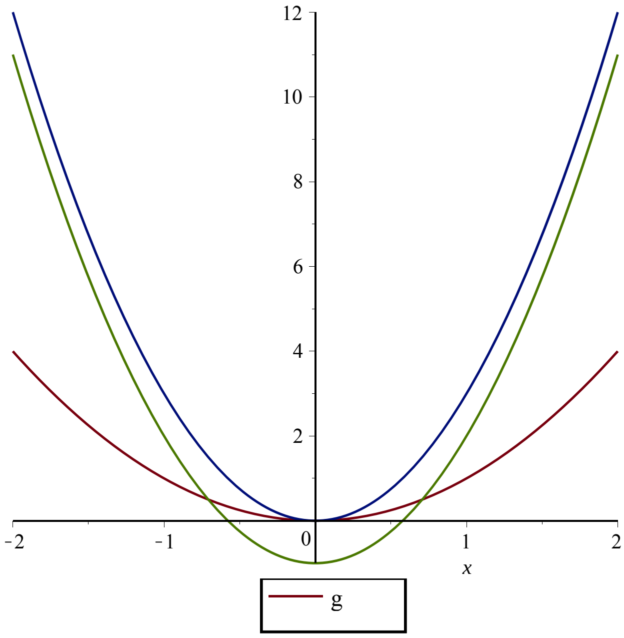
```
> g:=x^2;
```

$$g := x^2 \quad (6.1.9.2)$$

```
> h:=3*x^2;
```

$$h := 3\,x^2 \quad (6.1.9.3)$$

```
> plot([g,h,f],x=-2..2);
```




```
>
```

6. Feladat

Ábrázolja a következő függvényeket ($x \in \mathbb{R}$)!

a) $x \mapsto |x-2|+x$

b) $x \mapsto ||\,|x+3|-1|-2|$

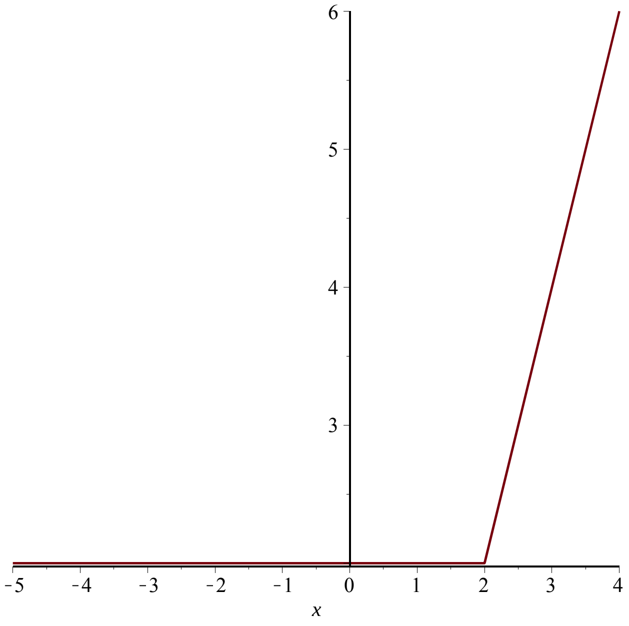
Megoldás:

a)

```
> f:=abs(x-2)+x;
```

$$f := |x-2|+x \qquad \textbf{(6.1.10.1)}$$

```
> plot(f,x=-5..4);
```



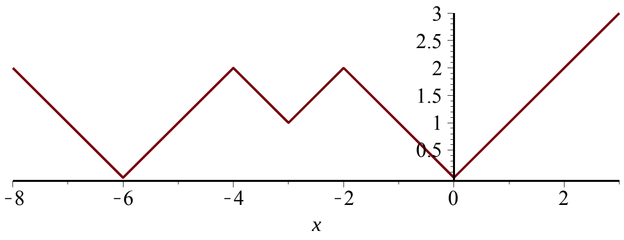

```
>
```

b)

```
> g:=abs(abs(abs(x+3)-1)-2);
```

$$g := |||x+3|-1|-2| \tag{6.1.11.1}$$

```
> plot(g,x=-8..3,scaling=constrained);
```



>

7. Feladat

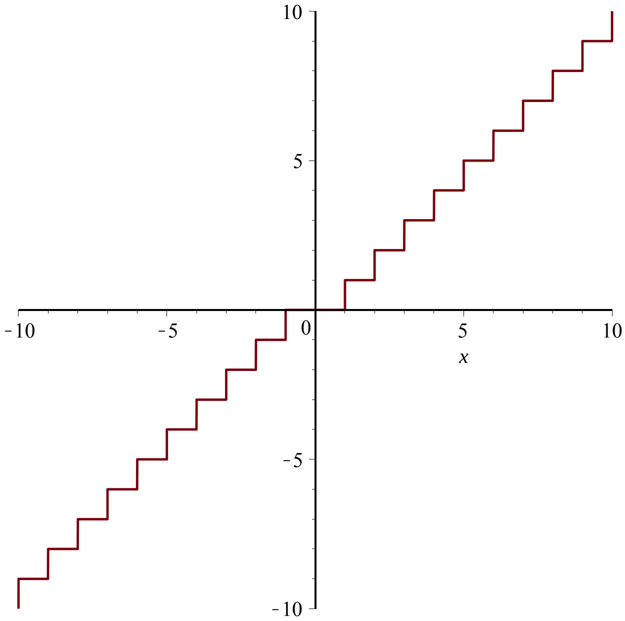
Ábrázoljuk az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket.

a) $x \mapsto x + [x]$,   b) $x \mapsto [x] - x$,   c) $x \mapsto x \cdot [x]$

Megoldás:

a)

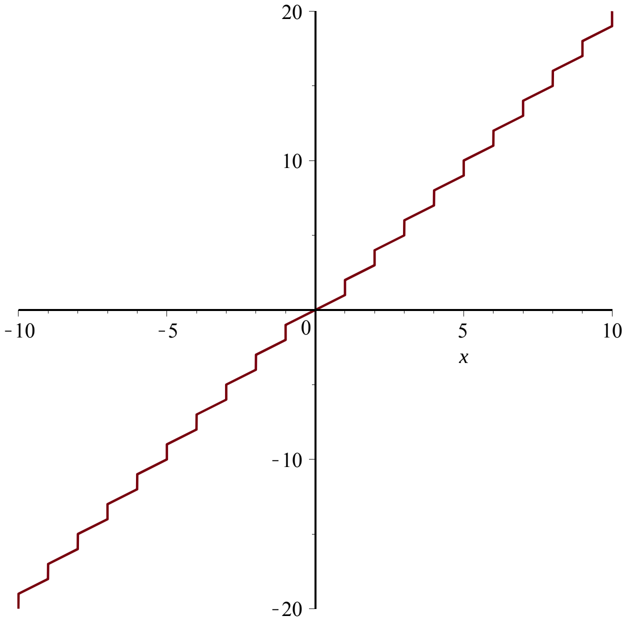
```
> plot(trunc(x));
```




```
> f:=x+trunc(x);
```

$$f := x + \mathrm{trunc}(x) \tag{6.1.12.1}$$

```
> plot(f);
```

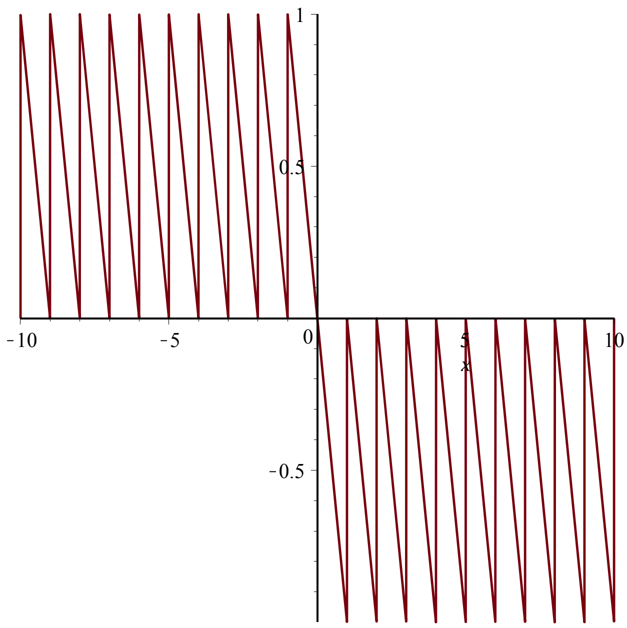


b)

```
> f:=trunc(x)-x;
```

$$f := \mathrm{trunc}(x) - x \tag{6.1.13.1}$$

```
> plot(f);
```

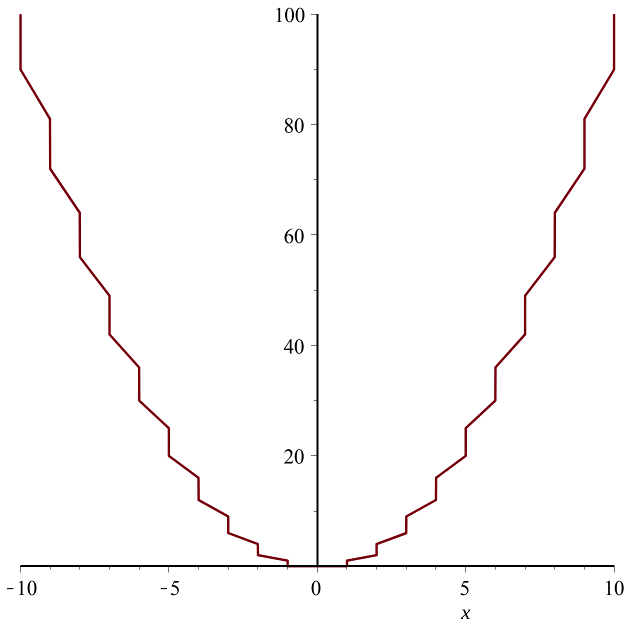


c)

```
> f:=x*trunc(x);
```

$$f := x\,\mathrm{trunc}(x) \qquad \textbf{(6.1.14.1)}$$

```
> plot(f);
```



8. Feladat

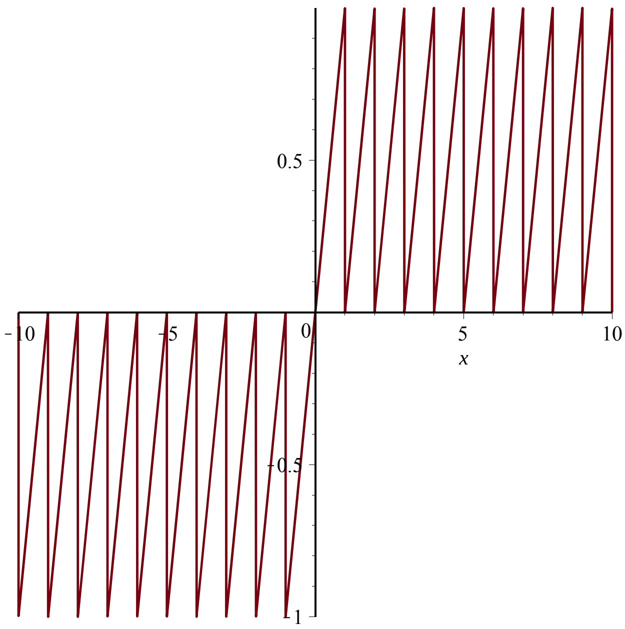
Ábrázoljuk a törtrészfüggvényt és az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - [x] + 1$ függvényt.

Megoldás:

```
> f:=x-trunc(x);
```

$$f := x - \mathrm{trunc}(x) \tag{6.1.15.1}$$

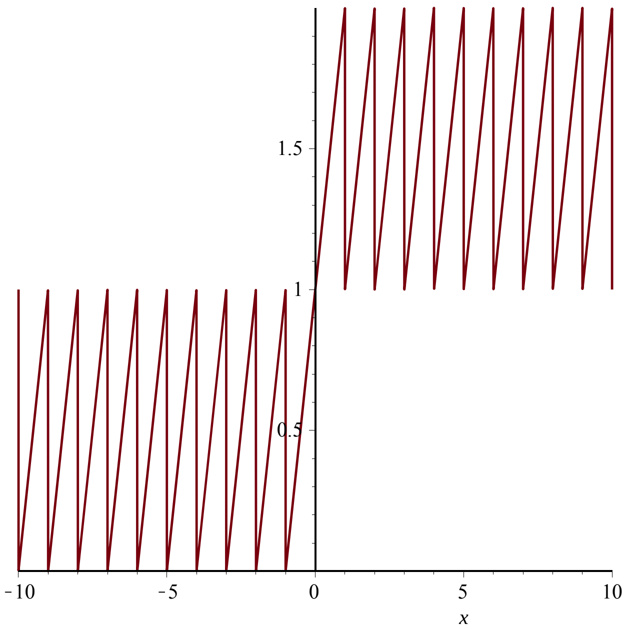
```
> plot(f);
```




```
> g:=f+1;
```

$$g := x - \mathrm{trunc}(x) + 1 \qquad \textbf{(6.1.15.2)}$$

```
> plot(g);
```



9. Feladat

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az *f*, *g*, *h*, ℝ → ℝ függvényeket.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = (x+4)^2$ c) $f(x) = (x+4)^2 - 5$

Megoldás:

```
> f:=x^2;
```

$$f := x^2 \quad \textbf{(6.1.16.1)}$$

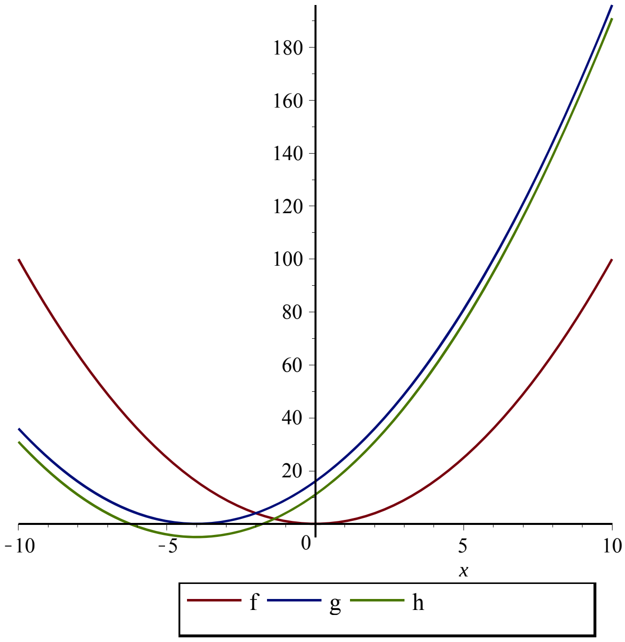
```
> g:=(x+4)^2;
```

$$g := (x+4)^2 \quad \textbf{(6.1.16.2)}$$

```
> h:=(x+4)^2-5;
```

$$h := (x+4)^2 - 5 \quad \textbf{(6.1.16.3)}$$

```
> plot([f,g,h]);
```



10. Feladat

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket:

$f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x},\quad g : (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x-2},\quad h : (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \to \mathbb{R},$
$x \mapsto \dfrac{1}{x-2} + 4,\quad k : (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{4\,x-7}{x-2}.$

Megoldás:

```
> f:=1/x;
```

$$f := \frac{1}{x} \tag{6.1.17.1}$$

```
> g:=1/(x-2);
```

$$g := \frac{1}{x-2} \tag{6.1.17.2}$$

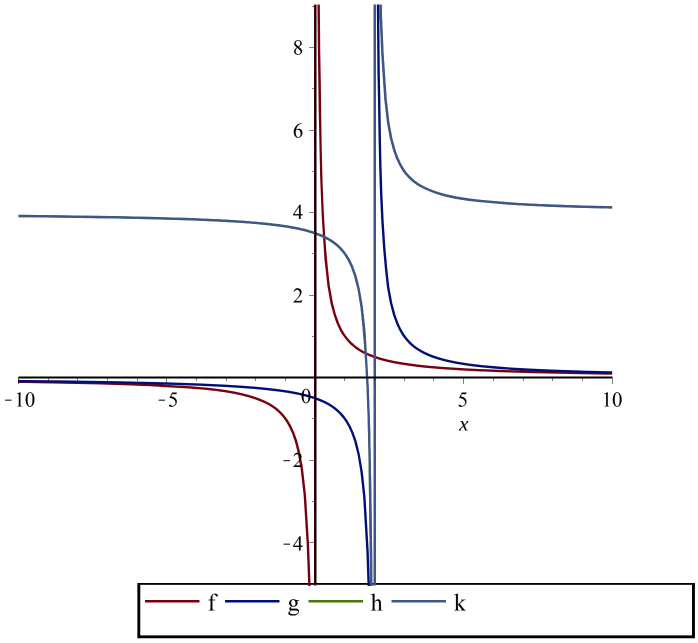
```
> h:=1/(x-2)+4;
```

$$h := \frac{1}{x-2} + 4 \tag{6.1.17.3}$$

```
> k:=(4*x-7)/(x-2);
```

$$k := \frac{4\,x-7}{x-2} \qquad \textbf{(6.1.17.4)}$$

```
> plot([f,g,h,k]);
```



Házi feladat

1. Feladat

Határozzuk meg az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények zérushelyeit:

a) $x \mapsto x^2 + x$, b) $x \mapsto 3\,x - 5\,x^2$, c) $x \mapsto (x+2)(x-4) + 8$.

2. Feladat

Ábrázoljuk az f függvényt, ha $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ és

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ b) $f(x) = \dfrac{2\,x+6}{x+3}$ c) $f(x) = \dfrac{-2\,x-6}{x+3}$.

3. Feladat

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az f, g, h, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket:

a) $f(x) = -2\,x^2$ b) $f(x) = -2\,(x+4)^2$ c) $f(x) = -2\,(x+4)^2 - 5$

7. Összetett függvény, inverz függvény, egyváltozós függvények jellemzése

Feladatok

1. Feladat

Ábrázolja a következő összetett függvényeket ($x \in \mathbb{R}$)!

a) $x \mapsto |2x^2+4x-3|$

b) $x \mapsto \left|\sqrt{x+3}-2\right| \quad (-3 \le x)$

Megoldás:

a) $x \mapsto |2x^2+4x-3|$

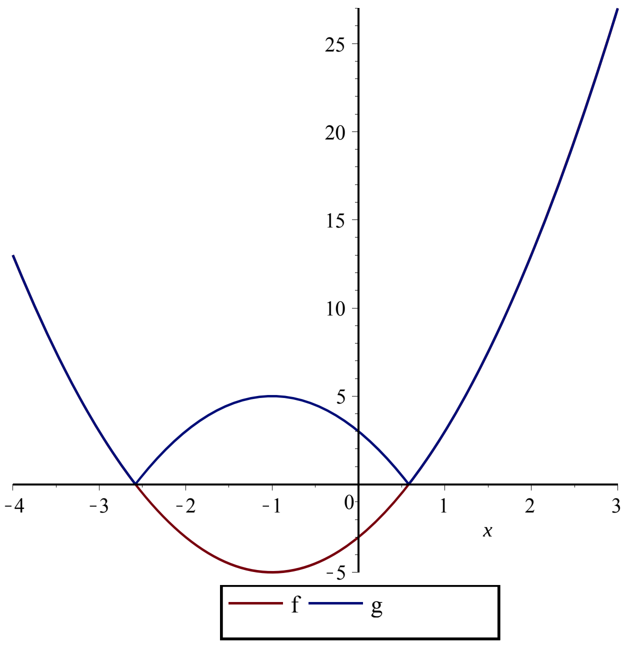
```
> f:=2*x^2+4*x-3;
```

$$f := 2x^2+4x-3 \tag{7.1.1.1}$$

```
> g:=abs(2*x^2+4*x-3);
```

$$g := |2x^2+4x-3| \tag{7.1.1.2}$$

```
> plot([f,g],x=-4..3);
```



b) $x \mapsto \left|\sqrt{x+3} - 2\right| \quad (-3 \le x)$

```
> f:=x+3;
```

$$f := x+3 \qquad (7.1.2.1)$$

```
> g:=sqrt(x+3);
```

$$g := \sqrt{x+3} \qquad (7.1.2.2)$$

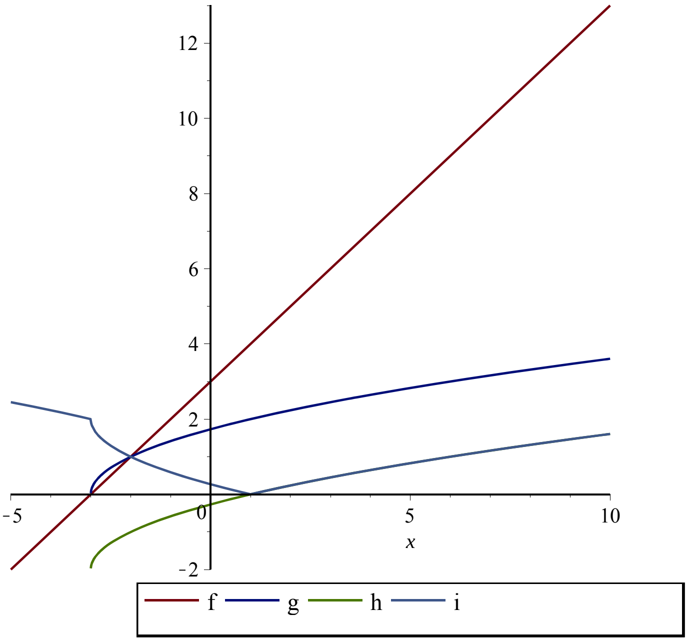
```
> h:=sqrt(x+3)-2;
```

$$h := \sqrt{x+3} - 2 \qquad (7.1.2.3)$$

```
> i:=abs(sqrt(x+3)-2);
```

$$i := \left|\sqrt{x+3} - 2\right| \qquad (7.1.2.4)$$

```
> plot([f,g,h,i],x=-5..10);
```




```
>
```

2. Feladat

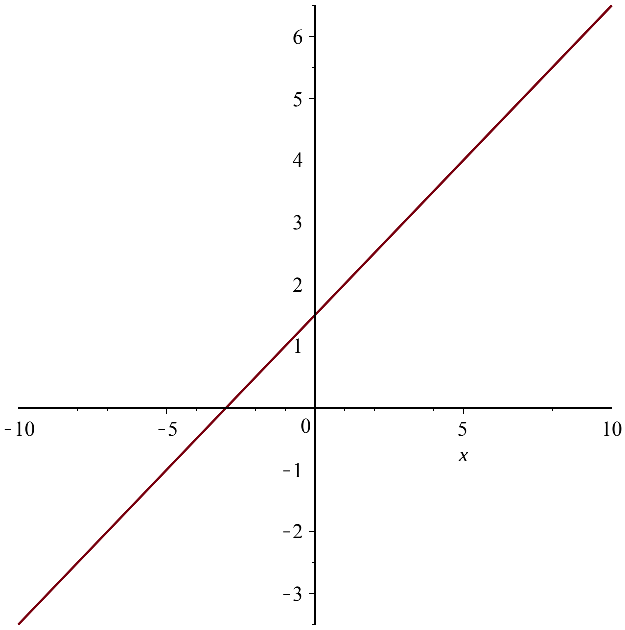
Határozza meg az $x \mapsto 2x - 3 \ (x \in \mathbb{R})$ függvény inverzét és ábrázolja a kapott függvényt!

Megoldás:

```
> f:=2*x-3;
```
$$f := 2\,x - 3 \tag{7.1.3.1}$$

```
> solve(f=y,x);
```
$$\frac{1}{2}\,y + \frac{3}{2} \tag{7.1.3.2}$$

```
> g:=eval((7.1.3.2),y=x);
```
$$g := \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2} \tag{7.1.3.3}$$

```
> plot(g);
```



```
>
```

3. Feladat

Határozza meg az $x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x+1}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ függvény inverzét és ábrázolja a kapott függvényt!

Megoldás:

```
> f:=1+1/(x+1);
```
$$f := 1 + \frac{1}{x+1} \tag{7.1.4.1}$$

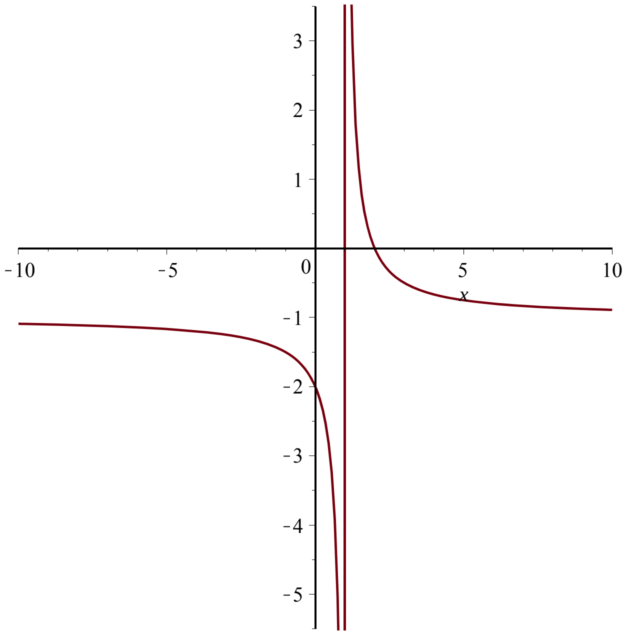
```
> solve(f=y,x);
```

$$-\frac{-2+y}{-1+y} \tag{7.1.4.2}$$

```
> g:=eval((7.1.4.2),y=x);
```

$$g := -\frac{x-2}{-1+x} \tag{7.1.4.3}$$

```
> plot(g);
```



4. Feladat

Jellemezze az alábbi függvényeket paritás és periodicitás szempontjából ($x \in \mathbb{R}$)!

a) $x \mapsto x^2$

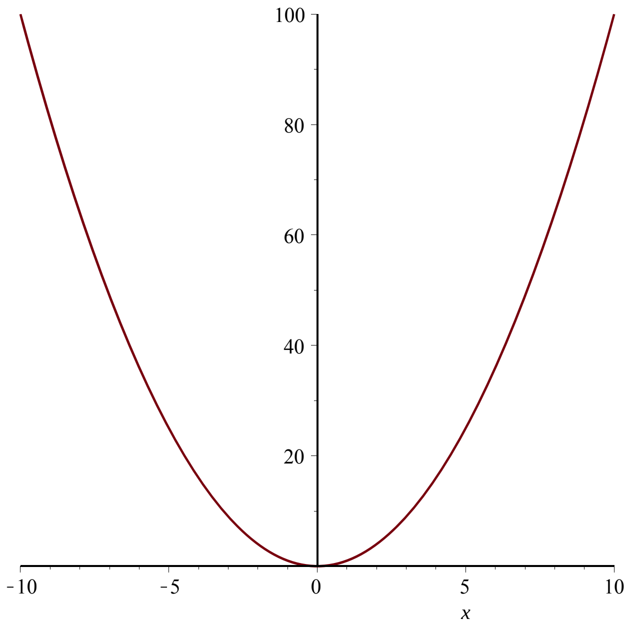
b) $x \mapsto \sin(x)$

c) $x \mapsto x^3$

Megoldás:

a)

```
> plot(x^2);
```

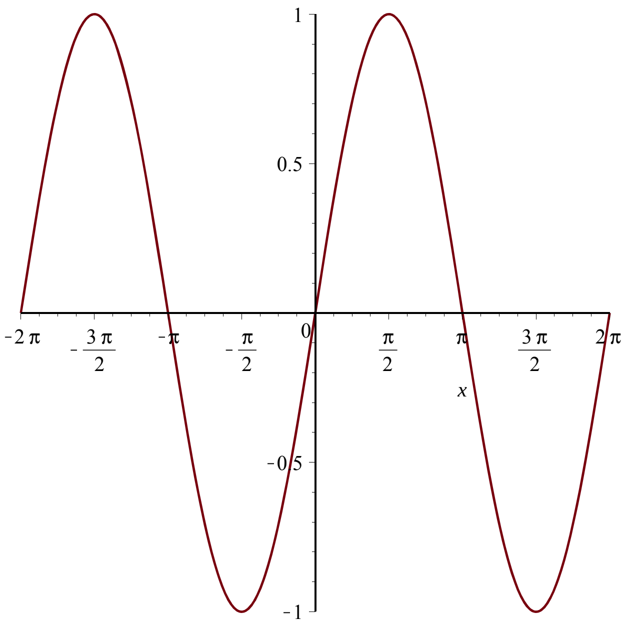



```
>
```

A függvény páros és nem periodikus.

b)

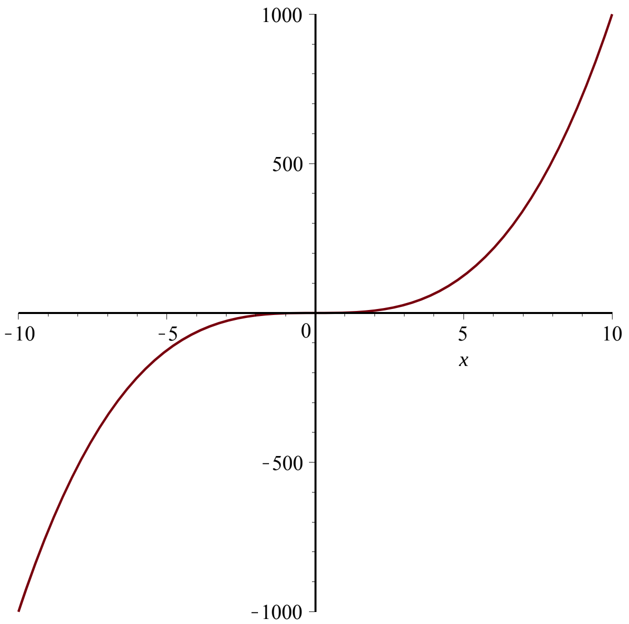
```
> plot(sin(x));
```



A függvény páratlan, 2π szerint periodikus.

c)

```
> plot(x^3);
```



A függvény páratlan, nem periodikus.

5. Feladat

Jellemezze az alábbi függvényeket paritás és periodicitás szempontjából ($x \in \mathbb{R}$)!

a) $x \mapsto 2^x$

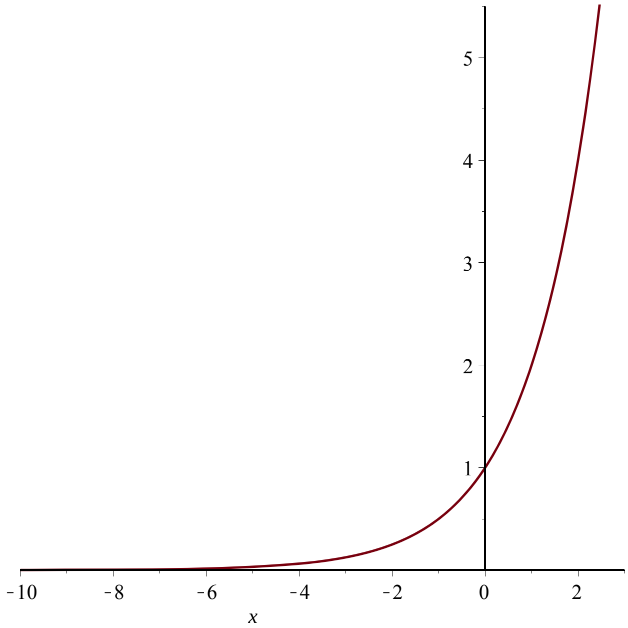
b) $x \mapsto 5$

c) $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

Megoldás:

a)

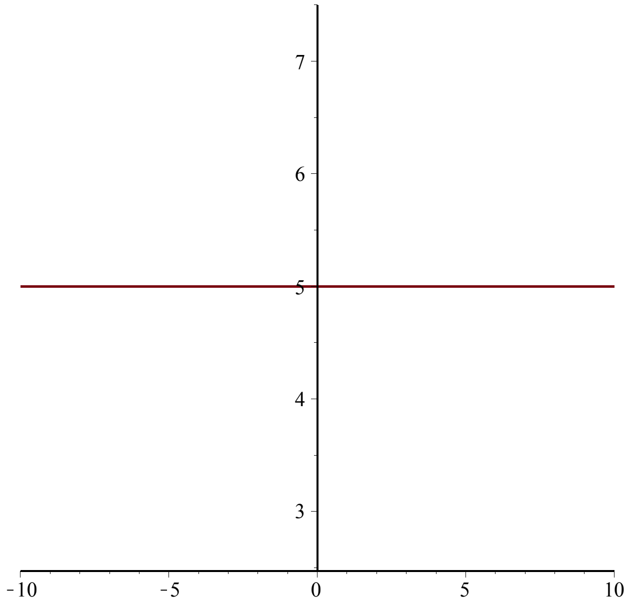
```
> plot(2^x);
```



A függvény sem nem páros, sem nem páratlan, nem periodikus.

b)

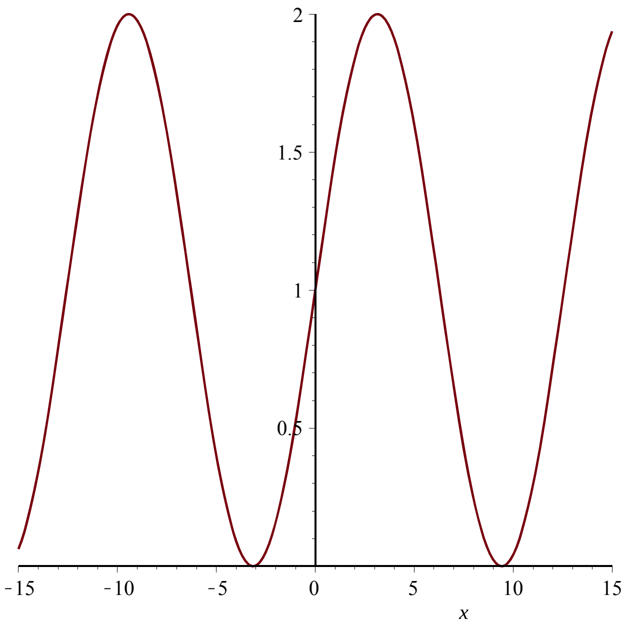
```
> plot(5);
```



A függvény páros, periodikus, de nincs periódusa.

c)

```
> plot(sin(1/2*x)+1,x=-15..15);
```



A függvény sem nem páros, sem nem páratlan, 4π szerint periodikus.

6. Feladat

Jellemezze az alábbi függvények növekedési viszonyait, ha $x \in [0, 5]$!

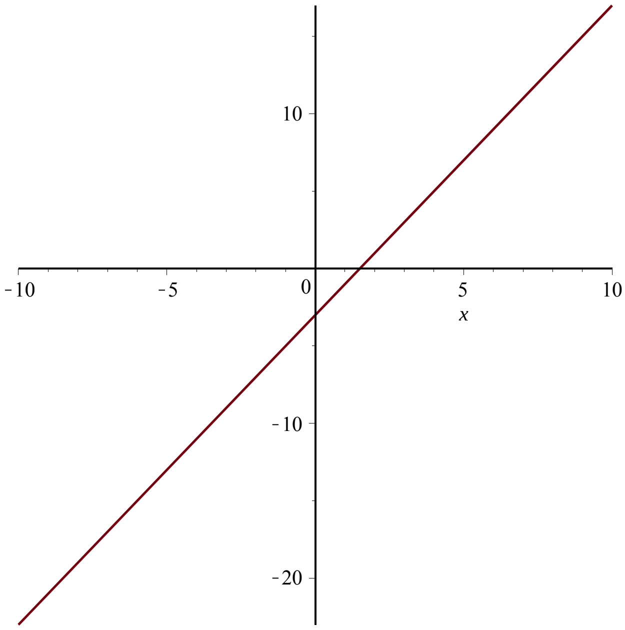
a) $x \mapsto 2x - 3$

b) $x \mapsto |2x - 4|$

Megoldás:

a)

```
> plot(2*x-3);
```

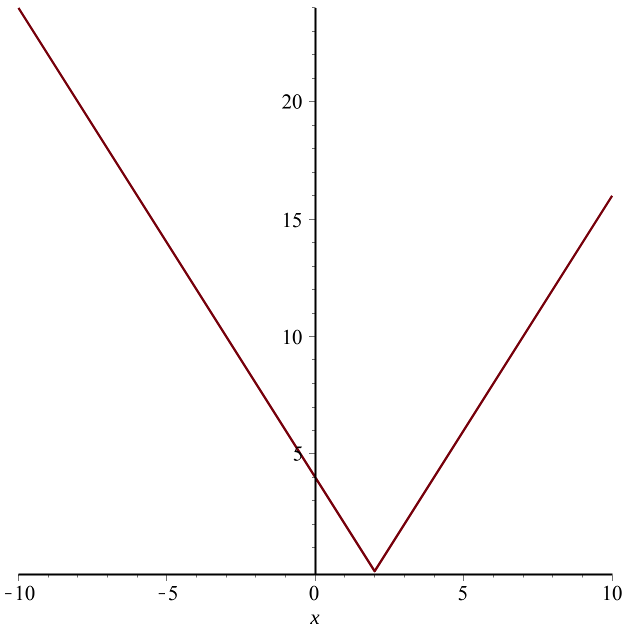


>

A függvény szigorúan monoton növekvő.

b)

```
> plot(abs(2*x-4));
```




```
> solve(2*x-4=0,x);
```

$$2 \tag{7.1.12.1}$$

```
>
```

A függvény a $[0, 2]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $[2, 5]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.

7. Feladat

Állapítsa meg az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények növekedési viszonyait:

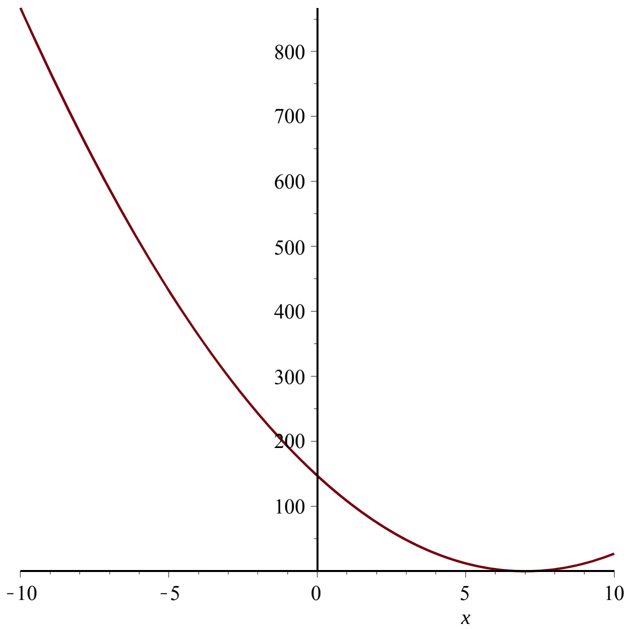
a) $x \mapsto 3(x-7)^2$

b) $x \mapsto -2(1-x)^2$

Megoldás:

a)

```
> plot(3*(x-7)^2);
```



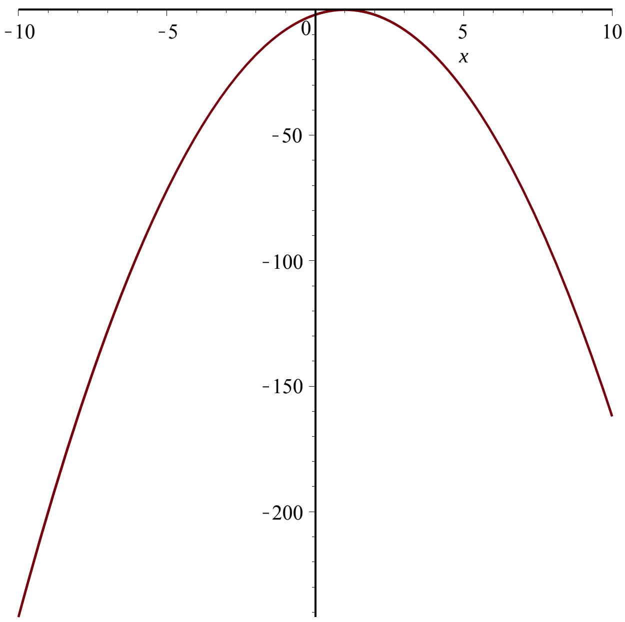

```
> solve(3*(x-7)^2,x);
```

$$7, 7 \tag{7.1.13.1}$$

A függvény a $[-\infty, 7]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $[7, +\infty]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.

b)

```
> plot(-2*(1-x)^2);
```




```
> solve(-2*(1-x)^2,x);
```

$$1, 1 \tag{7.1.14.1}$$

A függvény a $[-\infty, 1]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, az $[1, +\infty]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.

8. Feladat

Jellemezze korlátosság szempontjából az alábbi függvényeket!

a) $x \mapsto 2^{x-3}$

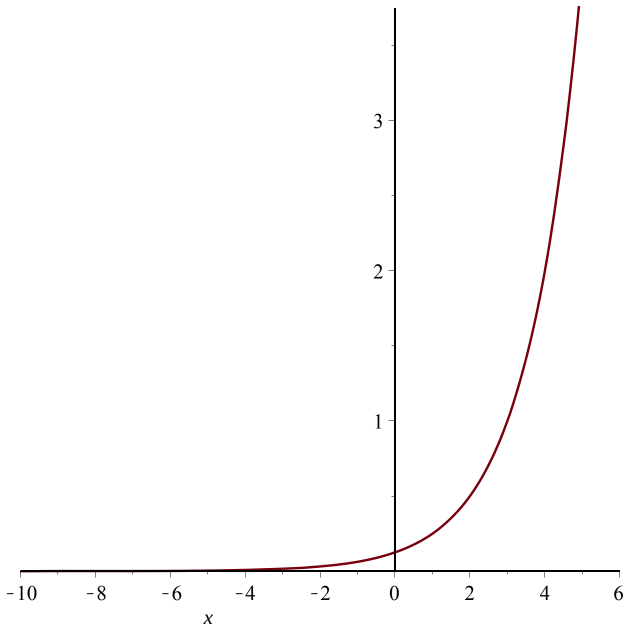
b) $x \mapsto \dfrac{1}{3x-4}$

c) $x \mapsto \sin(4x+5)$

Megoldás:

a)

```
> plot(2^(x-3));
```

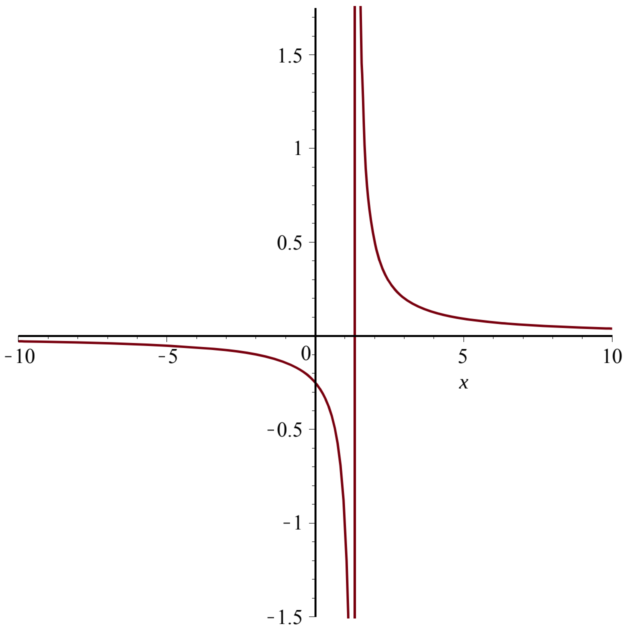


>

A függvény csak alulról korlátos.

b)

```
> plot(1/(3*x-4));
```

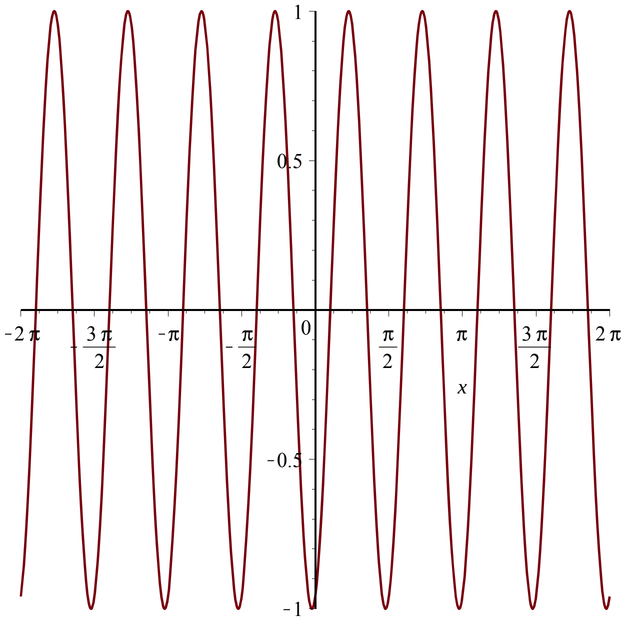


>

A függvény alulról sem, felülről sem korlátos.

c)

```
> plot(sin(4*x+5));
```



>

A függvény korlátos.

9. Feladat

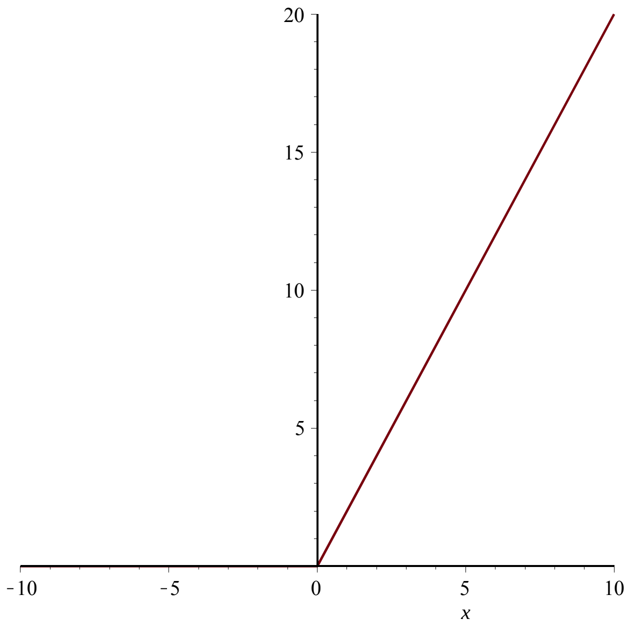
Jellemezze korlátosság szempontjából az alábbi függvényeket!

a) $x \mapsto |x| + x$, b) $x - |x|$, c) $x \cdot |x|$

Megoldás:

a)

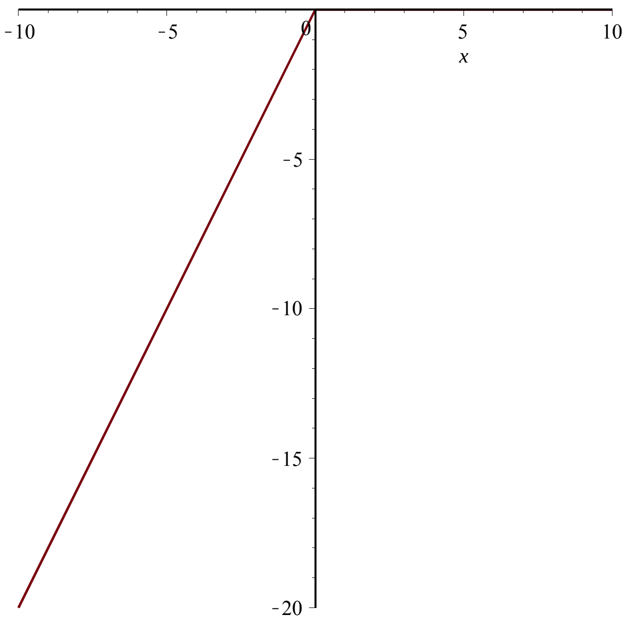
```
> plot(abs(x)+x);
```



A függvény alulról korlátos.

b)

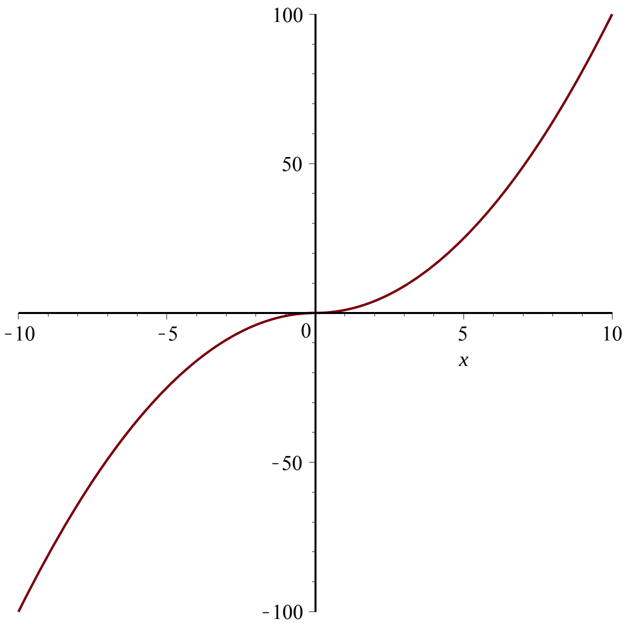
```
> plot(x-abs(x));
```



A függvény felülről korlátos.

c)

```
> plot(x*abs(x));
```



A függvény nem korlátos.

10. Feladat

Legyen $g(x) = -\sqrt{x}$, $h(x) = \sqrt{x} + 2$, $k(x) = \sqrt{x+2}$, $a(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x}$, $b(x) = \sqrt{\frac{1}{4}x}$!

Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a *g*, *h* és *k*, illetve az *a* és *b* függvényeket! Az ábra alapján jellemezze a *k* függvényt!

Megoldás:

```
> g:=-sqrt(x);
```

$$g := -\sqrt{x} \qquad \textbf{(7.1.21.1)}$$

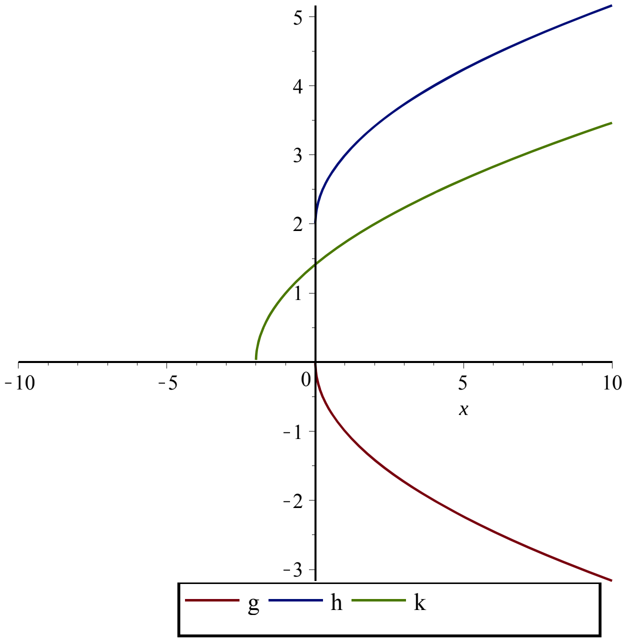
```
> h:=sqrt(x)+2;
```

$$h := \sqrt{x} + 2 \qquad \textbf{(7.1.21.2)}$$

```
> k:=sqrt(x+2);
```

$$k := \sqrt{x+2} \qquad \textbf{(7.1.21.3)}$$

```
> plot([g,h,k]);
```



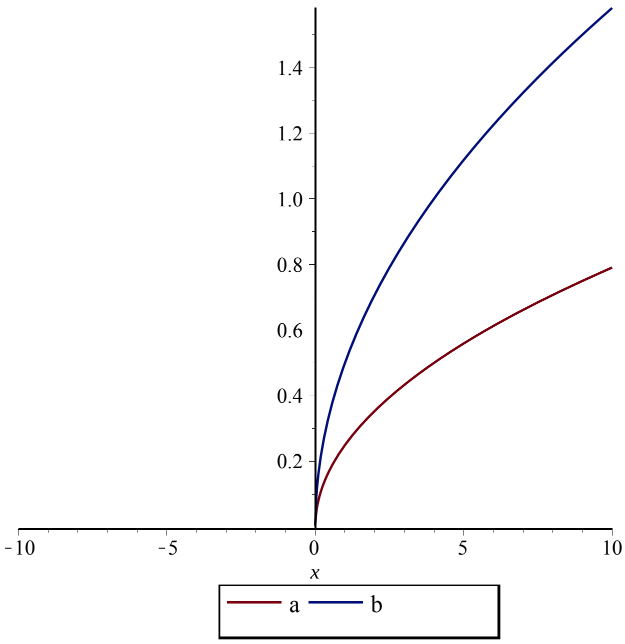

```
> a:=1/4*sqrt(x);
```

$$a := \frac{1}{4}\sqrt{x} \tag{7.1.21.4}$$

```
> b:=sqrt((1/4)*x);
```

$$b := \frac{1}{2}\sqrt{x} \tag{7.1.21.5}$$

```
> plot([a,b]);
```



Házi feladat

1. Feladat

Jellemezze az alábbi függvényeket paritás és periodicitás szempontjából ($x \in \mathbb{R}$)!

a) $x \mapsto 4^x$

b) $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 3$

2. Feladat

Jellemezze korlátosság szempontjából az alábbi függvényeket!

a) $x \mapsto 3^{x-5}$

b) $x \mapsto \dfrac{1}{4x+2}$

3. Feladat

Legyen $f(x) = -|x|$, $g(x) = |x-3|$, $h(x) = |x| - 3$, $a(x) = 2|x|$, $b(x) = |2x|$! Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az f, g, h, illetve az a és b függvényeket! Jellemezze a h függvényt az ábra alapján!

8. Exponenciális függvények és inverzeik, trigonometrikus függvények

Feladatok

1. Feladat

Ábrázolja a következő függvényeket $(x \in \mathbb{R})$ közös koordináta-rendszerben!

$f(x) = 2^x - 1$; $g(x) = -2^x$; $h(x) = 3 - 2^x$; $i(x) = 2^{-x}$.

Megoldás:

```
> f:=2^x-1;
```

$$f := 2^x - 1 \tag{8.1.1.1}$$

```
> g:=-2^x;
```

$$g := -2^x \tag{8.1.1.2}$$

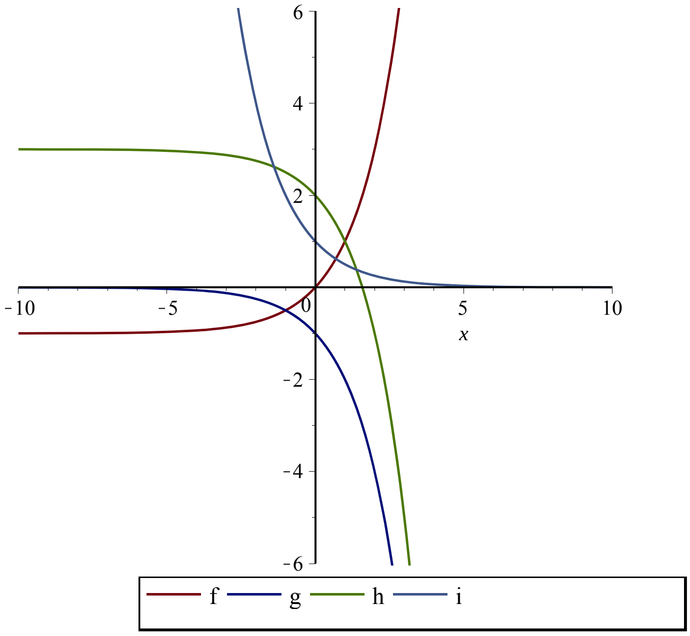
```
> h:=3-2^x;
```

$$h := 3 - 2^x \tag{8.1.1.3}$$

```
> i:=2^(-x);
```

$$i := 2^{-x} \tag{8.1.1.4}$$

```
> plot([f,g,h,i]);
```



2. Feladat

Ábrázoljuk az $f+g$, $f-g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ függvényeket, ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 2^x$, és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$.

Megoldás:

```
> f:=2^x;
```

$$f := 2^x \qquad \textbf{(8.1.2.1)}$$

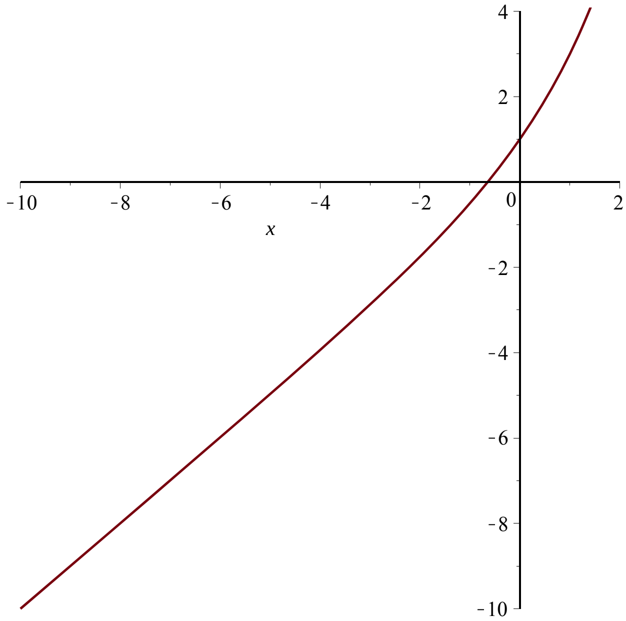
```
> g:=x;
```

$$g := x \qquad \textbf{(8.1.2.2)}$$

```
> h:=f+g;
```

$$h := 2^x + x \qquad \textbf{(8.1.2.3)}$$

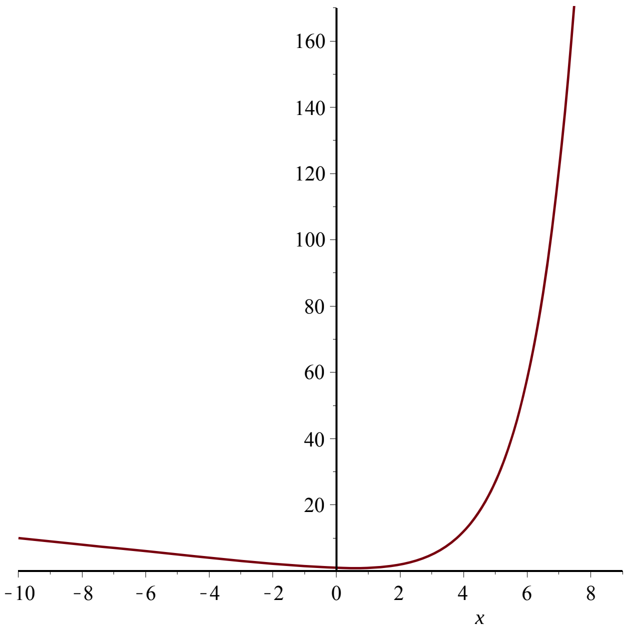
```
> plot(h);
```




```
> i:=f-g;
```

$$i := 2^x - x \tag{8.1.2.4}$$

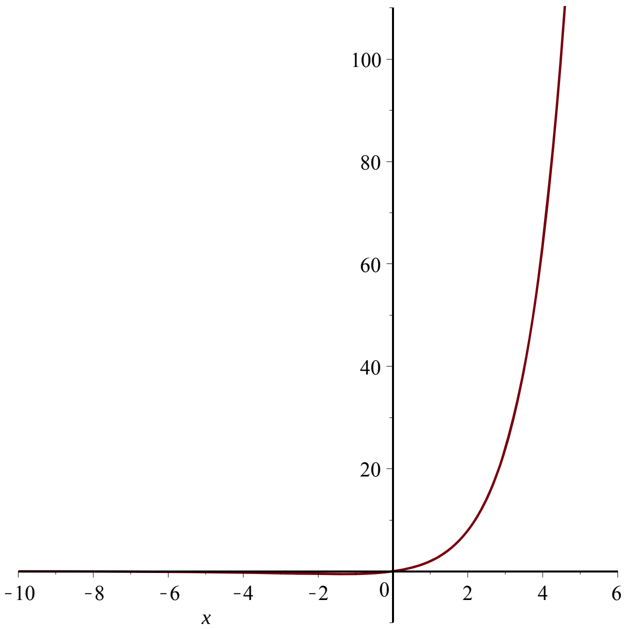
```
> plot(i);
```




```
> k:=f*g;
```

$$k := 2^x x \tag{8.1.2.5}$$

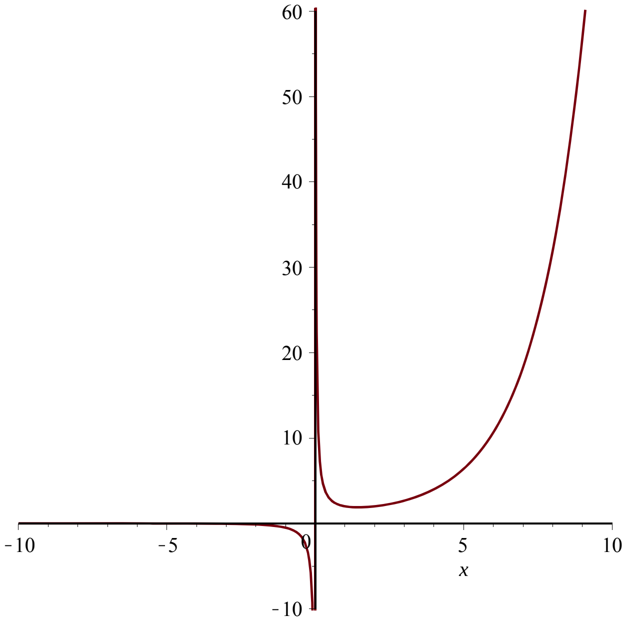
```
> plot(k);
```




```
> l:=f/g;
```

$$l := \frac{2^x}{x} \quad \textbf{(8.1.2.6)}$$

```
> plot([l]);
```



3. Feladat

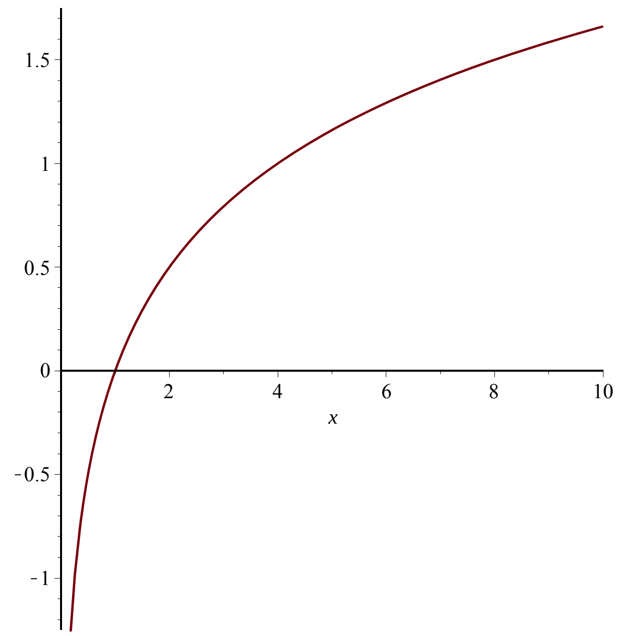
Ábrázolja a $g:\mathbb{R}+\ \rightarrow \mathbb{R};\, x\mapsto \log_4(x)$ függvényt! Határozza meg a következő függvényértékeket: $g(2^5);\ g\left(\frac{1}{4^3}\right);\ g(16^{-3})$! Mennyi a k értéke, ha $g(k)=5$?

Megoldás:

```
> g:=log[4](x);
```

$$g := \frac{1}{2}\,\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \qquad \textbf{(8.1.3.1)}$$

```
>
> plot(log[4](x));
```




```
> eval(g,x=2^5);
```

$$\frac{5}{2} \tag{8.1.3.2}$$

```
> eval(g,x=1/4^3);
```

$$-3 \tag{8.1.3.3}$$

```
> eval(g,x=16^(-3));
```

$$-6 \tag{8.1.3.4}$$

```
> k:=solve(log[4](x)=5,x);
```

$$k := 1024 \tag{8.1.3.5}$$

```
>
```

4. Feladat

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket:
$]0\ +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \log_2(x),\ x \mapsto \log_{\frac{1}{2}}(x),\ x \mapsto -\log_2(x).$

Megoldás:

```
> f:=log[2](x);
```

$$f := \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \tag{8.1.4.1}$$

```
> g:=log[1/2](x);
```

$$g := -\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \tag{8.1.4.2}$$

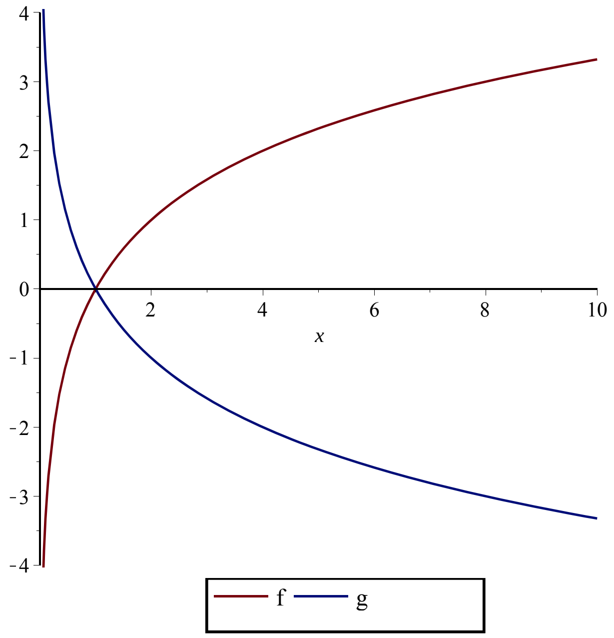
```
> h:=-log[2](x);
```

$$h := -\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \tag{8.1.4.3}$$

```
> evalb(g=h);
```

$$true \tag{8.1.4.4}$$

```
> plot([f,g]);
```



5. Feladat

Ábrázoljuk az $f+g$, $f-g$, fg függvényeket, ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$, és $g:\mathbb{R}+\ \to\mathbb{R}$, $x\mapsto \log_2(x)$.

Megoldás:

```
> f:=x;
```

$$f := x \tag{8.1.5.1}$$

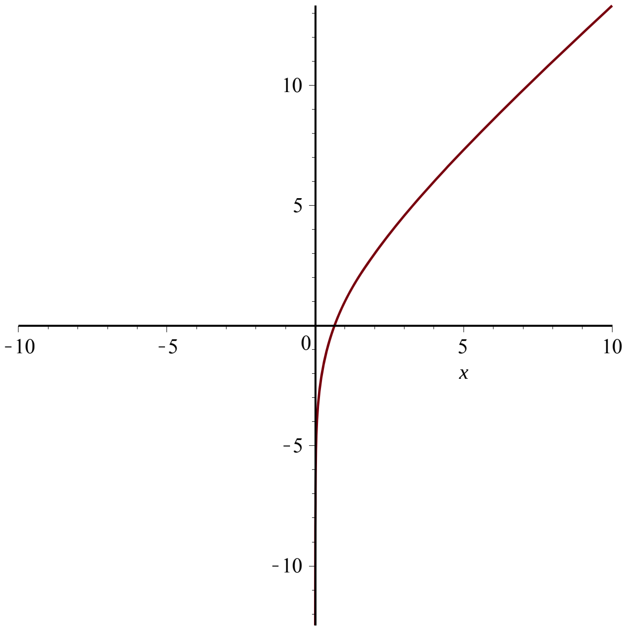
```
> g:=log[2](x);
```

$$g := \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \tag{8.1.5.2}$$

```
> h:=f+g;
```

$$h := x + \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \tag{8.1.5.3}$$

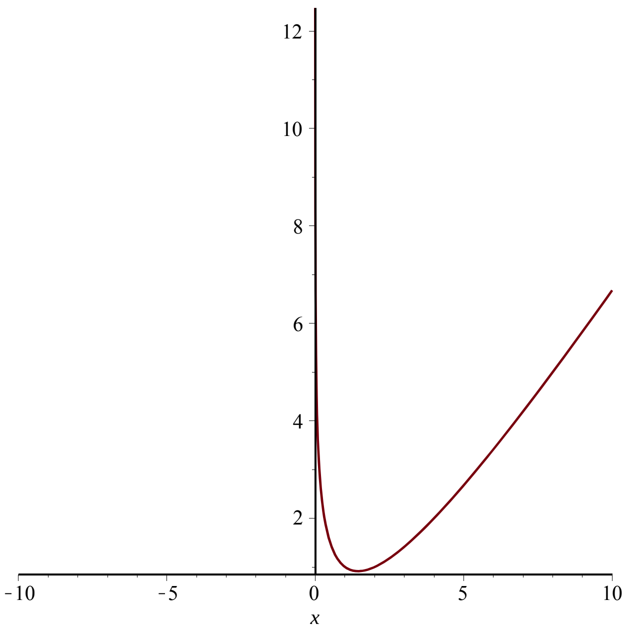
```
> plot(h);
```




```
> i:=f-g;
```

$$i := x - \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \tag{8.1.5.4}$$

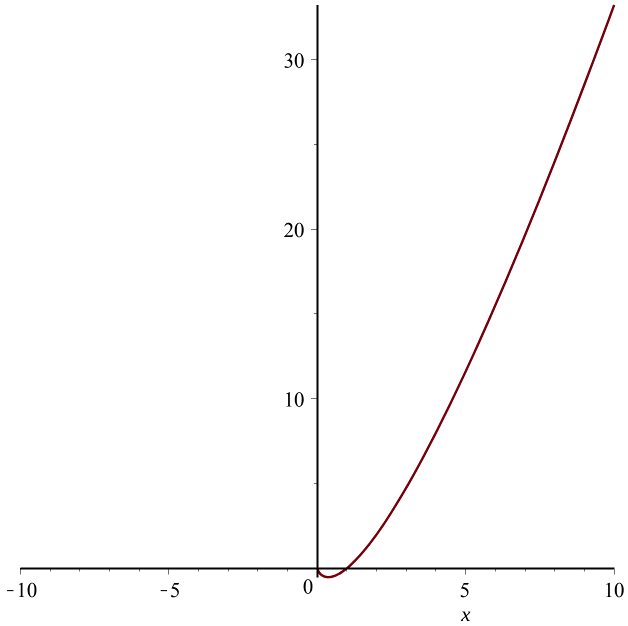
```
> plot(i);
```




```
> k:=f*g;
```

$$k := \frac{x \ln(x)}{\ln(2)} \tag{8.1.5.5}$$

```
> plot(k);
```



6. Feladat

Ábrázolja a következő függvényeket:

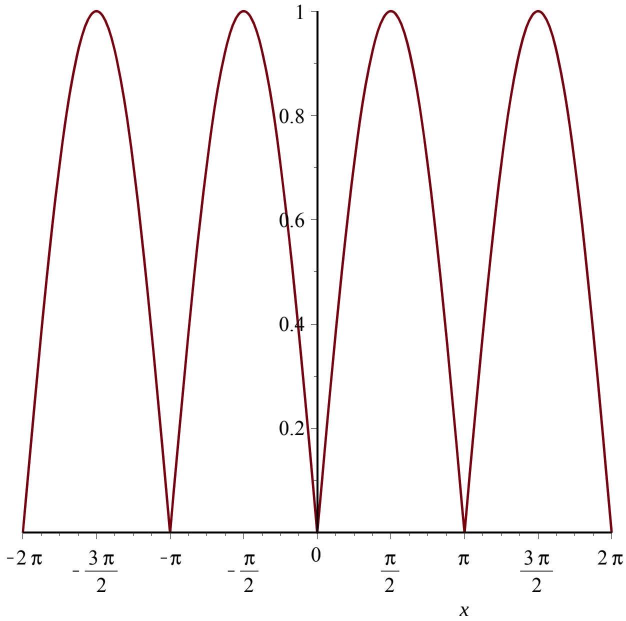
$x \mapsto |\sin(x)|,\ x \mapsto \sin(|x|),\ x \mapsto |\sin(|x|)|\ \ (x \in \mathbb{R})$.

Megoldás:

```
> f:=abs(sin(x));
```

$$f := |\sin(x)| \quad \textbf{(8.1.6.1)}$$

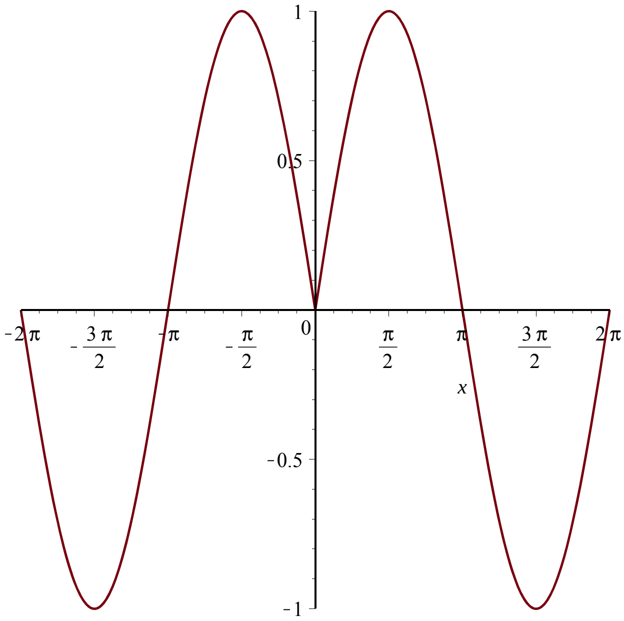
```
> plot(f);
```




```
> g:=sin(abs(x));
```

$$g := \sin(|x|) \quad \textbf{(8.1.6.2)}$$

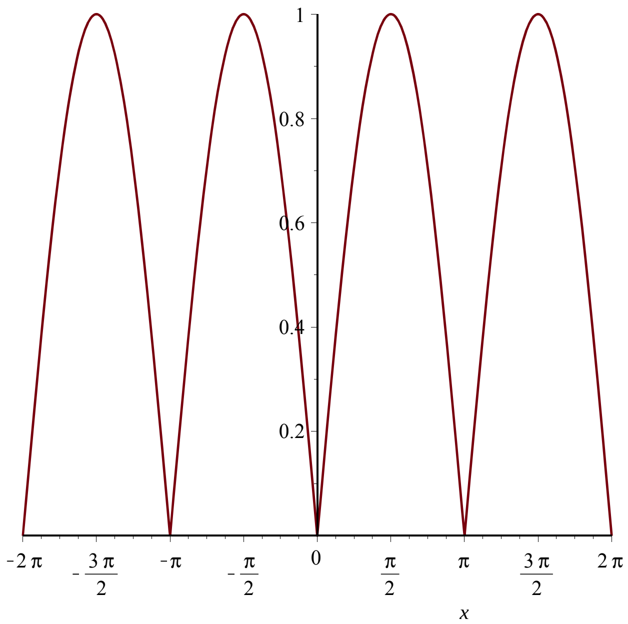
```
> plot(g);
```




```
> h:=abs(sin(abs(x)));
```

$$h := |\sin(|x|)| \qquad \textbf{(8.1.6.3)}$$

```
> plot(h);
```



7. Feladat

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \cos(x-3)$, $x \mapsto \cos(x)-3$.

Megoldás:

```
> f:=cos(x);
```

$$f := \cos(x) \tag{8.1.7.1}$$

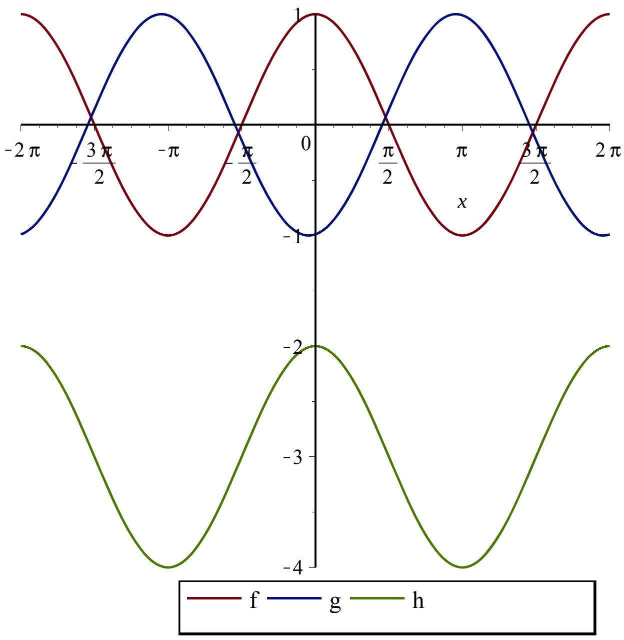
```
> g:=cos(x-3);
```

$$g := \cos(x-3) \tag{8.1.7.2}$$

```
> h:=cos(x)-3;
```

$$h := \cos(x)-3 \tag{8.1.7.3}$$

```
> plot([f,g,h]);
```



8. Feladat

Ábrázoljuk az ℝ lehető legbővebb részhalmazán a következő hozzárendelési szabályokkal megadott függvényeket:
$x \mapsto \tan(x),\ x \mapsto \tan(x+2),\ x \mapsto \tan(x)+2.$

Megoldás:

```
> f:=tan(x);
```

$$f := \tan(x) \tag{8.1.8.1}$$

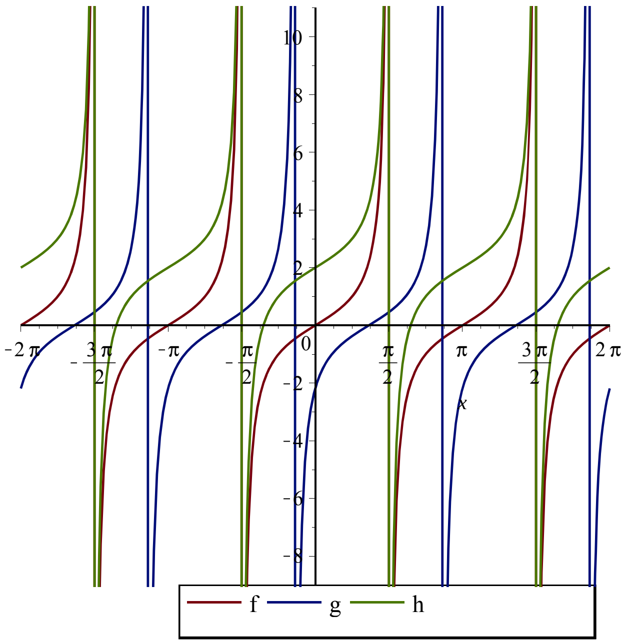
```
> g:=tan(x+2);
```

$$g := \tan(x+2) \tag{8.1.8.2}$$

```
> h:=tan(x)+2;
```

$$h := \tan(x)+2 \tag{8.1.8.3}$$

```
> plot([f,g,h]);
```



9. Feladat

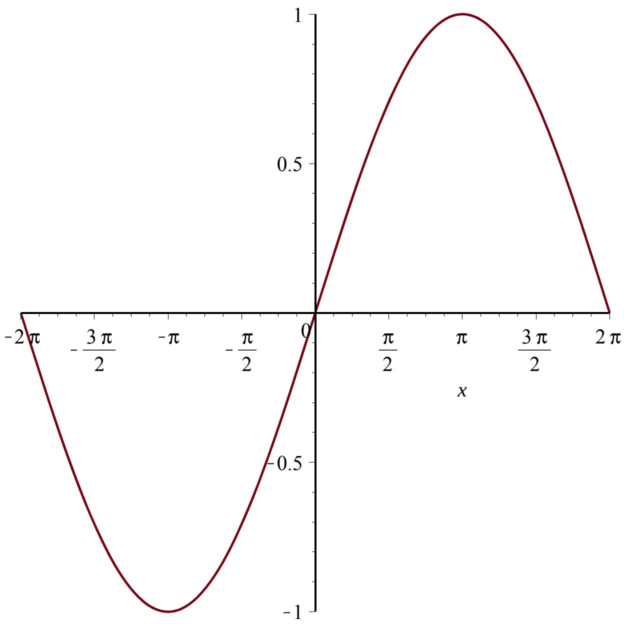
Ábrázoljuk az $\sin \circ f$ és az $f \circ \sin$ függvényt, ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} x$.

Megoldás:

```
> g:=sin((1/2)*x);
```

$$g := \sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) \tag{8.1.9.1}$$

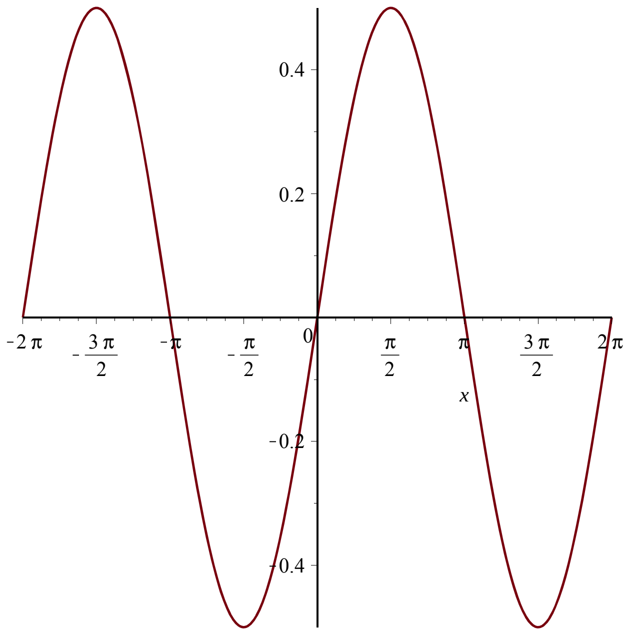
```
> plot(g);
```




```
> h:=(1/2)*sin(x);
```

$$h := \frac{1}{2}\sin(x) \qquad \textbf{(8.1.9.2)}$$

```
> plot(h);
```



10. Feladat

Ábrázoljuk az $\cos \circ f$ és az $f \circ \cos$ függvényt, ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3\,x + 6$.

Megoldás:

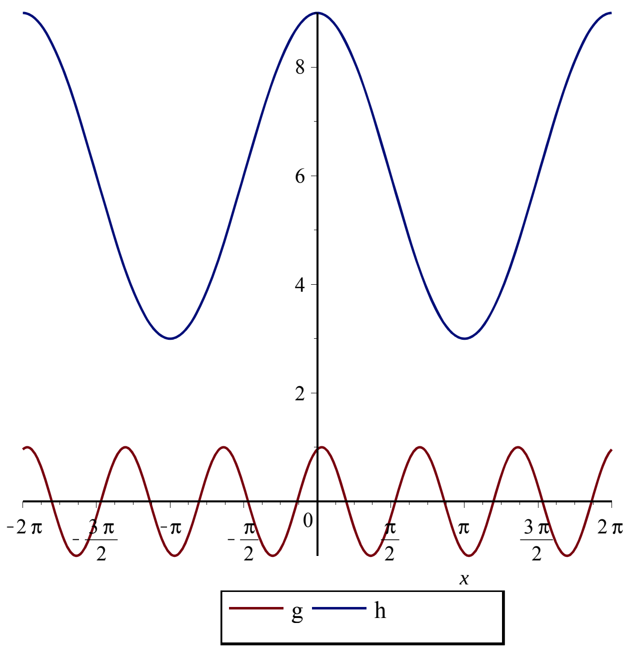
```
> g:=cos(3*x+6);
```

$$g := \cos(3\,x + 6) \tag{8.1.10.1}$$

```
> h:=3*cos(x)+6;
```

$$h := 3\cos(x) + 6 \tag{8.1.10.2}$$

```
> plot([g,h]);
```



Házi feladat

1. Feladat

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2^x,\ x \mapsto 2^{|x|},\ x \mapsto 2^{x-1}, x \mapsto 2^{|x-1|}.$

2. Feladat

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(2\,x),\ x \mapsto 2\,\sin(x),\ x \mapsto 2\,\sin(2\,x).$

3. Feladat

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(2\,x),\ x \mapsto 2\,\cos(x),\ x \mapsto 2\,\cos(2\,x).$

9. Oszthatóság, számelmélet, polinomok osztása

```
> with numtheory
```

Feladatok

1. Feladat

Mutassa meg, hogy a következő számok összetettek: $A := 10^{15} - 5^8$, $B := 100\ 000\ 000\ 047$, $C := 10^{20} - 7$!

Megoldás:

Az A szám két 5-tel osztható szám különbsége, tehát biztosan osztható 5-tel:

> $ifactor(10^{15} - 5^8)$

$$(3)\ (5)^8\ (853333333) \quad \textbf{(9.1.1.1)}$$

A B szám számjegyeinek összege $1 + 4 + 7 = 12$, ami 3-mal osztható szám, tehát B biztosan osztható 3-mal.

> $ifactor(100000000047)$

$$(3)\ (23)\ (523)\ (2771081) \quad \textbf{(9.1.1.2)}$$

A C szám számjegyeinek összege szintén osztható 3-mal, mert

$10^{20} - 7$

$$99999999999999999993 \quad \textbf{(9.1.1.3)}$$

> $ifactor(10^{20} - 7)$

$$(3)\ (29)^2\ (1039)\ (11256299321)\ (3389) \quad \textbf{(9.1.1.4)}$$

2. Feladat

Melyik az a legkisebb és legnagyobb háromjegyű szám, amelyet 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztva maradékul rendre 1-et, 2-t, 3-at, 4-et és 5-öt kapunk?

Megoldás:

Ha a keresett számhoz egyet adunk, akkor 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal is osztható számot kapunk. Tehát n+1 többszöröse ezek legkisebb közös többszörösének:

> $ilcm(2, 3, 4, 5, 6)$

$$60 \quad \textbf{(9.1.2.1)}$$

A kersett számok tehát $n = 60\,k - 1$ alakúak. Ezek közül háromjegyűek, amelyekre $100 < 60\,k - 1 < 1000$.

> $isolve(\{100 < 60\,x - 1, 60\,x - 1 < 1000\})$

$$\{x=2\}, \{x=3\}, \{x=4\}, \{x=5\}, \{x=6\}, \{x=7\}, \{x=8\}, \{x=9\}, \{x=10\}, \{x=11\}, \{x=12\}, \{x=13\}, \{x=14\}, \{x=15\}, \{x=16\} \quad \textbf{(9.1.2.2)}$$

A legkisebb keresett szám tehát: $2 \cdot 60 - 1$

$$119 \quad \textbf{(9.1.2.3)}$$

A legnagyobb keresett szám: $16 \cdot 60 - 1$

$$959 \quad \textbf{(9.1.2.4)}$$

3. Feladat

Milyen számok állhatnak a és b helyén, és miért, ha $12|6\,a423\,b$ hatjegyű számnak?

Megoldás:

Egy szám 12-vel osztható, ha 3-mal és 4-gyel is osztható. Nézzük először a 4-gyel való

oszthazóságot: az utolsó két számjegyből álló számnak kell 4-gyel oszthatónak lennie, tehát $b1=2$ vagy $b2=6$ lehet.
Hárommal való oszthatóság esetén a számjegyek összegét kell vizsgálni.
1. esetben $6+x+4+2+3+2=3y$

$$17+x=3y \tag{9.1.3.1}$$

> $isolve(\{17+x=3\,y\})$

$$\{x=-17+3\_Z1, y=\_Z1\} \tag{9.1.3.2}$$

2. esetben $6+z+4+2+3+6=3\,u$

$$21+z=3u \tag{9.1.3.3}$$

> $isolve(\{21+z=3u\})$

$$\{u=\_Z1, z=-21+3\_Z1\} \tag{9.1.3.4}$$

Ezek alapján a lehetséges számok:
1. esetben:614232, 644232,674232
2. esetben: 634236, 664236, 694236

4. Feladat

Két szám legnagyobb közös osztója 6, legkisebb közös többszöröse 120. Az egyik szám a 24. melyik lehet a másik szám?

Megoldás:

Mivel két szám legkisebb közös többszörösének és a legnagyobb közös osztójának szorzata egyenlő a két szám szorzatával (tétel), ezért amásik szám a $24\cdot x=6\cdot 120$

$$24x=720 \tag{9.1.4.1}$$

egyenlet megoldása lehet:

> $solve(\{24x=720\})$

$$\{x=30\} \tag{9.1.4.2}$$

A másik szám tehát a 30.

5. Feladat

Milyen pozitív természetes számokra igaz, hogy három szomszédos természetes szám köbének összege osztható 36-tal?

Megoldás:

A három szomszédos természetes szám legyen $n-1$, n, és $n+1$. Ekkor a kifejezés: $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 \tag{9.1.5.1}$$

> $expand((n-1)^3+n^3+(n+1)^3)$

$$3n^3+6n \tag{9.1.5.2}$$

Ez a kifejezés akkor osztható 36-tal, ha osztható 4-gyel és 9-cel.

> $factor(3n^3+6n)$

$$3n(n^2+2) \tag{9.1.5.3}$$

A szorzat alakból látszik, hogy minden páros szám esetén osztható 4-gyel (n és n^2+2 is páros számok), tehát $n=2k$ helyettesítéssel:
$3\cdot 2k((2k)^2+2)$

$$6\,k\left(4\,k^2+2\right) \quad \mathbf{(9.1.5.4)}$$

kifejezés 9-cel való oszthatóságát kell csak vizsgálni. Mivel ez 3-mal biztosan osztható, ezért elég csak a $2k\left(4\,k^2+2\right)$ rész 3-mal való oszthatóságát vizsgálni:
1. Ha $k=3\,m$, akkor a szám biztosan osztható 9-cel is, és így n=6m alakú számokra igaz az összefüggés.
2. Ha $k=3\,m+1$, akkor a $4\left(3\,m+1\right)^2+2$ -nek kell 3-mal oszthatónak lennie:

> $expand\left(4\cdot\left(3\,m+1\right)^2+2\right)$

$$36\,m^2+24\,m+6 \quad \mathbf{(9.1.5.5)}$$

Ennek a kifejezésnek minden tagja osztható 3-mal, tehát az összegük is osztható 3-mal.
3. Ha $k=3\,m+2$, akkor a $4\left(3\,m+2\right)^2+2$ -nek kell 3-mal oszthatónak lennie:

> $expand\left(4\left(3\,m+2\right)^2+2\right)$

$$36\,m^2+48\,m+18 \quad \mathbf{(9.1.5.6)}$$

Ennek a kifejezésnek minden tagja osztható 3-mal, tehát az összegük is osztható 3-mal.
Tehát minden $n=2\,k$ esetén, ahol $k\in\mathbb{N}$ az eredeti kifejezés osztható 36-tal.

6. Feladat

Állítsa elő a $\frac{230}{77}$ törtet két olyan pozitív tört összegeként, amelyek nevezője 7 illetve 11!

Megoldás:

> $restart$

A feladat a $\frac{230}{77}=\frac{x}{7}+\frac{y}{11}$ diophantoszi egyenlet megoldását jelenti:

> $isolve\left(\left\{\frac{230}{77}=\frac{x}{7}+\frac{y}{11}\right\}\right)$

$$\{x=5+7\,\_Z1,\,y=25-11\,\_Z1\} \quad \mathbf{(9.1.6.1)}$$

Ezek alapján $x=12$ és $y=14$ pozitív megoldás, azaz: $\frac{12}{7}+\frac{14}{11}$

$$\frac{230}{77} \quad \mathbf{(9.1.6.2)}$$

valamint $x=19$és $y=3$ ad még pozitív megoldást, azaz: $\frac{19}{7}+\frac{3}{11}$

$$\frac{230}{77} \quad \mathbf{(9.1.6.3)}$$

Minden más esetben $y<0$.

7. Feladat

Alakítsa szorzattá a következő polinomokat, majd határozza meg a legnagyobb közös osztójukat:
$p:=x^4-3\,x^3-3\,x^2+11\,x-6$ és $q:=x^2-4\,x+3$

Megoldás:

> $restart$

$p:=x^4-3\,x^3-3\,x^2+11\,x-6$

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 \quad (9.1.7.1)$$

> factor(p)

$$(x+2)(x-3)(x-1)^2 \quad (9.1.7.2)$$

$q := x^2 - 4x + 3$

$$x^2 - 4x + 3 \quad (9.1.7.3)$$

> factor(q)

$$(x-1)(x-3) \quad (9.1.7.4)$$

> factor(gcd(p, q))

$$(x-1)(x-3) \quad (9.1.7.5)$$

8. Feladat

Az m és n paraméterek milyen valós értékei mellett lehetséges, hogy $(x^2 + mx + n) | (x^4 - 1)$?

Megoldás:

> restart

> factor$(x^4 - 1)$

$$(x-1)(x+1)(x^2+1) \quad (9.1.8.1)$$

Az osztandó szorzótényezőit vizsgálva láthatjuk, hogy csak az $(x-1)(x+1)$ kifejezésnek lehet valós gyöke, ezért

> expand$((x-1)(x+1))$

$$x^2 - 1 \quad (9.1.8.2)$$

polinom alakot összehasonlítva az osztó polinommal leolvasható, hogy
$x^2 + mx + n = x^2 - 1$
azonosság csak az $m = 0$ és $n = -1$ esetben.

9. Feladat

Bontsa parciális törtekre a következő algebrai törtet: $\dfrac{7x - 13}{x^2 - 2x - 3}$!

Megoldás:

> factor$(x^2 - 2x - 3)$

$$(x+1)(x-3) \quad (9.1.9.1)$$

Parciális törtekre bontás a következő alakban történő feírást jelenti:
$\dfrac{7x - 13}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-3}$

$$\frac{7x - 13}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} \quad (9.1.9.2)$$

Vonjuk össze a jobb oldalon lévő kifejezést:

> $normal\left(\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-3}\right)$

$$\frac{a\,x-3\,a+b\,x+b}{(x+1)\,(x-3)} \qquad (9.1.9.3)$$

A kapott algebrai tört számlálójának azonosnak kell lennie az eredeti számlálóval:
$7\,x-13=(a+b)x-3\,a+b$ azonosság, ha $7=a+b$ és $-13=-3\,a+b$

> $solve(\{7=a+b,-13=-3\,a+b\})$

$$\{a=5,\ b=2\} \qquad (9.1.9.4)$$

Tehát a parciális tört alkja az eredeti algebrai törtnek: $\frac{5}{x+1}+\frac{2}{x-3}$.

10. Feladat

Bontsa parciális törtekre a következő algebrai törtet: $\frac{2\,x^2-6\,x+11}{x^2-7\,x+12}$!

Megoldás:

> $restart$

> $factor(x^2-7\,x+12)$

$$(x-3)\,(x-4) \qquad (9.1.10.1)$$

Parciális törtekre bontás a következő alakban történő feírást jelenti:

$\frac{2\,x^2-6\,x+11}{x^2-7\,x+12}=\frac{(ax+b)}{x-3}+\frac{(cx+d)}{x-4}$

$$\frac{2\,x^2-6\,x+11}{x^2-7\,x+12}=\frac{ax+b}{x-3}+\frac{cx+d}{x-4} \qquad (9.1.10.2)$$

> $normal\left(\frac{ax+b}{x-3}+\frac{cx+d}{x-4}\right)$

$$\frac{ax\,x-4\,ax+b\,x-4\,b+cx\,x-3\,cx+d\,x-3\,d}{(x-3)\,(x-4)} \qquad (9.1.10.3)$$

A kapott algebrai tört számlálójának azonosnak kell lennie az eredeti számlálóval:
$2\,x^2-6\,x+11=(a+c)x^2+(-4\,a+b-3\,c+d)x-4\,b-3\,d$ azonosság, ha
$2=a+c$, és $-6=-4\,a+b-3\,c+d$ és $11=-4\,b-3\,d$

> $solve(\{2=a+c,-6=-4\,a+b-3\,c+d,\ 11=-4\,b-3\,d\})$

$$\{a=2-c,\ b=-17+3\,c,\ c=c,\ d=19-4\,c\} \qquad (9.1.10.1.1)$$

Az eredeti algebrai törtnek tehát többféle parciális törtekre bontása létezik:

$\frac{2\,x^2-6\,x+11}{x^2-7\,x+12}=\frac{(2-c)\,x-17+3\,c}{x-3}+\frac{cx+19-4\,c}{x-4}$

c=0 esetben: $\frac{2\,x-17}{x-3}+\frac{19}{x-4}$

> $normal\left(\frac{2\,x-17}{x-3}+\frac{19}{x-4}\right)$

$$(9.1.10.4)$$

$$\frac{2x^2-6x+11}{(x-3)\,(x-4)} \quad (9.1.10.4)$$

c=1 esetben: $\frac{x-14}{x-3}+\frac{x+15}{x-4}$

> $normal\left(\frac{x-14}{x-3}+\frac{x+15}{x-4}\right)$

$$\frac{2x^2-6x+11}{(x-3)\,(x-4)} \quad (9.1.10.5)$$

c=2 esetben: $\frac{-11}{x-3}+\frac{2x+11}{x-4}$

> $normal\left(\frac{-11}{x-3}+\frac{2x+11}{x-4}\right)$

$$\frac{2x^2-6x+11}{(x-3)\,(x-4)} \quad (9.1.10.6)$$

És így tovább!

Házi feladat

1. Feladat

50 dobozt helyezünk el egy sorban. Egy 50 fős társaság első tagja elmegy a dobozok mellett és mindegyikbe beletesz egy golyót. A második tag szintén elmegy a dobozok mellett, és minden másodikba beletesz egy golyót. A harmadik tag minden harmadik dobozba, és így tovább, az ötvenedik tag az ötvenedi kdobozba tesz egy golyót. Melyik dobozban lesz a legtöbb golyó? Lesz-e olyan doboz, amelyikben pontosan 5 golyó lesz?

2. Feladat

Ketten játszhatják 52 kaviccsal a következő játékot: felváltva vesznek el a kavicsokból, minden körben legalább 1 és legfeljebb 4 kavicsot. A játékban az nyer, aki utoljára tud elvenni kavicsokat a szabálynak megfelelően. Mi lehet a nyerő stratégia a játékban? A stratégia ismeretében ki lehet biztos nyertes: aki kezd, vagy aki másodiknak vesz el golyókat?

3. Feladat

Igazolja, hogy három egymást követő páros szám szorzata osztható 48-cal!

10. Egyenletek, egyenlőtlenségek

Feladatok

1. Feladat

Oldja meg a következő egyenlőtlenséget: $\frac{x+5}{x-2} \le \frac{x-3}{x+1}$!

Megoldás:

Adjuk meg a kezdeti feltételeket: $x-2 \ne 0 \wedge x+1 \ne 0$, azaz $x \ne 2, -1$.

Átrendezve az egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy $\frac{x+5}{x-2} - \frac{x-3}{x+1} \le 0$

$$\frac{x+5}{x-2}-\frac{x-3}{x+1}\le 0 \quad (10.1.1.1)$$

> $normal\left(\frac{x+5}{x-2}-\frac{x-3}{x+1}\le 0\right)$

$$\frac{11\,x-1}{(x-2)\,(x+1)}\le 0 \quad (10.1.1.2)$$

Egy tört értéke nem pozitív, ha a számláló és a nevező különböző előjelű, vagy a számláló 0. Az eredeti egyenlőtlenséget tehát a következő egyenlőtlenségekre bonthatjuk:
$(0\le 11\,x-1 \wedge (x-2)\cdot(x+1)<0) \vee (11\,x-1\le 0 \wedge 0<(x-2)\cdot(x+1))$

$$0\le 11\,x-1 \text{ and } (x-2)\,(x+1)<0 \text{ or } 11\,x\le 1 \text{ and } 0<(x-2)\,(x+1) \quad (10.1.1.3)$$

I.

> $solve(\{0\le 11\,x-1 \text{ and } (x-2)\,(x+1)<0\})$

$$\left\{\frac{1}{11}\le x, x<2\right\} \quad (10.1.1.4)$$

II.

> $solve(\{11\,x\le 1 \text{ and } 0<(x-2)\,(x+1)\})$

$$\{x<-1\} \quad (10.1.1.5)$$

A megoldáshalmaz tehát $M=\left\{(-\infty,-1)\cup\left[\frac{1}{11},2\right)\right\}$

2. Feladat

Határozza meg a p és q paraméterek értékét úgy, hogy a $x^2+px+q=0$ egyenlet gyökei p és q legyenek!

Megoldás:

Ha $x_1=p$ és $x_2=q$, akkor behelyettesítve az egyenletbe a gyököket, kapjuk a $p^2+p\cdot p+q=0$ és $q^2+p\cdot q+q=0$ egyenleteket.

I.

> $simplify(p^2+p\cdot p+q=0)$

$$2\,p^2+q=0 \quad (10.1.2.1)$$

II.

> $simplify(q^2+p\cdot q+q=0)$

$$q^2+p\,q+q=0 \quad (10.1.2.2)$$

> $solve(\{2\,p^2+q=0, q^2+p\,q+q=0\})$

$$\{p=0, q=0\}, \left\{p=-\frac{1}{2}, q=-\frac{1}{2}\right\}, \{p=1, q=-2\} \quad (10.1.2.3)$$

3. Feladat

Egy vontató hátsó kerekének a kerülete 2,5-szerese az első kerék kerületének. 2000 m távolságon az első kerék 600-zal többet fordul, mint a hátsó. Mekkora a kerekek sugara?

Megoldás:

> *restart*

Legyen az első kerék kerülete $k:=x$, a hátsó kerék kerülete $K:=2.5\cdot x$
Ha a hátsó kerék y fordulatot tesz meg 2000 m-en, akkor $2000=2.5\cdot x\cdot y$

$$2000 = 2.5\,x\,y \tag{10.1.3.1}$$

A feltétel szerint az első kerék 600-zal többet fordul ezen az úton, azaz $2000 = x\cdot(y+600)$

$$2000 = x\,(y+600) \tag{10.1.3.2}$$

> $solve(\{2000 = 2.5\,x\,y,\ 2000 = x\,(y+600)\})$

$$\{x = 2.,\ y = 400.\} \tag{10.1.3.3}$$

Tehát a kisebbik kerék kerülete $k = 2$, azaz $2\cdot r\cdot\pi = 2$

$$2\,r\,\pi = 2 \tag{10.1.3.4}$$

> $solve(\{2\,r\,\pi = 2\})$

$$\left\{r = \frac{1}{\pi}\right\} \tag{10.1.3.5}$$

A nagyobbik kerék kerülete $K = 2.5\cdot 2 = 5$, azaz $2\cdot R\cdot\pi = 5$

$$2\,R\,\pi = 5 \tag{10.1.3.6}$$

> $solve(\{2\,R\,\pi = 5\})$

$$\left\{R = \frac{5}{2\,\pi}\right\} \tag{10.1.3.7}$$

4. Feladat

Oldja meg a következő egyenleteket: a) $2\,x^2 - 5\,x - 3\cdot|x-2| = 0$, b) $|x^2 + 2\,x - 3| = -4\,x$!

Megoldás:

> $restart$

```
> with(plottools):
> with(plots):
```

a) Az első egyenletet oldjuk meg grafikusan: $2\,x^2 - 5\,x = 3\cdot|x-2|$ alakra hozva, legyen

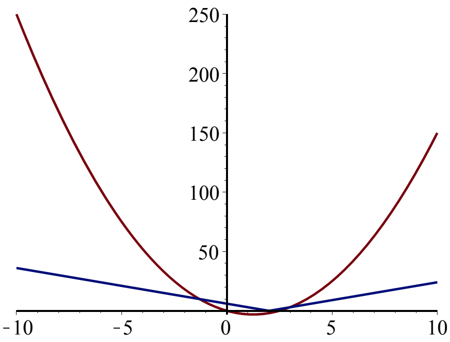
> $f(x) := 2\cdot x^2 - 5\cdot x$

$$f := x \rightarrow 2\,x^2 - 5\,x \tag{10.1.4.1}$$

> $g(x) := 3\cdot|x-2|$

$$g := x \rightarrow 3\,|x-2| \tag{10.1.4.2}$$

> $plot([f, g])$



> $solve(f=g)$

$$3, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \qquad \textbf{(10.1.4.3)}$$

b)
A második egyenletet algebrai úton oldjuk meg! Az bszolút érték definícióját értelmezve, ha:
I. $x^2+2x-3 \geq 0$, akkor az egyenlet $x^2+2x-3=-4\cdot x$ alakú lesz,
II. $x^2+2x-3 < 0$, akkor az egyenlet $-(x^2+2x-3)=-4\cdot x$ alakú lesz.

I. ha

> $solve(\{x^2+2x-3 \geq 0\})$

$$\{x \leq -3\}, \{1 \leq x\} \qquad \textbf{(10.1.4.4)}$$

akkor

> $solve(\{x^2+2x-3=-4\cdot x\})$

$$\{x=-3+2\sqrt{3}\}, \{x=-3-2\sqrt{3}\} \qquad \textbf{(10.1.4.5)}$$

A kapott megoldások közül az első nincs benne a megadott intervallumokban, tehát nem megoldás. Marad az $x_1=-3-2\sqrt{3}$

$$x_1=-3-2\sqrt{3} \qquad \textbf{(10.1.4.6)}$$

II. ha

> $solve(\{x^2+2x-3 < 0\})$

$$\{-3 < x, x < 1\} \qquad \textbf{(10.1.4.7)}$$

akkor

> $solve(\{-(x^2+2x-3)=-4\cdot x\})$

$$\{x=-1\}, \{x=3\} \qquad \textbf{(10.1.4.8)}$$

A kapott megoldások közül a második nincs benne a megadott intervallumban, tehát nem megoldás. Marad az $x_2=-1$

$$x_2=-1 \qquad \textbf{(10.1.4.9)}$$

5. Feladat

Oldja meg a következő egyenleteket: a) $\sqrt{x^2+9}=x+9$, b) $\sqrt{x+5}=x^2-5$

Megoldás:

> *restart*

a)Vizsgáljuk meg az alaphalmazt: az egyenlet bal oldala minden valós számra értelmezhető, mert $x^2+9 \geq 0$ igaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Mivel definíció szerint $\sqrt{x^2+9} \geq 0$, ezért $x+9 \geq 0$ lehet csak, azaz az alaphalmaz: $A = \{x \geq -9, x \in \mathbb{R}\}$

Ezen feltételek mellett

> $solve\left(\left\{\sqrt{x^2+9} = x+9\right\}\right)$

$$\{x = -4\} \qquad \textbf{(10.1.5.1)}$$

b) Az egyenletet oldjuk meg grafikusan!

```
> with(plottools):
> with(plots):
```

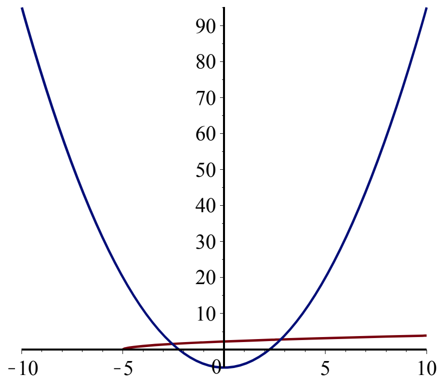
> $f(x) := \sqrt{x+5}$

$$f := x \rightarrow \sqrt{x+5} \qquad \textbf{(10.1.5.2)}$$

> $g(x) := x^2 - 5$

$$g := x \rightarrow x^2 - 5 \qquad \textbf{(10.1.5.3)}$$

> $plot([f, g])$



> $solve(\{f(x) = g(x)\})$

$$\left\{x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}\right\}, \left\{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}\right\} \qquad \textbf{(10.1.5.4)}$$

6. Feladat

Oldja meg a következő egyenleteket: a) $2^{x+3} + 4^{1-\frac{x}{2}} = 33$, b) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$

Megoldás:

> *restart*

a) A hatványozás azonosságainak segítségével az egyenlet $8\cdot 2^x + \dfrac{4}{2^x} = 33$ alakúra hozható.

Új ismeretlen bevezetésével $y := 2^x$, az egyenlet $8\cdot y + \dfrac{4}{y} = 33$ lesz.

> $solve\left(\left\{8\cdot y + \dfrac{4}{y} = 33\right\}\right)$

$$\{x=2\},\ \{x=-3\} \qquad \textbf{(10.1.6.1)}$$

b) Az egyenlet mindkét oldalát osszuk el 6^x-nel (megtehetjük, mert $6^x \neq 0$). Az egyenlet $3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 5$ alakú lesz.

Új ismeretlen bevezetésével $z := \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$, az egyenlet $3\,z + \dfrac{2}{z} = 5$ lesz.

> $solve\left(\left\{3\,z + \dfrac{2}{z} = 5\right\}\right)$

$$\{z=1\},\ \left\{z=\frac{2}{3}\right\} \qquad \textbf{(10.1.6.2)}$$

Visszahelyettesítve a kapott z értékeket:

> $solve\left(\left\{1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x\right\}\right)$

$$\{x=0\} \qquad \textbf{(10.1.6.3)}$$

> $solve\left(\left\{\dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x\right\}\right)$

$$\{x=1\} \qquad \textbf{(10.1.6.4)}$$

7. Feladat

Oldja meg a következő egyenleteket: a) $2\cdot\log_x 2 + \log_{2x} 2 + 3\cdot\log_{4x} 2 = 0$, b) $\sqrt{x^{lg\sqrt{x}}} = 10$!
Adja meg az egyenletek alaphalmazát!

Megoldás:

> *restart*

a) Az egyenlet alaphalmaza a logaritmus definíciója alapján: $A=\{x > 0, x \neq 1\}$. Az áttérés más alapú logaritmusra azonossággal az egyenlet $2\cdot\dfrac{\log_2(2)}{\log_2(x)} + \dfrac{\log_2(2)}{\log_2(2\cdot x)} + 3\cdot\dfrac{\log_2(2)}{\log_2(4\cdot x)} = 0$ alakúra hozható. Tovább alkalmazva a logaritmus azonosságokat:

$$\frac{2\cdot 1}{\log_2(x)} + \frac{1}{1+\log_2(x)} + \frac{3\cdot 1}{2+\log_2(x)} = 0$$

Vezessünk be új ismeretlent: $y := \log_2(x)$, ekkor az egyenlet $\dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{1+y} + \dfrac{3}{2+y} = 0$

lesz.

> $solve\left(\left\{\frac{2}{y}+\frac{1}{1+y}+\frac{3}{2+y}=0\right\}\right)$

$$\left\{y=-\frac{1}{2}\right\}, \left\{y=-\frac{4}{3}\right\} \quad \textbf{(10.1.7.1)}$$

Visszahelyettesítve a kapott értékeket:

> $solve\left(\left\{-\frac{1}{2}=\log_2(x)\right\}\right)$

$$\left\{x=\frac{1}{2}\sqrt{2}\right\} \quad \textbf{(10.1.7.2)}$$

> $solve\left(\left\{-\frac{4}{3}=\log_2(x)\right\}\right)$

$$\left\{x=\frac{1}{4}\,2^{2/3}\right\} \quad \textbf{(10.1.7.3)}$$

8. Feladat

Egy óra alatt hányadrészére csökken a 19,7 perc felezési idejű radioaktív bizmut-izotóp tömege, ha bomlást az $m(t)=m(0)\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$ képlet írja le, ahol m_0 a kezdeti tömeg, T a felezési idő, t az eltelt idő, m(t) pedig a t idő elteltével még radioaktív anyag tömege.

Megoldás:

A $t=60$ és $T=19.7$ adatokkal kell meghatározni az $\frac{m(60)}{m(0)}$ arányt!

$\frac{m(60)}{m(0)}=2^{-\frac{60}{19.7}}$

$$\frac{m(60)}{m(0)}=0.1211036893 \quad \textbf{(10.1.8.1)}$$

Tehát egy óra alatt az eredeti tömegnek a 0.1211036893 része (azaz kb. 12%-a) lesz csak radioaktív.

9. Feladat

Egy reklámcélra használt léggömbbe 3000 m^3 gázt töltenek. A gázveszteség (a léggömb nem zár tökéletesen) 10 nap alatt kb *2%*, és ez a csökkenés állandónak tekinthető, nem függ a pillanatnyi gázmennyiségtől (azaz 10 naponként mindig a megmaradt gázmennyiség 2%-val csökken). Hány százalék a gázveszteség 1 hónap (30 nap) alatt? Mennyi ideig tud a léggömb a levegőben tartózkodni, ha *80%* alatti gázmennyiség esetén már süllyedni kezd?

Megoldás:

Legyen $V(0) := 3000$, és 10 napos egységekben számolva $V(1)=0.98\cdot V(0)$, $V(2)=0.98^2\cdot V(0)$, $V(3)=0.98^3\cdot V(0)$, ...$V(x)=0.98^x\cdot V(0)$

$$V(x)=0.98^x\,V(0) \quad \textbf{(10.1.9.1)}$$

a) Egy hónap múlva ezek alapján: $V(3)=0.98^3\cdot 3000\left(m^3\right)$

$$V(3)=2823.576000\,m^3 \quad \textbf{(10.1.9.2)}$$

A veszteség tehát $1-\frac{2823.576}{3000}$

$$0.0588080000 \qquad (10.1.9.3)$$

Azaz kb. 5.88%.

b) A 3000 m^3 eredeti gázmennyiség 80%-a: $3000 \cdot 0.8\ m^3$

$$2400.0\ m^3 \qquad (10.1.9.4)$$

Tehát $V(x)=2400\ m^3$-hez keressük az x értékét!

> $solve(2400 = 0.98^x \cdot 3000)$

$$11.04523012 \qquad (10.1.9.5)$$

Mivel az időegységünk 10 nap volt, a kapott eredmény azt jelenti, hogy $10 \cdot 11.04523012$

$$110.4523012 \qquad (10.1.9.6)$$

napig tud a levegőben maradni a léggömb.

10. Feladat

Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket: a) $\left(\frac{49-x^2}{33}\right)^{x^2-x-30} \leq 1$, b) $\log_2 x - 3 \cdot \log_x 32 \leq 2$

Megoldás:

> $restart$

a) az egyenlet megoldhatóságának feltétele, hogy $\frac{(49-x^2)}{33} > 0$

$$0 < \frac{49}{33} - \frac{1}{33}x^2 \qquad (10.1.10.1)$$

> $solve\left(0 < \frac{49}{33} - \frac{1}{33}x^2\right)$

$$RealRange(Open(-7), Open(7)) \qquad (10.1.10.2)$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát: $(x^2-x-30)\cdot \ln\left(\frac{49-x^2}{33}\right) \leq \ln(1)$

$$(x^2-x-30)\ln\left(\frac{49}{33}-\frac{1}{33}x^2\right) \leq 0 \qquad (10.1.10.3)$$

Egy szorzat nem pozitív, ha tényezők előjele ellentétes, vagy valamelyik tényező 0, tehát az egyenlőtlenség ekvivalens a következő egyenlőtlenségekkel:

I. $x^2-x-30 \leq 0 \wedge \ln\left(\frac{49}{33}-\frac{1}{33}x^2\right) \geq 0$

$$x^2-x \leq 30 \text{ and } 0 \leq \ln\left(\frac{49}{33}-\frac{1}{33}x^2\right) \qquad (10.1.10.4)$$

> $solve\left(x^2-x \leq 30 \text{ and } 0 \leq \ln\left(\frac{49}{33}-\frac{1}{33}x^2\right)\right)$

$$RealRange(-4, 4) \qquad (10.1.10.5)$$

vagy

II.

$x^2 - x - 30 \geq 0 \wedge \ln\left(\frac{49}{33} - \frac{1}{33}x^2\right) \leq 0$

$$0 \leq x^2 - x - 30 \textbf{ and } \ln\left(\frac{49}{33} - \frac{1}{33}x^2\right) \leq 0 \qquad \textbf{(10.1.10.6)}$$

> $solve\left(0 \leq x^2 - x - 30 \textbf{ and } \ln\left(\frac{49}{33} - \frac{1}{33}x^2\right) \leq 0\right)$

$$RealRange(Open(-7), -5), RealRange(6, Open(7)) \qquad \textbf{(10.1.10.7)}$$

Házi feladat

1. Feladat

Néhány kereskedőnek 8240 korona közös tőkéje van. Mindegyikük még negyvenszer annyi koronát ad hozzá, mint ahányan társultak. Befektetéseik nyomán az egészhez annyi százalékot nyernek, mint ahányan vannak. A hasznot felosztják, mindegyikük tízszer annyi koronát kap, mint ahányan vannak, és még megmarad 224 korona. Számítsa ki, hányan társultak! (Euler nyomán)

2. Feladat

Magyarország népességcsökkenése évi 4 ezrelék. Ha ez hosszabb időn keresztül állandónak bizonyul, akkor hány év alatt csökken a kezdeti 10 milliós lakosságszám 8 millióra?

3. Feladat

Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket: a) $4^x < 2^{x+1} + 3$, b) $\log_2\left(\sqrt{x+3} - x - 1\right) \leq 0$

11. Trigonometriai azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek

Feladatok

1. Feladat

Határozza meg α és β többi szögfüggvényének értékét, ha $sin\alpha = \frac{4}{5}$, illetve $cos\beta = 0,65$!

Megoldás:

a) A pitagoraszi összefüggés alapján:

> $\sin(\alpha) := \frac{4}{5}$

$$\sin(\alpha) := \frac{4}{5} \qquad \textbf{(11.1.1.1)}$$

> $\cos(\alpha) := \sqrt{1 - (\sin(\alpha))^2}$

$$\cos(\alpha) := \frac{3}{5} \quad \textbf{(11.1.1.2)}$$

> $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

$$\tan(\alpha) = \frac{4}{3} \quad \textbf{(11.1.1.3)}$$

> $\cot(\alpha) = \dfrac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)}$

$$\frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{3}{4} \quad \textbf{(11.1.1.4)}$$

b)

> $\cos(\beta) := 0.65$

$$\cos(\beta) := 0.65 \quad \textbf{(11.1.1.5)}$$

> $\sin(\beta) := \sqrt{1 - (\cos(\beta))^2}$

$$\sin(\beta) := 0.7599342077 \quad \textbf{(11.1.1.6)}$$

> $\tan(\beta) = \dfrac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$

$$\tan(\beta) = 1.169129550 \quad \textbf{(11.1.1.7)}$$

> $\cot(\beta) = \dfrac{1}{1.169129550}$

$$\cot(\beta) = 0.8553372036 \quad \textbf{(11.1.1.8)}$$

2. Feladat

Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést, és adja meg az értelmezési tartományát:

$$\frac{(\cos(\alpha))^2}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)} \cdot \frac{((\tan(\alpha))^2 - 1)}{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)} \;!$$

Megoldás:

> *restart*

> $expand\left(\dfrac{(\cos(\alpha))^2}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)} \cdot \dfrac{((\tan(\alpha))^2 - 1)}{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)}\right)$

$$\frac{\cos(\alpha)^2 \tan(\alpha)^2}{(\sin(\alpha) - \cos(\alpha))\,(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))} - \frac{\cos(\alpha)^2}{(\sin(\alpha) - \cos(\alpha))\,(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))} \quad \textbf{(11.1.2.1)}$$

> $simplify\left(\frac{\cos(\alpha)^2\tan(\alpha)^2}{(\sin(\alpha)-\cos(\alpha))\,(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))} - \frac{\cos(\alpha)^2}{(\sin(\alpha)-\cos(\alpha))\,(\sin(\alpha)+\cos(\alpha))}\right)$

$$1 \tag{11.1.2.2}$$

> $solve(\sin(\alpha)-\cos(\alpha)=0)$

$$\frac{1}{4}\pi \tag{11.1.2.3}$$

> $solve(\sin(\alpha)+\cos(\alpha)=0)$

$$-\frac{1}{4}\pi \tag{11.1.2.4}$$

>

Az értelmezési tatrománya: $A=\left\{\alpha\in\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{4}\pi+k\cdot 2\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right\}$

3. Feladat

Addíciós tételek segítségével hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2$!

Megoldás:

> $expand\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(\alpha)-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(\alpha) \tag{11.1.3.1}$$

> $expand\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(\alpha)-\frac{1}{2}\sin(\alpha) \tag{11.1.3.2}$$

> $expand\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(\alpha)-\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(\alpha) \tag{11.1.3.3}$$

> $expand\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right)$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos(\alpha)-\frac{1}{2}\sin(\alpha) \tag{11.1.3.4}$$

> $\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2$

$$\frac{1}{4} \tag{11.1.3.5}$$

$$> \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2$$

$$\frac{3}{4} \qquad \textbf{(11.1.3.6)}$$

$$> simplify\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2\right)$$

$$1 \qquad \textbf{(11.1.3.7)}$$

4. Feladat

A rugóra akasztott harmonikus rezgőmozgást végző test kitérését az $y = A\cdot\sin\left(\frac{2\,\pi t}{T}+\varphi\right)$ egyenlet írja le, ahol y a pillanatnyi kitérés, A az amplitúdó, t a mérés kezdete óta eltelt idő, T a rezgés periódusideje, φ pedig a kezdő fázis (radiánban). Mekkora lehet annak a rezgő testnek a kezdő fázisa, amelynek a $t=\frac{T}{8}$ pillanatban éppen maximális a kitérése? Mekkora az amplitúdó, ha $t=0$ pillanatban a kitérés $y = 1,41\ cm$?

Megoldás:

a) Helyettesítsük a képletbe $t=\frac{T}{8}$ és $y = A$ értékeket! Ekkor az egyenlet

$A = A\cdot\sin\left(\frac{\frac{2\,\pi T}{8}}{T}+\varphi\right)$, egyszerűsítve: $1=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)$

$$> solve\left(1=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)$$

$$\frac{1}{4}\pi \qquad \textbf{(11.1.4.1)}$$

$>$

Tehát a kezdőfázis $\varphi = \frac{1}{4}\pi$.

b) Helyettesítsük a képletbe $t=0$ és $y=1.41$ értékeket! Ekkor az egyenlet $1.41 = A\cdot\sin\left(\frac{1}{4}\cdot\pi\right)$ alakú lesz.

$$> solve\left(1.41 = A\cdot\sin\left(\frac{1}{4}\cdot\pi\right)\right)$$

$$1.994041123 \qquad \textbf{(11.1.4.2)}$$

$>$

Az amplitúdó nagysága tehát $A = 1.994041123\ cm$

5. Feladat

A felsoroltak közül mely állítások igazak az $\frac{1}{cosx - sinx + 1}$ kifejezésre? Válaszát indokolja!

a) minden valós számra értelmezhető.
b) végtelen sok valós számra nincs értelmezve.

c) van olyan valós szám, amelyre a kifejezés értéke

$\frac{1}{2}$.

d) van olyan valós szám, amelyre a kifejezés értéke 2.

Megoldás:

a) hamis, mert azokra a valós számokra nincs értelmezve, amelyekre $\cos(x)-\sin(x)+1=0$.

```
> solve(cos(x) - sin(x) + 1 = 0)
```

$$\frac{1}{2}\pi, \pi \tag{11.1.5.1}$$

```
>
```

b)igaz, kifejezés nincs értelmezve a $H=\left\{x \in \mathbb{R}, x=\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\cdot\pi \vee x=(2k+1)\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$halmaz elemeire.

c)igaz

```
> solve(1/(cos(x) - sin(x) + 1) = 1/2)
```

$$-\frac{1}{2}\pi, 0 \tag{11.1.5.2}$$

```
>
```

d)igaz

```
> solve(1/(cos(x) - sin(x) + 1) = 2)
```

$$\arctan\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{7}}{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{7}}\right), \arctan\left(\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{7}}{-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{7}}\right)-\pi \tag{11.1.5.3}$$

6. Feladat

Határozza meg a valós számoknak azt a legbővebb halmazát, amelyen a $\sqrt{\tan(x+1)}$ kifejezés értelmezhető! Milyen értékeket vehet fel a kifejezés ezen a halmazon?

Megoldás:

Mivel a tangens szögfüggvény nem értelmezhető $\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}$ helyeken, ezért

$x \neq \left(\frac{\pi}{2}-1\right)+k\cdot\pi$, valamint a négyzetgyök definíciója miatt csak $\tan(x+1) \geq 0$

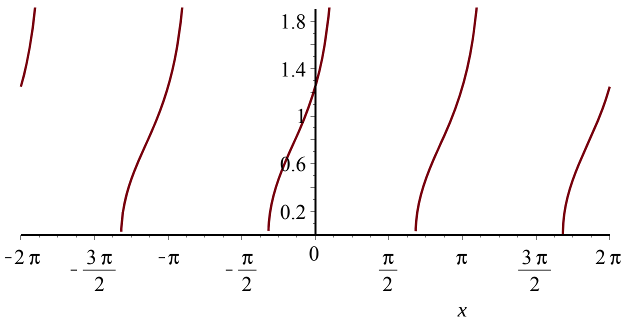
lehetséges, azaz $0+k\cdot\pi \leq x+1 < \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$

A kifejezés alaphalmaza tehát: $A=\left\{x \in \mathbb{R}, -1+k\cdot\pi \leq x < \left(\frac{\pi}{2}-1\right)+k\cdot\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Ezen a halmazon a $\tan(x+1)$ kifejezés $[0,\infty)$ értkeket vesz fel, ezért a $\sqrt{\tan(x+1)}$ kifejezés értékei is a $[0,\infty)$ intervallum elemei lehetnek.

Ellenőrzés képpen nézzük meg az $f(x)=\sqrt{\tan(x+1)}$ függvény grafikonját!

> $plot\left(\sqrt{\tan(x+1)}\right)$



7. Feladat

Adja meg az alábbi egyenlet $[0; 20]$ intervallumba eső megoldásait:
$\cos\left(\frac{x}{\pi} - \frac{1}{3}\right) = \sin\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)$!

Megoldás:

> $solve\left(\cos\left(x - \frac{1}{3}\right) = \sin\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)\right)$

$$\frac{1}{6}\,\frac{-4\,\pi + 3\,\pi^2 - 6}{\pi} \qquad \textbf{(11.1.7.1)}$$

> $x_1 := expand\left(\frac{1}{6}\,\frac{-4\,\pi + 3\,\pi^2 - 6}{\pi}\right)$

$$x_1 := -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\,\pi - \frac{1}{\pi} \qquad \textbf{(11.1.7.2)}$$

> $x_2 := 2\,\pi - x_1$

$$x_2 := \frac{3}{2}\,\pi + \frac{2}{3} + \frac{1}{\pi} \qquad \textbf{(11.1.7.3)}$$

Az eredmények közelítő értéke: $x_1 \approx 0.5858$ és $x_2 = 5.6974$. A periodikusság miatt minden $x_k = x_1 + k \cdot 2\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ és $x_n = x_2 + n2\,\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ is megoldás, ezért a $[0, 20]$ intervallumon összesen a következő megoldások lesznek (közelítő értékkel): $\{0.5858, 5.6974, 7.4548, 11.9806, 13.1522, 18.2638, 19.4354\}$

8. Feladat

Oldja meg a következő egyenletet: $\sqrt{1 + \sin(x)} + \sqrt{1 - (\sin(x))^2} = 2\cos(x)$!

Megoldás:

Először vizsgáljuk meg az egyenlet alaphalmazát: csak olyan $x \in \mathbb{R}$ számokra értelmezhető, melyekre $1+\sin(x)\geq 0$ és $1-(\sin(x))^2\geq 0$. Mivel $-1\leq\sin(x)\leq 1$, ezért a feltétel minden $x\in\mathbb{R}$ esetén tejlesül.

Mivel $\sqrt{1-(\sin(x))^2}=\cos(x)$, ezért az egyenlet $\sqrt{1+\sin(x)}=\cos(x)$ alakra hozható. Ennek csak akkor lehet megoldása a négyzetgyök definíciója alapján, ha $0\leq\cos(x)\leq 1$, azaz $-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\leq x\leq\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

> $solve\left(\sqrt{1+\sin(x)}=\cos(x)\right)$

$$0,\ -\frac{1}{2}\pi \tag{11.1.8.1}$$

>

Ezek a megoldások az adott intervallumnak elemei. Az összes megoldás:

$x_1=0+k\cdot 2\pi$, $x_2=-\frac{1}{2}\pi+k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

9. Feladat

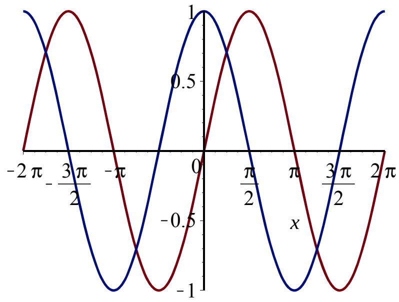
Adja meg a valós számok legbővebb halmazát, amelyen a következő egyenlet értelmezhető, majd oldja meg az egyenletet: $\sin(x)+\cos(x)=\frac{1}{\sin(x)}+\frac{1}{\cos(x)}$!

Megoldás:

Az egyenlet nem értelmezhető a $\sin(x)=0$ és $\cos(x)=0$ helyeken. Ábrázoljuk a két függvényt, és nézzük meg a zérushelyeiket:

> $restart$

> $plot([\sin(x),\cos(x)])$



>

Az alaphalmaz tehát: $A=\left\{x\in\mathbb{R}, x\neq\frac{k\cdot\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$. Az egyenlet jobb oldalát átalakítva a következőt kapjuk: $\sin(x)+\cos(x)=\frac{(\sin(x)+\cos(x))}{\sin(x)\cdot\cos(x)}$

I. Mindkét olda 0-val egyenlő, ha $\sin(x)+\cos(x)=0$

> $solve(\sin(x)+\cos(x)=0)$

$$-\frac{1}{4}\pi \tag{11.1.9.1}$$

> $x_1 =- \frac{1}{4} \cdot \pi + k \cdot \pi$

$$x_1 = -\frac{1}{4}\pi + k\pi \qquad \textbf{(11.1.9.2)}$$

II. Ha $\sin(x) + \cos(x) \neq 0$, akkor mindkét oldalt elosztva ezzel a kifejezéssel kapjuk, hogy $1 = \frac{1}{\sin(x) \cdot \cos(x)}$.

> $solve\left(1 = \frac{1}{\sin(x) \cdot \cos(x)}\right)$

$$\arctan\left(-\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^3 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{I}, \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\right), \arctan\left(-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^3 - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{I}, -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\right), \arctan\left(-\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^3 - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\mathrm{I}, -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\mathrm{I}\right), \arctan\left(-\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^3 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\mathrm{I}, \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\mathrm{I}\right) \qquad \textbf{(11.1.9.3)}$$

A második esetben tehát csak komplex eredményeket kapunk, nincs más valós megoldás, mint x_1.

10. Feladat

Melyek azok a valós számok, amelyekre $\cos(x)\left(\tan(x) - \frac{1}{\cos(x)}\right) < 0$?

Megoldás:

Az egyenlőtlenség alaphalmazát vizsgáljuk meg: ez azonos a $\tan(x)$ függvény értelmezési tartományával, azaz $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}$.

> $simplify\left(\cos(x)\left(\tan(x) - \frac{1}{\cos(x)}\right)\right)$

$$\cos(x)\left(\frac{\sin(x) - 1}{\cos(x)}\right) \qquad \textbf{(11.1.10.1)}$$

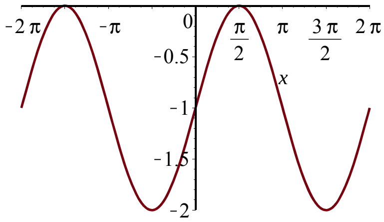
> $\cos(x)\left(\frac{\sin(x) - 1}{\cos(x)}\right) < 0$

Mivel $\cos(x) \neq 0$, ezért egyszerűsíthetünk vele:

> $solve(\sin(x) - 1 < 0)$

$$RealRange\left(Open\left(-\frac{3}{2}\pi\right), Open\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right), RealRange\left(Open\left(\frac{1}{2}\pi\right), Open\left(\frac{5}{2}\pi\right)\right) \qquad \textbf{(11.1.10.2)}$$

> $plot(\sin(x) - 1)$



Házi feladat

1. Feladat

Határozza meg a valós számoknak a lehető legbővebb halmazát, amelyen a $\log_5(\sin x)$ kifejezés értelmezhető. Milyen értékeket vehet fel a kifejezés ezen a halmazon?

2. Feladat

Szögei vagy oldalai szerint milyen az a háromszög, amelynek két belső szögére igaz, hogy $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$?

3. Feladat

Melyek azok a valós számok a $[0; 2\,\pi]$, intervallumban, amelyekre $\cos^2 x - \sin^2 x < \cos x$?

12. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

Feladatok

1. Feladat

Számítsa ki az alábbi mátrix determinánsát:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

```
> A:=matrix(4,4,[-1,2,5,4,1,3,4,5,-1,4,3,2,0,5,2,3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(12.1.1.1)}$$

```
> with(linalg):
```

```
> det(A);
```

$$28 \tag{12.1.1.2}$$

2. Feladat

Számítsa ki az alábbi mátrix determinánsát:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

```
> A:=matrix(3,3,[1,1,1,1,2,3,1,4,9]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \tag{12.1.2.1}$$

```
> det(A);
```

$$2 \tag{12.1.2.2}$$

3. Feladat

Határozza meg x értékét úgy, hogy teljesüljön a következő egyenlőség:

$$\begin{bmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Megoldás:

```
> A:=matrix(3,3,[x^2,4,9,x,2,3,1,1,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{12.1.3.1}$$

```
> a:=det(A);
```

$$a := -x^2 + 5\,x - 6 \tag{12.1.3.2}$$

```
> solve(a,x);
```

$$2, 3 \tag{12.1.3.3}$$

4. Feladat

Határozza meg x értékét úgy, hogy teljesüljön a következő egyenlőség:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Megoldás:

```
> A:=matrix(3,3,[x,1,1,1,x,1,1,1,x]);
```

$$A := \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix} \qquad (12.1.4.1)$$

```
> a:=det(A);
```

$$a := x^3 - 3x + 2 \qquad (12.1.4.2)$$

```
> solve(a,x);
```

$$-2, 1, 1 \qquad (12.1.4.3)$$

5. Feladat

Oldja meg a Cramer-szabály felhasználásával a következő lineáris egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Megoldás:

```
> A:=matrix(3,3,[1,4,2,-3,2,1,4,-1,-1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (12.1.5.1)$$

```
> b:=vector(3,[5,-1,2]);
```

$$b := \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (12.1.5.2)$$

```
> with(linalg):
> A1:=augment(b,col(A,2),col(A,3));
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (12.1.5.3)$$

```
> A2:=augment(col(A,1),b,col(A,3));
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad (12.1.5.4)$$

```
> A3:=augment(col(A,1),col(A,2),b);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (12.1.5.5)$$

```
> x1:=det(A1)/det(A);
```

$$x1 := 1 \quad (12.1.5.6)$$

```
> x2:=det(A2)/det(A);
```

$$x2 := 0 \quad (12.1.5.7)$$

```
> x3:=det(A3)/det(A);
```

$$x3 := 2 \quad (12.1.5.8)$$

```
> x:=linsolve(A,b);
```

$$x := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (12.1.5.9)$$

6. Feladat

Oldja meg a Cramer-szabály felhasználásával a következő lineáris egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} x + y - z &= -2 \\ x - 2y + 3z &= 5 \\ x + 3y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

Megoldás:

```
> A:=matrix(3,3,[1,1,-1,1,-2,3,1,3,4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (12.1.6.1)$$

```
> b:=vector(3,[-2,5,6]);
```

$$b := \begin{bmatrix} -2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad (12.1.6.2)$$

```
> with(linalg):
> A1:=augment(b,col(A,2),col(A,3));
```

$$A1 := \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (12.1.6.3)$$

```
> A2:=augment(col(A,1),b,col(A,3));
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (12.1.6.4)$$

```
> A3:=augment(col(A,1),col(A,2),b);
```

(12.1.6.5)

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \tag{12.1.6.5}$$

```
> x1:=det(A1)/det(A);
```

$$x1 := -\frac{5}{23} \tag{12.1.6.6}$$

```
> x2:=det(A2)/det(A);
```

$$x2 := -\frac{3}{23} \tag{12.1.6.7}$$

```
> x3:=det(A3)/det(A);
```

$$x3 := \frac{38}{23} \tag{12.1.6.8}$$

```
> x:=linsolve(A,b);
```

$$x := \begin{bmatrix} -\frac{5}{23} & -\frac{3}{23} & \frac{38}{23} \end{bmatrix} \tag{12.1.6.9}$$

7. Feladat

Oldja meg a Cramer-szabály felhasználásával a következő lineáris egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 &= -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Megoldás:

```
> A:=matrix(4,4,[1,-1,-2,1,2,1,1,0,-1,-2,0,1,3,-2,2,-1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{12.1.7.1}$$

```
> b:=vector(4,[1,2,-1,4]);
```

$$b := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \tag{12.1.7.2}$$

```
> with(linalg):
> A1:=augment(b,col(A,2),col(A,3),col(A,4));
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{12.1.7.3}$$

```
> A2:=augment(col(A,1),b,col(A,3),col(A,4));
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (12.1.7.4)$$

```
> A3:=augment(col(A,1),col(A,2),b,col(A,4));
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad (12.1.7.5)$$

```
> A4:=augment(col(A,1),col(A,2),col(A,3),b);
```

$$A4 := \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (12.1.7.6)$$

```
> x1:=det(A1)/det(A);
```

$$x1 := \frac{11}{10} \quad (12.1.7.7)$$

```
> x2:=det(A2)/det(A);
```

$$x2 := -\frac{1}{5} \quad (12.1.7.8)$$

```
> x3:=det(A3)/det(A);
```

$$x3 := 0 \quad (12.1.7.9)$$

```
> x4:=det(A4)/det(A);
```

$$x4 := -\frac{3}{10} \quad (12.1.7.10)$$

```
> x:=linsolve(A,b);
```

$$x := \begin{bmatrix} \frac{11}{10} & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \quad (12.1.7.11)$$

```
>
```

8. Feladat

Oldja meg a Cramer-szabály felhasználásával a következő lineáris egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 3z &= -13 \\ -5x + 4y + 2z &= 12 \\ 6x - 4y - 5z &= -11 \end{aligned}$$

Megoldás:

```
> A:=matrix(3,3,[4,-2,3,-5,4,2,6,-4,-5]);
```

(12.1.8.1)

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & -5 \end{bmatrix} \quad (12.1.8.1)$$

```
> b:=vector(3,[-13,12,-11]);
```

$$b := \begin{bmatrix} -13 & 12 & -11 \end{bmatrix} \quad (12.1.8.2)$$

```
> with(linalg):
> A1:=augment(b,col(A,2),col(A,3));
```

$$A1 := \begin{bmatrix} -13 & -2 & 3 \\ 12 & 4 & 2 \\ -11 & -4 & -5 \end{bmatrix} \quad (12.1.8.3)$$

```
> A2:=augment(col(A,1),b,col(A,3));
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 4 & -13 & 3 \\ -5 & 12 & 2 \\ 6 & -11 & -5 \end{bmatrix} \quad (12.1.8.4)$$

```
> A3:=augment(col(A,1),col(A,2),b);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 4 & -2 & -13 \\ -5 & 4 & 12 \\ 6 & -4 & -11 \end{bmatrix} \quad (12.1.8.5)$$

```
> x1:=det(A1)/det(A);
```

$$x1 := -2 \quad (12.1.8.6)$$

```
> x2:=det(A2)/det(A);
```

$$x2 := 1 \quad (12.1.8.7)$$

```
> x3:=det(A3)/det(A);
```

$$x3 := -1 \quad (12.1.8.8)$$

```
> x:=linsolve(A,b);
```

$$x := \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (12.1.8.9)$$

9. Feladat

Oldja meg a Cramer-szabály felhasználásával a következő lineáris egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= -5 \\ -3x + 2y + 5z &= 5 \\ 5x + 3y - 4z &= -6 \end{aligned}$$

Megoldás:

```
> A:=matrix(3,3,[2,3,-2,-3,2,5,5,3,-4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad (12.1.9.1)$$

```
> b:=vector(3,[-5,5,-6]);
```

$$b := \begin{bmatrix} -5 & 5 & -6 \end{bmatrix} \tag{12.1.9.2}$$

```
> with(linalg):
> A1:=augment(b,col(A,2),col(A,3));
```

$$A1 := \begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & -4 \end{bmatrix} \tag{12.1.9.3}$$

```
> A2:=augment(col(A,1),b,col(A,3));
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 2 & -5 & -2 \\ -3 & 5 & 5 \\ 5 & -6 & -4 \end{bmatrix} \tag{12.1.9.4}$$

```
> A3:=augment(col(A,1),col(A,2),b);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & -6 \end{bmatrix} \tag{12.1.9.5}$$

```
> x1:=det(A1)/det(A);
```

$$x1 := 1 \tag{12.1.9.6}$$

```
> x2:=det(A2)/det(A);
```

$$x2 := -1 \tag{12.1.9.7}$$

```
> x3:=det(A3)/det(A);
```

$$x3 := 2 \tag{12.1.9.8}$$

```
> x:=linsolve(A,b);
```

$$x := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{12.1.9.9}$$

10. Feladat

Oldja meg a Cramer-szabály felhasználásával a következő lineáris egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$3x + 2y - 4z = -2$$
$$-2x + 3y + 5z = -5$$
$$7x - 2y - 8z = 10$$

Megoldás:

```
> A:=matrix(3,3,[3,2,-4,-2,3,5,7,-2,-8]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & -2 & -8 \end{bmatrix} \tag{12.1.10.1}$$

```
> b:=vector(3,[-2,-5,10]);
```

$$b := \begin{bmatrix} -2 & -5 & 10 \end{bmatrix} \tag{12.1.10.2}$$

```
> with(linalg):
```

```
> A1:=augment(b,col(A,2),col(A,3));
```

$$A1 := \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -5 & 3 & 5 \\ 10 & -2 & -8 \end{bmatrix} \quad (12.1.10.3)$$

```
> A2:=augment(col(A,1),b,col(A,3));
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & -5 & 5 \\ 7 & 10 & -8 \end{bmatrix} \quad (12.1.10.4)$$

```
> A3:=augment(col(A,1),col(A,2),b);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 7 & -2 & 10 \end{bmatrix} \quad (12.1.10.5)$$

```
> x1:=det(A1)/det(A);
```

$$x1 := 2 \quad (12.1.10.6)$$

```
> x2:=det(A2)/det(A);
```

$$x2 := -2 \quad (12.1.10.7)$$

```
> x3:=det(A3)/det(A);
```

$$x3 := 1 \quad (12.1.10.8)$$

```
> x:=linsolve(A,b);
```

$$x := \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.1.10.9)$$

Házi feladat

1. Feladat

Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ x + y - z &= 3 \\ -x + z &= 2 \end{aligned}$$

2. Feladat

Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z - 4v &= 14 \\ 3x + y - z + v &= 0 \\ -x + 4y + 3z - 2v &= 20 \\ 5x - 2y - z - 3v &= 4 \end{aligned}$$

3. Feladat

Oldja meg az alábbi lineáris egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned} 2x + y - 5z + u &= 8 \\ x - 3y - 6u &= 9 \\ 2y - z + 2u &= -5 \\ x + 4y - 7z + 6u &= 0 \end{aligned}$$

Matematikai Praktikum II.

1. Mértani helyhez kapcsolódó feladatok

Feladatok

1. Feladat

Szerkesszünk két adott ponton átmenő adott sugarú kört!

Megoldás:

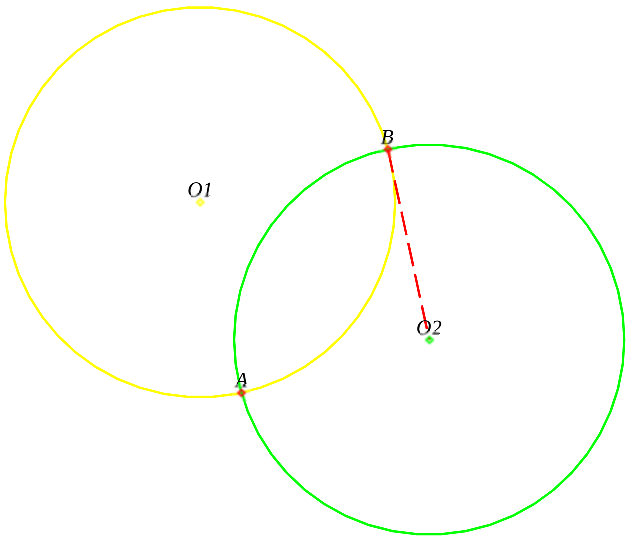
```
> restart : with(geometry) :
  point(A, 0, 0) : point(B, 3, 5) : r := 4 :
   circle(c1, [point(A, 0, 0), r]) :
   circle(c2, [point(B, 3, 5), r]) :
  intersection(H1, c1, c2, [U, V]) : detail(H1);
```

$$\left[\begin{array}{ll} \text{name of the object} & U \\ \text{form of the object} & point2d \\ \text{coordinates of the point} & \left[\frac{3}{2}-\frac{5\sqrt{255}}{34}, \frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{255}}{34}\right] \end{array}\right], \left.\begin{array}{ll} \text{name of the object} & V \\ \text{form of the object} & point2d \\ \text{coordinates of the point} & \left[\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{255}}{34}, \frac{5}{2}-\frac{3\sqrt{255}}{34}\right] \end{array}\right] \quad \textbf{(1.1.1.1)}$$

$> circle\left(cm1, \left[point\left(Q1, \frac{3}{2}-\frac{5\sqrt{255}}{34}, \frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{255}}{34}\right), r\right], 'centername' = O1\right) :$

$circle\left(cm2, \left[point\left(Q2, \frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{255}}{34}, \frac{5}{2}-\frac{3\sqrt{255}}{34}\right), r\right], 'centername' = O2\right) :$

```
> segment(BO2, [B, O2]) :
  draw([cm1(color = yellow), cm2(color = green), A, B,
     BO2(linestyle = dash)], scaling = constrained, printtext
     = true, axes = none);
```



>

2. Feladat

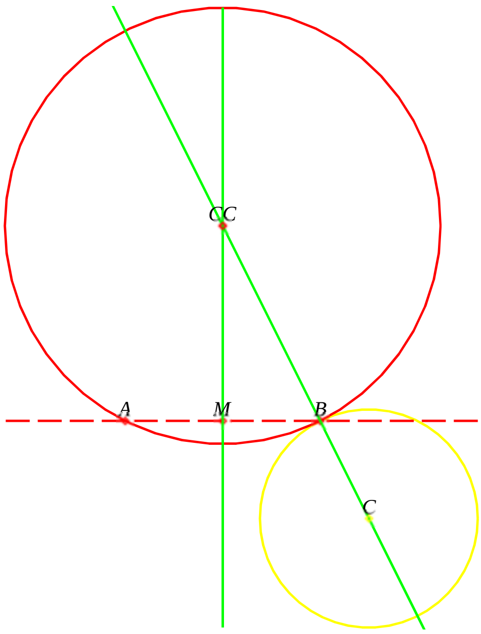
Szerkesszünk adott ponton átmenő, adott kört adott pontban érintő kört!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
  point(A, 0, 3) : point(B, 4, 3) : point(C, 5, 1) : r
     := distance(B, C);
  circle(c1, [C, r]) :
   line(l, [A, B]) : midpoint(M, A, B) :
   PerpendicularLine(lp, M, l) :
   line(l2, [B, C]) : intersection(CC, lp, l2) :
   r2 := distance(CC, A);
   circle(c2, [CC, r2]) :

   draw([c1(color = yellow), c2(color = red), A, B, M, CC,
     lp(color = green), l(linestyle = dash), l2(color = green)],
      scaling = constrained, printtext = true, axes = none);
```

$$r := \sqrt{5}$$

$$r2 := \sqrt{20}$$



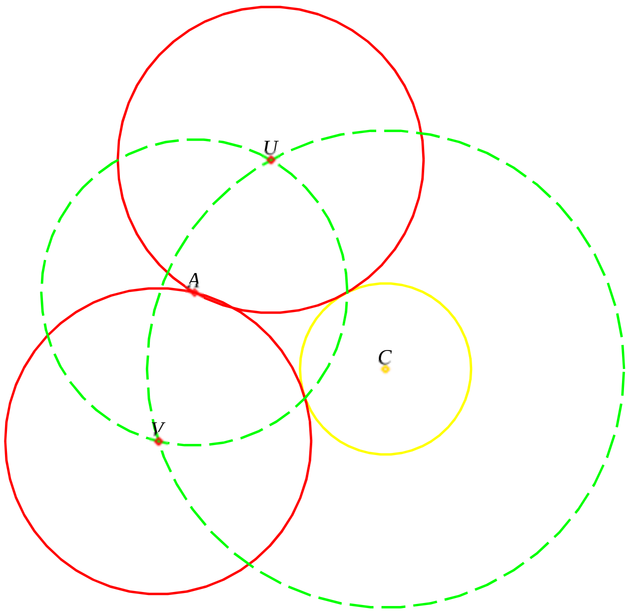
3. Feladat

Szerkesszünk adott ponton átmenő, adott kört érintő, adott sugarú kört!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
point(A, 0, 3) : point(B, 4, 3) : point(C, 5, 1) : r := 4 :
d := distance(B, C) : circle(c, [C, d]) :

circle(cs1, [C, d + r]) : circle(cs2, [A, r]) :

 intersection(H, cs1, cs2, [U, V]) :
 r1 := distance(U, A) : r2 := distance(V, A) :
 circle(c1, [U, r1]) : circle(c2, [V, r2]) :

 draw([c(color = yellow), c1(color = red), c2(color = red), A,
   C, U, V, cs1(color = green, linestyle = dash), cs2(color
   = green, linestyle = dash)], scaling = constrained,
```

```
printtext = true, axes = none);
```



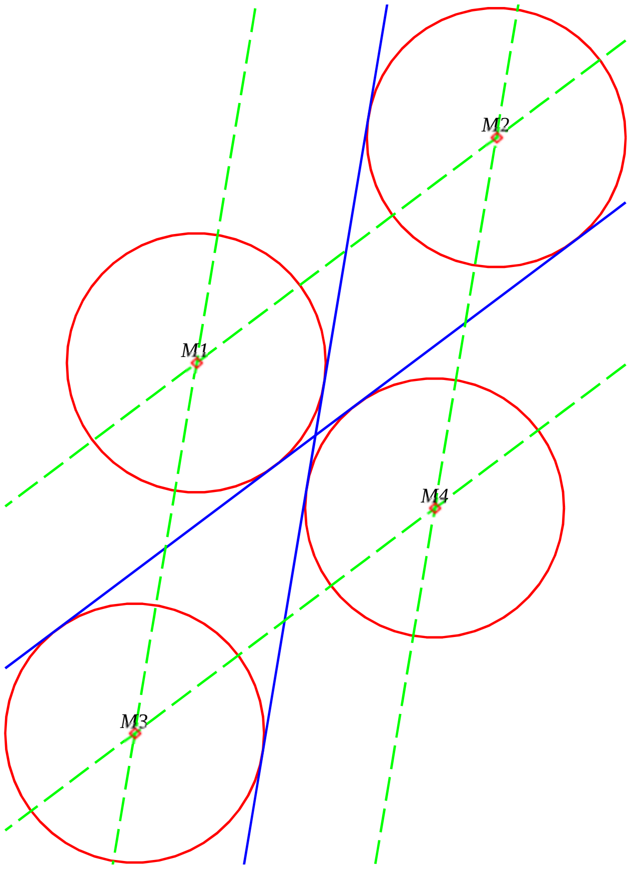
4. Feladat

Szerkesszünk két adott egyenest érintő (adott sugarú) kört!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
  point(A, 0, 0) : point(B, 4, 3) : point(C, 1, 6) : d := 2 :
  line(l1, [A, B]) : line(l2, [A, C]) :
    PerpendicularLine(l1m, A, l1) : PerpendicularLine(l2m, A,
     l2) :
    circle(c, [A, 2]) :
    intersection(H1, l1m, c, [U1, V1]) : intersection(H2, l2m,
     c, [U2, V2]) :

  ParallelLine(l1p1, U1, l1) : ParallelLine(l1p2, V1, l1) :
  ParallelLine(l2p1, U2, l2) : ParallelLine(l2p2, V2, l2) :

  intersection(M1, l1p1, l2p1) : intersection(M2, l1p1, l2p2) :
     intersection(M3, l1p2, l2p1) : intersection(M4, l1p2,
     l2p2) :
```

```
circle(c1, [M1, d]) : circle(c2, [M2, d]) : circle(c3, [M3, d]) :
   circle(c4, [M4, d]) :

draw([c1(color = red), c2(color = red), c3(color = red),
   c4(color = red), l1(color = blue), l2(color = blue),
   l1p1(linestyle = dash, color = green), l1p2(color = green,
   linestyle = dash), l2p1(color = green, linestyle = dash),
   l2p2(color = green, linestyle = dash)], scaling
   = constrained, printtext = true, axes = none);
```



5. Feladat

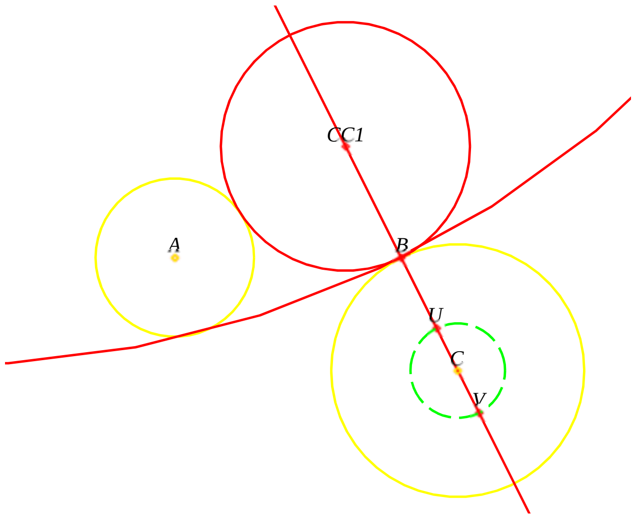
Szerkesszünk két adott kört, az egyiket adott pontjában érintő kört!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
point(A, 0, 3) : r1 := 1.4 :
point(B, 4, 3) : point(C, 5, 1) : r2 := distance(B, C) :
circle(c1, [A, r1]) : circle(c2, [C, r2]) :

line(l, [B, C]) :
circle(cs1, [C, r2 - r1]) : intersection(H, l, cs1, [U, V]) :

line(l1, [A, U]) : midpoint(M, A, U) :
PerpendicularLine(l1p, M, l1) :
 intersection(CC1, l, l1p) :
 rm1 := distance(CC1, B);
 circle(cm1, [CC1, rm1]) :

circle(cs2, [C, r2 + r1]) : intersection(H2, l, cs2, [U2, V2]) :

line(l2, [A, U2]) : midpoint(M2, A, U2) :
PerpendicularLine(l2p, M2, l2) :
 intersection(CC2, l, l2p) :
 rm2 := distance(CC2, B);
 circle(cm2, [CC2, rm2]) :

 draw([c1(color = yellow), c2(color = yellow), cm1(color
   = red), cm2(color = red), A, C, B, U, V, cs1(color = green,
    linestyle = dash), l], scaling = constrained, printtext
   = true, axes = none, view = [-3 ..8, -1.5 ..7.4]);
```

$rm1 := 2.201417550$

$rm2 := 18.05303044$



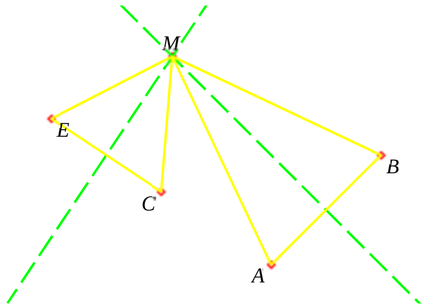
6. Feladat

Adott két szakasz. Szerkesszünk a szakaszok fölé egyenlő szárú háromszögeket, melyeknek a csúcsa egybeesik.

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
  point(A, 0, 0) : point(B, 3, 3) : segment(AB, [A, B]) :
  point(C, -3, 2) : point(E, -6, 4) : segment(CE, [C, E]) :
    line(l1, [A, B]) : line(l2, [C, E]) :

  midpoint(M1, A, B) : midpoint(M2, C, E) :

  PerpendicularLine(m1, M1, l1) : PerpendicularLine(m2, M2,
     l2) :
   intersection(M, m1, m2) :

   triangle(T1, [A, B, M]) : triangle(T2, [C, E, M]) :

    draw([T1(color = yellow), T2(color = yellow), M, A, B, C, E,
     m1(color = green, linestyle = dash), m2(color = green,
```

```
linestyle = dash)], scaling = constrained, printtext
= true, axes = none, view = [-9 ..8,-1 ..7]);
```



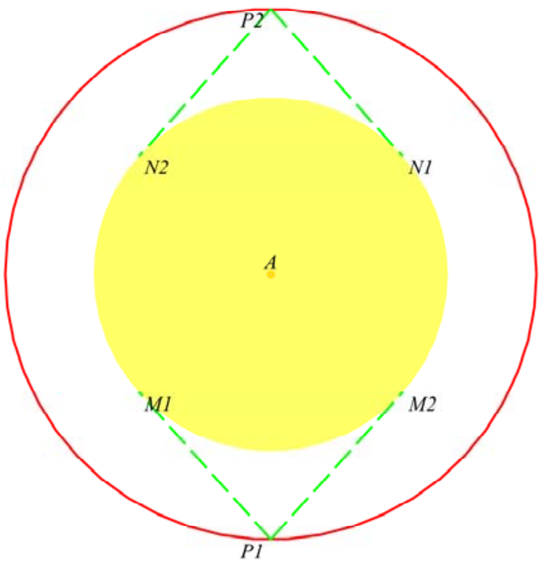
7. Feladat

Mi a mértani helye azoknak a pontoknak, amelyektől egy adott körhöz adott hosszúságú érintők húzhatók?

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
point(A, 0, 3) : r := 4 : d := 2 :

circle(c1, [A, r]) :
circle(c2, [A, r + d]) :
 point(P1, 0, -3) : point(P2, 0, 9) :

TangentLine(t1, P1, c1, [t11, t12]) :
intersection(M1, t11, c1) : segment(P1M1, [P1, M1]) :
intersection(M2, t12, c1) : segment(P1M2, [P1, M2]) :

TangentLine(t2, P2, c1, [t21, t22]) :
```

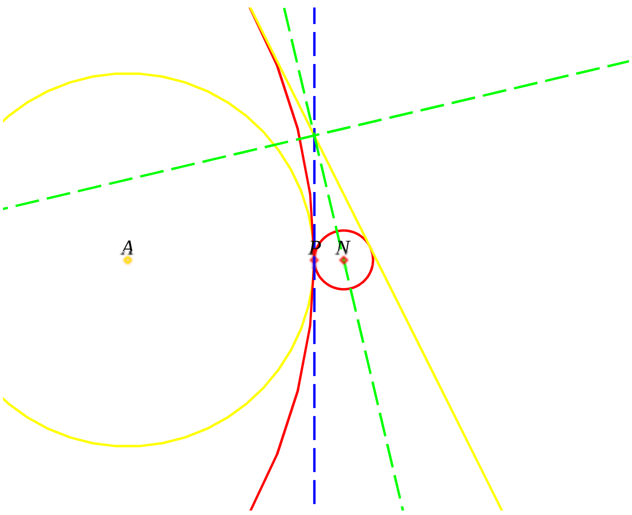
```
draw([c1(color = yellow, filled = true, transparency = 0.4
   c2(color = red), A, P1M1(color = green, linestyle = dasl
   P1M2(color = green, linestyle = dash), P2N1(color = gree
    linestyle = dash), P2N2(color = green, linestyle = das
    scaling = constrained, printtext = true, axes = none,
   view = [-6..8, -3.5..9]);
```



```
triangle(MPC, [M, P, C]) : bisector(bM, M, MPC) :

line(l1, [A, P]) :
intersection(N, l1, bM) :
rm1 := distance(N, P);
circle(cm1, [N, rm1]) :

PerpendicularLine(bM2, M, bM) :
intersection(N2, l1, bM2) :
rm2 := distance(N2, P);
circle(cm2, [N2, rm2]) :

draw([c(color = yellow), l(color = yellow), cm1(color = red),
  cm2(color = red), A, P, t(color = blue, linestyle = dash),
  bM(color = green, linestyle = dash), bM2(color = green,
   linestyle = dash)], scaling = constrained, printtext
  = true, axes = none, view = [-2..8, -1..7]);
```

$$rm1 := \sqrt{\left(\frac{8+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} - 3\right)^2}$$

$$rm2 := \sqrt{\left(-2\sqrt{5} - 4\right)^2}$$



9. Feladat

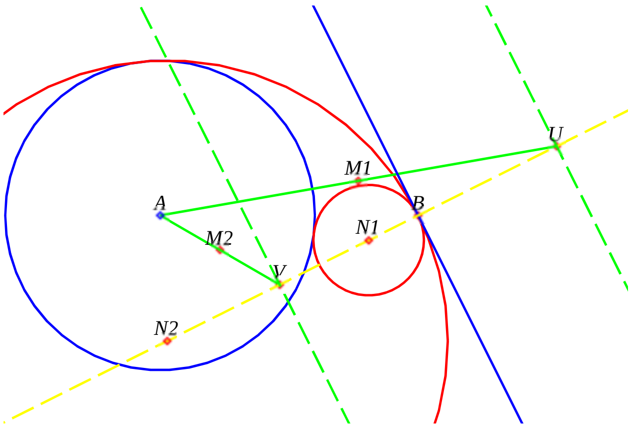
Szerkesszünk adott kört és adott egyenest, az egyenest adott pontjában érintő kört!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
point(A, 0, 3) : r := 3 : circle(c, [A, r]) :
point(B, 5, 3) : point(C, 6, 1) : line(l, [B, C]) :

PerpendicularLine(lB, B, l) : circle(cs, [B, r]) :
intersection(H, lB, cs, [U, V]) :

line(l1, [A, U]) : midpoint(M1, A, U) : PerpendicularLine(l1p,
   M1, l1) : intersection(N1, lB, l1p) :
line(l2, [A, V]) : midpoint(M2, A, V) :
   PerpendicularLine(l2p, M2, l2) : intersection(N2, lB,
   l2p) :

 rm1 := distance(N1, B); circle(cm1, [N1, rm1]) :
 rm2 := distance(N2, B); circle(cm2, [N2, rm2]) :

 ParallelLine(pl1, U, l) : ParallelLine(pl2, V, l) :
   segment(AV, [A, V]) : segment(AU, [A, U]) :
  draw([c(color = blue), l(color = blue), cm1(color = red),
   cm2(color = red), B, U, V, AV(color = green), AU(color
   = green), M1, M2, lB(color = yellow, linestyle = dash),
   pl1(color = green, linestyle = dash), pl2(color = green,
    linestyle = dash)], scaling = constrained, printtext
   = true, axes = none, view = [-3..9, -1..7]);
```

$$rm1 := \sqrt{\left(\frac{15\sqrt{5}+34}{3\sqrt{5}+10}-5\right)^2+\left(\frac{22+9\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+10}-3\right)^2}$$

$$rm2 := \sqrt{\left(\frac{15\sqrt{5}-34}{-10+3\sqrt{5}}-5\right)^2+\left(\frac{-22+9\sqrt{5}}{-10+3\sqrt{5}}-3\right)^2}$$



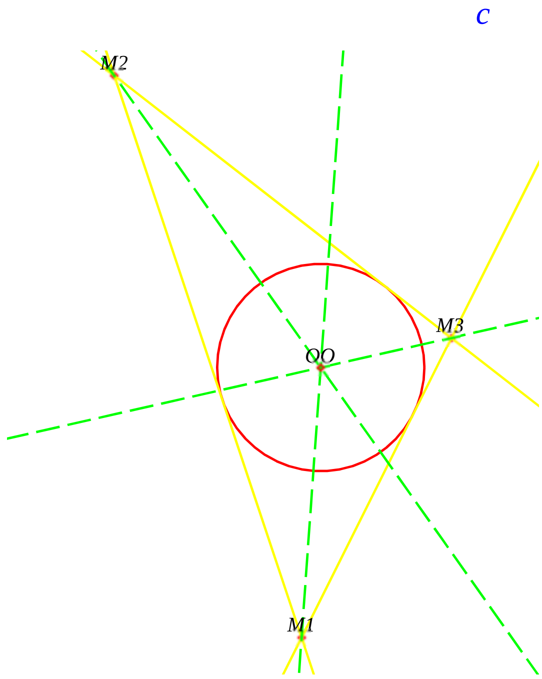
10. Feladat

Határozzuk meg három adott egyenestől egyenlő távol levő pontok mértani helyét!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
point(A1, 0, 3) : point(A2, 1, 0) : line(l1, [A1, A2]) :
point(B1, 5, 3) : point(B2, 3, -1) : line(l2, [B1, B2]) :
point(C1, -3, 8) : point(C2, 6, 1) : line(l3, [C1, C2]) :

 intersection(M1, l1, l2) : intersection(M2, l1, l3) :
   intersection(M3, l2, l3) :
 triangle(T, [M1, M2, M3]) :
 incircle(c, T, 'centername' = OO) :

bisector(bM1, M1, T) : bisector(bM2, M2, T) : bisector(bM3,
    M3, T) :


draw([l1(color = yellow), l2(color = yellow), l3(color
   = yellow), c(color = red), M1, M2, M3, bM1(color = green),
```

```
 linestyle = dash), bM2(color = green,  linestyle = dash),
bM3(color = green,  linestyle = dash)],  scaling
 = constrained,  printtext = true,  axes = none,  view = [-3
..6,-3.6..7]);
```



Házi feladatok

1. Feladat
Adjunk meg a síkon öt pontot úgy, hogy létezzen mind az öttől egyenlő távolságra levő pont.

2. Feladat
Szerkesszünk egyenő szárú háromszöget, ha adott egyik szára és a hozzá tartozó magasság.

3. Feladat
Határozzuk meg egy adott pont és egy adott körvonal által meghatározott szakaszok felezőpontjainak halmazát!

2. Transzformációkkal kapcsolatos feladatok

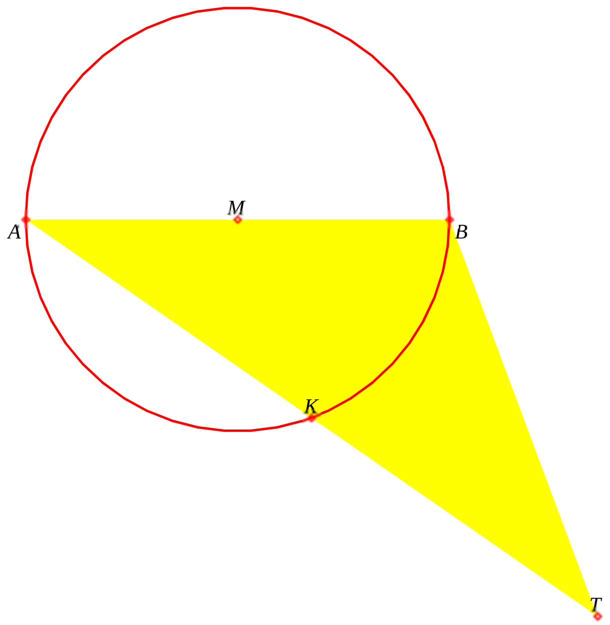
Feladatok

1. Feladat

Egy AB átmérőjű kör egy további pontja legyen K. A-t K-ra tükrözve kapjuk T-t. Bizonyítsa be, hogy az ABT háromszög egyenlőszárú!

Megoldás:

```
> with(geometry) : point(A,-1, 0) : point(B, 1, 0) : circle(k,
    [A, B], [x, y], `centername`= M) :
  randpoint(K, k) :
  reflection(T, A, K) :
   triangle(t, [A, B, T]) :
   draw([t(filled = true, color = yellow), A, B, K, T, k], axes
     = NONE, printtext = true);
   distance(B, T);
   simplify(distance(A, B));
```



2.000000000

2 **(2.1.1.1)**

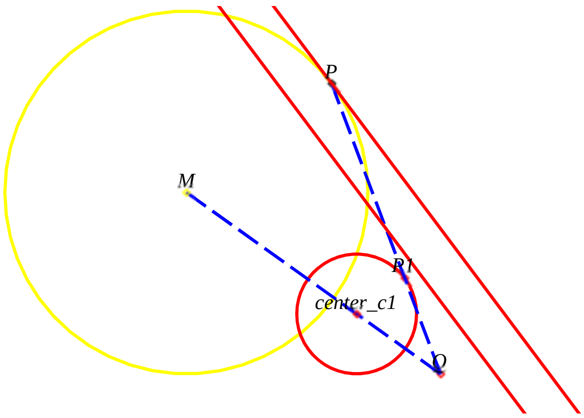
>

2. Feladat

Adott a k kör, a kör egy P pontja és a P-ben húzott érintője. Kicsinyítse harmadára a megadott alakzatot a Q pontból!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :

  circle(k, x^2 + y^2 = 25, [x, y], `centername` = M) :
  point(P, 4, 3) : tangentpc(e, P, k) :
  point(Q, 7, -5) :

  dilatation(c1, k, 0.33, Q) : dilatation(e1, e, 0.5, Q) :
   dilatation(P1, P, 0.33, Q) :
    segment(MQ, M, Q) : segment(QP, Q, P) :
    draw([k(color = yellow), P(color = black), Q, e, c1, e1, P1,
     MQ(color = blue, linestyle = dash), QP(color = blue,
      linestyle = dash)], printtext = true, axes = NONE, view = [
     -5 ..12, -6 ..5], thickness = 2);
```

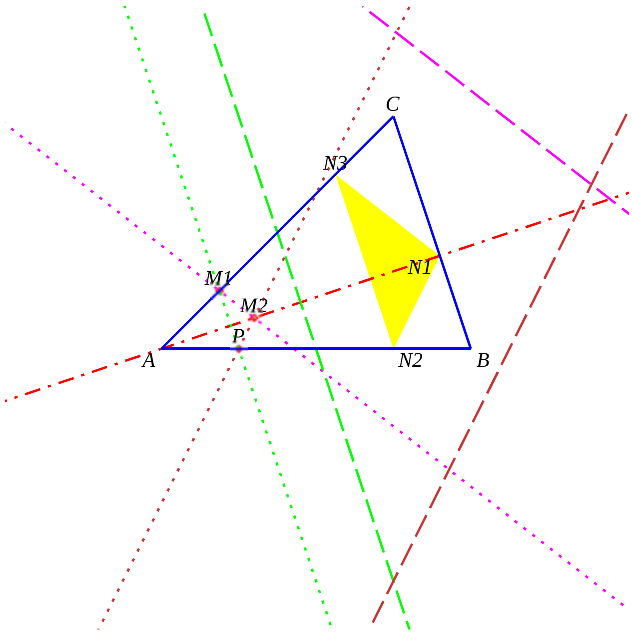


3. Feladat

Egy ABC háromszögbe írjunk egy DEF háromszöget, melynek oldalai három adott egyenessel (f; g; h) egyenként párhuzamosak.

Megoldás:

```
> point(A,-1, 0) : point(B, 3, 0) : point(C, 2, 3) : point(P, 0,
    0) : triangle(T, [A, B, C]) :
   line(o1, [A, B]) : line(o2, [B, C]) : line(o3, [C, A]) :
point(A1, 0, 3) : point(A2, 1, 0) : line(l1, [A1, A2]) :
point(B1, 5, 3) : point(B2, 3,-1) : line(l2, [B1, B2]) :
point(C1,-3, 8) : point(C2, 6, 1) : line(l3, [C1, C2]) :

 ParallelLine(l1p, P, l1) : intersection(M1, l1p, o3) :
ParallelLine(l2p, M1, l3) : ParallelLine(l3p, P, l2) :
 intersection(M2, l2p, l3p) : line(ls, [A, M2]) :
    intersection(N1, ls, o2) :
 ParallelLine(n1, N1, l2) : ParallelLine(n2, N1, l3) :
  intersection(N2, n1, o1) : intersection(N3, n2, o3) :
 triangle(TT, [N1, N2, N3]) :

draw([T(color = blue), TT(color = yellow, filled = true), P,
    M1, M2, ls(linestyle = dashdot), l1p(color = green,
     linestyle = dot), l2p(color = magenta, linestyle = dot),
    l3p(color = orange, linestyle = dot), l1(color = green,
     linestyle = dash), l2(color = orange, linestyle = dash),
    l3(color = magenta, linestyle = dash)], scaling
    = constrained, printtext = true, axes = none, view = [-3
    ..5,-3.6..4.4]);
```



4. Feladat

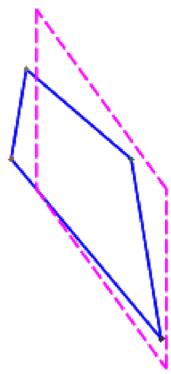
Vegyünk fel egy négyszöget és belsejében egy pontot! Szerkesszünk paralelogrammát, melynek csúcsai a négyszög egy-egy oldalegyenes

ére esnek, s középpontja a felvett pont!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) : with(geom3d) :
point(A, -1, 0, 0) : point(C, 3, 0, 0) : point(B, 2.5, 3, 0) :
    point(E, -2, -6, 0) : point(K, 0, -1, 0) :
  line(l1, [A, B]) : line(l2, [B, C]) : line(l3, [C, E]) : line(l4,
    [E, A]) :
   reflection(l1r, l1, K) : intersection(N1, l1r, l3) :
   reflection(l2r, l2, K) : intersection(N2, l2r, l4) :
   reflection(l3r, l3, K) : intersection(N3, l3r, l1) :
   reflection(l4r, l4, K) : intersection(N4, l4r, l2) :
   segment(N1N2, [N1, N2]) : segment(N2N3, [N2, N3]) :
    segment(N3N4, [N3, N4]) : segment(N4N1, [N4, N1]) :

  segment(AB, [A, B]) : segment(BC, [B, C]) : segment(CE, [C,
```

```
E]) : segment(EA, [E, A]) :
draw([AB(color = blue), BC(color = blue), CE(color = blue),
  EA(color = blue), A, B, C, E, N1N2(color = magenta,
  linestyle = dash), N2N3(color = magenta, linestyle
  = dash), N3N4(color = magenta, linestyle = dash),
  N4N1(color = magenta, linestyle = dash)], scaling
  = constrained,  axes = none, orientation = [90, 180]);
```



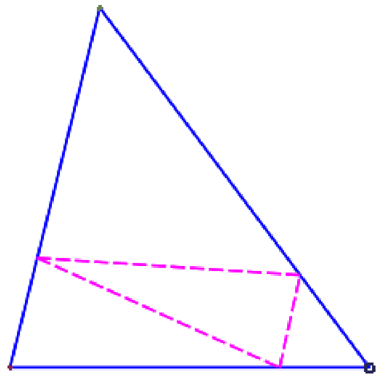
5. Feladat

Adott hegyesszögő háromszögbe írjunk minimális kerületű háromszöget, melynek egyik csúcsa előre adva van!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) : with(geom3d) :
  point(A, -1, 0, 0) : point(B, 3, 0, 0) : point(C, 2, 4, 0) :
      point(K, 0, 0, 0) :
   line(l1, [A, B]) :  line(l2, [B, C]) : line(l3, [C, A]) :
    reflection(K1, K, l3) :
    reflection(K2, K, l2) :
    line(ls, [K1, K2]) :
    intersection(N1, ls, l3) : intersection(N2, ls, l2) :
```

```
segment(AB, [A, B]) : segment(BC, [B, C]) : segment(CA, [C, A]) :
segment(KN1, [K, N1]) : segment(N1N2, [N1, N2]) : segment(N2K,
   [N2, K]) :

draw([AB(color = blue), BC(color = blue), CA(color = blue),
   A(symbol = box), B, C, N1N2(color = magenta, linestyle
   = dash), KN1(color = magenta, linestyle = dash), N2K(color
   = magenta, linestyle = dash)], scaling = constrained,
    axes = none, orientation = [90, 180]);
```



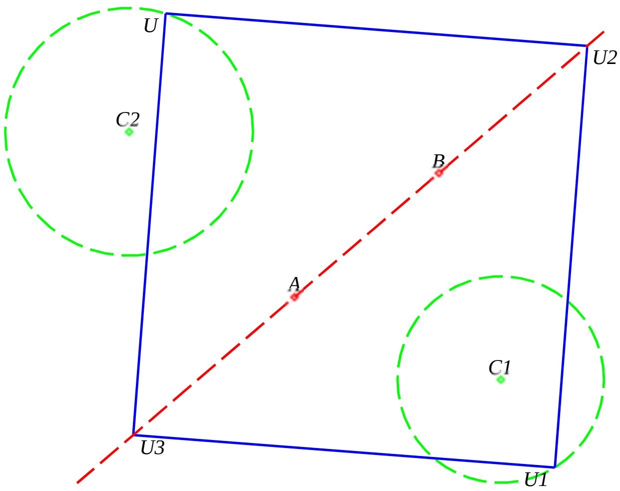
6. Feladat

Szerkesszünk négyzetet, melynek egyik átlója egy adott egyenesre, másik átlójának végpontjai pedig egy-egy adott körre illeszkednek!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
point(A, -1, 0) : point(B, 2.5, 3) : line(l, [A, B]) :
 point(C1, 4, -2) : r1 := 2.5 : circle(c1, [C1, r1]) :
 point(C2, -5, 4) : r2 := 3 : circle(c2, [C2, r2]) :
```

```
reflection(c1r, c1, l) : intersection(H, c1r, c2, [U, V]) :
 reflection(U1, U, l) : line(lu, [U, U1]) : intersection(Z, l,
   lu) : d := distance(U, U1) :
 rotation(U2, U, Pi/2, clockwise, Z) : rotation(U3, U, Pi/2,
   counterclockwise, Z) :
  segment(UU2, [U, U2]) : segment(UU3, [U, U3]) : segment(U1U2,
   [U1, U2]) : segment(U1U3, [U1, U3]) :
 draw([UU2(color = blue), UU3(color = blue), U1U2(color
    = blue), U1U3(color = blue), A, B, l(linestyle = dash),
   c1(color = green, linestyle = dash), c2(color = green,
    linestyle = dash)], scaling = constrained,  axes = none,
   printtext = true);
```



7. Feladat

Forgassunk el egy egyenlő oldalú háromszöget középpotja körül, majd jelöljük meg az eredeti és az elforgatott oldalaegyenesek metszéspontjait. Igazoljuk, hogy a három metszéspont ismét egyenlő oldalú háromszöget határoz meg.

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
point(A, -2, 0) : point(B, 2, 0) : point(C, 0, sqrt(12)) :
    point(E, 0, sqrt(12)/3) : triangle(T, [A, B, C]) :
IsEquilateral(T);
 rotation(Tr, T, Pi/3, clockwise, E) :

line(l1, [A, B]) : line(l2, [B, C]) : line(l3, [C, A]) :

rotation(l1r, l1, Pi/3, clockwise, E) : rotation(l2r, l2,
    Pi/3, clockwise, E) : rotation(l3r, l3, Pi/3, clockwise,
    E) :
intersection(P, l1, l1r) : intersection(Q, l2, l2r) :
   intersection(R, l3, l3r) :
triangle(TT, [P, Q, R]) : IsEquilateral(TT);
```

true

true **(2.1.7.1)**

8. Feladat

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
```

9. Feladat

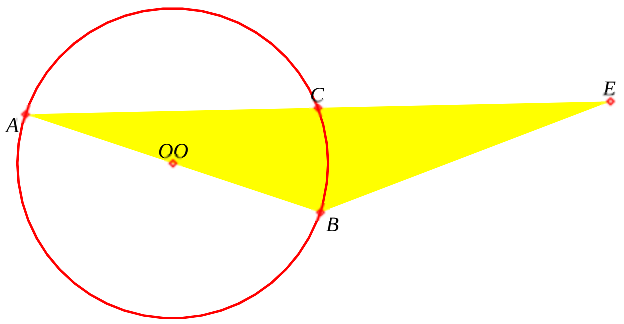
Egy AB átmérőjű kör egy további pontja C. A-t C-re tükrözve kapjuk D-t. Bizonyítsa be, hogy az ABD háromszög egyenlőszárú!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
point(A, -1, 0) : point(B, 2, -1) :
 circle(c, [A, B], [x, y], `centername` = OO) :
  randpoint(C, c) :
  reflection(E, A, C) :
  triangle(T, [A, B, E]) :

 simplify(distance(B, E)); simplify(distance(A, B));
draw([T(filled = true, color = yellow), A, B, C, E, c], axes
   = NONE, printtext = true);
```

$$3.162277660$$

$$\sqrt{10}$$



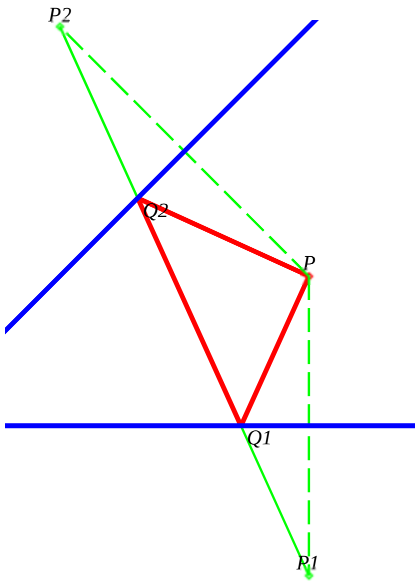
10. Feladat

Egy P pontból ellökött golyó a két falon egymás után ütközve az eredeti pontba ér vissza. Szerkessze meg a golyó útját!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
point(A, -1, 0) : point(B, 5, 0) : point(C, 4, 5) : point(P, 3,
   1.5) :
 line(AB, [A, B], [x, y]) : line(AC, [A, C], [x, y]) :
 reflection(P1, P, AB) : reflection(P2, P, AC) :

  line(l, [P1, P2], [x, y]) :
  intersection(Q1, AB, l) : intersection(Q2, AC, l) :

segment(P1P2, P1, P2) : segment(Q1Q2, Q1, Q2) :
segment(PQ1, P, Q1) : segment(PQ2, P, Q2) :
```

```
segment(PP2, P, P2) : segment(PP1, P, P1) :

draw([AB(color = blue), AC(color = blue), P, P1(color = green),
   P2(color = green),
P1P2(color = green, thickness = 1), PQ1, PQ2, Q1Q2, PP1(color
    = green, thickness = 1, linestyle = dash), PP2(color
    = green, thickness = 1, linestyle = dash)], thickness = 3,
      axes = none, view = [0 ..4, -2 ..4], scaling = CONSTRAINED,
   printtext = true);
```



Házi feladatok

1. Feladat
Szerkesszünk paralelogrammát, melynek két szomszédos csúcsa két metsző kör közös pontjai, másik két csúcsa pedig ezen két kör egy-egy pontja!

2. Feladat
Adott pontból szerkesszünk adott körhöz olyan szelőt, mely a körből adott hosszúságú húrt metsz ki!

3. Feladat
Szerkesszünk háromszöget, ha adott két csúcsa, továbbá a harmadik csúcsánál levé szög

szögfelező egyenese!

3. Háromszögekkel kapcsolatos feladatok

Feladatok

1. Feladat

Milyen magas az a lejtő, amely 10°-os hajlásszögű és 2 km hosszú? Milyen hosszú a lejtő alapja?

Megoldás:

A lejtő magasságát jelöljük x-szel.

> $solve\left(\sin(10) = \frac{x}{2}\right);$

$$2\sin(10) \tag{3.1.1.1}$$

> $solve\left(\frac{y}{2} = \cos(10)\right);$

$$2\cos(10) \tag{3.1.1.2}$$

>

2. Feladat

Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara 2 cm, körülírt körének sugara 5 cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

Megoldás:

> $restart : a := x + 2 : \quad b := 10 - x + 2 :$
> $fsolve(a^2 + b^2 = 10^2,\ x);$

$$fsolve\left((x+2)^2 + (10-x+2)^2 = 100, x\right) \tag{3.1.2.1}$$

3. Feladat

Mekkorák annak a szimmetrikus trapéznak a szögei és oldalai, amelybe 6 cm átmérőjű kör írható, és a hosszabbik alapja 10 cm?

Megoldás:

A külső pontból a körhöz húzott érintő szakaszok egyenlők. A tarpéz alaphoz tartozó magassága 6 cm. Az ismeretlen alapot jelölje *c*.

> $restart : c := fsolve\left(6^2 + \left(5 - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(5 + \frac{c}{2}\right)^2, c\right);$

```
b := c/2 + 5;
alpha := solve(Sin(x) = 6/b, x); convert(alpha, 'radical');
ghamma := 180 - alpha
```

$c := 3.600000000$

$b := 6.800000000$

$\alpha := RootOf(1000000000\ Sin(\_Z) - 882352941)$

$RootOf(1000000000\ Sin(\_Z) - 882352941)$

$$ghamma := 180 - RootOf(1000000000\ Sin(\_Z) - 882352941) \tag{3.1.3.1}$$

4. Feladat

Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, ha adott középpontja és egy oldalának egyenese.

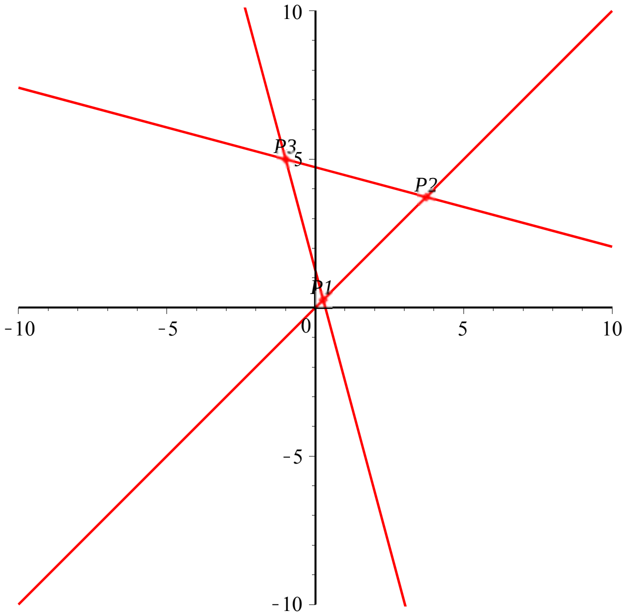
Megoldás:

Vegyünk fel egy tetszőleges pontot és két tetszőleges ponton át egy egyenest.

```
> restart : with(geometry) :
  point(A, [0, 0]) : point(B, [3, 3]) : point(C, [5, -1]) :
      line(l, [A, B]) :

  rotation(l1, l, Pi/3, 'counterclockwise', C) : rotation(l2,
    l, Pi/3, 'clockwise', C) :
  intersection(P1, l, l1) : coordinate(P1) :
  intersection(P2, l, l2) : coordinate(P2) :
  intersection(P3, l1, l2) : coordinate(P3) :
  a := distance(P1, P2) : b := distance(P1, P3) : c
    := distance(P2, P3) : verify(a, b, equal); verify(a, c,
    equal);
  draw([l, l1, l2, P1, P2, P3], printtext = true, axes
    = normal);
```

true

true



5. Feladat

Egy háromszög egyik oldalát osszuk három egyenlő részre, és az egyik osztópontot kössük össze a közelebbi oldal felezőpontjával! Az összekötő szakasz hányad részét metszi le a háromszög területének?

Megoldás:

```
> osztopont :=proc(A, B, p, q)
  local M, x, y;
  x := (HorizontalCoord(A) * q + HorizontalCoord(B) * p) / (p + q);
  y := (VerticalCoord(A) * q + VerticalCoord(B) * p) / (p + q);
  point(M, x, y);
  return(M);
   end:

  point(A,  5, 0) : point(B, 3, 4) : point(C, -2, 0) :
  P1 := osztopont(C, A, 1, 2) : coordinates(P1);
  P2 := osztopont(C, B, 1, 1) : coordinates(P2);
   triangle(T, [A, B, C]) : triangle(T1, [P1, P2, C]) :
   t := area(T); t1 := area(T1); t1/t ;
```

$$\left[\frac{1}{3}, 0\right]$$

$$\left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

$$t := 14$$

$$t1 := \frac{7}{3}$$

$$\frac{1}{6} \tag{3.1.5.1}$$

6. Feladat

Rajzoljunk egy szöget, jelöljünk ki egy irányt és tűzzünk ki egy pontot! Szerkesszübk olyan háromszöget, melynek a kitűzött pont az a csúcsa, melynél levő szöge 45 -os, a szemközti oldala a kijelölt iránnyal párhuzamos és annak végpontjai a kijelölt szög száraira esnek!

Megoldás:

7. Feladat

Egy egyenlő oldalú háromszög minden oldalát hosszabbítsuk meg egyik irányba ugyan azzal a szakasszal úgy, hogy mindegyik csúcsánál csak egy meghosszabbítás kezdődjék. Bizonyítsuk be, hogy az új végpontok által alkotott háromszög is egyenlő oldalú!

Megoldás:

8. Feladat

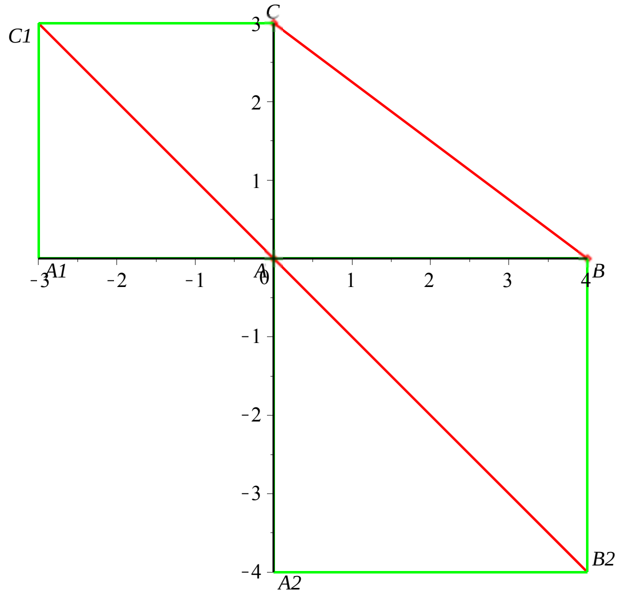
Egy derékszögű háromszög befogóira kifelé négyzeteket írunk. Igazoljuk, hogy a négyzetek középpontjai, valamint a derékszögű csúcs egy egyenesre illeszkednek!

Megoldás:

```
> with(geometry) :
point(A, 0, 0) : point(B, 4, 0) : point(C, 0, 3) :
point(A1, -3, 0) : point(C1, -3, 3) :
point(A2, 0, -4) : point(B2, 4, -4) :

triangle(T1, [A, B, C]);
square(sq1, [A1, A, C, C1]) :
square(sq2, [A, B, B2, A2]) :
midpoint(M1, C1, A) : midpoint(M2, B2, A) :
 AreCollinear(M1, M2, A);
 line(l, [C1, B2]) :

draw([T1(colour = red), sq1(colour = green), sq2(colour
    = green), A, B, C, l], printtext = true, axes = normal);
```

$$T1$$

$$true$$



9. Feladat

Igazoljuk, hogy az egyenlő oldalú háromszögbe írt kört sugara fele a köré írt kör sugarának!

Megoldás:

```
> point(A, 0, 0) : point(B, 4, 0) : point(C, 2, sqrt(12)) :
    triangle(T, [A, B, C]) :
circumcircle(cc, T, 'centername' = O1);
incircle(ic, T, 'centername'=O2);
r1 := radius(ic); r2 := radius(cc); eval(r1/r2);
draw([T, ic, cc]);
```

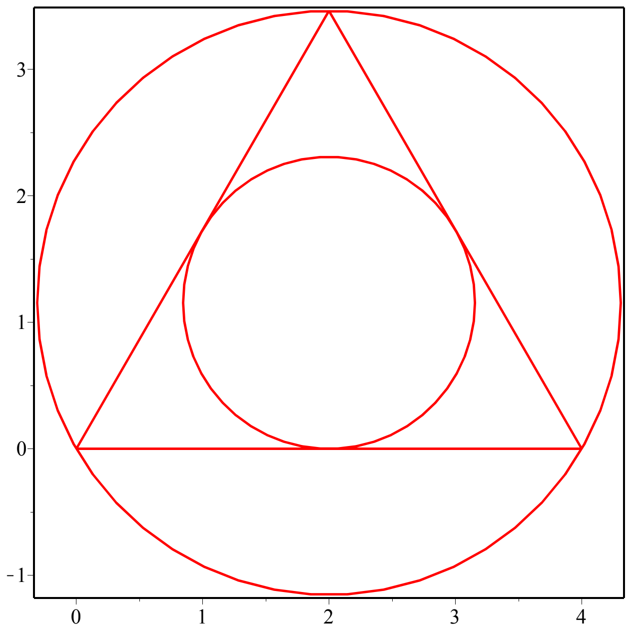
$$cc$$

$$ic$$

$$r1 := \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$r2 := \frac{1}{3}\sqrt{16}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{16}$$



10. Feladat

Rajzolunk egy kört és jelölünk ki egy pontot. Mi a kijelölt ponton áthaladó húrok felezőpontjainak mértani helye?

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) : point(C, 0, 0) : circle(c, [C,
      5]) : point(A, 1, 1) :
```

Házi feladatok

1. Feladat

Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha adott a befogók összege és a beírt kör sugara!

2. Feladat

Szerkesszünk háromszöget, ha adott kerülete, beírt körének sugara és egy szöge!

3. Feladat
Szerkesszünk egyenlőszárú háromszöget, ha adott szárszögének nagysága, az alappal szemközti csúcsa, valamint a másik két csúcson áthaladó egy-egy egyenes!

4. Négyszögekkel, sokszögekkel kapcsolatos feladatok

Feladatok

1. Feladat

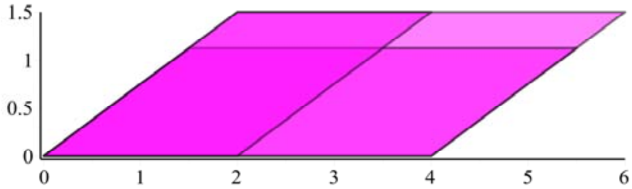
Alakítsunk egy egy paralelogrammát olyan paralelogrammává, melynek egyik oldala adott, szögei pedig az eredetiével egyenlők!

Megoldás:

A megoldás leolvasható az ábráról.

```
> restart :
  with(plots) : with(geometry) :
   poly1 := [[0, 0], [4, 0], [6, 1.5], [2, 1.5]] :
   poly2 := [[0, 0], [2, 0], [4, 1.5], [2, 1.5]] :
   poly3 := [[0, 0], [4, 0], [5.5, 1.125], [1.5, 1.125]] :
   point(A, 0, 0) : point(B, 6, 1.5) : segment(l, [A, B]) :

  p1 := polygonplot([poly1], color='magenta', transparency
      =0.5, axes=frame) :
  p2 := polygonplot([poly2], color='magenta', transparency
      =0.5, axes=frame) :
  p3 := polygonplot([poly3], color='magenta', transparency
      =0.5, axes=frame) :
  p4 := draw([l]);
    display( {p1, p2, p3}, color=red, scaling=constrained
      );
```

$$p4 := PLOT(\ldots)$$



2. Feladat

Alakítsunk át egy paralelogrammát rombusszá egy oldal megtartásával!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) : point(A, 0, 0) : point(B, 4, 0) :
      point(E, 1, 1.5) : point(C, 5, 1.5) :
  dsegment(AB, [A, B]) : segment(BC, [B, C]) : segment(CE, [C,
    E]) : segment(EA, [E, A]) :
  circle(c, [A, B]); line(l, [C, E]) :
  intersection(P, c, l, [M, N]); detail(P); dsegment(AM, [A,
    M]) :

 translation(BM, AM, AB); translation(MM, AB, AM);


 draw([AB, BC, CE, EA, AM(color = blue), BM(color = blue),
    MM(color = blue), c(color = green)], printtext = true, axes
    = normal);
```

$$c$$

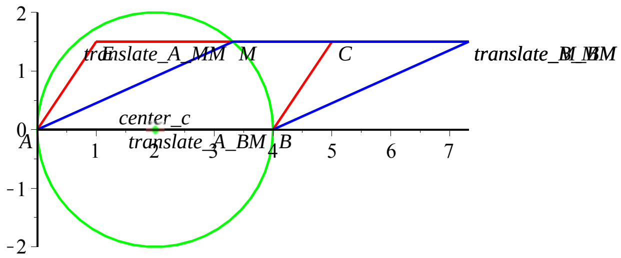
$$[[M, N]]$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{name of the object} & M \\ \text{form of the object} & point2d \\ \text{coordinates of the point} & [3.322875656, 1.500000000] \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{name of the object} & N \\ \text{form of the object} & point2d \\ \text{coordinates of the point} & [0.6771243445, 1.500000000] \end{array}\right]$$

$$BM$$

$$MM$$



3. Feladat

A négyszöget átlói négy háromszögre bontják. Igazoljuk, hogy a háromszögek köréírt köreinek középpontjai egy paralelogramma csúcsai.

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) : with(plots) :
  point(A,-2, 3) : point(B,-3,-4) : point(E, 1, 5) : point(C, 2,
     -2) :
   segment(AB, [A, B]) : segment(BC, [B, C]) : segment(CD, [C,
     D]) : segment(EA, [E, A]) :
   line(AC, [A, C]) :  line(BE, [B, E]) : intersection(P, AC, BE);
      coordinates(P);
   triangle(T1, [A, B, P]) : triangle(T2, [A, E, P]) :
     triangle(T3, [E, C, P]) : triangle(T4, [C, B, P]) :
    circumcircle(c1, T1, 'centername'=O1) : circumcircle(c2,
     T2, 'centername'=O2) :
    circumcircle(c3, T3, 'centername'=O3) : circumcircle(c4,
     T4, 'centername'=O4) :

  line(l1, [O1, O2]) : line(l2, [O2, O3]) : line(l3, [O3, O4]) :
     line(l4, [O4, O1]) :
  AreParallel(l1, l3); AreParallel(l2, l4);

  GG := draw([A, B, C, E, P, c1(color = green), c2(color = green),
     c3(color = green), c4(color = green), l1(color = red),
     l2(color = red), l3(color = red), l4(color = red)],
     printtext = true, axes = normal) :

  poly := [[-2, 3], [-3, -4], [2, -2], [1, 5]] :
  G := polygonplot(poly, axes = none, color = "Orange",
      transparency = 0.5) :
  display({G, GG}, color = red, scaling = constrained);
```

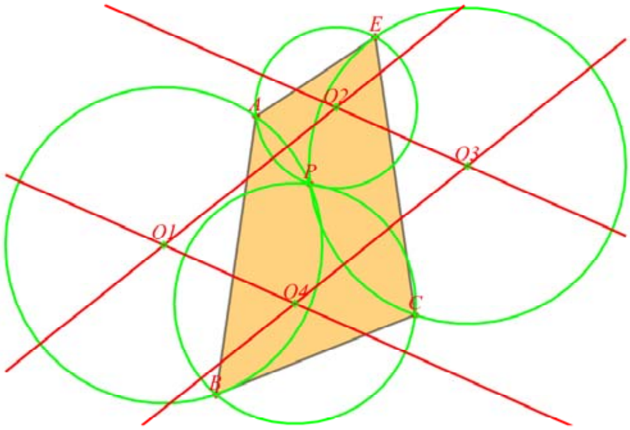
Error, (in geometry:-segment) wrong type of arguments

$$P$$

$$\left[-\frac{9}{14}, \frac{73}{56}\right]$$

true

true



4. Feladat

Osszuk egy négyszög oldalait 3-3 egyenlő részre., s az osztópontok közül minden másodikat kössünk össze egymással. Igazoljuk, hogy az összekötött vonalak trapézt alkotnak!

Megoldás:

A trapéznak definció szerint van egy pár párhuzamos oldala.

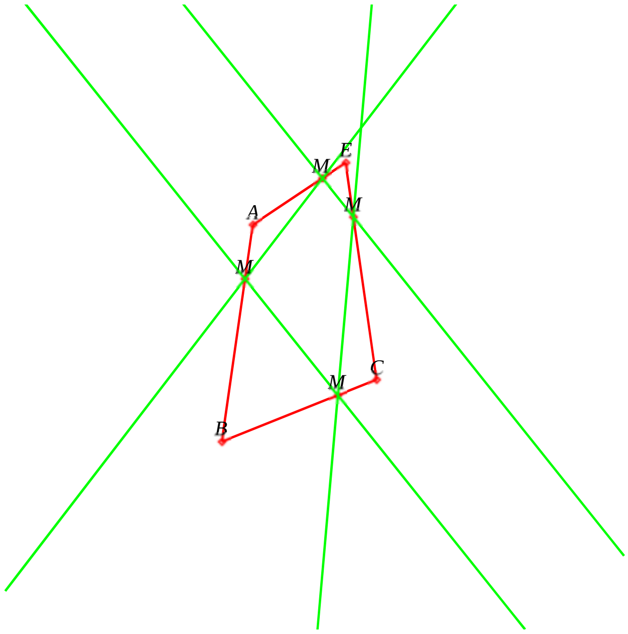
```
> restart : with(geometry) :
  osztopont :=proc(A, B, p, q)
  local M, x, y;
  x := (HorizontalCoord(A) * q + HorizontalCoord(B) * p) / (p + q);
  y := (VerticalCoord(A) * q + VerticalCoord(B) * p) / (p + q);
  point(M, x, y);
  return(M);
   end:

  point(A, -2, 3) : point(B, -3, -4) : point(E, 1, 5) : point(C, 2,
     -2) :
  segment(AB, [A, B]) : segment(BC, [B, C]) : segment(CE, [C, E]) :
     segment(EA, [E, A]) :

  P1 := osztopont(A, B, 1, 3) : P2 := osztopont(C, B, 1, 3) : P3
```

```
≔ osztopont(E, C, 1, 3) : P4 ≔ osztopont(E, A, 1, 3) :
coordinates(P1) : coordinates(P2) : coordinates(P3) :
   coordinates(P4) :

line(l1, [P1, P2]) : line(l2, [P2, P3]) : line(l3, [P3, P4]) :
   line(l4, [P4, P1]) :
AreParallel(l1, l3); AreParallel(l2, l4); AreParallel(l2,
   l3);

draw([l1(colour = green), l2(colour = green), l3(colour
   = green), l4(colour = green), A, B, C, E, P1, P2, P3, P4, AB,
   BC, CE, EA], printtext = true, axes = none);
```

true

false

false



5. Feladat

A trapéz alapjai 16 *cm* és 7 *cm*. Mekkora a középvonala?

Megoldás:

```
> k := 16.7/2;
```

$$k := 8.350000000 \qquad \textbf{(4.1.5.1)}$$

6. Feladat

Egy egyenlő szárú trapéz hegyesszöge 60, az átlók merőlegesek a szárakra. mekkorák a trapéz oldalai, ha a szár 5 cm?

Megoldás:

```
> solve(sin(30) = 5/x, x); solve(y = 10 - 2·x);
```

$$\frac{5}{\sin(30)}$$

$$\{x = x, y = 10 - 2\,x\} \qquad \textbf{(4.1.6.1)}$$

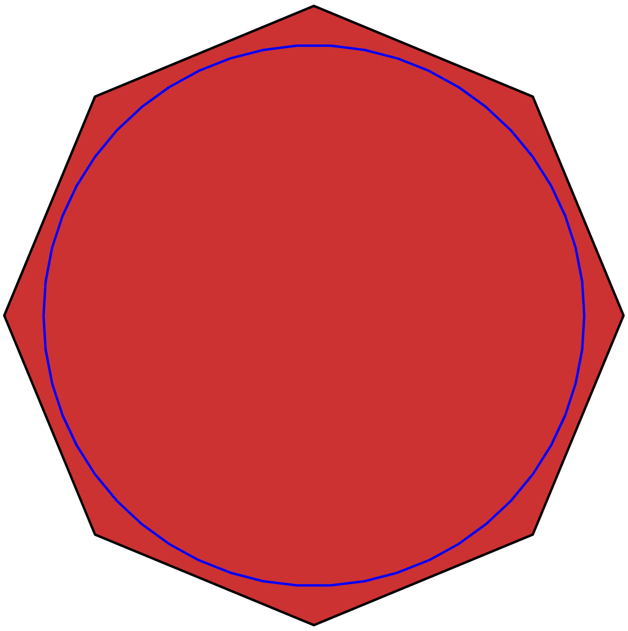
7. Feladat

Egy konvex sokszög oldalai közül az egyik 2cm, a többi pedig 1cm hosszú. Igazoljuk, hogy a sokszögbe nem lehet kört írni!

Megoldás:

Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők. A 2 *cm*-es oldalnál legoptimálisabb esetben is 1 − 1 *cm* az érintászakaszok hossza. Ez a szomszédos oldalnál nem teljesülhet.

```
> with(plots) : with(plottools) :
  ngon := n → [seq([cos(2*Pi*i/n), sin(2*Pi*i/n)], i
    = 1..n)] : c := circle([0, 0], cos(22.5), color = blue) :
  display([polygonplot(ngon(8), color = orange), c], axes
    = none);
```



8. Feladat

Mutassuk meg, hogy egy konvex sokszögben legfeljebb 35 olyan szög lehet, amely 170□-nál kisebb!

Megoldás:

Egy n oladalú sokszög belső szögeinek összege $n \cdot \pi - 2\,\pi$. Számoljuk ki, hogy mi történik, ha egy n oldalú sokszög minden szöge 170°. Ekkor $10\,n - 360$ a maradék, ami $n - 35$ db szögre kell szétosztani. Az $n - 35$ szöge a sokszögnek nem lehet nagyobb $180 - 180$-nál.

```
> a := n·180 − 2·180;
  b := 35·170 + (n − 35)·170;
  ((a − b)/(n − 35));
```

$$a := 180\,n - 360$$

$$b := 170\,n$$

$$\frac{10\,n - 360}{n - 35} \tag{4.1.8.1}$$

9. Feladat

Az ABCE paralelogramma AB oldalának felezéspontja F, a EA oldaláé pedig G. Mutassuk meg, hogy CG és CF a BE átlót három egyenlő hosszú részre bontja!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :  with(plots) :
  point(A, 0, 0) : point(B, 4, 0) : point(E, 1, 1.5) : point(C,
    5, 1.5) :

   midpoint(F, A, B) : midpoint(G, E, A) :
   segmend(CG, [C, G]) : segment(CF, [C, F]) : segment(BE, [B,
     E]) :
   line(l1, [C, G]) : line(l2, [C, F]) : line(ll, [B, E]) :
   intersection(M1, l1, ll); intersection(M2, l2, ll);
   distance(B, M2); distance(M1, M2); distance(E, M1);
   polygon([[0, 0], [4, 0], [5, 1.5], [1, 1.5]]) :
```

$$M1$$
$$M2$$
$$1.118033989$$
$$1.118033989$$
$$1.118033989 \tag{4.1.9.1}$$

10. Feladat

Egy négyszögbe négy kört írtunk oly módon, hogy mindegyik pontosan két másik kört érint kívülről, s mindegyik érinti a négyszög két szomszédos oldalát is.
Mutassuk meg, hogy ha a négyszög érintőnégyszög, akkor valamely két szemközti kör sugara megegyezik!

Megoldás:

```
> restart : x := sqrt((r1 + r2)^2 - (r2 - r1)^2) :
  y := sqrt((r2 + r3)^2 - (r3 - r2)^2) :
  z := sqrt((r3 + r4)^2 - (r4 - r3)^2) :
  v := sqrt((r4 + r1)^2 - (r1 - r4)^2) :
   ex := simplify((a + x + b) + (c + z + d)-((a + y + d) + (b + v
     + c)));
   factor(ex, r1 - r3);
```

$$ex := 2\sqrt{r1\,r2} + 2\sqrt{r3\,r4} - 2\sqrt{r2\,r3} - 2\sqrt{r4\,r1}$$

Error, (in factor) 2nd argument, r1-r3, is not a valid algebraic extension

Házi feladatok

1. Feladat
Egy paralelogramma egy egyenes egyik oldalán helyezkedik el. Két szomszédod csúcsa az egyenestől 6 *cm*-re, illetve 9 *cm*
-re, középpontja pedig 7 *cm*-re van. Határozzuk meg a másik két csúcsnak az egyenestől mért távolságát!

2. Feladat
Szerkesszünk trapézt, ha adott két alapja, továbbá
a. egyik szöge és aszöggel szemközti átló
b. a két átló
c. egyik átlója és a magasság.

3. Feladat
Bizonyítsuk be, hogy ha a téglalp átlói 120-os szöget zárnak be egymással, akkor az egyik oldal fele az átlónak.

5. Területtel kapcsolatos feladatok

Feladatok

1. Feladat

Mekkora az *a* oldalú szabályos háromszög területe?

Megoldás:

```
> restart : m := sqrt(a^2 - (a/2)^2);
  Terület := a·m/2;
```

$$m := \frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{a^2}$$

$$Terület := \frac{1}{4}\,a\sqrt{3}\sqrt{a^2} \qquad \textbf{(5.1.1.1)}$$

2. Feladat

Egy egyenlő szárú derékszög háromszög átfogójára félkört, a derékszög csúcsból a befogóval egyenlő sugarú negyedkört rajzolunk.

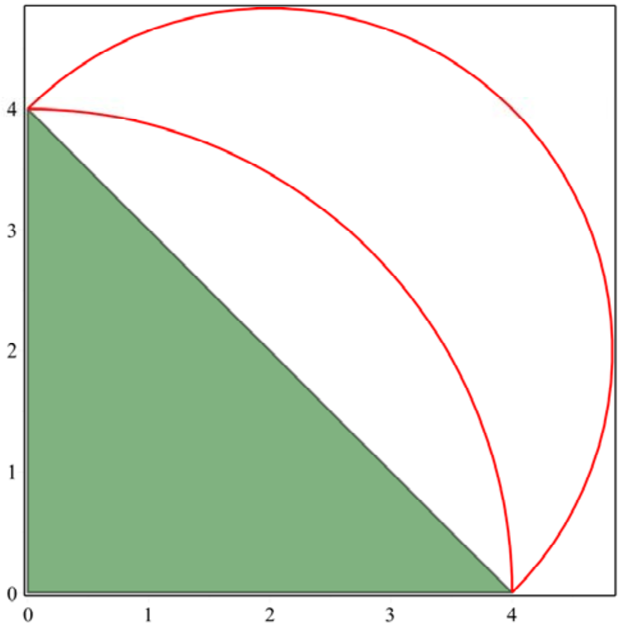
Bizonyítsa be, hogy a keletkezett holdacska területe a háromszög területével egyenlő!

Megoldás:

```
> restart: with(geometry):with(plots):with(plottools):
poly:=[[0,0],[4,0],[0,4]];
a := arc([2, 2], sqrt(32)/2, -Pi/4..Pi-Pi/4):
b := arc([0,0],4, 0..Pi/2):
G:=polygonplot(poly, axes=boxed, color="DarkGreen",
transparency=0.5);
display({a,b,G}, color=red, scaling=constrained);
```

$$poly := [[0, 0], [4, 0], [0, 4]]$$

$$G := PLOT(...)$$



$$> Th := \frac{x^2}{2};\ Tn := \frac{x^2 \cdot Pi}{4};\ Tf := \frac{\left(\frac{sqrt(2) \cdot x}{2}\right)^2 \cdot Pi}{2};$$

$$Tho := Th + Tf - Tn;$$

```
verify(Th, Tho, equal);
```

$$Th := \frac{1}{2} x^2$$

$$Tn := \frac{1}{4} x^2 \pi$$

$$Tf := \frac{1}{4} x^2 \pi$$

$$Tho := \frac{1}{2}x^2$$

$$true \qquad (5.1.2.1)$$

3. Feladat

Kössük össze a négyzet csúcsait a szemközti oldalak felezőpontjaival.

Hányadrésze a négyzet közepén körülzárt kis négyzet az eredeti négyzetnek?

Válaszát indokolja!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
point(A, 0, 0) : point(B, 4, 0) : point(C, 4, 4) : point(E, 0,
   4) :
midpoint(F1, A, B) : midpoint(F2, B, C) : midpoint(F3, C, E) :
   midpoint(F4, E, A) :
line(l1, [A, F3]) : line(l2, [F1, C]) : line(l3, [B, F4]) :
   line(l4, [F2, E]) :

intersection(M13, l1, l3) : intersection(M14, l1, l4) :
   intersection(M23, l2, l3) : intersection(M24, l2, l4) :
distance(M13, M14); distance(M13, M23); u := distance(M14,
   M24);
 Tk := u^2 : T := 4^2 : Tk/T;
```

$$\frac{1}{5}\sqrt{16}\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{16}\sqrt{5}$$

$$u := \frac{1}{5}\sqrt{16}\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{5} \qquad (5.1.3.1)$$

4. Feladat

Egy paralelogramma egyik átlóján kijelölünk egy pontot, és párhuzamosokat húzunk rajta keresztül a paralelogramma oldalaival.

Igazolja, hogy az így keletkezett négy paralelogramma közül kettőnek a területe egyenlő!

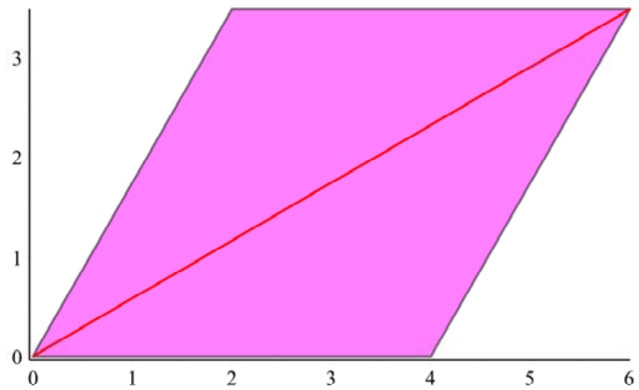
Megoldás:

Egyenlő területekből egyenlőket levonva, a maradék is egyenlő marad.

```
> restart :
with(plots) : with(geometry) :
```

```
osztopont :=proc(A, B, p, q)
local M, x, y;
x := (HorizontalCoord(A) * q + HorizontalCoord(B) * p) / (p + q);
y := (VerticalCoord(A) * q + VerticalCoord(B) * p) / (p + q);
point(M, x, y);
return(M);
 end:

poly1 := [[0, 0], [4, 0], [6, 3.5], [2, 3.5]]:
point(A, 0, 0) : point(C, 6, 3.5) : point(B, 4, 0) :

segment(l, [A, C]) :

line(k1, [A, B]) : line(k2, [B, C]) :
P1 := osztopont(A, C, 6, 5) :

 ParallelLine(k1p, P1, k1) :
 ParallelLine(k2p, P1, k2) :

dl3 := draw([k1p]);
dl4 := draw([k2p]);
p1 := polygonplot([poly1], color='magenta', transparency
   =0.5, axes=frame) :
p4 := draw([l]) :
display( {p1, p4}, color=red, scaling=constrained);
Error, (in geometry:-ParallelLine) wrong type of arguments
Error, (in geometry:-draw) unknown geometric object k1p
```

$$dl4 := PLOT(...)$$



5. Feladat

Tetszőleges konvex négyszög csúcsain át húzzunk párhuzamosokat az átlókkal. Igazoljuk, hogy a négyszög köré írt paraleolgramma területe a négyszög területének kétszerese!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) : with(plots) :

point(A,-2, 0) : point(B, 4, 0) : point(C, 3, 3) : point(E,-1,
   4) :

line(l1, [A, C]) : line(l2, [B, E]) :
ParallelLine(p11, l1, B) : ParallelLine(p12, l1, E) :
ParallelLine(p21, l2, A) : ParallelLine(p22, l2, C) :

intersection(P1, p11, p21) : intersection(P2, p11, p22) :
   intersection(P3, p12, p22) : intersection(P4, p12, p21) :
 coordinates(P1); coordinates(P2); coordinates(P3);
   coordinates(P4);

triangle(ABC, [A, B, C]) : triangle(CEA, [C, E, A]) :
triangle(P1P2P4, [P1, P2, P4]) : triangle(P2P3P4, [P2, P3,
   P4]) :
```

```
Tp1 := area(ABC) + area(CEA);
Tp2 := area(P1P2P4) + area(P2P3P4); Tp1/Tp2;

segment(AC, [A, C]) : segment(BE, [B, E]) :
s1 := draw(AC, printtext = true, linestyle = dash) : s2
    := draw(BE, printtext = true, linestyle = dash) :

poly1 := [[-2, 0], [4, 0], [3, 3], [-1, 4]]: poly2 := [[4/7,
    -72/35], [39/7, 33/35], [4/7, 173/35], [-31/7, 68/35]]:

G1 := polygonplot(poly1, axes = none, filled = true, color
    = "green", transparency = 0.5) :
G2 := polygonplot(poly2, axes = none, color = "yellow",
    transparency = 0.5, view = [-5..5.6, -2.2..5]) :
display({G1, G2, s1, s2}, scaling = constrained, axes
    = none);
```

$$\left[\frac{4}{7}, -\frac{72}{35}\right]$$

$$\left[\frac{39}{7}, \frac{33}{35}\right]$$

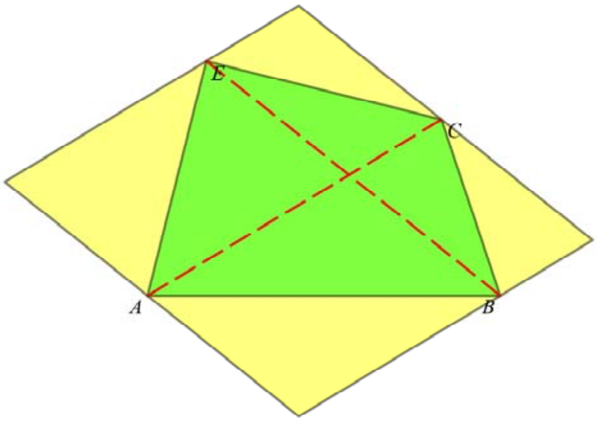
$$\left[\frac{4}{7}, \frac{173}{35}\right]$$

$$\left[-\frac{31}{7}, \frac{68}{35}\right]$$

$$Tp1 := \frac{35}{2}$$

$$Tp2 := 35$$

$$\frac{1}{2}$$



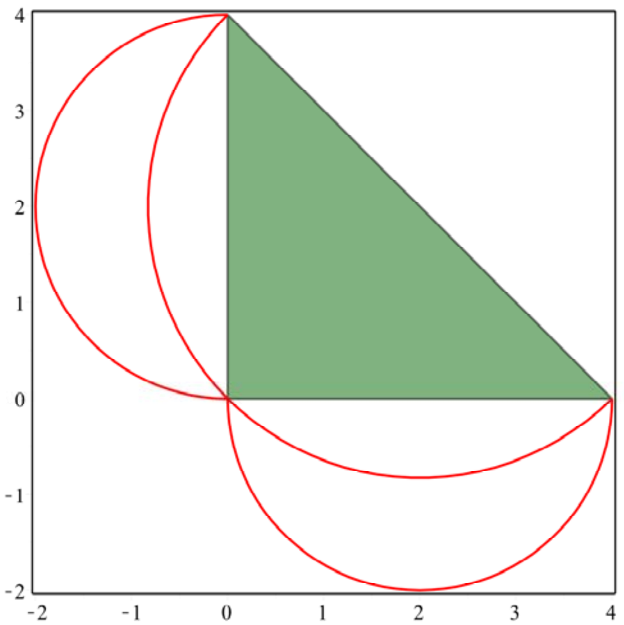
6. Feladat

A derékszögű háromszög oldalai fölé szerkesztett félkörök két holdacskát határoznak meg (Hippokratész holdacskái). Igazoljuk, hogy a holdacskák területének összege a háromszög területével egyenlő!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) : with(plots) : with(plottools) :
  poly := [[0, 0], [4, 0], [0, 4]] :
  a := arc([2, 2], -sqrt(32)/2, -Pi/4..Pi-Pi/4) :
  b := arc([0, 2], -2, Pi/2 ..-Pi/2) :
  c := arc([2, 0], 2, 0..-Pi) :
  G := polygonplot(poly, axes = boxed, color = "DarkGreen",
     transparency = 0.5);
  display({a, b, c, G}, color = red, scaling = constrained);
```

$$G := PLOT(\ldots)$$



$$> Th := \frac{x^2}{2};\quad Tfk := \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot Pi}{2};\quad Tfn := \frac{\left(\frac{sqrt(2)\cdot x}{2}\right)^2 \cdot Pi}{2};$$

```
Tho := Th + 2· Tfk - Tfn;
verify(Tho, Th, equal);
```

$$Th := \frac{1}{2} x^2$$

$$Tfk := \frac{1}{8} x^2 \pi$$

$$Tfn := \frac{1}{4} x^2 \pi$$

$$Tho := \frac{1}{2} x^2$$

true **(5.1.6.1)**

7. Feladat

A háromszög oldalait osszuk három egyenlő részre, s válasszuk ki minden oldalon a második osztópontot (egy meghatározott körüljárási irányt tartva). Az osztópontokat kössük össze a szemközti csúccsal. Mutassuk meg, hogy az összekötő szakaszokkal körülzárt háromszög területe, az eredeti háromszög területének hetede!

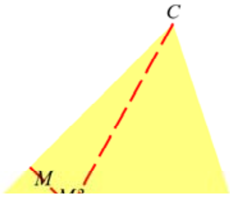
Megoldás:

```
> restart : with(geometry) : with(plots) :

osztopont :=proc(A, B, p, q)
local M, x, y;
x := (HorizontalCoord(A) * q + HorizontalCoord(B) * p) / (p + q);
y := (VerticalCoord(A) * q + VerticalCoord(B) * p) / (p + q);
point(M, x, y);
return(M);
 end:

point(A, 0, 0) : point(B, 4, 0) : point(C, 3, 3) :
O1 := osztopont(A, B, 1, 2) : O2 := osztopont(B, C, 1, 2) : O3
    := osztopont(C, A, 1, 2) :

line(l1, [A, O2]) : line(l2, [B, O3]) : line(l3, [C, O1]) :
intersection(M1, l1, l2) : intersection(M2, l1, l3) :
   intersection(M3, l2, l3) :

triangle(ABC, [A, B, C]) : triangle(M1M2M3, [M1, M2, M3]) :
t1 := area(ABC); t2 := area(M1M2M3); t2/t1;

segment(AO2, [A, O2]) : segment(BO3, [B, O3]) : segment(CO1,
   [C, O1]) :

draw({ABC(filled = true, color = yellow, transparency = 0.5),
   M1M2M3(filled = true, color = green, transparency = 0.4),
   AO2(linestyle = dash), BO3(linestyle = dash),
   CO1(linestyle = dash)}, scaling = constrained, axes
   = none, printtext = true);
```

$$t1 := 6$$

$$t2 := \frac{6}{7}$$

$$\frac{1}{7}$$

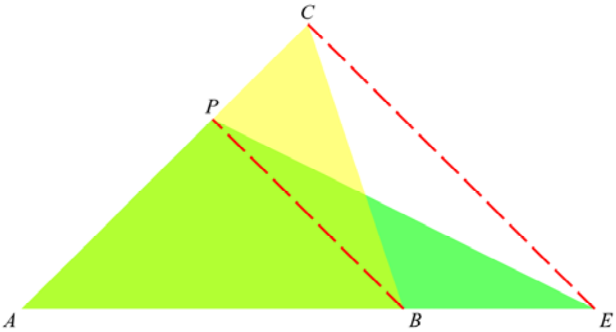


8. Feladat

Alakítsunk át háromszöget egyik szögének megtartásával olyanná, hogy a szög melletti egyik oldala adott hosszúságú legyen!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) : with(plots) :
point(A, 0, 0) : point(B, 4, 0) : point(C, 3, 3) : point(E, 6,
   0) :
line(l1, [E, C]) : ParallelLine(l2, l1, B) : line(l3, [A, C]) :
   intersection(P, l2, l3) :
segment(EC, [E, C]) : segment(BP, [B, P]) :
triangle(ABC, [A, B, C]) : triangle(AEP, [A, E, P]) :
area(ABC); area(AEP);
s1 := draw(EC, printtext = true) : s2 := draw(BP, printtext
   = true) :
```



9. Feladat

Szerkesszünk kört, melynek területe kétszer akkora, mint egy adott köré!

Megoldás:

Számítsuk ki az új kör sugarát, majd szerkesszük azt meg! $\sqrt{2}\cdot r$ szerkeszthető egy r befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójaként.

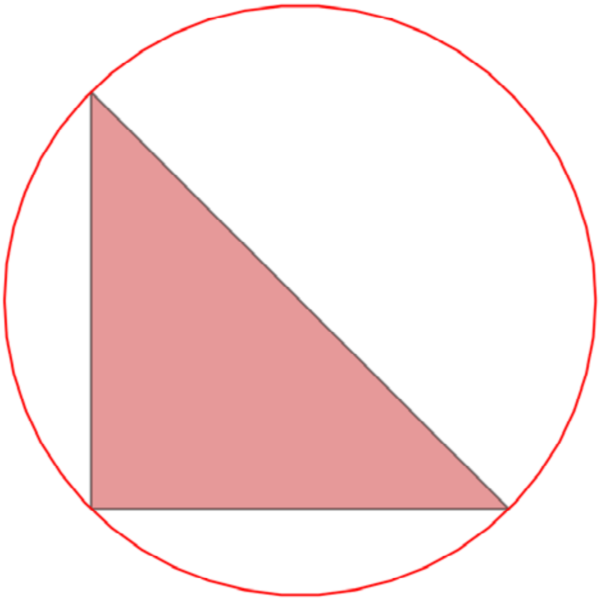
```
> restart : with(geometry) :
  Tk := r^2·Pi;
  solve(2·Tk = R^2·Pi, R);

  triangle(T, [4, 'angle' = Pi/2, 4]); with(plots) :
     with(plottools) :
```

$$\sqrt{2}\, r,\ -\sqrt{2}\, r$$

$$T$$

$$G := PLOT(\ldots)$$

$\sqrt{2}\ r$ *szerkesztése*



10. Feladat

Igazolja, hogy a trapéz átlói a trapézt négy olyan háromszögre bontják, amelyek közül kettőnek a területe egyenlő!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) : with(plots) :
```


10. Feladat

Igazolja, hogy a trapéz átlói a trapézt négy olyan háromszögre bontják, amelyek közül kettőnek a területe egyenlő!

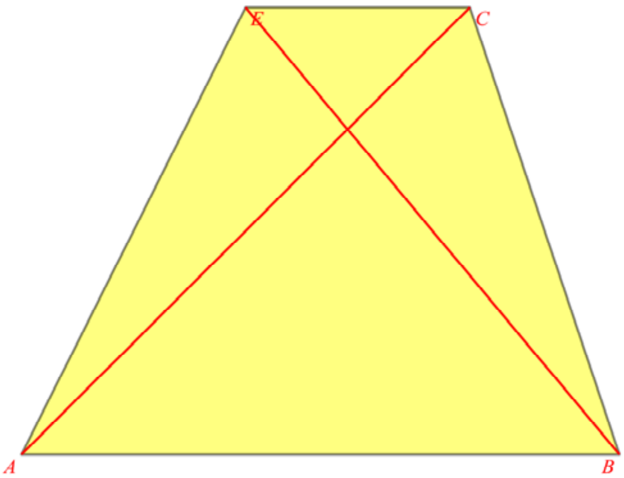
Megoldás:

```
> restart : with(geometry) : with(plots) :
```

```
poly := [[0, 0], [4, 0], [3, 3], [1.5, 3]] :
 point(A, 0, 0) : point(B, 4, 0) : point(C, 3, 3) : point(E, 1.5,
   3) :
 segment(AC, [A, C]) : segment(BE, [B, E]) :
 line(l1, [A, C]) : line(l2, [B, E]) : intersection(P, l1, l2) :
 triangle(APE, [A, P, E]) : triangle(BCP, [B, C, P]) :
 area(APE); area(BCP);

s1 := draw(AC, printtext = true) : s2 := draw(BE, printtext
   = true) :
G := polygonplot(poly, axes = none, color = "yellow",
    transparency = 0.5) :
display({G, s1, s2}, color = red, scaling = constrained);
```

1.636363636

1.636363636



Házi feladatok

1. Feladat

Rajzoljunk egy hegyesszögű háromszög két oldala fölé négyzetet. Igazoljuk, hogy ezeknek a négyzeteknek azon darabjai, melyeket a háromszög megfelelő magasságvonalainak hosszabbításai levág belőlük, egyenlők!

2. Feladat
Alakítsunk át egy háromszöget egyenlő szárúvá, adott alappal. (Az átalakítás előtti és utáni háromszögek területe egyenlő.)

3. Feladat
Adott egy négyzet és a négyzet oldalánál hosszabb szakasz. Erre a szakaszra szerkesszünk két négyzetet, melyek területének összege akkora, mint az adott négyzeté.

6. Kör és részei

Feladatok

1. Feladat

Hogyan szerkeszthetjük meg egy középpont nélkül felrajzolt kör középpontját?

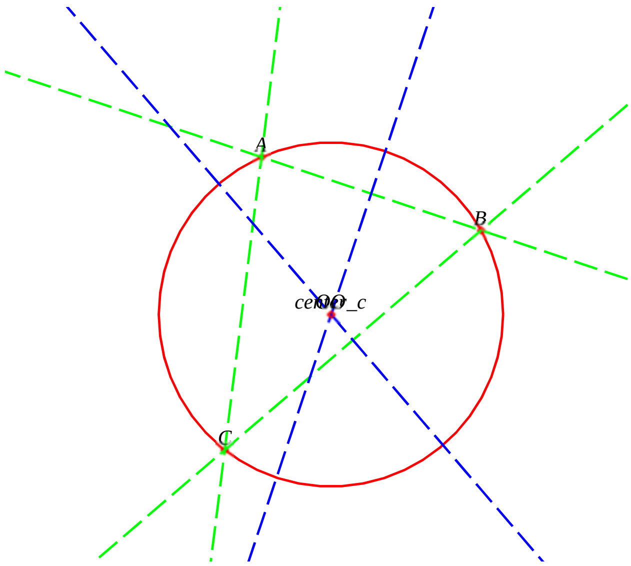
Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
point(A, 0, 3) : point(B, 6, 1) : point(C, -1, -5) :

circle(c, [A, B, C]) :
line(l1, [A, B]) : line(l2, [B, C]) : line(l3, [C, A]) :
midpoint(M1, A, B) : midpoint(M2, B, C) :
PerpendicularLine(l1p, M1, l1) :
PerpendicularLine(l2p, M2, l2) :

intersection(OO, l1p, l2p) :
distance(A, OO); distance(B, OO); distance(C, OO);

draw([c(color = red), A, B, C, OO, l1(color = green, linestyle
    = dash), l2(color = green, linestyle = dash), l3(color
    = green, linestyle = dash), l1p(color = blue, linestyle
    = dash), l2p(color = blue, linestyle = dash)], scaling
    = constrained, printtext = true, axes = none, view = [-7
    ..10, -8 ..7]);
```

$$\frac{1}{10}\sqrt{221}\sqrt{10}$$

$$\frac{1}{10}\sqrt{221}\sqrt{10}$$

$$\frac{1}{10}\sqrt{221}\sqrt{10}$$



2. Feladat

Egy konvex sokszög oldalai közül az egyik 4 cm, a többi 2 cm hosszú. Igazoljuk, hogy a négyszögbe nem lehet kört írni!

Megoldás:

Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők.

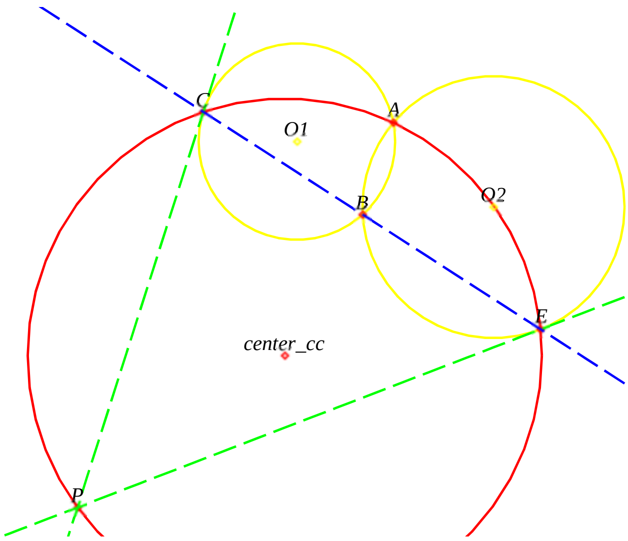
3. Feladat

Két kör az A és B pontban metszi egymást. A B ponton át húzott egyenes a két kört a C ill. D pontban metszi. Ezeken a pontokon keresztül húzzunk érintőket a körökhöz, melyek metszéspontja legyen P. Bizonyítsuk be, hogy A, C, D és P egy körre illeszkedik!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
point(O1, 0, 3) : r1 := 3 :
point(O2, 6, 1) : r2 := 4 :
circle(c1, [O1, r1]) : circle(c2, [O2, r2]) :
intersection(H, c1, c2, [A, B]) : point(K, -3, 4) :

line(l1, [B, K]) : intersection(H2, l1, c1, [C, B]) :
intersection(H3, l1, c2, [B, E]) :
TangentLine(tC, C, c1) :
TangentLine(tE, E, c2) : intersection(P, tC, tE) :

circle(cc, [C, P, E]) : IsOnCircle(A, cc);

draw([c1(color = yellow), c2(color = yellow), cc(color
= red), A, B, C, P, E, tC(color = green, linestyle = dash),
tE(color = green, linestyle = dash), l1(color = blue,
linestyle = dash)], scaling = constrained, printtext
= true, axes = none, view = [-9 ..10, -9 ..7]);
```

true



4. Feladat

Igazoljuk, hogy a háromszög köré írt kör középpontja a legnagyobb oldalhoz van legközelebb.

Megoldás:

```
estart : with(geometry) :
point(A, 0, 3) : point(B, 6, 1) : point(C, -2, -7) :

circle(c, [A, B, C]) : triangle(T, [A, B, C]) :
line(l1, [A, B]) : line(l2, [B, C]) : line(l3, [C, A]) :

midpoint(M1, A, B) : midpoint(M2, B, C) :
PerpendicularLine(l1p, M1, l1) :
PerpendicularLine(l2p, M2, l2) :

intersection(OO, l1p, l2p) :

d1 := distance(OO, l1); d2 := distance(OO, l2); d3
   := distance(OO, l3);
n1 := distance(A, B); n2 := distance(B, C); n3 := distance(C,
   A);
  verify(d1, d2, greater_than); verify(d1, d3,
    greater_than);
  verify(n1, n2, greater_than); verify(n1, n3,
    greater_than);

  draw([c(color = red), A, B, C, T(color = green, linestyle
   = dash)], scaling = constrained, printtext = true, axes
   = none, view = [-7..10, -8..7]);
```

$$d1 := \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

$$d2 := \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$d3 := \frac{1}{2}\sqrt{26}$$

$$n1 := \sqrt{40}$$

$$n2 := \sqrt{128}$$

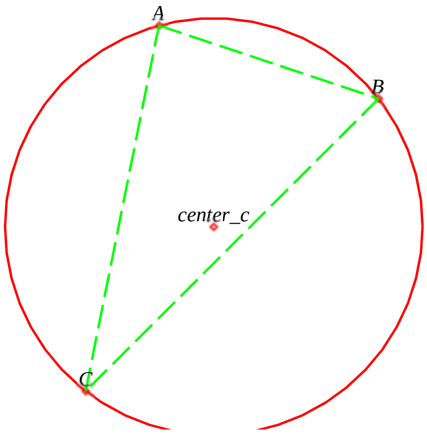
$$n3 := \sqrt{104}$$

true

true

false

false



5. Feladat

Egy téglalap két szomszédos csúcsa A(1;-3) és B(7;7). A másik oldal fele olyan hosszú, mint AB. Határozza meg az átlók metszéspontját!

Megoldás:

```
> point(A, 1, 3) : point(B, 7, 7) : line(a, [A, B], [x, y]) :
  r := distance(A, B) / 4;
  Equation(PerpenBisector(e, A, B), [x, y]);
  midpoint(F, A, B); coordinates(F);
  Equation(circle(k, [F, r], [x, y]), [x, y]);
  intersection(OB, e, k, [P1, P2]);
  coordinates(P1);
  coordinates(P2);

   draw([a, e(colour = blue), A, B, k, P1, P2], printtext = true,
     view = [0.1 ..8, 0 ..8],
   axes = none);
```

$$r := \frac{1}{4}\sqrt{52}$$

$$-44 + 6\,x + 4\,y = 0$$

$$F$$

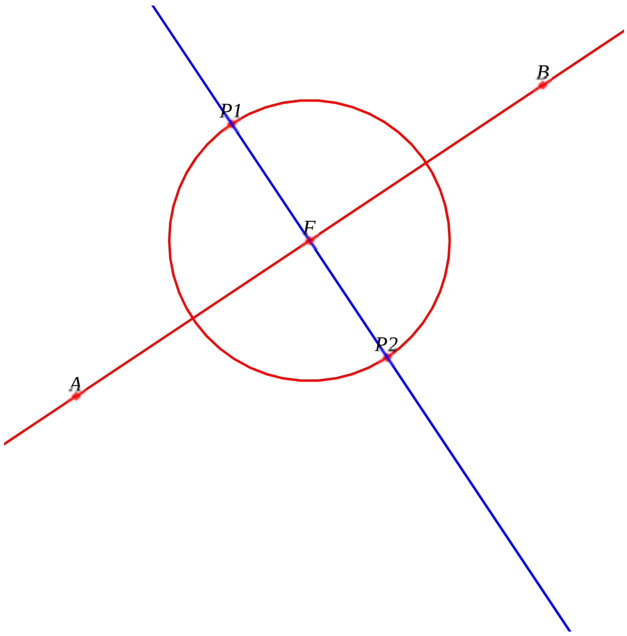
$$[4, 5]$$

$$\frac{151}{4} + x^2 + y^2 - 8\,x - 10\,y = 0$$

Error, (in geometry:-intersection) the first argument is expected of type name

$$\left[3, \frac{13}{2}\right]$$

$$\left[5, \frac{7}{2}\right]$$



6. Feladat

Mi annak az origón átmenő körnek az egyenlete, amelynek középpontján áthalad az $x + 2 \cdot y = 12$ és az $x - y = 0$ egyenletű egyenes?

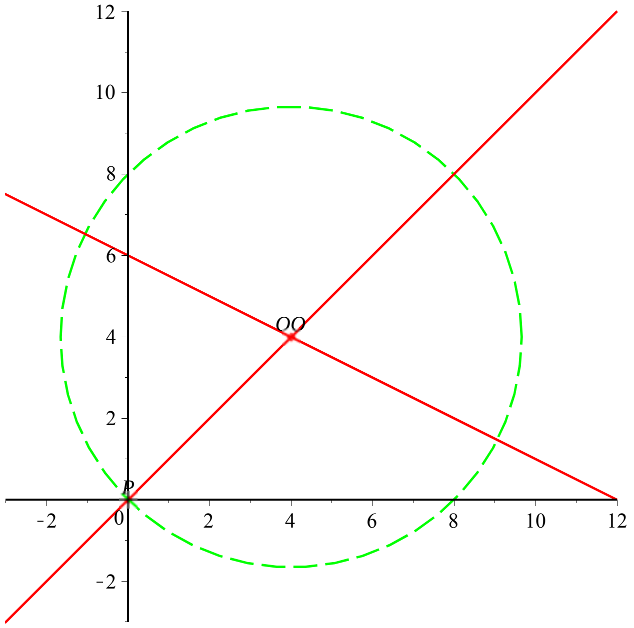
Megoldás:

```
> point(P, 0, 0) :
  line(e, x + 2 * y = 12, [x, y]) :
  line(f, x-y = 0, [x, y]) :
  coordinates(intersection(OO, e, f));
  r := distance(OO, P);
  Equation(circle(k, [OO, r], [x, y]), [x, y]);

   draw([e, f, OO, P, k(color = green,  linestyle = dash)],
     printtext = true,  view = [-3 ..12, -3 ..12],  axes = normal);
```

$$[4, 4]$$

$$r := \sqrt{32}$$

$$x^2 + y^2 - 8\,x - 8\,y = 0$$



7. Feladat

Adott egy kör és rajta kívül egy pont. Szerkesszünk a pont körül egy kört, mely az adott körből adott hosszúságú húrt metsz ki.

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) :
```

```
point(A, 0, 3) : point(B, 6, 1) : r := 3 :  d := 4

 d2 := distance(A, B);
 solve((4/2)^2 + x^2 = r^2, x);
  solve({y^2 + (4/2)^2 = r1^2, sqrt(5) + y = d2}, {y, r1});
circle(cm, [B, r1]) : circle(c, [A, r]) :

draw([c(color = red), A, B, cm(color = green, linestyle
   = dash)], scaling = constrained, printtext = true, axes
   = none, view = [-7..10, -8..7]);
Error, unable to parse
                restart : with(geometry) :
point(A, 0, 3) : point(B, 6, 1) : r := 3 :
  d := 4  d2 := distance(A, B);
                solve((4/2)^2 + x^2 = r^2, x);
      solve({y^2 + (4/2)^2 = r1^2, sqrt(5) + y = d2}, {y, r1});
          circle(cm, [B, r1]) : circle(c, [A, r]) :
draw([c(color = red), A, B, cm(color = green, linestyle
   = dash)], scaling = constrained, printtext = true, axes
   = none, view = [-7..10, -8..7]);
```

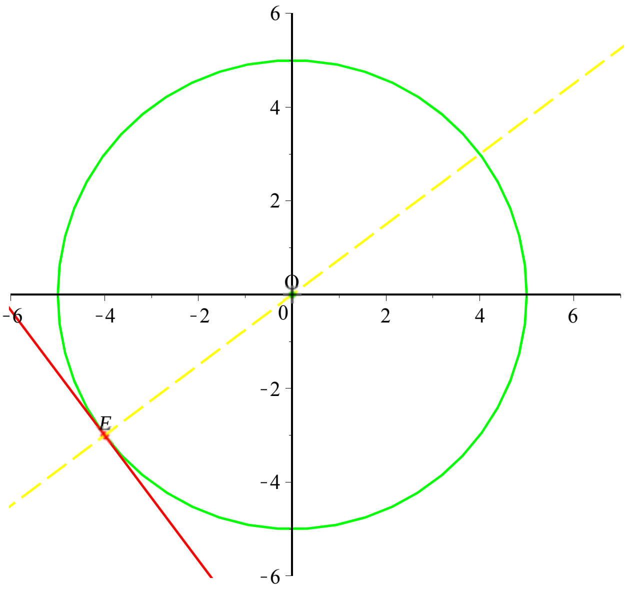
8. Feladat

Írja fel az $x^2+y^2=25$ kör (-4;-3) pontjához tartozó érintőjének egyenletét!

Megoldás:

```
> circle(k, x^2 + y^2 = 25, [x, y], `centername` = O) :
  point(E, -4, -3) :
  line(OE, [O, E], [x, y]) :
  Equation(PerpendicularLine(a, E, OE), [x, y]);

   draw([k(color = green), E, OE(color = yellow, linestyle
     = dash), a, O], printtext = true, view = [-6..7, -6..6],
     axes = normal);
```

$$-25-4x-3y=0$$



9. Feladat

Írja föl az $x^2 + y^2 + 40 = 10 \cdot (x + y)$ egyenletű kör 4 abszcisszájú pontjaiban húzható érintő egyenletét!

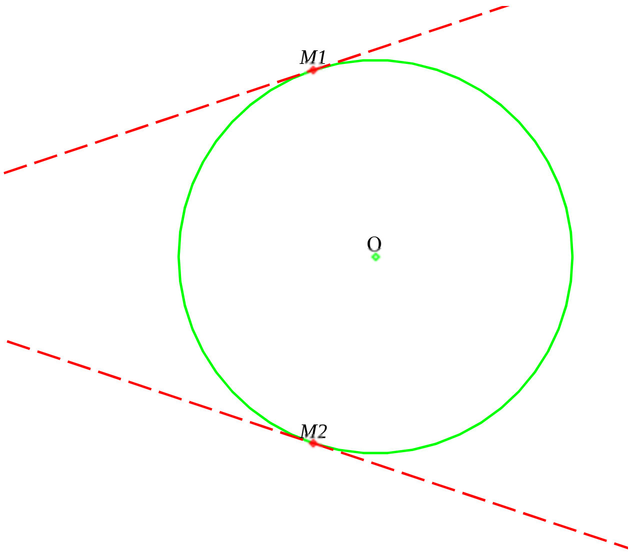
Megoldás:

```
> circle(k, x^2 + y^2 + 40 = 10 * (x + y), [x, y], `centername`
     = O) :
   line(h, x = 4, [x, y]) :
   intersection(OBJ3, k, h, [M1, M2]);
   Equation(tangentpc(e, M1, k), [x, y]);
   Equation(tangentpc(f, M2, k), [x, y]);

   draw([k(color = green), M1, M2, e(color = red, linestyle
     = dash), f(color = red, linestyle = dash)], printtext
     = true, axes = none, view = [-1..9, -1..9]);
```

Error, (in geometry:-intersection) the first argument is expected of type name

$$-20 - x + 3\,y = 0$$

$$10 - x - 3\,y = 0$$



10. Feladat

Írja föl az $x^2 + y^2 + 40 = 10 \cdot (x + y)$ egyenletű körnek a 3x-y=-1 egyenessel párhuzamos érintőit!

Megoldás:

```
> circle(k, x^2+y^2+40=10*(x+y), [x, y], `centername`
    =O) :
line(g, 3*x-y=1, [x, y]) :
PerpendicularLine(gm, O, g) :
intersection(MM, k, gm, [M1, M2]);

Equation(PerpendicularLine(e1, M1, gm), [x, y]);
Equation(PerpendicularLine(e2, M2, gm), [x, y]);
```

$$[M1, M2]$$

$$-3\,x + y = 0$$

$$20 - 3\,x + y = 0 \qquad \textbf{(6.1.10.1)}$$

Házi feladatok

1. Feladat
Szerkesszünk két adott körhöz közös belső és külső érintőket!

2. Feladat
Szerkesszünk egy adott szakasz végpontján át kört úgy, hogy az egyik végpontjához húzott sugár a szakasszal 60°-os szöget zárjon be.

3. Feladat
Szerkesszünk kört, amely egy háromszög minden oldalától 1 cm- re halad.

7. Mértani testek

Feladatok

1. Feladat

Egy kocka éle a méterrel hosszabb, mint egy másiké; a két térfogat különbsége b. Mekkorák az élek?

Megoldás:

```
> erestart :
solve(x^3 - (x + a)^3 = b, {x});
```

$$\left\{x = \frac{1}{6}\,\frac{-3\,a^2 + \sqrt{-3\,a^4 - 12\,a\,b}}{a}\right\}, \left\{x = -\frac{1}{6}\,\frac{3\,a^2 + \sqrt{-3\,a^4 - 12\,a\,b}}{a}\right\}$$

$$x + a \qquad (7.1.1.1)$$

```
>
```

2. Feladat

Egy téglatest térfogata 30 cm^3. Minden élének hossza egész szám. Keressük meg az összes ilyen téglatestet! Határozzuk meg az élek hosszát, számítsuk ki a téglatestek felszínét!

Megoldás:

```
> restart : ifactor(30);
```

A faktorizációból felírható az összes lehetséges eset.

```
a1 := 1 : b1 := 1 : c1 := 30 :
a2 := 1 : b2 := 2 : c2 := 15 :
a3 := 1 : b3 := 3 : c3 := 10 :
a4 := 1 : b4 := 5 : c4 := 6 :
a5 := 2 : b5 := 3 : c5 := 5 :
F1 := expand(a1·b1 + a1·c1 + b1·c1);
F2 := expand(a2·b2 + a2·c2 + b2·c2);
```

```
F3 := expand(a3·b3 + a3·c3 + b3·c3);
F4 := expand(a4·b4 + a4·c4 + b4·c4);
F5 := expand(a5·b5 + a5·c5 + b5·c5);
```

$$(2)\ (3)\ (5)$$

$$F1 := 31\,a1 + 30$$

$$F2 := 47$$

$$F3 := 43$$

$$F4 := 41$$

$$F5 := 31 \qquad (7.1.2.1)$$

3. Feladat

Egy kúp palástja r sugarú félkör. Mekkora a felszíne és térfogata?

Megoldás:

```
> restart:
  K := 2·r·π / 2;
  Kkör := K; solve(2·R·π = Kkör, R); R := %;
  Felszin := R^2·π + r^2·π / 2; a := r^2 − R^2;
  m := sqrt(a);
  Térfogat := R^2·π·m / 3 ;
```

$$K := r\,\pi$$

$$Kkör := r\,\pi$$

$$\frac{1}{2}\,r$$

$$R := \frac{1}{2}\,r$$

$$Felszin := \frac{3}{4}\,r^2\,\pi$$

$$a := \frac{3}{4}\,r^2$$

$$m := \frac{1}{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt{r^2}$$

$$Térfogat := \frac{1}{24}\,r^2\,\pi\,\sqrt{3}\,\sqrt{r^2} \qquad (7.1.3.1)$$

4. Feladat

Mekkora az egyenlő oldalú kúp alkotója, ha felszíne 1 m^2?

Megoldás:

```
> restart :
  Felszin := r^2·π + r·π·2·r;
  solve(Felszin = 1, {r});
  alkotó := 2·r;
```

$$Felszin := 3\, r^2\, \pi$$

$$\left\{ r = \frac{1}{3}\, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \right\}, \left\{ r = -\frac{1}{3}\, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

$$alkotó := 2\, r \tag{7.1.4.1}$$

5. Feladat

Egy 45 *cm* magas gúlát két síkkal, melyek az alaplappal párhuzamosak, három egyenlő térfogatú részre osztunk. Számítsuk ki az egyes részek magasságát!

Megoldás:

```
> restart : Vgúla := 1·45/3;  Vkisgúla := t3·(45 − x − y)/3;
     Vközepesgúla := t2·(45 − x)/3;
  V1 := Vgúla − Vközepesgúla;
  V2 := Vközepesgúla − Vkisgúla;
  solve({V1 = V2, V2 = Vkisgúla, Vkisgúla = V1}, {x, y});

   solve(15 (-2 + 3 t2)/t2 = 45 − 45·t2, t2);
   solve(45/(45 − 15 (-2 + 3 t2)/t2 − (-15 (t2 − 2 t3)/(t3 t2))) = 1/t3, t3);
  x1 := evalf(15 (-2 + 3 ((1/3) √6))/((1/3) √6)); y1 := evalf(
    -15 (((1/3) √6) − 2 ((1/3) √3))/(((1/3) √3) ((1/3) √6)));
  M1 := evalf(45 − x1 − y1);
```

$$Vgúla := 15$$

$$Vkisgúla := \frac{1}{3}\, t3\, (45 - x - y)$$

$$Vközepesgúla := \frac{1}{3}\, t2\, (45 - x)$$

$$V1 := 15 - \frac{1}{3}\, t2\, (45 - x)$$

$$V2 := \frac{1}{3}\, t2\,(45 - x) - \frac{1}{3}\, t3\,(45 - x - y)$$

$$\left\{x = \frac{15\,(-2 + 3\,t2)}{t2},\, y = -\frac{15\,(t2 - 2\,t3)}{t3\,t2}\right\}$$

$$sol\,ve\left(\frac{15\,(-2 + 3\,t2)}{t2} = 45 - 45\,t2,\, t2\right)$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{3},\, -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$x1 := 8.257653862$$

$$y1 := 10.76158406$$

$$M1 := 25.98076208 \qquad \textbf{(7.1.5.1)}$$

6. Feladat

Egy 26 cm és 33 cm oldalú téglalapot kétféleképpen csavarhatunk hengerré. Hogyan aránylik egymáshoz ennek a két hengernek a térfogata?

Megoldás:

```
> restart : with(plottools) : with(plots) : K1 := 26 : m1
    := 33 :
  K2 := 33 : m2 := 26 :
  r1 := K1/(2·π); r2 := K2/(2·π);
  V1 := r1^2·π·m1; V2 := r2^2·π·m2;
  V1/V2;

  display(cylinder([1, 1, 1], 1, 2), orientation = [60, 70],
    scaling = constrained);
```

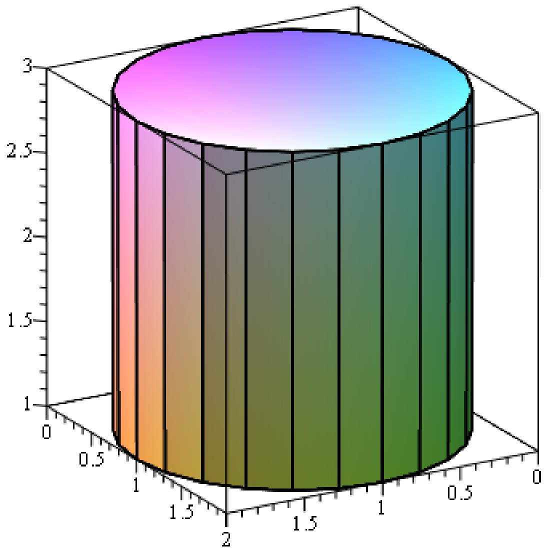
$$r1 := \frac{13}{\pi}$$

$$r2 := \frac{33}{2\,\pi}$$

$$V1 := \frac{5577}{\pi}$$

$$V2 := \frac{14157}{2\,\pi}$$

$$\frac{26}{33}$$



7. Feladat

Egyenlő oldalú egyenes körhenger palástja 25 m^2. Mekkora a térfogata?

Megoldás:

```
> restart :
  solve(2·r·π·2·r = 25, r);
  Térfogat := r^2·π·2·r;
  eval(Térfogat, r = 1/12 √5);
```

$$\frac{5}{2\sqrt{\pi}}, -\frac{5}{2\sqrt{\pi}}$$

$$Térfogat := 2\, r^3\, \pi$$

$$\frac{5}{864}\sqrt{5}\,\pi \qquad \textbf{(7.1.7.1)}$$

8. Feladat

Egyenes csonkakúp alapkörének sugara 33, 42 *cm*, magassága 21, 16 *cm*, alkotója 30, 17 *cm*. Mekkora a fedőlap sugara, és mekkora szöget zárnak be az alkotók az alaplappal?

Megoldás:

```
> restart : R := 33.42 : m := 21.16 : a := 30.17 :
  solve(m^2 + (R − r)^2 = a^2, r);
  fsolve(sin(alpha) − m/a, alpha); convert(%·degrees, radians);
```

$$54.92542490, 11.91457510$$
$$0.7773022087$$
$$0.004318345604\,\pi \quad \textbf{(7.1.8.1)}$$

9. Feladat

Egy gömbbe írt kocka felszíne 144 cm^2. Mekkora a gömb felszíne?

Megoldás:

```
> restart :
  solve(6·a^2 = 144, a);
  a := 2√6;
  t := a·sqrt(3);
  r := t/2;
  Felszín := 4·r^2·π;
```

$$2\sqrt{6}, -2\sqrt{6}$$
$$a := 2\sqrt{6}$$
$$t := 2\sqrt{6}\,\sqrt{3}$$
$$r := \sqrt{6}\,\sqrt{3}$$
$$Felszín := 72\,\pi \quad \textbf{(7.1.9.1)}$$

10. Feladat

Egy gömb felszíne 40 cm^2. Mekkora a felszíne annak a gömbnek, melynek térfogata kétszer akkora, mint az előző gömbé?

Megoldás:

```
> restart :
F := 40 :
with( RealDomain ) : solve(4·r^2·π = F, r);
  r := √10/√π :
```

$$V1 := \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3};$$

$$R := solve\left(\frac{4 \cdot r2^3 \cdot \pi}{3} = 2 \cdot V1, r2\right);$$

$$Felszín := 4 \cdot R^2 \cdot \pi;$$

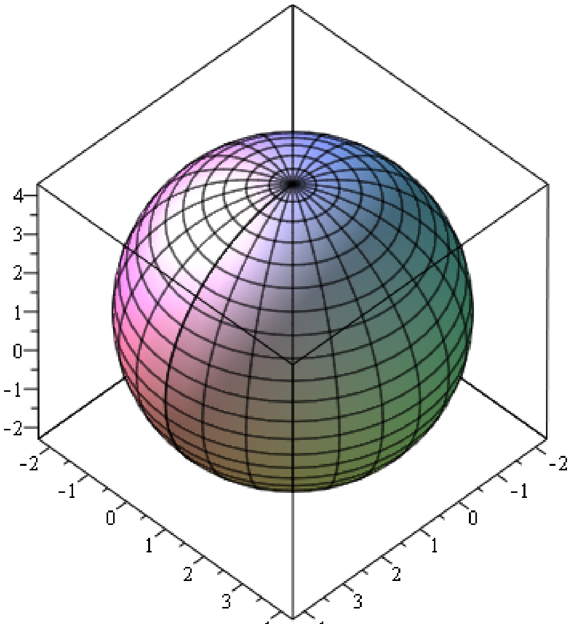
$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\pi}}, -\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\pi}}$$

$$V1 := \frac{40}{3} \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\pi}}$$

$$R := \frac{2^{5/6} \sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$$

$$Felszín := 40\ 2^{2/3} \tag{7.1.10.1}$$

```
> with(plottools):
> with(plots):
> c := sphere([1, 1, 1], 3.3):
> display(c, scaling=constrained, axes=boxed);
```



Házi feladatok

1. Feladat
Egy kocka éleinek hossza 3 m. Mindegyik lap közepére helyezve egy-egy 1 m oldalhosszúságú lyukat vágunk a szembenfekvő lapig. A lyukak élei párhuzamosak a kocka éleivel. Mekkora az így keletkezett test teljes felszíne?

2. Feladat
Forgassunk meg egy négyzetet az egyik csúcsán és a vele szemközti egyik oldal felezőpontján átmenő egyenes körül! Számítsuk ki a keletkező forgástest felszínét!

3. Feladat
Mennyi a 12 *cm* külső sugarú és 1 *cm*falvastagságú üres golyó térfogata?

8. Kúpszeletekkel kapcsolatos feladatok

Feladatok

1. Feladat

Írja fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek tengelye az y tengely, tengelypontja az origó és fókusza a (0;4) pont.

Megoldás:

```
> point(T, 0, 0) : point(F, 0, 3) :
  parabola(p, [`focus` = F, `vertex` = T], [x, y]) :
  Equation(p, [x, y]);
```

$$-108\,y + 9\,x^2 = 0 \qquad \textbf{(8.1.1.1)}$$

2. Feladat

Egy parabola egyenlete $y = 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3$. Határozza meg a tengelypont koordinátáit!

Megoldás:

```
> parabola(p, y = 2· x^2 - 4 * x + 3, [x, y]);
  coordinates(vertex(p));
```

$$p$$

$$[1, 1] \qquad \textbf{(8.1.2.1)}$$

3. Feladat

Számítsa ki az $y = \frac{1}{9} \cdot x^2$ parabola $7 \cdot x - 3 \cdot y - 30 = 0$ egyenesre illeszkedő húrjának hosszát!

Megoldás:

```
> solve({y=1/9*x^2, 7*x-3*y-30=0}, {x, y});

point(P, 6, 4) : point(Q, 15, 25) :
distance(P, Q);
```

$$\{x=6, y=4\}, \{x=15, y=25\}$$

$$\sqrt{522} \tag{8.1.3.1}$$

4. Feladat

Az $y^2 = 12 \cdot x$ parabola 2,6,-3 ordinátájú pontjaiban a parabolához érintőket húzunk. Határozzuk meg az érintési pontok által meghatározott háromszög és az érintők alkotta háromszög területeinek arányát!

Megoldás:

```
> erinto_P := proc(p, Q)
local e, fok_x, fok_y, R;
fok_x := degree(lhs(Equation(p, [x, y])), x);
fok_y := degree(lhs(Equation(p, [x, y])), y);
if fok_x = 2 then
point(R, (HorizontalCoord(Q) + HorizontalCoord(vertex(p)))
   / 2,
VerticalCoord(vertex(p)));
fi;
if fok_y = 2 then
point(R, HorizontalCoord(vertex(p)), (VerticalCoord(Q) +
VerticalCoord(vertex(p))) / 2);
fi;
line(e, [Q, R], [x, y]);
return(e);
end:

parabola(p, y^2 = 12*x, [x, y]) :
point(P1, 1/3, 2) : point(P2, 3, 6) : point(P3, 3/4, -3) :
triangle(T1, [P1, P2, P3]) : area(T1);

e1 := erinto_P(p, P1) : Equation(e1, [x, y]);
e2 := erinto_P(p, P2) : Equation(e2, [x, y]);
e3 := erinto_P(p, P3) : Equation(e3, [x, y]);

triangle(T2, [e1, e2, e3]) : area(T2); area(T1)/area(T2);
```

```
draw([p(colour = orange), P1, P2, P3, e1(linestyle = dash),
  e2(linestyle = dash), e3(linestyle = dash), T1(filled
  = true,
colour = yellow), T2(filled = true, colour = COLOUR(RGB, 0.8,
  0.8, 0.8))], view = [-5 ..10, -6 ..8]);
```

$$\frac{15}{2}$$

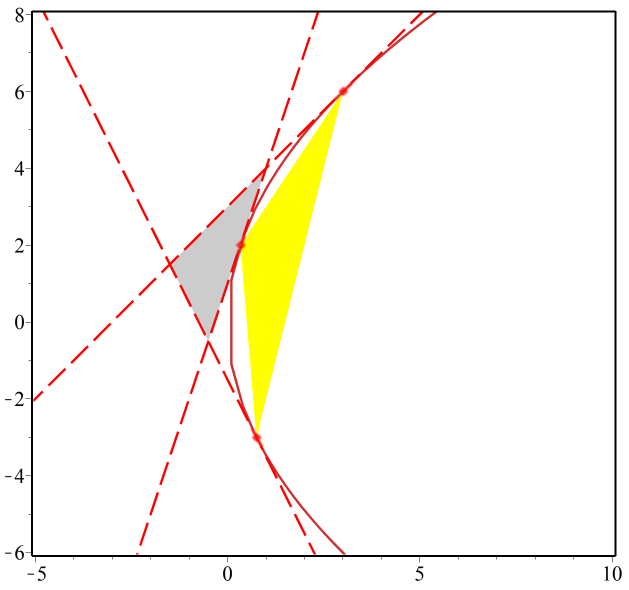
$$\frac{1}{3} + x - \frac{1}{3} y = 0$$

$$9 + 3 x - 3 y = 0$$

$$-\frac{9}{8} - \frac{3}{2} x - \frac{3}{4} y = 0$$

$$\frac{15}{4}$$

$$2$$



5. Feladat

Írjuk fel az $y^2 = 16 \cdot x$ parabola érintőjének egyenletét az x=4 abszcisszájú pontban.

Megoldás:

```
> parabola(p, y^2 = 16*x, [x, y]) :

  solve({Equation(p, [x, y]), x = 4}, {x, y});

  point(P1, 4, 8); point(P2, 4, -8);
  e1 := erinto_P(p, P1);
  e2 := erinto_P(p, P2);
  Equation(e1, [x, y]);
  Equation(e2, [x, y]);

  draw([p(colour = green), e1, e2, P1, P2], printtext = true, view
     = [-4 ..10, -10 ..10], numpoints = 200, axes = NORMAL);
```

$$\{x=4, y=8\}, \{x=4, y=-8\}$$

$$P1$$

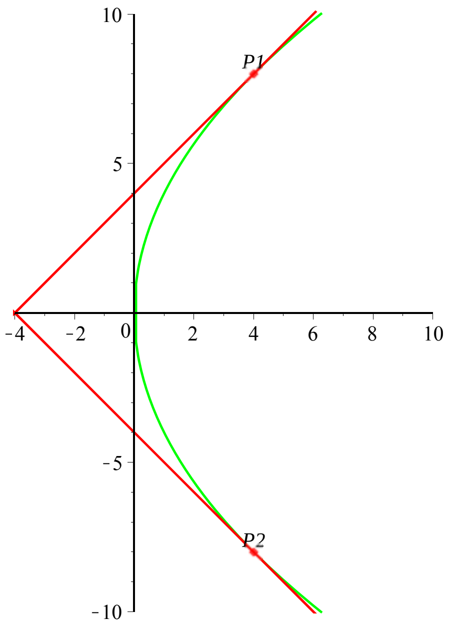
$$P2$$

$$e1 := e$$

$$e2 := e$$

$$16 + 4x - 4y = 0$$

$$-16 - 4x - 4y = 0$$



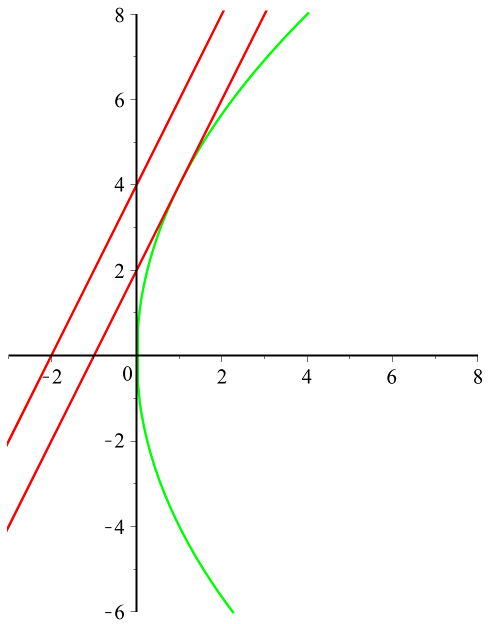
6. Feladat

Írjuk fel az $y^2 = 16 \cdot x$ parabola érintőjének egyenletét, amely párhuzamos a $2 \cdot x - y + 4 = 0$ egyenessel.

Megoldás:

```
> erinto_n :=proc(p, n1, n2)
  local eq, s, e, b, bm, em;
  e := n1*x + n2*y + b = 0;
  s := allvalues(solve({Equation(p, [x, y]), e}, {x, y}));
  eq := op(2, op(1, s[1]))-op(2, op(1, s[2]));
  bm := solve(eq, b);
  line(em, subs(b = bm, e), [x, y]);
  return(em);
   end:

   parabola(p, y^2 = 16*x, [x, y]) :
  line(l1, 2*x - y + 4 = 0, [x, y]) :

  e := erinto_n(p, 2,-1) :
  Equation(e);
  draw([p(colour = green), l1, e], view = [-3..8,-6..8],
     numpoints = 200, axes = NORMAL);
```

$$2\,x - y + 2 = 0$$



7. Feladat

Milyen messze van a $3 \cdot x + 4 \cdot y + 46 = 0$ egyenes az $y = \frac{1}{16} \cdot x^2$ parabolától?

Megoldás:

Távolságon jelen esetben az egyenes és a parabola közötti legrövidebb szakaszt értjük.

```
> erintesi_pont :=proc(p, e)
  local E, s, a, b;
  s := solve({Equation(p, [x, y]), Equation(e, [x, y])}, {x, y});
  if op(1, op(1, s[1])) = x then
  a := op(2, op(1, s[1]));
  b := op(2, op(2, s[1]));
  else
  b := op(2, op(1, s[1]));
  a := op(2, op(2, s[1]));
  fi;
   point(E, a, b);
  return(E);
   end:
```

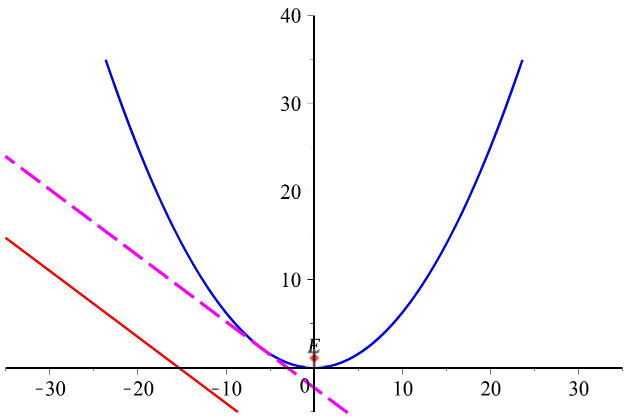
```
parabola(p, y = 1/16*x^2, [x, y]):
line(e, 3*x + 4*y + 46 = 0, [x, y]):
f := erinto_n(p, 3, 4):
E := erintesi_pont(p, f); Equation(f, [x, y]);
coordinates(E);

d := distance(E, e);

draw([p(colour = blue), e, f(color = magenta, thickness = 2,
   linestyle = dash), E], printtext = true,
view = [-35..35, -5..40], numpoints = 500, axes = NORMAL);
```

Error, (in erintesi pont) improper op or subscript selector

$$3x + 4y + 9 = 0$$

$$\left[0, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right]$$

$$d := \frac{46}{5} + \frac{8}{15}\sqrt{3}$$



8. Feladat

Írjuk fel az $y^2 = 16 \cdot x$ parabola érintőjének egyenletét, amely merőleges a $3 \cdot x + 2 \cdot y - 5 = 0$

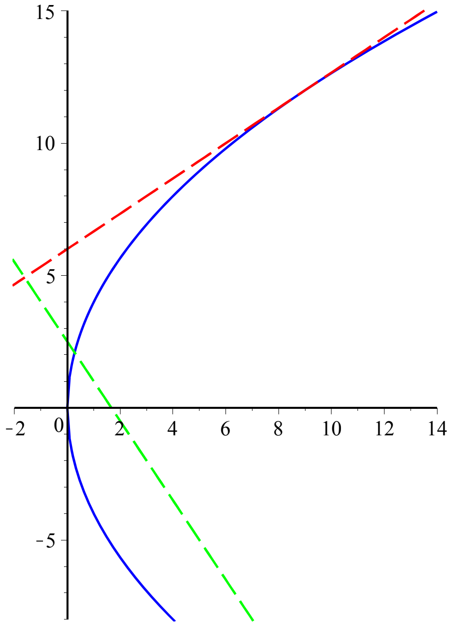
egyenesre;

Megoldás:

```
> parabola(p, y^2 = 16*x, [x, y]) :
  line(l2, 3*x + 2· y - 5 = 0, [x, y]) :

  e2 := erinto_n(p, 2, -3);
  Equation(e2);


  draw([p(colour = blue), l2(linestyle = dash, color = green),
     e2(linestyle = dash)], view = [-2 ..14, -8 ..15],
  numpoints = 200, axes = NORMAL);
```

$$e2 := em$$

$$2\,x - 3\,y + 18 = 0$$



Házi feladatok

1. Feladat

Milyen messze van a $-2\cdot x + 5\cdot y + 16 = 0$ egyenes az

$y = \frac{1}{25} \cdot x^2$ parabolától?

2. Feladat

Írjuk fel az $y^2 = 9 \cdot x$ parabola érintőjének egyenletét az $x = 2$ abszcisszájú pontban.

3. Feladat

Számítsa ki az $y = \frac{1}{16} \cdot x^2$ parabola $5 \cdot x - 4 \cdot y - 26 = 0$ egyenesre illeszkedő húrjának hosszát!

9. Koordináta geometriai feladatok

Feladatok

1. Feladat

a)Egy egyenesre illeszkednek-e a következő pontok:
$P(5,5;\ -4,8)$, $Q(-5,5;\ -9,2)$, $R(15,\ -1)$?

b)Határozza meg a PQ egyenesnek azokat a pontjait, amelyek háromszor olyan messze vannak P-től, mint a Q!

Megoldás:

```
> with(geometry) :
point(P, 5.5, -4.8) : point(Q, -5.5, -9.2) : point(R, 15, -1) :
AreCollinear(P, Q, R);
```

true **(9.1.1.1)**

```
> osztopont :=proc(A, B, p, q)
local M, x, y;
x := (HorizontalCoord(A) * q + HorizontalCoord(B) * p) / (p + q);
y := (VerticalCoord(A) * q + VerticalCoord(B) * p) / (p + q);
point(M, x, y);
return(M);
 end:
vegpont :=proc(C, D, p, q)
local M, x, y;
x := ((p + q) * HorizontalCoord(D) - q * HorizontalCoord(C)) / p;
y := ((p + q) * VerticalCoord(D) - q * VerticalCoord(C)) / p;
point(M, x, y);
return(M);
end:

P1 := vegpont(Q, P, 1, 3) :
coordinates(P1);
P2 := vegpont(P, Q, 1, 2) :
```

```
coordinates(P2);
```

$$[38.5, 8.4]$$
$$[-27.5, -18.0] \qquad (9.1.1.2)$$

```
>
```

2. Feladat

Adott az A(2;6) és a B(-6;3) pont. Határozza meg az AB egyenesén azokat a P pontokat, melyekre AP/PB=8/5!

Megoldás:

```
> osztopont :=proc(A, B, p, q)
  local M, x, y;
  x := (HorizontalCoord(A) * q + HorizontalCoord(B) * p) / (p + q);
  y := (VerticalCoord(A) * q + VerticalCoord(B) * p) / (p + q);
  point(M, x, y);
  return(M);
   end:
  vegpont :=proc(C, D, p, q)
  local M, x, y;
  x := ((p + q) * HorizontalCoord(D) - q * HorizontalCoord(C)) / p;
  y := ((p + q) * VerticalCoord(D) - q * VerticalCoord(C)) / p;
  point(M, x, y);
  return(M);
   end;

  point(A, 2, 6) : point(B, -6, 3) :
  P1 := osztopont(A, B, 8, 5);
  P2 := vegpont(A, B, 3, 4) : coordinates(P1); coordinates(P2);
```

```
vegpont := proc(C, D, p, q)
    local M, x, y;
    x := ((p + q) * geometry:-HorizontalCoord(D) − q * geometry:-
    HorizontalCoord(C)) / p;
    y := ((p + q) * geometry:-VerticalCoord(D) − q * geometry:-
    VerticalCoord(C)) / p;
    geometry:-point(M, x, y);
    return M
end proc
```

$$P1 := M$$
$$\left[-\frac{38}{13}, \frac{54}{13}\right]$$
$$\left[-\frac{50}{3}, -1\right] \qquad (9.1.2.1)$$

```
>
```

3. Feladat

Egy háromszög csúcsai A(16;-15), B(-20;33), C(36;0). Határozza meg azoknak a pontoknak a koordinátáit, amelyekben a belső szögfelezők metszik az oldalakat!

Megoldás:

```
> point(A, 16, -15) : point(B, -20, 33) : point(C, 36, 0) :
  AB := simplify(distance(A, B));
  BC := simplify(distance(B, C));
  AC := simplify(distance(A, C));
  M1 := osztopont(A, B, AC, BC) : coordinates(M1);
  M2 := osztopont(B, C, AB, AC) : coordinates(M2);
  M3 := osztopont(A, C, AB, BC) : coordinates(M3);
```

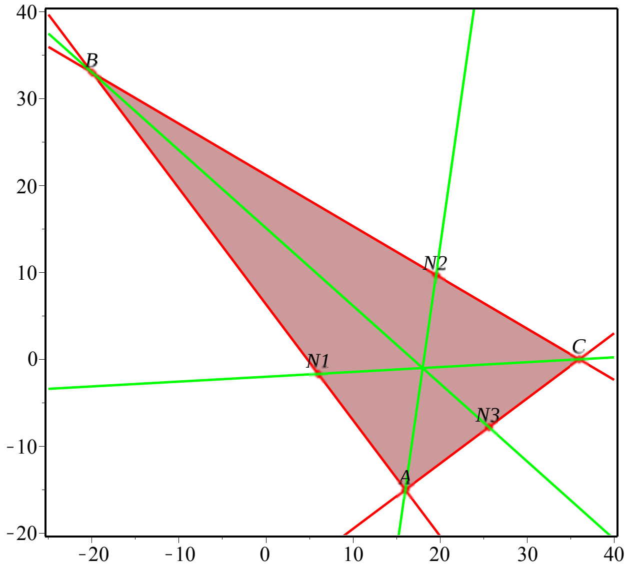
$$AB := 60$$
$$BC := 65$$
$$AC := 25$$
$$\left[6, -\frac{5}{3}\right]$$
$$\left[\frac{332}{17}, \frac{165}{17}\right]$$
$$\left[\frac{128}{5}, -\frac{39}{5}\right] \quad \textbf{(9.1.3.1)}$$

```
> line(c, [A, B], [x, y]); line(a, [B, C], [x, y]); line(b, [A, C],
  [x, y]);
  triangle(T, [A, B, C]);
  bisector(fc, C, T); bisector(fb, B, T); bisector(fa, A, T);
  intersection(N1, c, fc); coordinates(N1);
  intersection(N2, a, fa); coordinates(N2);
  intersection(N3, b, fb); coordinates(N3);
```

$$c$$
$$a$$
$$b$$
$$T$$
$$fc$$
$$fb$$
$$fa$$
$$N1$$
$$\left[6, -\frac{5}{3}\right]$$
$$N2$$
$$\left[\frac{332}{17}, \frac{165}{17}\right]$$
$$N3$$
$$\left[\frac{128}{5}, -\frac{39}{5}\right] \quad \textbf{(9.1.3.2)}$$

```
> draw([a, b, c, A, B, C, fa(colour = green), fb(colour = green),
```

```
fc(colour = green), N1, N2, N3, T(filled = true, colour
 = COLOUR(RGB, 0.8, 0.6, 0.6))],
view = [-25..40, -20..40], printtext = true);
```



4. Feladat

Egy háromszög csúcspontjai: A(1;2), B(3;-2), C(-3;0). Hol metszi az x és az y tengelyt

a) Az A-ból induló súlyvonal

b) A B-ből induló magasságvonal?

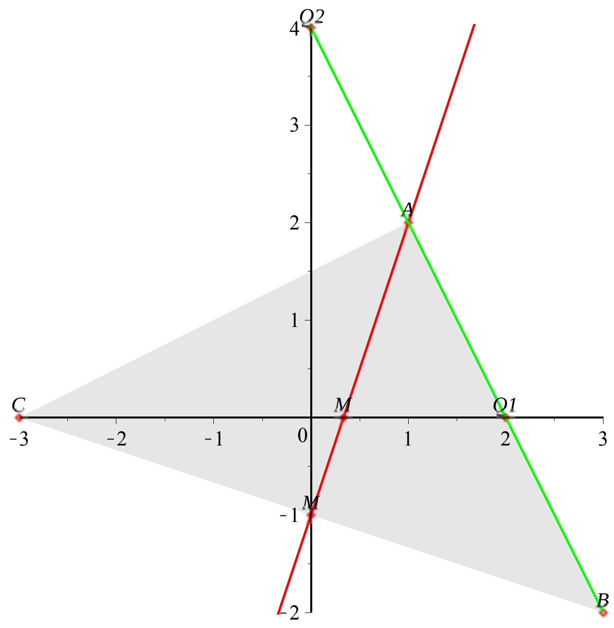
Megoldás:

```
> point(A, 1, 2) : point(B, 3, -2) : point(C, -3, 0) : triangle(T,
    [A, B, C]);
  line(x_tengely, y = 0, [x, y]) :
  line(y_tengely, x = 0, [x, y]) :
  median(sa, A, T) : Equation(sa, [x, y]);
   intersection(P1, sa, x_tengely) : coordinates(P1);
   intersection(P2, sa, y_tengely) : coordinates(P2);
    altitude(mb, B, T) : Equation(mb, [x, y]);
```

```
intersection(Q1, mb, x_tengely) : coordinates(Q1);
intersection(Q2, mb, y_tengely) : coordinates(Q2);
```

$$T$$
$$-1+3x-y=0$$
$$\left[\frac{1}{3}, 0\right]$$
$$[0, -1]$$
$$8-4x-2y=0$$
$$[2, 0]$$
$$[0, 4] \qquad \textbf{(9.1.4.1)}$$

```
> draw([sa(colour = red), mb(colour = green), A, B, C, P1, P2, Q1,
    Q2,
  T(filled = true, colour = COLOUR(RGB, 0.9, 0.9, 0.9))],
    printtext = true, axes = normal);
```



5. Feladat

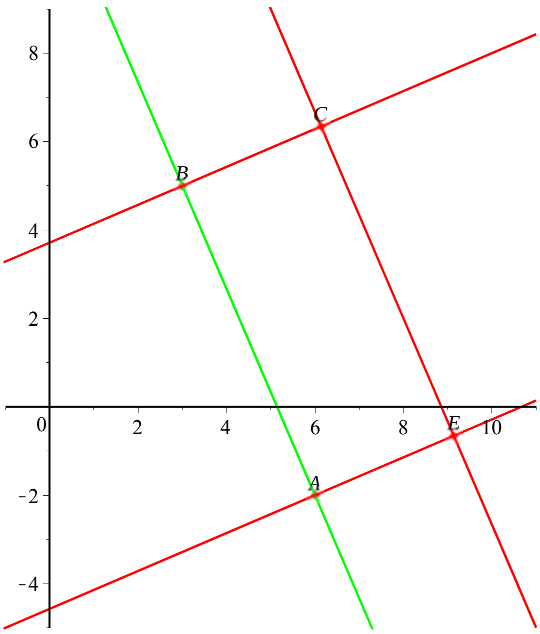
Egy téglalap két szomszédos csúcspontja A(6;-2) és B(3;5). Az AB-vel szemközti oldalegyenes egy pontja P(8;2). Határozza meg a téglalap további csúcspontjainak koordinátáit.

Megoldás:

```
> point(A, 6, -2) : point(B, 3, 5) : point(P, 8, 2) :
  Equation(line(a, [A, B], [x, y]), [x, y]);
  Equation(ParallelLine(c, P, a), [x, y]);
  Equation(PerpendicularLine(d, A, a), [x, y]);
  Equation(PerpendicularLine(b, B, a), [x, y]);
  coordinates(intersection(C, b, c));
  coordinates(intersection(E, d, c));
```

$$36 - 7\,x - 3\,y = 0$$
$$62 - 7\,x - 3\,y = 0$$
$$32 - 3\,x + 7\,y = 0$$
$$-26 - 3\,x + 7\,y = 0$$
$$\left[\frac{178}{29}, \frac{184}{29}\right]$$
$$\left[\frac{265}{29}, -\frac{19}{29}\right] \quad (9.1.5.1)$$

```
> draw([a(color = green), b, c, d, A, B, C, E], printtext = true,
    view = [-1..11, -5..9], axes = normal);
```



6. Feladat

Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete x-2y=9 és 2x+3y=4; középpontja (3;1). Határozza meg a paralelogramma csúcspontjainak koordinátáit!

Megoldás:

```
> line(a, x-2*y=9, [x, y]) : line(b, 2*x+3*y=4, [x, y]) :
    point(P, 3, 1) :
  AreParallel(a, b);

  coordinates(intersection(A, a, b));
  C := vegpont(A, P, 1, 1);
  coordinates(C);
  Equation(ParallelLine(c, C, a), [x, y]);
  coordinates(intersection(B, c, b));
  Equation(ParallelLine(d, C, b), [x, y]);
  coordinates(intersection(D, a, d));
```

$$false$$

$$[5, -2]$$

$$C := M$$

$$[1, 4]$$

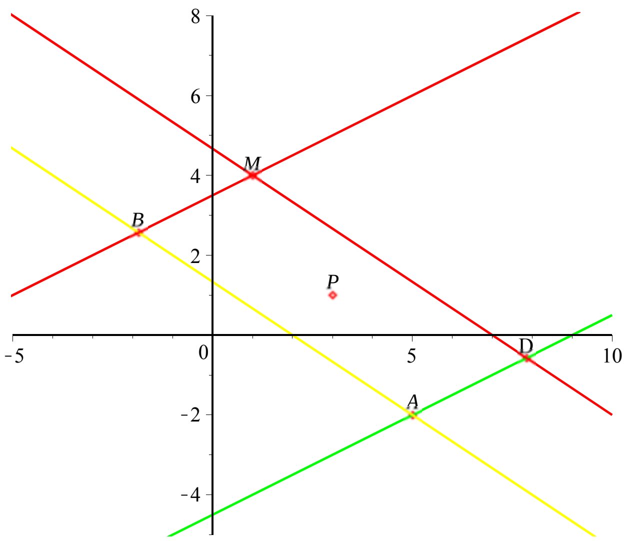
$$7 + x - 2\,y = 0$$

$$\left[-\frac{13}{7}, \frac{18}{7}\right]$$

$$-14 + 2\,x + 3\,y = 0$$

$$\left[\frac{55}{7}, -\frac{4}{7}\right] \tag{9.1.6.1}$$

```
> draw([a(colour = green), b(colour = yellow), c, d, A, B, C, D,
    P],
  view = [-5 ..10, -5 ..8], printtext = true, axes = normal);
```



7. Feladat

Egy téglalap két szomszédos csúcsa A(1;-3) és B(7;7). A másik oldal fele olyan hosszú, mint AB. Határozza meg az átlók metszéspontját!

Megoldás:

```
> restart : with(geometry) : point(A, 1, 3) : point(B, 7, 7) :
     line(a, [A, B], [x, y]) :
  r := distance(A, B) / 4;
  Equation(PerpenBisector(e, A, B), [x, y]);
  midpoint(F, A, B) : coordinates(F);
  Equation(circle(k, [F, r], [x, y]), [x, y]);
  intersection(OB, e, k, [P1, P2]);
    coordinates(P1);
    coordinates(P2);
```

$$r := \frac{1}{4}\sqrt{52}$$

$$-44 + 6x + 4y = 0$$

$$[4, 5]$$

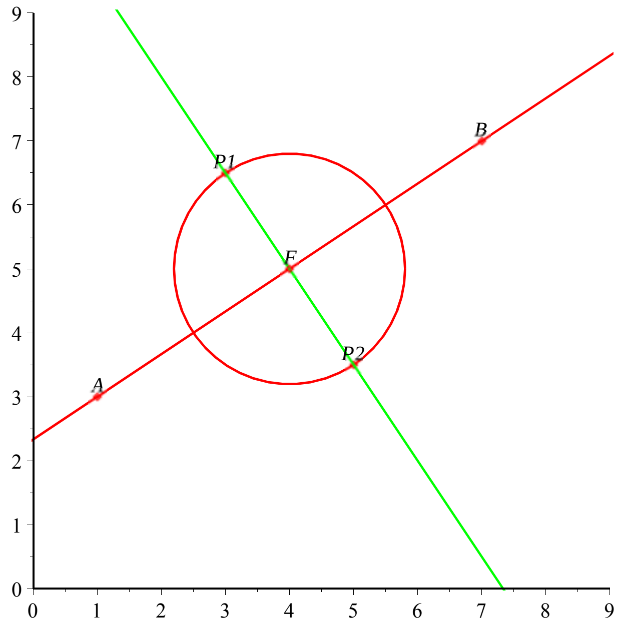
$$\frac{151}{4} + x^2 + y^2 - 8x - 10y = 0$$

$$[P1, P2]$$

$$\left[3, \frac{13}{2}\right]$$

$$\left[5, \frac{7}{2}\right] \quad \textbf{(9.1.7.1)}$$

```
> draw([a, e(colour=green), A, B, k, P1, P2], printtext=true,
    view=[0..9, 0..9],
  axes=normal);
```



8. Feladat

Mi annak az origón átmenő körnek az egyenlete, amelynek középpontján áthalad az x+2y=12 és az x-y=0 egyenletű egyenes?

Megoldás:

```
> point(P, 0, 0):
  line(e, x+2*y=12, [x, y]):
  line(f, x-y=0, [x, y]):
```

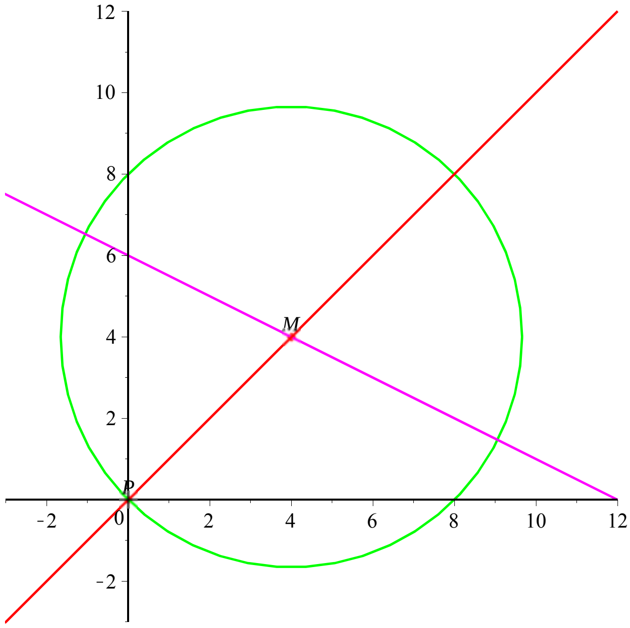
```
coordinates(intersection(M, e, f));
r := distance(M, P);
Equation(circle(k, [M, r], [x, y]), [x, y]);
```

$$[4, 4]$$

$$r := \sqrt{32}$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 8y = 0 \tag{9.1.8.1}$$

```
> draw([e(colour = magenta), f, M, P, k(colour = green)],
    printtext = true, view = [-3..12, -3..12], axes = normal);
```



9. Feladat

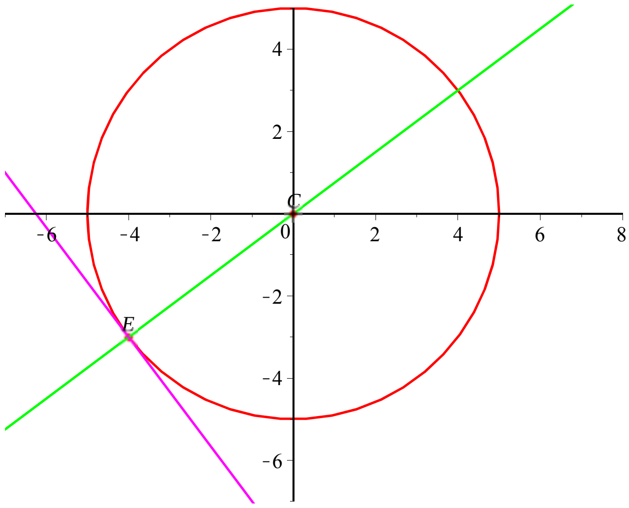
Írja fel az x^2+y^2=25 kör (-4;-3) pontjához tartozó érintőjének egyenletét!

Megoldás:

```
> circle(k, x^2 + y^2 = 25, [x, y], `centername` = C) :
point(E, -4, -3) :
line(CE, [C, E], [x, y]) :
 Equation(PerpendicularLine(a, E, CE), [x, y]);
```

$$-25 - 4x - 3y = 0 \quad (9.1.9.1)$$

```
> draw([k, E, CE(color = green), a(color = magenta), C],
    printtext = true,
  view = [-7..8, -7..5], axes = normal);
```



10. Feladat

Írja föl az x^2+y^2+40=10(x+y) egyenletű körnek a 3x-y=-1 egyenessel párhuzamos érintőit!

Megoldás:

```
> circle(k, x^2 + y^2 + 40 = 10 * (x + y), [x, y], `centername`
     = C) :
  line(g, 3 * x-y = 1, [x, y]) :
  PerpendicularLine(gm, C, g) :
  intersection(M, k, gm, [M1, M2]) :
  Equation(PerpendicularLine(e1, M1, gm), [x, y]);
  Equation(PerpendicularLine(e2, M2, gm), [x, y]);
```

$$-3x + y = 0$$

$$20 - 3x + y = 0 \quad (9.1.10.1)$$

Házi feladatok

1. Feladat

Írja fel az $x^2+y^2-4x+2y=20$ egyenletű körhöz a P(9;-2) pontból húzható érintők egyenletét!

2. Feladat

Írja fel az $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ és az $(x+2)^2+(y+1)^2=9$ körök közös érintőinek az egyenletét!

3. Feladat

Milyen szögben metszik egymást az $x^2+y^2=16$ és az $(x-5)^2+y^2=5$ körök?

10. Két vektor skaláris szorzata

Feladatok

1. Feladat

Határozzuk meg az **a** hosszát, ha

a) **a**(1,3,5),

b) **a**(-1,-2,7).

Megoldás:

a)

```
> ewith(VectorCalculus):
> Norm(<1,3,5>);
```

$$\sqrt{35} \tag{10.1.1.1}$$

b)

```
> Norm(<-1,-2,7>);
```

$$3\sqrt{6} \tag{10.1.1.2}$$

```
>
```

2. Feladat

Mekkora szöget zárnak be az **a, b** vektorok, ha **a**(2,-3,5) és **b**(-1,-2,5)?

Megoldás:

```
> with(LinearAlgebra):
> VectorAngle(<2,-3,5>,<-1,-2,5>);
```

$$\arccos\left(\frac{29}{1140}\sqrt{38}\sqrt{30}\right) \tag{10.1.2.1}$$

3. Feladat

Határozzuk meg **a**·**b**-t, ha

a) **a**(1,2,5), **b**(-1,3,-7),

b) **a**(0,2,3), **b**(-2,1,3).

Megoldás:

a)

```
> DotProduct(<1,2,5>,<-1,3,-7>);
```

$$DotProduct\left(\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\\-7\end{bmatrix}\right) \qquad \textbf{(10.1.3.1)}$$

```
>
```

b)

```
> DotProduct(<0,2,3>,<-2,1,3>);
```

$$DotProduct\left(\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}\right) \qquad \textbf{(10.1.3.2)}$$

```
>
```

4. Feladat

Adott **a**(1,-1,2). Határozzuk meg a **b**(5,-1,x) harmadik koordinátáját úgy, hogy **b** merőleges legyen **a**-ra.

Megoldás:

```
> DotProduct(<1,-1,2>,<5,-1,x>);
```

$$6+2x \qquad \textbf{(10.1.4.1)}$$

```
> x:=solve((10.1.4.1),x);
```

$$x := -3 \qquad \textbf{(10.1.4.2)}$$

```
>
```

5. Feladat

Írjuk fel a $P(1, 5, -7)$ ponton átmenő, **n**(1,-1,2) normálvektorú sík egyenletét.

Megoldás:

```
> with(geom3d):
> point(P,1,5,-7);
```

$$P \qquad \textbf{(10.1.5.1)}$$

```
> v:=vector([1,-1,2]);
```

$$\textbf{(10.1.5.2)}$$

$$v := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{10.1.5.2}$$

```
> plane(p, [P, v]);
```

$$p \tag{10.1.5.3}$$

```
> Equation(p);
```

$$18 + x - y + 2z = 0 \tag{10.1.5.4}$$

```
>
```

6. Feladat

Határozzuk meg az $A(5,7,2)$ pontnak a $P(-2,3,4)$ ponton átmenő és $\mathbf{n}(1,2,1)$ normálvektorú síktól való távolságát.

Megoldás:

```
> with(geom3d):
```

```
> point(P,-2,3,4);
```

$$P \tag{10.1.6.1}$$

```
> v:=vector([1,2,1]);
```

$$v := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{10.1.6.2}$$

```
> plane(p, [P, v]);
```

$$p \tag{10.1.6.3}$$

```
> Equation(p);
```

$$-8 + x + 2y + z = 0 \tag{10.1.6.4}$$

```
> point(A,5,7,2);
```

$$A \tag{10.1.6.5}$$

```
> distance(A,p);
```

$$\frac{13}{6}\sqrt{6} \tag{10.1.6.6}$$

7. Feladat

Írjuk fel az $A(2,1,3)$ ponton átmenő és a $2x - 7y + 5z = 6$ síkkal párhuzamos sík egyenletét, és határozzuk meg a két sík távolságát.

Megoldás:

```
> with(geom3d):
> plane(p,2*x-7*y+5*z=6,[x,y,z]);
```

$$p \tag{10.1.7.1}$$

```
> v:=NormalVector(p);
```

$$v := [2, -7, 5] \tag{10.1.7.2}$$

```
> point(A,2,1,3);
```

$$A \tag{10.1.7.3}$$

```
> plane(p1,[A,v]);
```

$$p1 \tag{10.1.7.4}$$

```
> Equation(p1);
```

$$-12 + 2x - 7y + 5z = 0 \tag{10.1.7.5}$$

```
> distance(p,p1);
```

$$\frac{1}{13}\sqrt{78} \quad (10.1.7.6)$$

```
>
```

8. Feladat

Írjuk fel az $A(1,2,3)$ és $B(-1,-2,3)$ pontok meghatározta szakasz felezőmerőleges-síkjának az egyenletét.

Megoldás:

```
> with(geom3d):
> point(A,1,2,3), point(B,-1,-2,3);
```

$$A, B \quad (10.1.8.1)$$

```
> midpoint(C,A,B);
```

$$C \quad (10.1.8.2)$$

```
> coordinates(C);
```

$$[0, 0, 3] \quad (10.1.8.3)$$

```
> line(l,[A,B]);
```

$$l \quad (10.1.8.4)$$

```
> v:=ParallelVector(l);
```

$$v := [-2, -4, 0] \quad (10.1.8.5)$$

```
> plane(p,[C,v]);
```

$$p \quad (10.1.8.6)$$

```
> Equation(p);
```

$$-2x - 4y = 0 \quad (10.1.8.7)$$

```
>
```

9. Feladat

Írjuk fel a $P_0(1,-1,2)$ ponton átmenő, $\mathbf{v}(5,1,-3)$ irányvektorú egyenes paraméteres egyenletrendszerét.

Megoldás:

```
> with(geom3d):
> point(A,1,-1,2);
```

$$A \quad (10.1.9.1)$$

```
> v:=vector([5,1,-3]);
```

$$v := \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (10.1.9.2)$$

```
> line(l,[A,v]);
```

$$l \quad (10.1.9.3)$$

```
> Equation(l,'t');
```

$$[1+5t, -1+t, 2-3t] \quad (10.1.9.4)$$

10. Feladat

Írjuk fel az $A(1,2,-3)$ és $B(2,-1,-5)$ pontokat összekötő egyenes paraméteres egyenletrendszerét.

Megoldás:

```
> point(A,1,2,-3), point(B,2,-1,-5);
```
$$A, B \quad (10.1.10.1)$$

```
> line(l,[A,B]);
```
$$l \quad (10.1.10.2)$$

```
> Equation(l,'t');
```
$$[1+t, 2-3\,t, -3-2\,t] \quad (10.1.10.3)$$

```
>
```

Házi feladat

1. Feladat
Határozzuk meg **a**·**b**-t, ha **a**(2,3,4), **b**(5,7,-1).

2. Feladat
Határozzuk meg az *A*(0,0,0) pontnak a *P*(7,3,2) ponton átmenő és **n**(2,-1,1) normálvektorú síktól való távolságát.

3. Feladat
Írjuk fel az *A*(2,3,4) és *B*(-1,-2,3) pontok meghatározta szakasz felezőmerőleges-síkjának az egyenletét.

11. Két vektor vektoriális szorzata

Feladatok

1. Feladat
Határozzuk meg az **a** × **b**-t és |**a** × **b**|-t, ha **a**(1,2,1), **b**(2,3,-2).

Megoldás:

```
> with(LinearAlgebra):
> a:= <1,2,1>;
```
$$a := e_x + 2e_y + e_z \quad (11.1.1.1)$$

```
> b:= <2,3,-2>;
```
$$b := 2e_x + 3e_y - 2e_z \quad (11.1.1.2)$$

```
> v:=CrossProduct(a, b);
```
(11.1.1.3)

$$v := \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(11.1.1.3)}$$

```
> with(VectorCalculus):
> Norm(v);
```

$$\sqrt{66} \qquad \textbf{(11.1.1.4)}$$

```
>
```

2. Feladat

Számítsuk ki annak a paralelogrammának a területét, amelyet az **a**(-9,0,9) és **b**(7,2,-5) vektorok feszítenek ki.

Megoldás:

3. Feladat

Számítsuk ki az *ABC* háromszög területét, ha *A*(-1,1,2), *B*(1,-1,-2), *C*(1,1,1).

Megoldás: