Versenyfeladatok megoldása MAPLE-lel

Pintér Ákos

TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0098

Debrecen
2013

Bevezetés

A feledatgyűjtemény célja kettős. Egyrészt egy olyan gyakorlókönyvet adni az érdeklődő diákok és tanáraik kezébe, amellyel egyszerűen elsajátíthatnak olyan technikákat és módszereket, amikkel sikeresen oldhatnak meg nehezebb versenyfeladatokat is. Másrészt, a számítógéppel támogatott feladatmegoldási eljárásokat is népszerűsíteni kívánja a könyv, mindig szem előtt tartva, hogy az ötleteket nem helyettesítheti semmilyen számítógép, vagy számítógépes program.

A feladatok kiválogatásában nagyon nagy segítségemre voltak a Középiskolai Matematikai Lapok illetve az Art of Problem Solving honlapjai, lásd a [3] illetve [4] hivatkozásokat. Köszönetet mondok Dr. Szalay Lászlónak, aki a könyv lektoraként lelkiismeretesen átnézte és javította munkámat.

Rövidítések

AIME – American Invitational Mathematics Examination
ARML – American Regional Mathematics League
CMO – Canadian Mathematical Olympiad
HMMT – Harvard-MIT Math Tournament
KöMaL – Középiskolai Matematikai Lapok
MOSP – Mathematical Olympiad Summer Program
USAMO – United States of America Mathematical Olympiad
IMOLL – International Mathematical Olympiad Long List
IMOSL – International Mathematical Olympiad Shortlist
JMOP – Japan Mathematical Olympiad Preliminary
TITEE – Tokyo Institute of Technology Entrance Examination
FTST – France Team Selection Test
ARO – All-Russian Olympiad
IZO – International Zhautykov Olympiad
RNO – Romania National Olympiad
USAIMTS – USA International Mathematical Talent Search
SMT – Stanford Mathematics Tournament
PUMC – Princeton University Mathematical Competition
USAPC – USA Purple Comet

1. fejezet

Egyenletek

1. Feladat. (KöMaL B.4433.) Oldjuk meg az $(1+x)^8+(1+x^2)^4=82x^4$ egyenletet!

Megoldásvázlat: Mivel az $x=0$ nem megoldása a feladatnak, így oszthatunk x^4-nel. Adódik, hogy

$$\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^4+\left(x+\frac{1}{x}\right)^4=82.$$

Legyen $y=x+\frac{1}{x}+1$. Az új változóval egyenletünk

$$(y+1)^4+(y-1)^4=82$$

alakú lesz, amelyet kifejtve kapjuk a másodfokúra visszavezethető

$$2(y^4+6y^2-40)=0$$

egyenletet. Ebből $y^2=-10$ vagy $y^2=4$ következik, az első érték valós x-re nyilván nem lehetséges, a másodikból $x+\frac{1}{x}$-re -3 illetve 1 adódik. Ez utóbbi érték valós x-re nem lehetséges, hiszen bármely nullától különböző valós számnak és reciprokának az összege legalább kettő illetve legfeljebb -2, az x előjelétől függően. Így az eredeti 8-ad fokú egyenletünk összes valós gyöke az $x^2+3x+1=0$ egyenlet gyökeivel egyezik meg.

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$\left((x+1)^8+\left(1+x^2\right)^4-82\,x^4\right)$;

$$2\,\left(x^2+3\,x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\left(x^4+2\,x^3+13\,x^2+2\,x+1\right)$$

Mivel $x^2-x+1>0$ és $x^4+2\,x^3+13\,x^2+2\,x+1=x^2(x+1)^2+11x^2+(x+1)^2>0$

minden valós x-re, kapjuk a fent vázolt eredményt.

2. Feladat. (KöMaL B.4027.) Oldjuk meg az

$$\frac{x^2+1}{x^2+11} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11x-6}{6-x}}$$

egyenletet!

Megoldásvázlat: Négyzetre emelések és az átszorzások után kapjuk a

$$47x^5 - 222x^4 + 314x^3 - 564x^2 + 1367x - 942 = 0$$

egyenletet. Néhány helyettesítés után adódik, hogy az $x = 1,2$ és az $x = 3$ gyökei az 5-öd fokú egyenletnek, azaz a polinom szorzattá alakítható:

$$47x^5 - 222x^4 + 314x^3 + 1367x - 942 = (x-1)(x-2)(x-3)(47x^2 + 60x + 157).$$

A másodfokú kifejezés diszkriminánsa $3600 - 4 \cdot 47 \cdot 157 < 0$, így az eredeti egyenlet összes lehetséges valós gyöke az $1,2$ és 3, amelyek ki is elégítik azt.

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$(47x^5 - 222x^4 + 314x^3 - 564x^2 + 1367x - 942)$;

$$(x-1)(x-2)(x-3)(47x^2 + 60x + 157)$$

Megjegyzés: A feladat megoldása leolvasható a 1.1 ábráról.

3. Feladat. (KöMaL C.1118.) Oldjuk meg a

$$4x^2 + \frac{3}{4} = 2\sqrt{x}$$

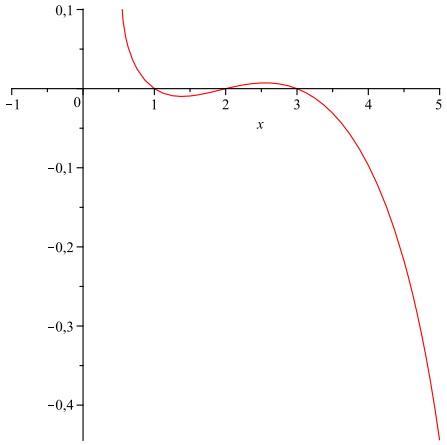
egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldásvázlat: Négyzetre emelés és átrendézések után kapjuk a

$$256x^4 + 96x^2 - 64x + 9 = 0$$

egyenletet. Az eredeti feladatnak az $x = \frac{1}{4}$ gyöke, ezért

$$256x^4 + 96x^2 - 64x + 9 = (4x-1)(64x^3 + 16x^2 + 28x - 9)$$



1.1. ábra. Az $\frac{x^2+1}{x^2+11} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{11x-6}{6-x}}$ függvény grafikonja

továbbá, mivel az $\frac{1}{4}$ gyöke a harmadfokú polinomnak is, ezért

$$64x^3 + 16x^2 + 28x - 9 = (4x - 1)(16x^2 + 8x + 9).$$

A másodfokú kifejezés pozitív minden valós x-re, így az eredeti egyenletnek egy megoldása van, $x = \frac{1}{4}$.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.2 ábrát!

4. Feladat. (KöMaL B.3403.) Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra

$$\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

teljesül, akkor

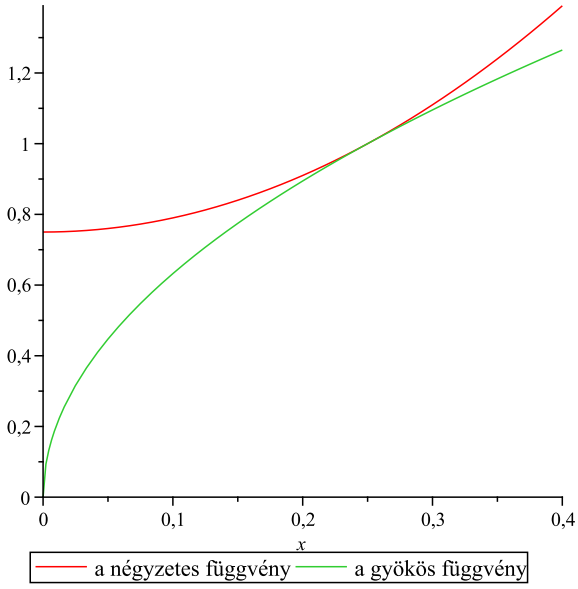
$$\frac{1}{a^5+b^5+c^5} = \frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5}.$$

Megoldásvázlat: Felhasználva, hogy

$$\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

adódik, hogy az

$$(a+b)(a+c)(b+c)$$



1.2. ábra. A $4x^2 + \frac{3}{4}$ és a $2\sqrt{x}$ függvények grafikonjai

szorzat 0. Ez azt jelenti, hogy $a = -b$ vagy $b = -c$ vagy $a = -c$ teljesül. Bármelyik egyenlőség teljesül, adódik a bizonyítandó állítás.

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$\left(\frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$;

$$-\frac{(c+b)(c+a)(a+b)}{(a+b+c)abc},$$

továbbá

`factor`$\left(\frac{1}{a^5+b^5+c^5} - \frac{1}{a^5} - \frac{1}{b^5} - \frac{1}{c^5}\right)$;

$$-\frac{(c+b)(c^4-c^3b+\ldots+b^4)(c+a)(c^4-c^3a+\ldots+a^4)(a+b)(a^4-a^3b+\ldots+b^4)}{(a^5+b^5+c^5)a^5b^5c^5}$$

Megjegyzés: A feladat könnyen általánosítható: tegyük fel, hogy az a, b, c valós számokra

$$\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

teljesül, ekkor

$$\frac{1}{a^{2k+1}+b^{2k+1}+c^{2k+1}} = \frac{1}{a^{2k+1}} + \frac{1}{b^{2k+1}} + \frac{1}{c^{2k+1}},$$

ahol k tetszóleges pozitív egész.

5. Feladat. (KöMaL C.562.) Keressük meg azt a pozitív egész n számot, amelyre

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 100.$$

Megoldásvázlat: A nevezőket gyöktelenítve

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} =$$

$$= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+1}-1$$

következik, azaz $\sqrt{n+1}-1 = 100$, amiből $n = 101^2 - 1 = 10200$.

Megoldás MAPLE-lel:

$$\texttt{evalf}_{20}(\texttt{sum}(1/(\texttt{sqrt}(n)+\texttt{sqrt}(n+1)), n = 1..10119)) = 99.598210719674333584$$

$$\texttt{evalf}_{20}(\texttt{sum}(1/(\texttt{sqrt}(n)+\texttt{sqrt}(n+1)), n = 1..10200)) = 99.999999999999999999$$

és

$$\texttt{evalf}_{20}(\texttt{sum}(1/(\texttt{sqrt}(n)+\texttt{sqrt}(n+1)), n = 1..10201)) = 100.00495037373168276$$

A megoldás: $n = 10200$.

6. Feladat. (KöMaL C.551.) Határozzuk meg az

$$x^2 + y^2 = x, 2xy = y$$

egyenletrendszer összes megoldását!

Megoldásvázlat: Két esetet különböztetünk meg: ha $y = 0$, akkor $x^2 = x$, vagyis két megoldáspárt kapunk, $(x_1, y_1) = (1, 0)$ és $(x_2, y_2) = (0, 0)$. Ha $y \neq 0$, akkor $x = \frac{1}{2}$ és $y^2 = \frac{1}{4}$, amiből $(x_3, y_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ és $(x_4, y_4) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(\{2xy = y, x^2 + y^2 = x\}, [x, y])$;

$$[[x = 0, y = 0], [x = 1, y = 0], [x = 1/2, y = 1/2], [x = 1/2, y = -1/2]]$$

7. Feladat. (KöMaL B.3365.) Bizonyítsuk be, hogy ha $abc = 1$ és

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

akkor az a, b, c számok közül legalább az egyik 1-gyel egyenlő.

Megoldásvázlat: Az egyenlet mindkét oldalát megszorozva $abc = 1$-gyel, adódik, hogy

$$a + b + c = ab + bc + ac,$$

és

$$abc - ab - bc - ac + a + b + c - 1 = 0.$$

Az előző egyenlet bal oldala éppen az $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$ szorzattal egyezik meg, így állításunkat bizonyítottuk.

Megoldás MAPLE-lel: `factor` $\left(a + b + c - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$;

$$\frac{a^2bc + ab^2c + abc^2 - bc - ac - ab}{abc}$$

amiből következik, hogy

$$a + b + c - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = a + b + c - ab - ac - bc.$$

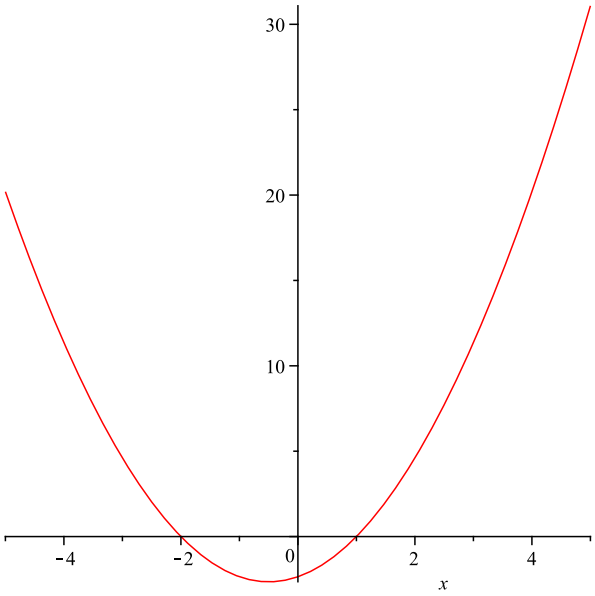
A feladat megoldása a fenti gondolatmenettel fejezhető be.

8. Feladat. (KöMaL C.601.) Oldjuk meg az

$$x^2 + x + \sqrt{x^2 + x + 7} = 5$$

egyenletet a valós számok halmazán.

Megoldásvázlat: Legyen $y = \sqrt{x^2 + x + 7}$. (A négyzetgyök alatti kifejezés minden valós



1.3. ábra. Az $x^2 + x + \sqrt{x^2 + x + 7} - 5$ függvény grafikonja

x-re pozitív). Az új változóval egyenletünk

$$y^2 - 7 + y = 5,$$

azaz

$$y^2 + y - 12 = 0$$

alakú, amiből $y_1 = -4, y_2 = 3$ adódik. A negatív értéket kizárva $x^2 + x - 2 = 0$ következik, és $x_1 = 1, x_2 = -2$ értékeket kapjuk. Behelyettesítve látjuk, hogy valódi megoldásokat kaptunk.

Megoldás MAPLE-lel: `solve` $\left((x^2 + x - 5)^2 - x^2 - x - 7 = 0, x\right)$;

$$-2, 1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{37}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{37}$$

Lásd még a 1.3 ábrát!

9. Feladat. (KöMaL B.4057.) Oldjuk meg az $x^6 - 6x + 5 = 0$ egyenletet.

Megoldásvázlat: Látszik, hogy az $x = 1$ megoldása az egyenletnek. Ezért

$$x^6 - 6x + 5 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5).$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon álló ötöd fokú polinomnak az 1 gyöke, ezért

$$x^6 - 6x + 5 = (x - 1)^2(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5).$$

Megmutatjuk, hogy $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 > 0$ minden valós x-re. Valóban,

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = x^2(x + 1)^2 + 2(x + 1)^2 + 3 \geq 3.$$

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$(x^6 - 6x + 5)$;

$$(x - 1)^2(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5)$$

és `fsolve`$(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0, x)$;

$$\{0.287... + 1.416...I, -1.287... + 0.857I, -1.287... - 0.857...I, 0.287... - 1.416...I\}$$

A polinomnak négy nem-valós gyöke van, ami mutatja, hogy

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 > 0$$

minden valós x-re.

Megjegyzés: Lásd a 1.4 ábrát!

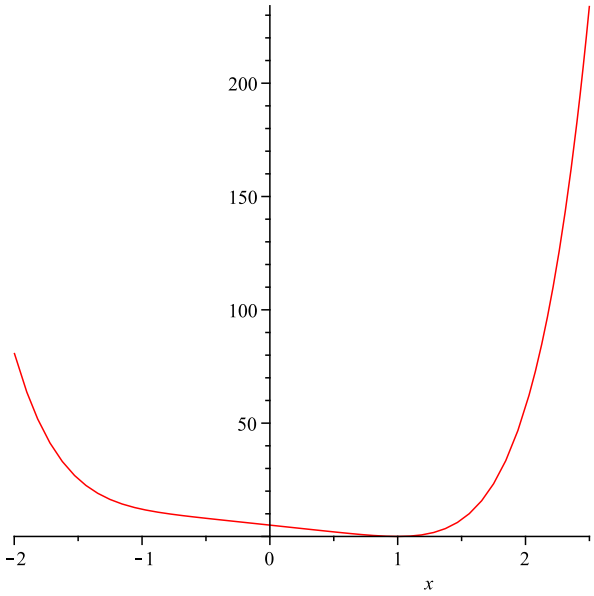
10. Feladat. (KöMaL C.925.) Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{x}{y^3 - 1} + \frac{y}{1 - x^3} + \frac{2(x - y)}{x^2y^2 + 3}$$

kifejezés helyettesítési értéke állandó minden olyan helyen, ahol a kifejezés értelmezve van és $x + y = 1$.

Megoldásvázlat: A tagokat rendezve és felhasználva, hogy $y = 1 - x$, kapjuk az

$$\frac{x}{(1 - x)^3 - 1} + \frac{1 - x}{1 - x^3} + \frac{2(2x - 1)}{x^2(1 - x)^2 + 3}$$



1.4. ábra. Az $x^6 - 6x + 5$ függvény grafikonja

kifejezést. Egyszerűsítve adódik, hogy

$$\frac{1}{-3+3x-x^2} + \frac{1}{1+x+x^2} + \frac{2(2x-1)}{x^2(1-x)^2+3}.$$

Közös nevezőre hozás után a kifejezés számlálója

$$(x^2+x+1)(x^2(x-1)^2+3)+(-x^2+3x-3)(x^2(x-1)^2+3)+(x^2+x+1)(-x^2+3x-3)2(2x-1) =$$

$$(x^2(x-1)^2+3)(4x-2) + (x^2+x+1)(-x^2+3x-3)2(2x-1) =$$

$$(4x-2)\left((x^2(x-1)^2+3-3-x^2+2x^3-x^4\right).$$

Könnyű látni, hogy az utolsó tényező azonosan nulla.

Megoldás MAPLE-lel:

$$g := \frac{x}{y^3-1} + \frac{y}{1-x^3} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3};$$

$$\texttt{expand}(\texttt{subs}(y = 1-x, g);$$

0

11. Feladat. (KöMaL B.3903.) Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$x - \sqrt{\frac{x}{x+3}} = \frac{2}{x+3}.$$

Megoldásvázlat: Átrendezve az eredeti egyenletet, kapjuk, hogy

$$x - \frac{2}{x+3} = \sqrt{\frac{x}{x+3}}.$$

Négyzetre emelve mindkét oldalt:

$$\frac{(x^2+3x-2)^2}{(x+3)^2} = \frac{x}{x+3},$$

és

$$(x^2+3x-2)^2 = x^2+3x.$$

Legyen $y = x^2+3x-2$. Ezzel az új változóval $y^2 = y+2$, amiből

$$y_1 = 2, y_2 = -1,$$

továbbá,

$$x_1 = -4, x_2 = 1, x_3 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}, x_4 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$

következik. Könnyen ellenőrizhető, hogy x_1 és az x_3 hamis gyök.

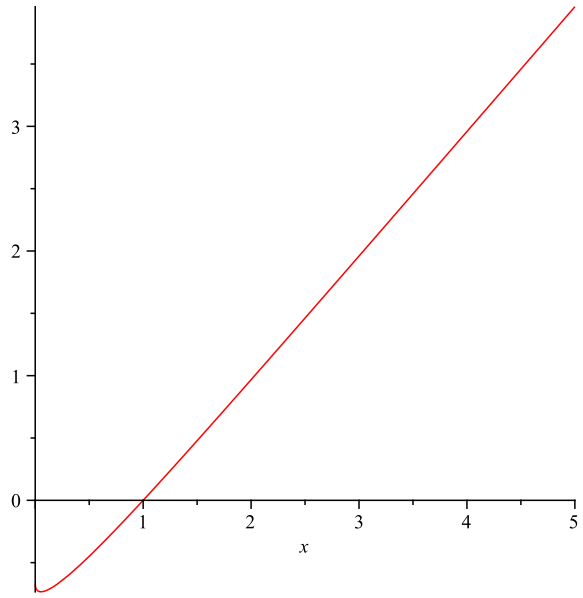
Megoldás MAPLE-lel: `solve`$\left(x - \sqrt{\frac{x}{x+3}} - \frac{2}{x+3}, x\right)$;

$$1, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$

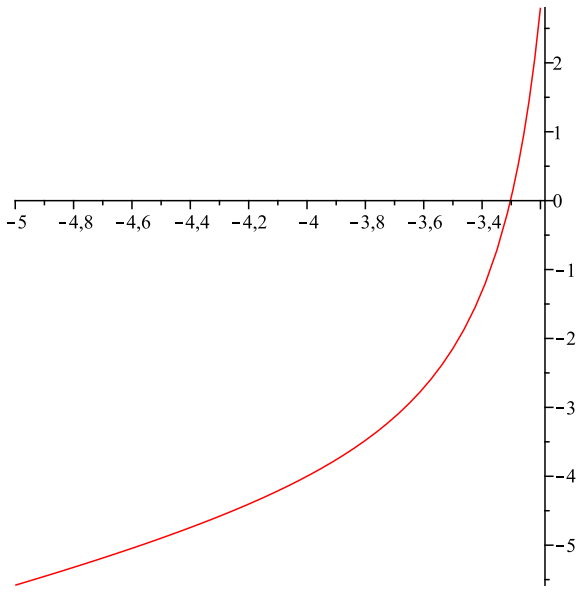
Lásd még a 1.5 és 1.6 ábrákat!

12. Feladat. (KöMaL B.3907.) Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$$



1.5. ábra. Az $x - \sqrt{\frac{x}{x+3}} = \frac{2}{x+3}$ függvény grafikonja a $[0, 5]$ intervallumban



1.6. ábra. Az $x - \sqrt{\frac{x}{x+3}} = \frac{2}{x+3}$ függvény grafikonja a $[-5, -3.2]$ intervallumban

Megoldásvázlat: Könnyű átalakítás után adódik, hogy

$$\sin x + \cos x = 1 - \sin x \cos x.$$

Négyzetre emelés után kapjuk, hogy

$$1 + 2\sin x \cos x = 1 - 2\sin x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x.$$

A megfelelő egyszerűsítések után:

$$4\sin x \cos x = \sin^2 x \cos^2 x.$$

Ebből az egyenletből $\sin x = 0, \cos x = 0, 2\sin x \cos x = \sin 2x = 8$ adódik. Az utolsó eset nyilván nem lehetséges, így

$$x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + l\pi$$

adódik a megoldásokra, ahol k és l tetszőleges egész szám. Azonban hamis gyökök jelentkeznek, a végeredmény

$$x = 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2l\pi.$$

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(\sin x + \cos x + \sin x \cos x - 1, x)$;

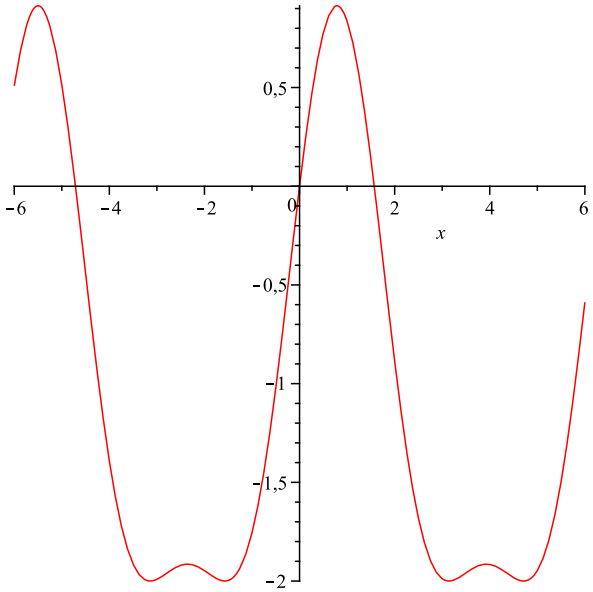
$$\frac{\pi}{2}, 0, \arctan\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}I, -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}I\right), \arctan\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}I, -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}I\right)$$

Lásd továbbá a 1.7 ábrát!

13. Feladat. (KöMaL B.3893.) Oldjuk meg a valós számok halmazán az $(x^2 + y^2)^3 = (x^3 - y^3)^2$ egyenletet.

Megoldásvázlat: Ha $y = 0$, akkor a fenti egyenlet minden x-re teljesül, hasonlóan igaz, hogy ha $x = 0$, akkor is a fenti egyenlet minden y-ra igaz az egyenlet. A továbbiakban feltehetjük, hogy $xy \neq 0$. A zárójelek felbontása után a

$$3x^4y^2 + 2x^3y^3 + 3x^2y^4 = 0$$



1.7. ábra. Az $\sin x + \cos x + \sin x \cos x - 1$ függvény grafikonja

egyenletet kapjuk, amelyből x^3y^3 való osztás után

$$3\frac{x}{y} + 3\frac{y}{x} + 2 = 0.$$

Az $a = \frac{x}{y}$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$3\left(a + \frac{1}{a}\right) = -2.$$

Mivel egy nemnulla szám és reciprokának összege abszolút értéke legalább kettő, ezért ennek az egyenletnek nincs valós megoldása.

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$(x^2+y^2)^3-(x^3-y^3)^2)$;

$$x^2y^2(3x^2 + 3y^2 + 2yx)$$

Mivel a zárójelben álló kifejezés

$$3x^2 + 3y^2 + 2yx = (x+y)^2 + 2x^2 + 2y^2,$$

ez csak az $x = y = 0$ esetben lesz nulla.

14. Feladat. (KöMaL C.845.) Április elsején egy osztályban az algebrai átalakításokat gyakorolták matematikaórán. A feladat szerint egyszerűbb alakra kellett hozni az

$$\frac{(x+2)^3 + (y+x)^3}{(x+2)^3 - (y-2)^3}$$

történt. Ági (aki az osztály legjobbja matematikából) vicces kedvében volt, ezért azt mondta, hogy ha a nevező nem nulla, akkor "egyszerűsítsünk" a hármas kitevőkkel, vagyis az eredmény

$$\frac{x+2+y+x}{x+2-(y-2)} = \frac{2x+y+2}{x-y+4}.$$

Döntsük el, hogy jó-e a végeredmény!

Megoldásvázlat:

$$\frac{(x+2)^3 + (y+x)^3}{(x+2)^3 - (y-2)^3} =$$

$$\frac{(2x+y+2)(x^2+4x+4-xy-x^2-2y-2x+x^2+y^2+2xy}{(x-y+4)(x^2+4x+4+xy+2y-2x-4+y^2-4y+4)} =$$

$$\frac{(2x+y+2)(x^2+y^2+xy+2x-2y+4)}{(x-y+4)(x^2+y^2+xy+2x-2y+4)} = \frac{2x+y+2}{x-y+4},$$

tehát a végeredmény jó.

Megoldás MAPLE-lel: `simplify`$(((x+2)^3+(x+y)^3)/((x+2)^3-(y-2)^3)-(2x+y+2)/(x-y+4))$;

$$0$$

15. Feladat. (KöMaL C.849.) Mekkora $\operatorname{ctg} x$ értéke, ha $\operatorname{ctg} x = \sin x$?

Megoldásvázlat: Mivel $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, adódik, hogy $\cos x = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. A $\cos x$ pozitív és az előző másodfokú egyenletből

$$\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

következik. Innen

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

és ugyanennyi $\operatorname{ctg} x$ is.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(\frac{1}{\tan x} - \sin x = 0, x)$;

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}{-1+\sqrt{5}}\right), -\arctan\left(\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{5}}}{-1+\sqrt{5}}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-2-2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right), \arctan\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-2-2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)$$

`simplify`$\left(\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-2-2\sqrt{5}}\right)\right)\right)$;

$$\frac{1}{2}\sqrt{-2+2\sqrt{5}}$$

16. Feladat. (KöMaL C.826.) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{3x^3}{x^3-1} - \frac{x}{x-1} = 2.$$

Megoldásvázlat: Az osztás miatt $x \neq 1$.

$$\frac{3x^3}{x^3-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{2x^3-x^2-x}{x^3-1},$$

amiből

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = 0$$

adódik. A feladat megoldása: $x = -2$.

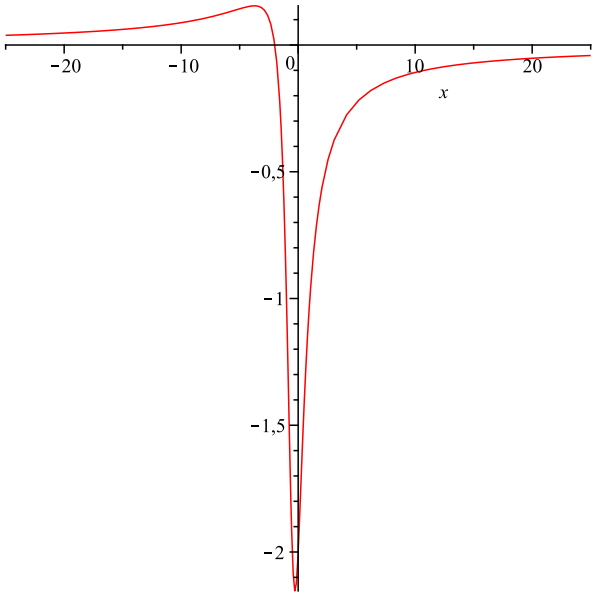
Megoldás MAPLE-lel: `solve` $\left(\frac{3x^3}{x^3-1} - \frac{x}{x-1} = 2, x\right)$;

$$-2.$$

Lásd még a 1.8 ábrát!

Megjegyzés: Az

$$f(x) = \frac{3x^3}{x^3-1} - \frac{x}{x-1}$$



1.8. ábra. Az $\frac{3x^3}{x^3-1} - \frac{x}{x-1} - 2$ függvény grafikonja

függvénynek megszüntethető szakadása van az $x = 1$ pontban. Valóban,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^3 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x(2x+1)}{x^2 + x + 1} = 1.$$

17. Feladat. (KöMaL C.815.) Az a és b valós számokról tudjuk, hogy szorzatuk 1, továbbá

$$\frac{a+b+2}{4} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}.$$

Határozzuk meg az a és b értékét.

Megoldásvázlat:

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = \frac{a+b+2}{ab+a+b+1} = 1,$$

vagyis $a + b = 2, ab = 1$, az egyenletrendszer megoldása $a = 1, b = 1$.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(\{ab = 1, \frac{a+b+2}{4} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}\}, [a, b])$;

$$[[a = 1], [b = 1]]$$

18. Feladat. (KöMaL B.3945.) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 8,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 22,$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{z}{xy} = 0.$$

Megoldásvázlat: A harmadik egyenlet miatt egyik szám sem lehet 0. Beszorozva mind a két oldalt xyz-vel, kapjuk, hogy

$$yz + xz + xy + z^2 = (x + z)(y + z) = 0.$$

Ebből vagy $x = -z$ vagy $y = -z$. Az első esetben $y = 2, 2x^2 = 18, x = \pm 3, z = \mp 3$, a második esetben $x = 2, 2y^2 = 18, y = \pm 3, z = \mp 3$.

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{z}{xy})$;

$$\frac{(z + y)(z + x)}{xyz}$$

19. Feladat. (KöMaL C.871.) Igazoljuk, hogy ha az

$$\frac{x^2}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^2}{(y - x)(y - z)} + \frac{z^2}{(z - x)(z - y)}$$

kifejezés értelmezve van, akkor értéke független az x, y, z változók értékétől.

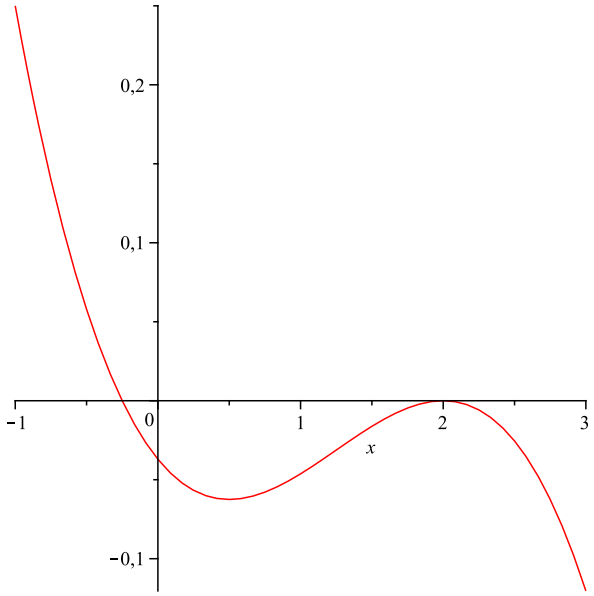
Megoldásvázlat: Közös nevezőre hozva a kifejezést, kapjuk, hogy

$$\frac{x^2(y - z)}{(x - y)(x - z)(y - z)} - \frac{y^2(x - z)}{(x - y)(x - z)(y - z)} + \frac{z^2(x - y)}{(x - y)(x - z)(y - z)},$$

továbbá,

$$x^2(y - z) - y^2(x - z) + z^2(x - y) = (x - y)(x - z)(y - z).$$

A kifejezés értéke 1, függetlenül az x, y és z változól értékétől.



1.10. ábra. Az $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{3}\right)^3$ függvény grafikonja

21. Feladat. (KöMaL C.881.) Oldjuk meg az

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+1}{3}\right)^3$$

egyenletet.

Megoldásvázlat: A hatványozások kifejtése és a beszorzások elvégzése után kapjuk, hogy

$$4x^3 - 15x^2 + 12x + 4 = 0.$$

Ennek az egyenletnek az $x = 2$ gyöke, vagyis

$$4x^3 - 15x^2 + 12x + 4 = (x-2)(4x^2 - 7x - 2).$$

A feladat megoldásai: $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = -\frac{1}{4}$.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.10 ábrát!

22. Feladat. (KöMaL C.1095.) Melyik szám a nagyobb:

$$555555555553 \cdot 666666666669 \text{ vagy } 555555555557 \cdot 666666666664?$$

Megoldásvázlat: Legyen $a = 111111111111$. Ekkor a két számot

$$(5a - 2)(6a + 3) = 30a^2 + 3a - 6$$

és

$$(5a + 2)(6a - 2) = 30a^2 + 2a - 4$$

alakban írhatjuk fel. Látható, hogy az első szorzat a nagyobb.

Megoldás MAPLE-lel:

$$555555555553 \cdot 666666666669 - 555555555557 \cdot 666666666664;$$

$$= 111111111109$$

23. Feladat. (KöMaL B.4176.) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^2 + (\cos x + \cos 2x + \cos 3x)^2 = 1.$$

Megoldásvázlat: Felhasználjuk az

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

illetve

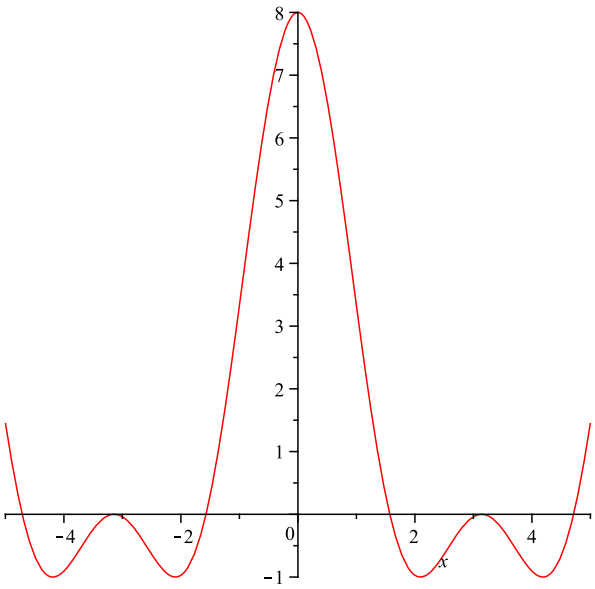
$$\sin\alpha \sin\beta + \cos\alpha \cos\beta = \cos(\beta - \alpha)$$

összefüggéseket, kapjuk, hogy

$$3 + 4\cos x + 2\cos 2x = 1.$$

Mivel $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, ezért az egyenlet a

$$\cos^2 x + \cos x = 0$$



1.11. ábra. A $\cos^2 x + \cos x$ függvény grafikonja

egyenletté egyszerűsödik, amiből $\cos x = 0$ vagy $\cos x = -1$, illetve $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ és $x = \pi + 2l\pi$ következik, ahol k és l tetszőleges egész szám.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.11 ábrát!

24. Feladat. (KöMaL B.4156.) Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

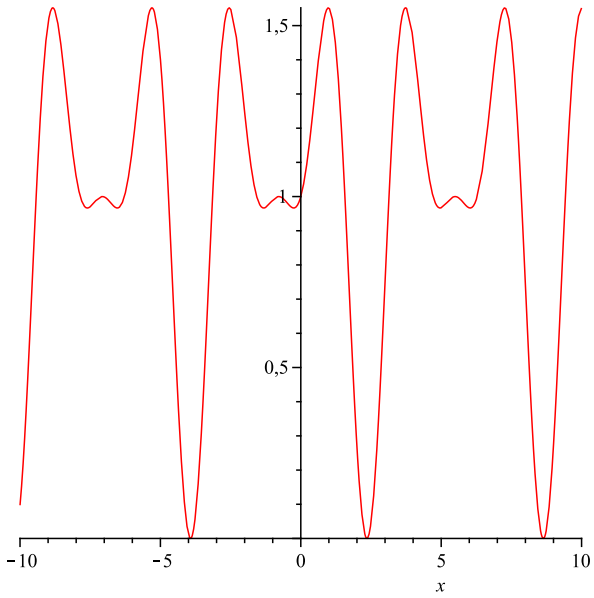
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 1 = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Megoldásvázlat: A feladatot a jobb és bal oldalon álló függvények értékkészletének vizsgálatával határozzuk meg. Ismert, hogy egy nemnulla szám és reciprokának az összege mindig nagyobb vagy egyenlő 2-nél, illetve kisebb vagy egyenlő -2-nél. Így

$$-1 \geq \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 1$$

vagy

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 1 \geq 3.$$



1.12. ábra. Az $1+\sin x\cos x-\sin x\cos x\cos\left(x+\frac{\Pi}{4}\right)$ függvény grafikonja

Mivel

$$-1\leq\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1,$$

ezért egyenlőség csak a

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

esetben állhat fenn, vagyis ha $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, ahol k egész szám. Ekkor a bal oldal értéke is -1, tehát pontosan ezek a számok szolgáltatják az egyenlet megoldását.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.12 ábrát!

25. Feladat. (KöMaL B.4157.) Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$[x]=x^4-2x^2.$$

Megoldásvázlat: A keresett x megoldást (megoldásokat) felírhatjuk

$$x=[x]+\{x\}$$

alakban, ahol $\{x\}$ az x törtrészét jelenti. Ekkor

$$\{x\} = x - x^4 + 2x^2,$$

és így

$$0 \leq x - x^4 + 2x^2 < 1.$$

Azonban, ha $|x| \geq 2$, akkor

$$x < 2x^2, x + 2x^2 < 4x^2 \leq x^4,$$

ezért $-2 < x < 2$, vagyis $[x] = -2, -1, 0, 1$. A megfelelő negyedfokú egyenletek

$$x^4 - 2x^2 + 2 = 0,$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0,$$

$$x^4 - 2x^2 = 0,$$

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0.$$

Az első egyenletnek nyilván nincs valós megoldása, mert

$$x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 1)^2 + 1.$$

A második egyenlet átírható

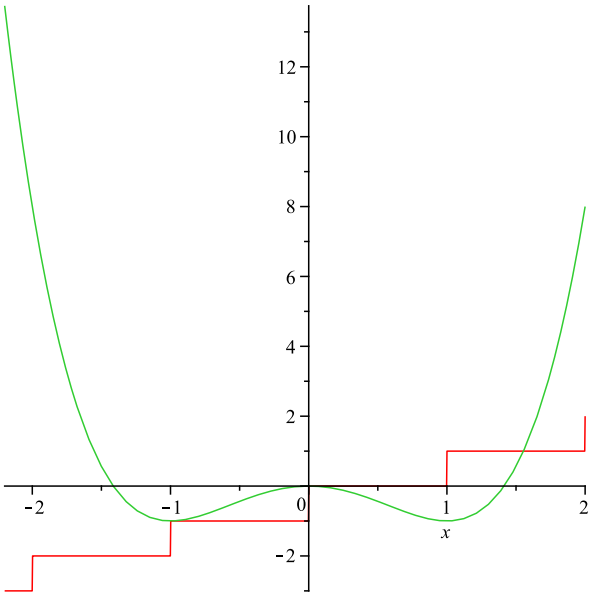
$$(x^2 - 1)^2 = 0$$

alakban, amiből $x = \pm 1$ következik, azoban az $[x] = -1$ feltétel miatt $x = -1$. A harmadik egyenletet könnyen szorzattá tudjuk alakítani:

$$x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) = 0.$$

Ekkor a gyökök $x = 0, x = \pm\sqrt{2}$, azonban az utóbbi két megoldás nem tesz eleget az $[x] = 0$ feltételnek. Végül a negyedik egyenletet átalakítva

$$(x^2 - 1)^2 = 2$$



1.13. ábra. Az $[x]$ és az $x^4 - 2x^2$ függvények grafikonjai

egyenletet kapjuk, és ebből

$$x^2 - 1 = \pm\sqrt{2},$$

$$x^2 = 1 + \sqrt{2},$$

és

$$x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

adódik. Mivel $[x] = 1$, ezért $x = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.13 ábrát!

26. Feladat. (KöMaL B.4144.) Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$2(x^4 + x^2y^2 + y^4) \geq 3xy(x^2 + y^2).$$

Megoldásvázlat: Átrendezés utan az

$$2x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 - 3xy^3 + 2y^4 \geq 0$$

egyenlőtlenség adódik. Ha $y = 0$, akkor világos, hogy igaz az állítás és ekkor $x = 0$.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $y \neq 0$ és osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát y^4-nel. Ekkor

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^4 - 3\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y}\right) + 2 \geq 0$$

egyenlőtlenséget kell bizonyítani. Vizsgáljuk a $2t^4 - 3t^3 + 2t^2 - 3t + 2$ negyedfokú polinomot. Könnyű látni, hogy az 1 zérushelye ennek a polinomnak, azaz

$$2t^4 - 3t^3 + 2t^2 - 3t + 2 = (t-1)(2t^3 - t^2 + t - 2),$$

továbbá, mivel az 1 zérushelye a jobb oldalon álló harmadfokú polinomnak is, ezért

$$2t^4 - 3t^3 + 2t^2 - 3t + 2 = (t-1)^2(2t^2 + t + 2).$$

A pozitív főegyüttható másodfokú polinom diszkriminánsa negatív, így az minden t-re pozitív. Leolvasható az is, hogy egyenlőtlenség a $t = 1$, vagyis az $x = y$ esetben áll fenn.

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$(2x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 - 3xy^3 + 2y^4)$;

$$(2x^2 + xy + 2y^2)(-y + x)^2$$

27. Feladat. (KöMaL B.4148.) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$x^3y + xy^3 = 10$$

$$x^4 + y^4 = 17.$$

Megoldásvázlat: Az első egyenletből

$$xy(x^2 + y^2) = 10$$

adódik, ezért új ismeretleneket vezetünk, legyen $a = xy$ és $b = x^2 + y^2$. Ezekkel a jelölésekkel

$$ab = 10, b^2 - 2a^2 = 17.$$

Az első egyenletből $a = \frac{10}{b}$, ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$b^2 - \frac{200}{b^2} = 17.$$

Ezt átrendezve:

$$b^4 - 17b^2 - 200,$$

illetve

$$(b^2 - 25)(b^2 + 8) = 0.$$

Nyilván a $b^2 + 8 \geq 8$ tényező nem lehet 0, ezért $b_{1,2} = \pm 5$. Mivel b nemnegatív (hiszen két négyzetszám összege), így

$$2 = xy, 5 = x^2 + y^2,$$

és ezért

$$x - y = \pm 1, x + y = \pm 3.$$

A keresett megoldások:

$$(x, y) \in \{(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)\}.$$

Megoldás MAPLE-lel: `solve` $(\{x^4 + y^4 = 17, x^3y + y^3x = 10\}, [x, y])$;

$$[[x = 2, y = 1], [x = 1, y = 2], [x = -1, y = -2], [x = -2, y = -1],$$

$$[x = RootOf(_Z^2+1, label =_L 3), y = 2RootOf(_Z^2+1, label =_L 3)],$$

$$[x = 2RootOf(_Z^2+1), y = RootOf(_Z^2+1)],$$

$$[x = 9/20RootOf(4_Z^8-68_Z^4+625)-1/10(RootOf(4_Z^8-68_Z^4+625))^5, y = RootOf(4_Z^8-68_Z^4+625)]]$$

28. Feladat. (KöMaL B.4151.) Legyen $\alpha = \pi/14$. Mennyi $\sin\alpha \sin 3\alpha \sin 5\alpha$ értéke?

Megoldásvázlat: Felhasználva a

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

összefüggést, kapjuk, hogy a keresett szorzat

$$\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}.$$

Ismert, hogy

$$\cos(x-y)+\cos(x+y)=2\cos x\cos y,$$

ezt többször alkalmazva kapjuk, hogy

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\cos 0+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(1+\cos 0+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}\right).$$

Meghatározzuk az

$$S=\cos 0+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}$$

összeget. Legyen

$$z=\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7},$$

és tekintsük az

$$1+z^2+z^4+\ldots+z^{12}$$

összeget. Világos, hogy S ennek az összegnek a valós része. A mértani sor (a hányados z^2) összegképletét és a Moivre-formulát használva, kapjuk, hogy

$$1+z^2+z^4+\ldots+z^{12}=\frac{(z^2)^7-1}{z^2-1}.$$

Azonban $z^{14}-1=0$, ezért

$$\cos 0+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}=0.$$

Ebből könnyan látható, hogy a keresett érték $\frac{1}{8}$.

Megoldás MAPLE-lel: `evalf`$_{20}(\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14})$;

$$0.12500000000000000001$$

29. Feladat. (KöMaL C.973.) Oldjuk meg az $1+\cos 3x = 2\cos 2x$ egyenletet.

Megoldásvázlat: Ismert, hogy

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

és

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

Ezeket behelyettesítve az egyenletbe, kapjuk, hogy

$$4\cos^3 x - 4\cos^2 x - 3\cos x + 3 = 0.$$

A harmadfokú kifejezést könnyű szorzatta alakítani:

$$4\cos^3 x - 4\cos^2 x - 3\cos x + 3 = (\cos x - 1)(4\cos^2 x - 3).$$

Így $\cos x = 1$ vagy $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, amiből $x_1 = 2k\pi, x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + l\pi$, ahol $k, l \in \mathbb{Z}$.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(1+\cos 3x - 2\cos 2x = 0, x)$;

$$[[0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]]$$

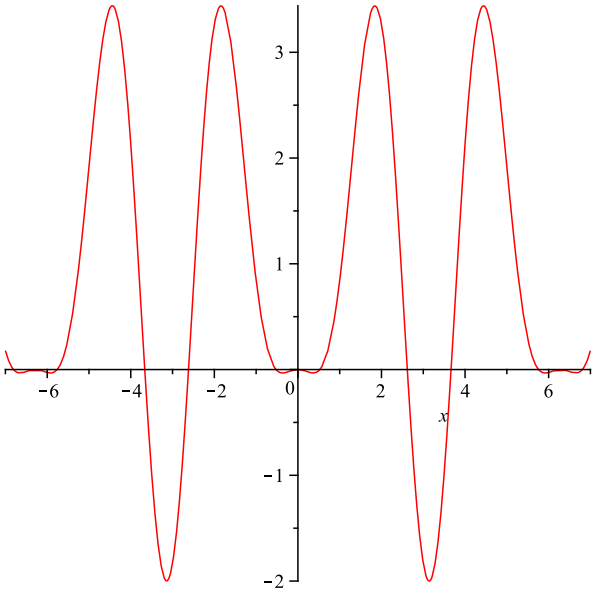
Lásd a 1.14 ábrát!

30. Feladat. (KöMaL B.4138.) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

Megoldásvázlat: Ha jobb oldal értelmezve van, akkor

$$|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| \geq 2.$$



1.14. ábra. Az $1 + \cos 3x - 2\cos 2x$ függvény grafikonja

Azonban

$$|\sqrt{2}(\sin x + \cos x)| = 2\frac{\sqrt{2}}{2}(|\sin x + \cos x|) = 2|\cos(45^\circ - x)| \leq 2,$$

ezért az egyenlet minden x megoldására

$$|\cos(45^\circ - x)| = 1$$

teljesül, azaz $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Ezen lehetséges megoldások közül azonban csak az

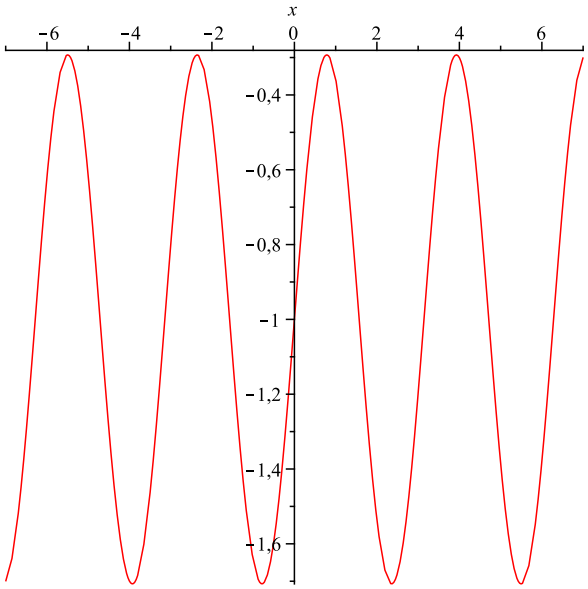
$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

alakú szögek megoldásai az eredeti egyenletnek.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.15 ábrát!

31. Feladat. (KöMaL C.967.) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$3x^2 - xy = 1,$$



1.15. ábra. A $\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\sin x \cos x - 1$ függvény grafikonja

$$9xy + y^2 = 22.$$

Megoldásvázlat: Vegyük észre, hogy

$$3(3x^2 - xy) + 9xy + y^2 = (3x + y)^2 = 25.$$

Ezért $3x + y = \pm 5$. A továbbiakban két esetet különböztetünk meg.

I) $y = 5 - 3x$. Ekkor $3x^2 - (5 - 3x)x = 1$ és így $6x^2 - 5x - 1 = 0$, amiből

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{6}, y_1 = 2, y_2 = 5.5.$$

II) $y = -5 - 3x$. Ekkor $3x^2 - (-5 - 3x)x = 1$ és így $6x^2 + 5x - 1 = 0$, amiből

$$x_3 = -1, x_4 = \frac{1}{6}, y_3 = -2, y_4 = -5.5.$$

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(\{3x^2 - xy = 1, 9xy + y^2 = 22\}, [x, y])$;

$$[[x = 1, y = 2], [x = 1/6, y = -11/2], [x = -1/6, y = 11/2], [x = -1, y = -2]]$$

32. Feladat. (KöMaL C.955.) Oldjuk meg a $10x - 5 = 9[x]$ egyenletet a valós számok halmazán (ahol $[x]$ az x egészrészét jelenti).

Megoldásvázlat: Legyen

$$x = [x] + \{x\},$$

ahol $\{x\}$ az x valós szám törtrészét jelöli. Ezzel egyenletünk

$$10[x] + 10\{x\} - 5 = 9[x]$$

alakú, amiből

$$5 - [x] = 10\{x\}$$

következik. Ezért $10\{x\}$ egész szám, így $\{x\}$ lehetséges értékei: $k \cdot 0.1, k = 0, 1, 2, \ldots, 8, 9$. Az előző egyenlet segítségével az $[x]$, és az x értéke könnyen meghatározható.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.16 ábrát!

33. Feladat. (KöMaL B.4104.) Keressük olyan a, b, c számokat, amelyekre minden pozitív n egész esetén teljesül az

$$(n + 3)^2 = a(n + 2)^2 + b(n + 1)^2 + cn^2$$

egyenlőség.

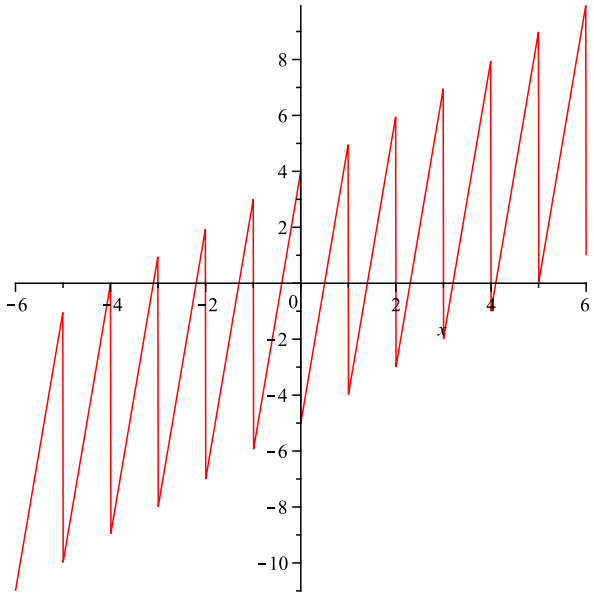
Megoldásvázlat: Mivel minden n pozitív egész esetén teljesülnie kell a fenti egyenlőségnek, ezért speciálisan igaz $n = 1, 2$ és $n = 3$-ra is. Ezeket behelyettesítve, kapjuk, hogy

$$16 = 9a + 4b + c,$$

$$25 = 16a + 9b + 4c,$$

$$36 = 25a + 16b + 9c.$$

Az első egyenletből $c = 16 - 9a - 4b$, ezt behelyettesítve a második és harmadik egyen-



1.16. ábra. A $10x - 9[x] - 5$ függvény grafikonja

letekbe, a megfelelő összevonások után

$$20a + 7b = 39$$

és

$$56a + 20b = 108$$

adódik, amit megoldva

$$a = 3, b = -3,$$

és $c = 1$.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(\{9a + 4b + c = 16, 16a + 9b + 4c = 25, 25a + 16b + 9c = 36\}, [a, b, c])$;

$$[[a = 3, b = -3, c = 1]]$$

34. Feladat. (KöMaL B.4323.) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{1 + x^4}{(1 + x)^4} = \frac{3}{4}$$

Megoldásvázlat: Az egyenlet kifejtése és átrendezése után

$$x^4 - 12x^3 - 18x^2 - 12x + 1 = 0$$

adódik. Az egyenlet szimmetrikus, az $x = 0$ nem megoldása, így oszthatunk x^2-tel:

$$x^2 - 12x - 18 - \frac{12}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Új változót vezetünk be, legyen $y = x + \frac{1}{x}$. Ekkor az egyenlet

$$y^2 - 12y - 20$$

alakú, amelynek gyökei $y_{1,2} = 6 \pm \sqrt{56}$. Mivel egy nemnulla szám és reciprokának összegének az abszolút értéke legalább kettő, elegendő az

$$x^2 - (6 + \sqrt{56})x + 1 = 0$$

egyenletet megoldani, amelynek megoldása

$$x_{1,2} = 3 + \sqrt{14} \pm \sqrt{22 + 6\sqrt{14}}.$$

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.17 és a 1.18 ábrákat!

35. Feladat. (KöMaL B.4297.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges valós x, y számokra

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$$

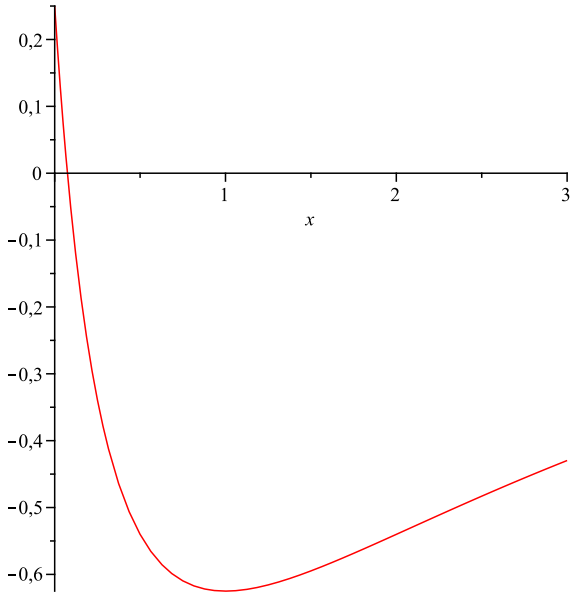
teljesül.

Megoldásvázlat: Ha $xy = 1$, akkor a kifejezés 0, és az egyenlőtlenség igaz. Ha $xy \neq 1$, akkor legyen

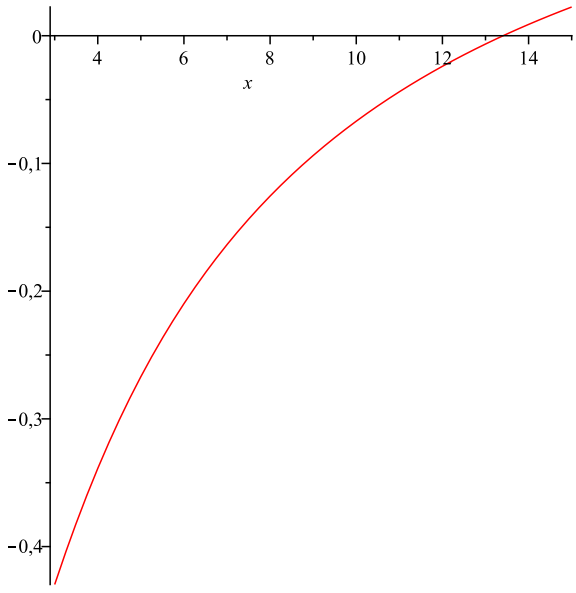
$$x = \tan\alpha, y = \tan\beta$$

és ekkor értelmezhető $\tan(\alpha + \beta)$. Továbbá teljesül, hogy

$$1 + x^2 = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$



1.17. ábra. Az $\frac{1+x^4}{(1+x)^4} - \frac{3}{4}$ függvény grafikonja a $[0, 3]$ intervallumban



1.18. ábra. Az $\frac{1+x^4}{(1+x)^4} - \frac{3}{4}$ függvény grafikonja a $[3, 15]$ intervallumban

$$1 + y^2 = \frac{1}{\cos^2 \beta},$$

és

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Ezekkel a formulákkal

$$\frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)} = \tan(\alpha + \beta)(1 - \tan\alpha \tan\beta)^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta =$$

$$\tan(\alpha + \beta)(\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta)^2 = \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta) =$$

$$\frac{1}{2}\sin 2(\alpha + \beta)$$

teljesül, amiből következik az állítás.

Megoldás MAPLE-lel: $\texttt{factor}\left(\frac{1}{2} + \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right)$;

$$\frac{1}{2}\frac{(xy - y - x - 1)^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

$\texttt{factor}\left(\frac{1}{2} - \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right)$;

$$\frac{1}{2}\frac{(xy + y + x - 1)^2}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

36. Feladat. (KöMaL B.4239.) Oldjuk meg a

$$8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$$

egyenletet.

Megoldásvázlat: Ha $|x| > 1$ akkor könnyű látni, hogy a bal oldalon álló szorzat abszolút értéke legalább 8. Ezért az összes x megoldásra $|x| \leq 1$ teljesül. Létezik olyan t valós szám, hogy

$$x = \cos t,$$

és ezzel a helyettesítéssel egyenletünk

$$8\cos t \cos 2t \cos 4t = 1$$

alakú lesz. Felhasználva a

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

összefüggést, kapjuk, hogy megoldandó a

$$2(\cos t+\cos 3t+\cos 5t+\cos 7t)-1=0$$

egyenlet. Világos, hogy az eredeti egyenletnek az $x=\frac{1}{2}$ a megoldása. Felhasználva az eredeti egyenlet trigonometrikus alakját, adódik, hogy a

$$t_2=\frac{2\pi}{7}, t_3=\frac{4\pi}{7}, t_4=\frac{6\pi}{7},$$

$$t_5=\frac{\pi}{9}, t_6=\frac{5\pi}{9}, t_7=\frac{7\pi}{9}$$

értékek kielégítik a trigonometrikus egyenletet, ezért az eredeti egyenletnek a gyökei

$$x_1=\frac{1}{2}, x_2=\cos\frac{2\pi}{7}, x_3=\cos\frac{4\pi}{7}, x_4=\cos\frac{6\pi}{7},$$

$$x_5=\cos\frac{\pi}{9}, x_6=\cos\frac{5\pi}{9}, x_7=\cos\frac{7\pi}{9}.$$

Mivel az eredeti egyenletünk hetedfokú, és találtunk 7 olyan különböző számot amelyek kielégítik az egyenletet, a feladat megoldása teljes.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.19 és 1.20 ábrákat!

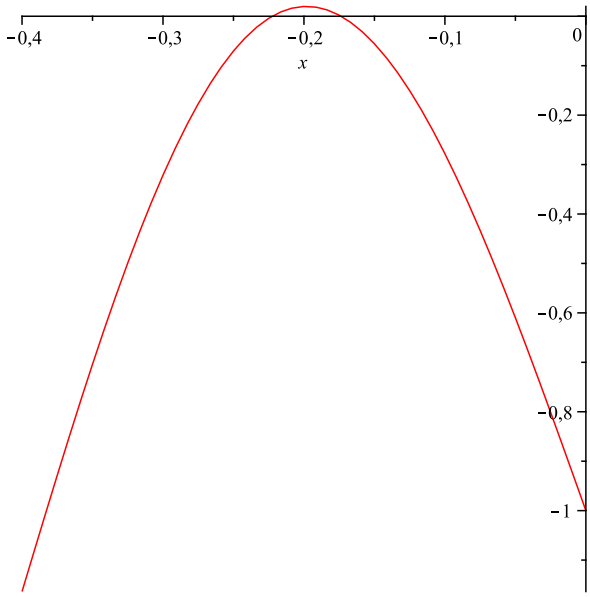
37. Feladat. (KöMaL B.4225.) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert

$$\frac{\sqrt{x+z}+\sqrt{x+y}}{\sqrt{y+z}}+\frac{\sqrt{y+z}+\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+z}}=14-4\sqrt{x+z}-4\sqrt{y+z},$$

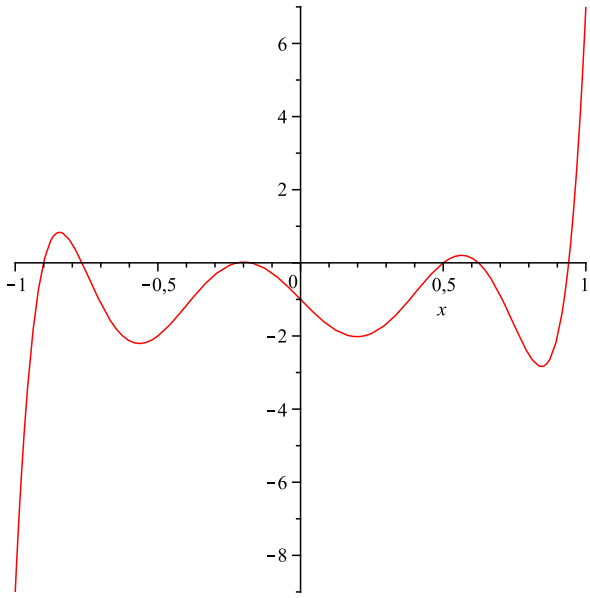
$$\sqrt{x+z}+\sqrt{x+y}+\sqrt{z+y}=4.$$

Megoldásvázlat: Új változókat bevezetve, legyen $a=\sqrt{y+z}, b=\sqrt{x+z}, c=\sqrt{x+y}$. Világos, hogy a,b pozitív számok, c nemnegatív. Ezekkel a jelölésekkel egyenleteink a következő formában írhatóak:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}=14-4a-4b,$$



1.19. ábra. Az $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)-1$ függvény grafikonja a $[-0.4, 0]$ intervallumban



1.20. ábra. Az $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)-1$ függvény grafikonja a $[-1, 1]$ intervallumban

$$a+b+c=4.$$

A második egyenletből $c=4-a-b$, ezt behelyettesítve az első egyenletbe, majd rendezve azt:

$$a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$$

adódik. Mivel a és b pozitív számok, továbbá egy pozitív szám és reciprokának az összege mindig legalább kettő, így a fenti egyenletből $a=b=1$ adódik. Vagyis

$$y+z=x+z=1, x+y=4,$$

és $x=y=2, z=-1$.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(\{x+y=4, x+z=1, y+z=1\}, [x,y,z])$;

$$[[x=2, y=2, z=-1]]$$

38. Feladat. (KöMaL A.527.) Határozzuk meg azokat a p valós számokat, amelyekre az

$$x^3+3px^2+(4p-1)x+p=0$$

egyenletnek van két olyan valós gyöke, amelyek különbsége 1.

Megoldásvázlat: Vegyük észre, hogy a bal oldalon álló polinomot szorzattá lehet alakítani:

$$x^3+3px^2+(4p-1)x+p=(x+1)(x^2+(3p-1)x+p),$$

vagyis a harmadfokú polinom egyik gyöke a -1. Három esetet különböztetünk meg.

1) eset: Ha az $x^2+(3p-1)x+p=0$ egyenletnek gyöke a 0. Ekkor $p=0$.

2) eset: Ha az $x^2+(3p-1)x+p=0$ egyenletnek gyöke a -2. Ekkor $p=\frac{6}{5}$.

3) eset: Ha az $x^2+(3p-1)x+p=0$ egyenletnek van két olyan valós gyöke, amelyek különbsége 1. Legyenek ezek a és b. Ekkor a Vieta-formulák alapján

$$a+b=-(3p-1), ab=p,$$

és

$$1=(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=9p^2-10p+1,$$

azaz $p = 0$ vagy $p = \frac{10}{9}$.

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$(x^3 + 3px^2 + (4p - 1)x + p)$;

$$(x + 1)(x^2 + (3p - 1)x + p)$$

39. Feladat. (KöMaL B.4367.) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{3x + 3}{\sqrt{x}} = 4 + \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Megoldásvázlat: A feladat megoldása a bal és jobb oldalon álló függvények értékkészletének összehasonlításával történik. Az egyenlet értelmezési tartománya a pozitív valós számok halmaza. Világos, hogy

$$x + 1 \geq 2\sqrt{x}.$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{3x + 3}{\sqrt{x}} \geq 6,$$

egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x = 1$. Hasonlóan kapjuk, hogy

$$3(x^2 + 1) \geq 6x,$$

vagyis

$$4(x^2 - x + 1) \geq (x + 1)^2,$$

ahonnan

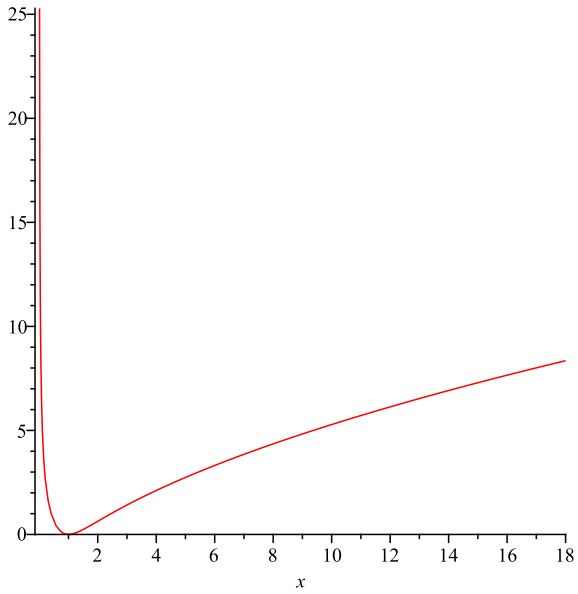
$$4 + \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \leq 6$$

adódik. Egyenlőség itt is csak az $x = 1$ esetben állhat fenn, ezért a feladat megoldása $x = 1$.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.21 ábrát!

40. Feladat. (KöMaL B.3320.) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^{x^{1/2}} = \frac{1}{2}.$$



1.21. ábra. A $\frac{3x+3}{\sqrt{x}} - 4 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$ függvény grafikonja

Megoldásvázlat: Új változót vezetünk be. Mivel az egyenletben szerepel az $x^{1/2}$, ezért legyen $y = x^2$. Az új változóval egyenletünk

$$y^{2y} = \frac{1}{2}$$

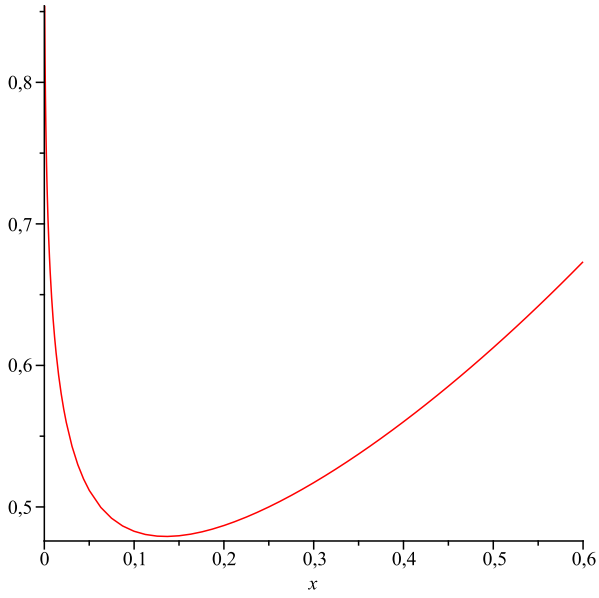
alakú. Deriválással bebizonyítható, hogy az $f(y) = y^{2y}$ függvény az $0 < y \leq \frac{1}{e}$ intervallumban szigorúan monoton fogyó, ha $y \geq \frac{1}{e}$, akkor szigorúan monoton növekvő, vagyis mindkét részen a a függvény legfeljebb egyszer veszi fel az $\frac{1}{2}$ értéket. Könnyen látható és behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az a két hely a $\frac{1}{2}$ és az $\frac{1}{4}$. Ebből a két megoldás x-re: $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{16}$.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.22 ábrát!

41. Feladat. (KöMaL C.694.) Mekkora a

$$[\log_2 1] + [\log_2 2] + [\log_2 3] + \ldots + [\log_2 2002]$$

összeg értéke?



1.22. ábra. Az $x^{x^{1/2}}$ függvény grafikonja

Megoldásvázlat: Könnyű látni, hogy

$$[\log_2(2^a + k)] = a,$$

ha $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^a - 1$. Ezért az összeg

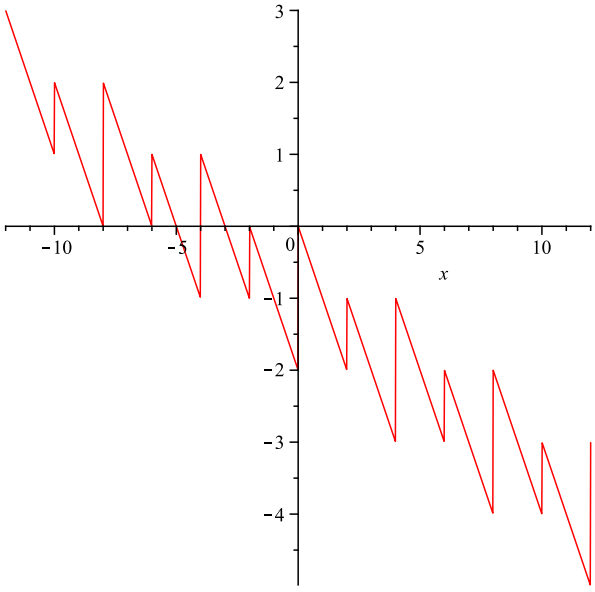
$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 16 \cdot 4 + \ldots + 2^9 \cdot 9 + (2002 - 1023) \cdot 10 =$$

$$= \sum_{k=1}^{9} k \cdot 2^k + 9790 = 17984.$$

Megoldás MAPLE-lel: `sum(floor(`$\log_2 n$`), n = 1..2002);`

17984

42. Feladat. (KöMaL C.688.) Oldjuk meg az $[x/2] + [x/4] = x$ egyenletet. ($[x]$ az x egész része, az x-nél nem nagyobb egészek legnagyobbika)



1.23. ábra. A $[x/2] + [x/4] - x$ függvény grafikonja

Megoldásvázlat: A bal oldalon két egész szám összege áll, így x egész szám. x néggyel osztva $0, 1, 2, 3$ maradékot adhat, legyen először $x = 4k$ alakú. Ekkor $2k + k = 4k$, amiből $k = 0$ adódik. Ha $x = 4k + 1$ alakú, akkor $2k + k = 4k + 1$, amiből $k = -1$ következik. A harmadik esetben $x = 4k + 2$, ekkor $3k + 1 = 4k + 2, k = -1$ adódik, és végül $x = 4k + 3$-ból $k = --2$. Így az egyenlet megoldásai $x = 0, -3, -2$ és -5.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.23 ábrát!

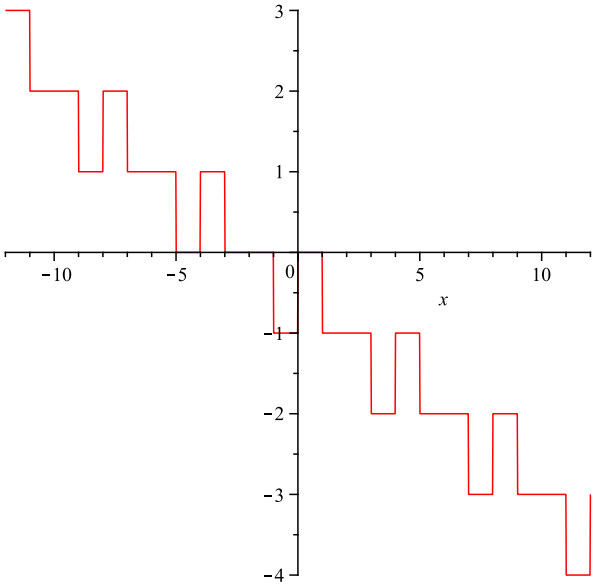
43. Feladat. (KöMaL B.3572.) Oldjuk meg az $[x/2] + [x/4] = [x]$ egyenletet. ($[x]$ az x egész része, az x-nél nem nagyobb egészek legnagyobbika.)

Megoldásvázlat: Legyen $[x] = n$, vagyis jelölje x egész részét n. Ekkor

$$\left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{x}{4}\right] = \left[\frac{n}{4}\right].$$

Az n szám néggyel való osztási maradékától függően 4 esetet különböztetünk meg. Ha $n = 4k$ alakú, akkor

$$4k = 2k + k,$$



1.24. ábra. A $[x/2] + [x/4] - [x]$ függvény grafikonja

vagyis $k = 0, n = 0$. Ha $n = 4k + 1$, akkor

$$4k + 1 = 2k + k,$$

vagyis $k = -1, n = -3$. Ha $n = 4k + 2$, akkor

$$4k + 2 = (2k + 1) + k,$$

vagyis $k = -1, n = -2$. Végül, ha $n = 4k + 3$, akkor

$$4k + 3 = (2k + 1) + k,$$

vagyis $k = -2, n = -5$.

Az egyenlet megoldásai azok a valós számok, amelyeknek az egész része $0, -2, -3, -5$.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.24 ábrát!

44. Feladat. (KöMaL B.3577.) Oldjuk meg a $\sin 3x + 3\cos x = 2\sin 2x(\sin x + \cos x)$ egyenletet.

Megoldásvázlat: Új változókat vezetünk be. Legyen

$$a = \cos x, b = \sin x.$$

Ezekkel a jelölésekkel

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2ab,$$

$$\cos 2x = a^2 - b^2 = 1 - 2b^2 = 2a^2 - 1,$$

$$\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 3a^2b - b^3.$$

Felhasználva az előző képleteket, egyenletünk

$$3a^2b - b^3 + 3a = 4a^2b + 4ab^2$$

alakú lesz. Ebből

$$3a = a^2b + 4ab^2 + b^3 = b(a^2 + b^2) + 4ab^2$$

következik. Mivel $a^2 + b^2 = 1$, ezért

$$3a = b + 4ab^2 = b + 4a(1 - a^2),$$

és

$$b = a(4a^2 - 1).$$

Az egyenletet négyzetre emelve

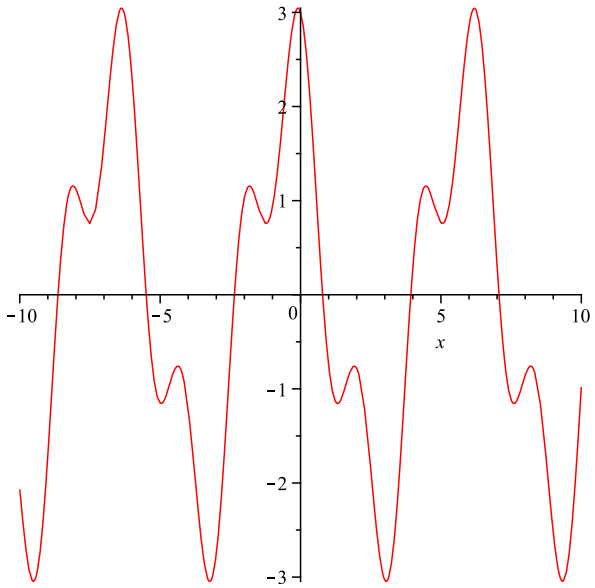
$$b^2 = 1 - a^2 = a^2(16a^4 - 8a^2 + 1),$$

azaz egy az a^2-ben harmadfokú egyenletet kaptunk. Az $A = a^2$ változó bevezetésével egyenletünk

$$16A^3 - 8A^2 + 2A - 1 = (2A - 1)(8A^2 + 1) = 0$$

alakú, ezért $A = \frac{1}{2}$, és $a = \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám. Ne felejtkezzünk el a gyökök ellenőrzéséről!

Megoldás MAPLE-lel: Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.25 ábrát!



1.25. ábra. A $\sin 3x + 3\cos x - 2\sin 2x(\sin x + \cos x)$ függvény grafikonja

45. Feladat. (KöMaL B.3579.) Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$x = \sqrt{-3 + 4\sqrt{-3 + 4\sqrt{-3 + 4x}}}.$$

Megoldásvázlat: Többszörös négyzetre emelésekkel kapjuk, hogy

$$x^8 + 12x^6 + 150x^4 + 684x^2 - 16384x + 15537 = 0.$$

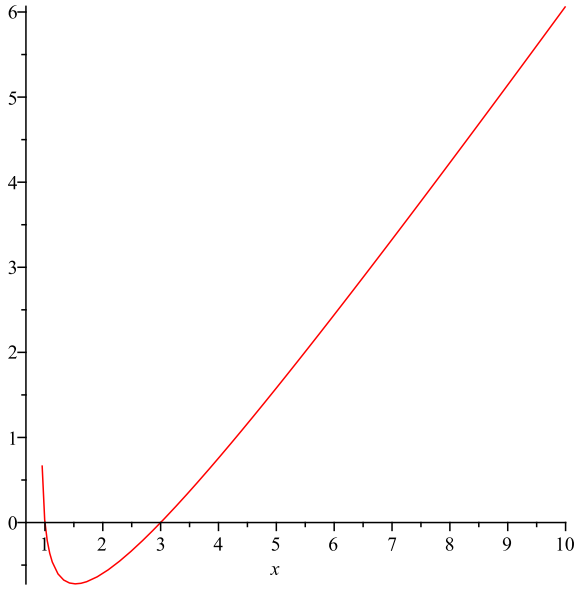
A nyolcadfokó polinomot szorzattá tudjuk alakítani,

$$x^8 + 12x^6 + 150x^4 + 684x^2 - 16384x + 15537 =$$

$$= (x-1)(x-3)(x^6 + 4x^5 + 25x^4 + 88x^3 + 427x^2 + 1444x + 5179),$$

így a feladat megoldása az $x_1 = 1$ és $x_2 = 3$. A négyzetgyökvonás miatt $x \geq \frac{3}{4}$, és könnyen látható, hogy ilyen x-ekre

$$x^6 + 4x^5 + 25x^4 + 88x^3 + 427x^2 + 1444x + 5179 > 0.$$



1.26. ábra. Az $x-\sqrt{-3+4\sqrt{-3+4\sqrt{-3+4x}}}$ függvény grafikonja

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.26 ábrát!

46. Feladat. (KöMaL A.291.) Oldjuk meg az

$$x=\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}$$

egyenletet.

Megoldásvázlat: Könnyű látni, hogy az x megoldást (megoldásokat) a $[-2,2]$ intervallumban kereshetjük. Ekkor létezik olyan y szög, amelyre $0\le y\le\pi$ és $x=2\cos y$. Ekkor

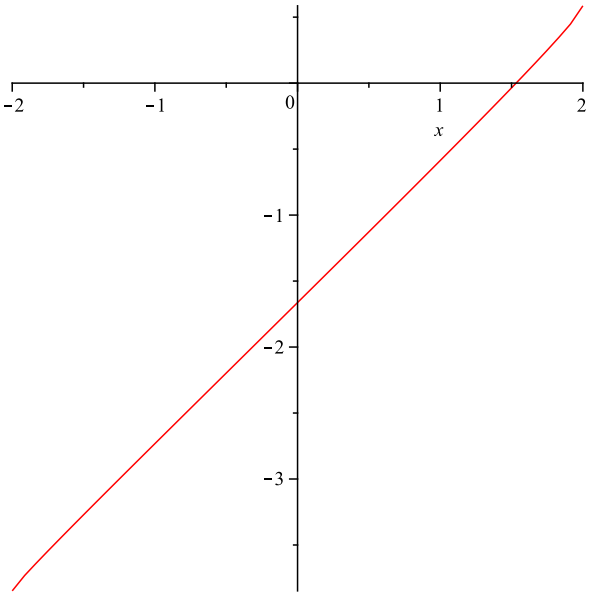
$$\sqrt{2+x}=\sqrt{2+2\cos y}=\sqrt{2+4cos^2\frac{y}{2}-2}=2\cos\frac{y}{2},$$

továbbá

$$\sqrt{2-\sqrt{2+x}}=\sqrt{2-2\cos\frac{y}{2}}=2\sin\frac{y}{4}=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{4}\right),$$

és az első átalakításhoz hasonlóan

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}}=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{y}{8}\right),$$



1.27. ábra. Az $x - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}}$ függvény grafikonja

vagyis a

$$\cos y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{8}\right)$$

trigonometrikus egyenletet kapjuk, aminek az $y = \frac{2\pi}{9}$ a megoldása. Ebből $x = 2\frac{\cos 2\pi}{9}$.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.27 ábrát!

47. Feladat. (KöMaL B.3536.) Határozzuk meg

$$\frac{x^2}{8} + x\cos x + \cos 2x$$

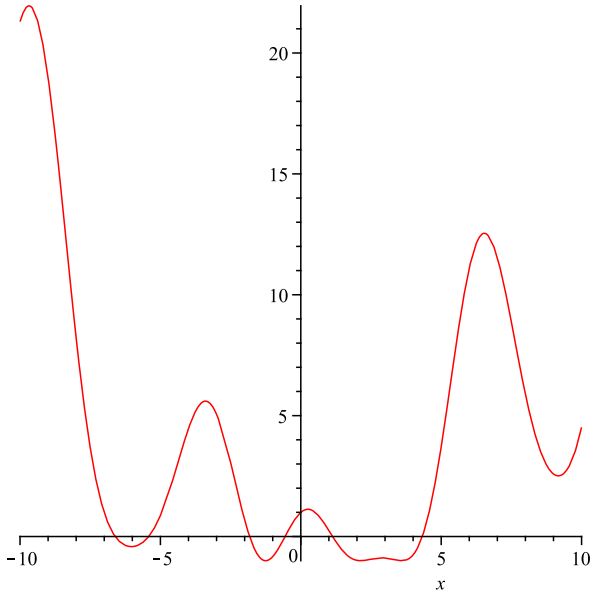
legkisebb értékét.

Megoldásvázlat: Felhasználjuk a

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

azonosságot. Ekkor

$$\frac{x^2}{8} + x\cos x + \cos 2x = \frac{x^2}{8} + x\cos x + 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{8}(x + 4\cos x)^2 - 1 \geq -1,$$



1.28. ábra. Az $\frac{x^2}{8} + x\cos x + \cos 2x$ függvény grafikonja, $-10 < x < 10$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha

$$f(x) = x + 4\cos x = 0.$$

A függvény értéke a 0 helyen 4, a π helyen $\pi - 4$, vagyis a folytonosság miatt lesz egy olyan x_0 pont a $[0, \pi]$ intervallumban, amlyre $f(x_0) = 0$. Ekkor a keresett minimális függvényérték -1.

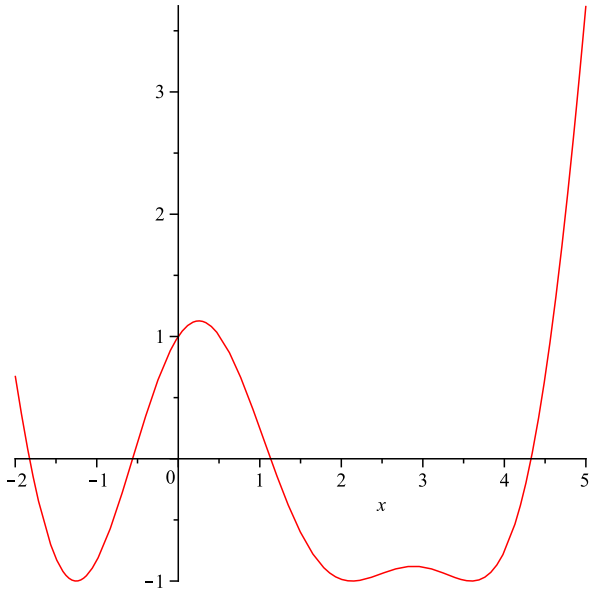
Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.28 és a 1.29 ábrákat!

48. Feladat. (KöMaL C.665.) Mennyi az alábbi tört értéke, ha a számláló és a nevező ugyanannyi számjegyet tartalmaz?

$$\frac{166\ldots6}{66\ldots64}$$

Megoldásvázlat: Tegyük fel, hogy a számláló és a nevező is n számjegyből áll. A számlálóban álló kifejezést felírhatjuk

$$6\frac{10^n - 1}{9} - 5 \cdot 10^{n-1}$$



1.29. ábra. Az $\frac{x^2}{8} + x\cos x + \cos 2x$ függvény grafikonja, $-2 < x < 5$

alakban, a nevező

$$6\frac{10^n - 1}{9} - 2.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy

$$4\left(\frac{2}{3}(10^n - 1) - 5 \cdot 10^{n-1}\right) = \frac{2}{3}(10^n - 1) - 2,$$

azaz a tört értéke $\frac{1}{4}$.

Megoldás MAPLE-lel:

$$\frac{166}{664} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1666}{6664} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{166666666666}{666666666664} = \frac{1}{4}$$

49. Feladat. (KöMaL C.667.) Legyen

$$a = x + \frac{1}{x}, b = y + \frac{1}{y}, c = xy + \frac{1}{xy}.$$

Mutassuk meg, hogy az $a^2 + b^2 + c^2 - abc$ kifejezés értéke nem függ x-től és y-tól.

Megoldásvázlat: Könnyű kiszámolni, hogy

$$a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2, b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2, c^2 = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2,$$

továbbá

$$abc = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(xy + \frac{1}{xy}\right) =$$

$$= \left(xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\left(xy + \frac{1}{xy}\right) =$$

$$x^2y^2 + 1 + x^2 + y^2 + 1 + \frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2},$$

így a keresett, x és y-tól független különbség 4.

Megoldás MAPLE-lel: $a := x + \frac{1}{x}; b := y + \frac{1}{y}; c := xy + \frac{1}{xy};$
`expand`$(a^2 + b^2 + c^2 - abc)$;

4

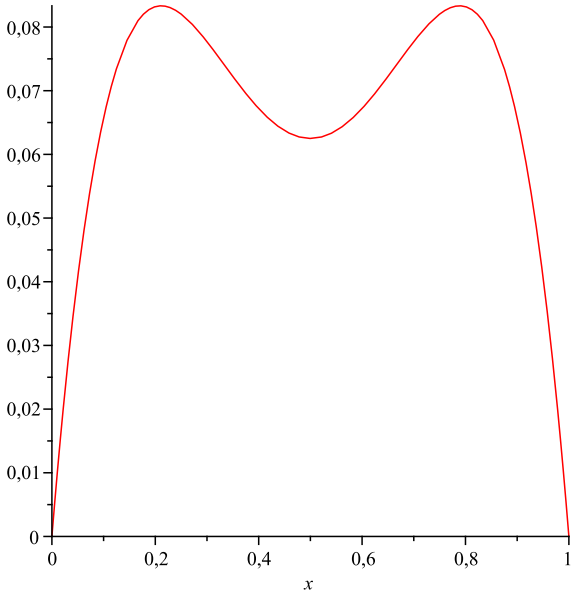
50. Feladat. (KöMaL B.3524.) Az x, y valós számok összege 1. Határozzuk meg $xy^4 + x^4y$ legnagyobb értékét.

Megoldásvázlat: Szorzattá alakítva a kifejezést, kapjuk, hogy

$$xy^4 + x^4y = xy((x + y)^3 - 3xy(x + y)) = xy(1 - 3xy).$$

Ez a függvény másodfokú xy-ban, a maximuma az $xy = \frac{1}{6}$-ban van, maximális értéke $\frac{1}{12}$. Az eredeti kifejezés maximuma sem lehet nagyobb $\frac{1}{12}$-nél, sőt ezt az értéket csak akkor veszi fel, ha az

$$x + y = 1, xy = \frac{1}{6}$$



1.30. ábra. Az $x(1-x)^4 + x^4(1-x)$ függvény grafikonja

egyenletrendszernek van valós megoldása. Könnyű számolás adja a két maximumhelyet:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.30 ábrát!

51. Feladat. (KöMaL B.4275.) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^6 - x^3 - 2x^2 - 1 = 2(x - x^3 + 1)\sqrt{x}.$$

Megoldásvázlat: Myilvánvaló, hogy a megoldásokat a nemnegatív valós számok között keressük. Legyen $y = \sqrt{x}$. Ezzel az új változóval egyenletünk

$$y^{12} + 2y^7 - y^6 - 2y^4 - 2y^3 - 2y - 1 = 0$$

alakot ölti. Vegyük észre, hogy

$$y^{12} - y^6 - 2y^3 - 1 = y^{12} - (y^3 + 1)^2 = (y^6 - y^3 - 1)(y^6 + y^3 + 1),$$

és mivel

$$2y^7 - 2y^4 - 2y = 2y(y^6 - y^3 - 1),$$

ezért a polinomot szorzattá tudjuk alakítani:

$$y^{12} + 2y^7 - y^6 - 2y^4 - 2y^3 - 2y - 1 = (y^6 - y^3 - 1)(y^6 + y^3 + 2y + 1) = 0.$$

Mivel a második tényezőben az összeadandók pozitívak vagy nem-negatívak, ezért elegendő az első tényező zérushelyeit vizsgálni. Legyen $z = y^3$, ekkor

$$z^2 - z - 1 = 0$$

és mivel z nemnegatív, ezért $z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, amiből

$$y = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, x = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$(y^{12} + 2y^7 - y^6 - 2y^4 - 2y^3 - 2y - 1)$;

$$(y^6 - y^3 - 1)(y^6 + y^3 + 2y + 1)$$

Lásd a 1.31 ábrát!

52. Feladat. (KöMaL B.4263.) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$x^3 + 4y = y^3 + 16x,$$

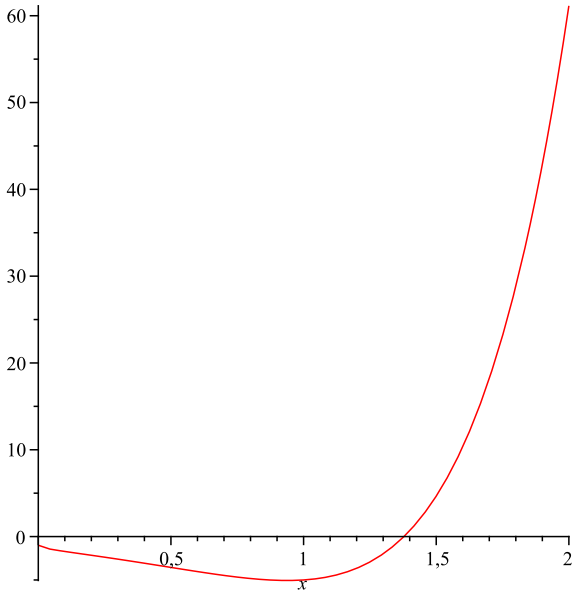
$$\frac{1+y^2}{1+x^2} = 5.$$

Megoldásvázlat: Az első egyenletből

$$x(x^2 - 16) = y(y^2 - 4),$$

a második egyenletből

$$y^2 - 4 = 5x^2$$



1.31. ábra. Az $x^6 - x^3 - 2x^2 - 1 - 2(x - x^3 + 1)\sqrt{x}$ függvény grafikonja

adódik. Ez utóbbit behelyettesítve az első egyenletbe, kapjuk, hogy

$$x(x^2 - 16) = 5x^2 y.$$

Ha $x = 0$, akkor $y = \pm 2$, ellenkező esetben

$$y = \frac{x^2 - 16}{5x},$$

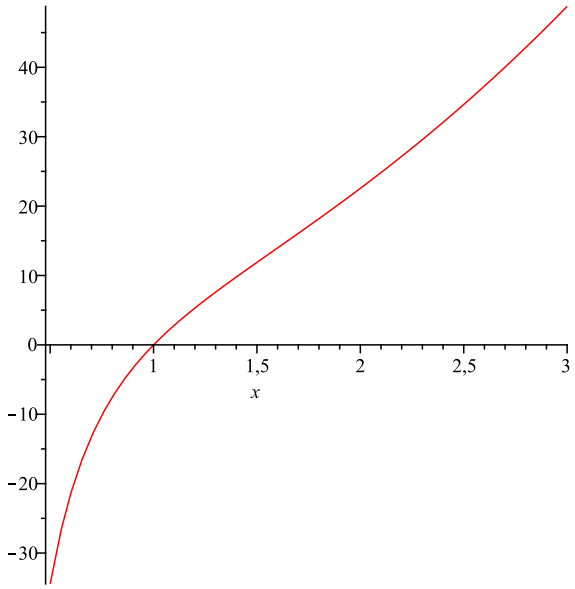
amiből

$$5x^2 + 4 = \left(\frac{x^2 - 16}{5x}\right)^2$$

egyenlethez jutunk. Ebből az $z = x^2$ helyettesítéssel a

$$124z^2 + 132z - 256 = 0$$

egyenletet kapjuk, aminek az egyik megoldása negatív, a másik $z = 1$. Ebből $x = \pm 1$ és $y = \pm 3$. Ellenőrzés után a következő számpárok a megoldásai az eredeti egyenletrend-



1.32. ábra. Az $5x^2 + 4 - \left(\frac{x^2-16}{5x}\right)^2$ függvény grafikonja az $0.5 \leq x \leq 3$ intervallumon

szernek:

$$(0, 2), (0, -2), (1, -3), (-1, 3).$$

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.32 és 1.33 ábrákat!

53. Feladat. (KöMaL B.3479.) Keressük meg a $6t^2 + 3s^2 - 4st - 8t + 6s + 5$ kifejezés minimumát.

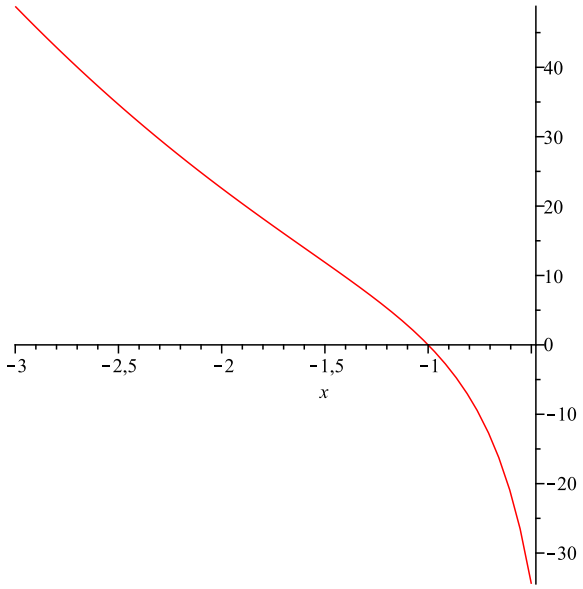
Megoldásvázlat: I. megoldás: Vegyük a t illetve s szerinti parciális deriváltakat, a kétváltozós függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a parciális deriváltak eltűnnek, ezért megoldandó a

$$12t - 4s - 8 = 0,$$

$$6s - 4t + 6 = 0$$

egyenletrendszer. Könnyű látni, hogy az egyenletrendszer megoldása $s = -\frac{5}{7}, t = \frac{3}{7}$.
II. megoldás: A

$$6t^2 + 3s^2 - 4st - 8t + 6s + 5$$



1.33. ábra. Az $5x^2+4-\left(\frac{x^2-16}{5x}\right)^2$ függvény grafikonja az $-3 \leq x \leq -0.5$ intervallumon

kifejezés felírható

$$3\left(s-\frac{2t-3}{3}\right)^2+\frac{14}{3}\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{8}{7}$$

alakban. Világos, hogy ez utóbbi kifejezés akkor lesz a legkisebb, ha

$$s=\frac{2t-3}{3}, t=\frac{3}{7},$$

vagyis

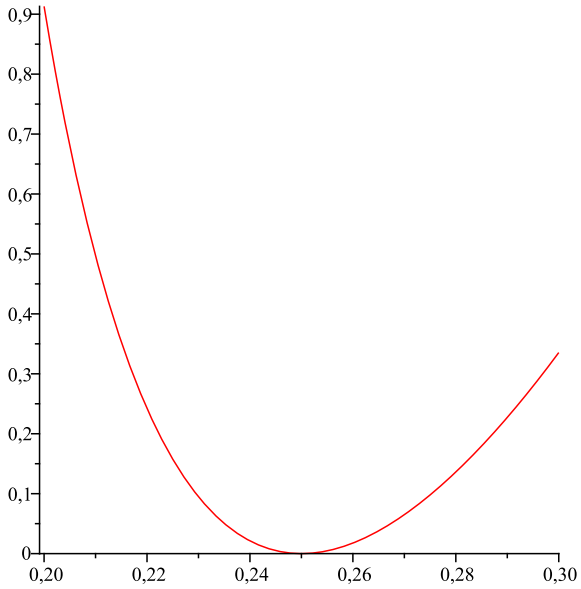
$$s=-\frac{5}{7}, t=\frac{3}{7}.$$

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(\{6s-4t=-6, 12t-4s=8\}, [s,t])$;

$$[[s=-5/7, t=3/7]]$$

54. Feladat. (KöMaL C.689.) Oldjuk meg az

$$x^{\log_2(16x^2)}-4x^{\log_2(4x)+1}-16x^{\log_2(4x)+2}+64x^3=0$$



1.34. ábra. Az $x^{\log_2(16x^2)} - 4x^{\log_2(4x)+1} - 16x^{\log_2(4x)+2} + 64x^3$ függvény grafikonja a $0.2 \leq x \leq 0.3$ intervallumon

egyenletet!

Megoldásvázlat: A logaritmus miatt $x > 0$. Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát $64x^3$-nal, és vezessük be az $y = \log_2 x$ változót. Ekkor $x = 2^y$, és ezekkel a jelölésekkel egyenletünk

$$2^{2y^2-y-6} - 2^{y^2-4} - 2^{y^2+y-2} + 1 = 0$$

alakú lesz. A bal oldalt szorzattá alakítva

$$2^{2y^2-y-6} - 2^{y^2-4} - 2^{y^2+y-2} + 1 = (2^{y^2-4} - 1)(2^{y^2+y-2} - 1) = 0$$

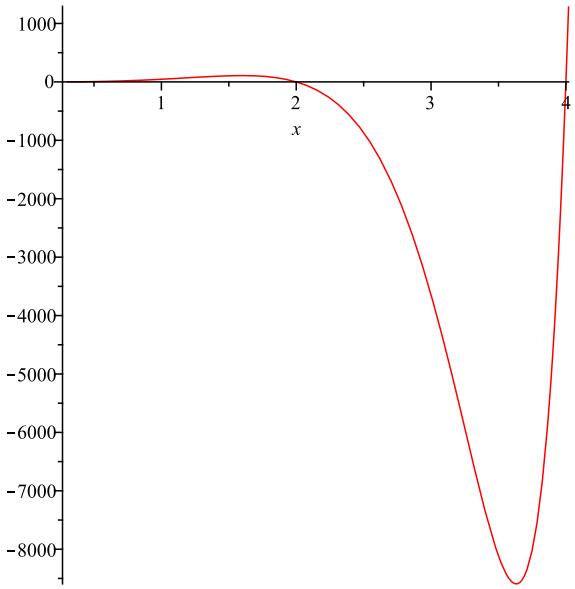
adódik. Ebből

$$y_1 = 1, y_2 = -2, y_3 = 2,$$

és

$$x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = \frac{1}{4}.$$

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.34 és 1.35 ábrákat!



1.35. ábra. Az $x^{\log_2(16x^2)} - 4x^{\log_2(4x)+1} - 16x^{\log_2(4x)+2} + 64x^3$ függvény grafikonja az $0.3 \leq x \leq 4.02$ intervallumon

55. Feladat. (KöMaL C.623.) Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$a^2b^2 - a^2 - ab + 1 = 0,$$

$$a^2c - ab - a - c = 0,$$

$$abc = -1.$$

Megoldásvázlat: A harmadik egyenletből kapjuk, hogy

$$ab = -\frac{1}{c}.$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$\frac{1}{c^2} - a^2 + \frac{1}{c} + 1 = 0$$

adódik. Ebből

$$a = \pm\frac{\sqrt{1+c+c^2}}{|c|}$$

következik (könnyen látható, hogy a négyzetgyök alatt mindig pozitív szám áll). Ezt a második egyenletbe behelyettesítve, kapjuk, hogy

$$\pm\frac{c}{|c|}\sqrt{1+c+c^2} = \frac{c+2}{c},$$

amiből négyzetre emeléssel és átrendezéssel kapjuk, hogy $c = -1$ és így $a = \pm 1$. A szóba jöhető megoldások

$$(a, b, c) = (1, 1, -1)$$

és

$$(a, b, c) = (-1, -1, -1),$$

amelyek közül csak a második elégíti ki az eredeti egyenletrendszert.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(\{abc = -1, a^2b^2 - a^2 - ab + 1 = 0, a^2c - ab - a - c = 0\}, [a, b, c])$;

$$[[a = -1, b = -1, c = -1]]$$

56. Feladat. (KöMaL C.502.) Az $x^2 - 2bx + b^2 - c^2 = 0$ egyenlet gyökeit jelölje x_1 és x_2. Mutassuk meg, hogy az $x^2 - 2b(b^2 + 3c^2)x + (b^2 - c^2)^3 = 0$ egyenlet gyökei x_1^3 és x_2^3.

Megoldásvázlat: Könnyen kiszámolható, hogy az

$$x^2 - 2bx + b^2 - c^2 = 0$$

egyenlet gyökei

$$x_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4b^2 + 4c^2}}{2} = b \pm c.$$

Tekintsük a

$$(x - (b + c)^3)(x + (b + c)^3)$$

szorzatot! Ekkor

$$(x - (b - c)^3)(x + (b + c)^3) = x^2 - ((b + c)^3 + (b - c)^3)x + (b + c)^3(b - c)^3$$

adódik, azonban

$$(b+c)^3+(b-c)^3=2b^3+6bc^2,$$

és

$$(b+c)^3(b-c)^3=(b^2-c^2)^3,$$

ami bizonyítja a feladat állítását.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(x^2-2bx+b^2-c^2=0,x)$;

$$[[-c+b,c+b]]$$

`solve`$(x^2-2b(b^2+3c^2)x+(b^2-c^2)^3=0,x)$;

$$[[b^3-3cb^2+3bc^2-c^3,b^3+3cb^2+3bc^2+c^3]]$$

57. Feladat. (AIME, 1983) Két komplex szám négyzetének összege 7, köbeik összege 10. Mennyi lehet a két szám összegének a maximuma?

Megoldásvázlat: A feltételekből az

$$x^2+y^2=7, x^3+y^3=10$$

egyenletrendszer adódik. Az első egyenletet átalakítva, az

$$(x+y)^2-2xy=7$$

egyenletet kapjuk, továbbá,

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=(x+y)(7-xy)=10.$$

Új változókat vezetünk be, legyen $a=x+y$ és $b=xy$. Ezekkel $a^2-2b=7$ és $a(7-b)=10$, vagyis $b=7-\frac{10}{a}$. Ezt behelyettesítve, kapjuk, hogy

$$a^2-2\left(7-\frac{10}{a}\right)=7,$$

amiből

$$a^2 + \frac{20}{a} = 21,$$

és

$$a^3 - 21a + 20 = 0.$$

Könnyű látni, hogy az $a = 1$ gyöke az egyenletnek, ezért

$$a^3 - 21a + 20 = (a-1)(a^2 + a - 20) = (a-1)(a+5)(a-4) = 0.$$

Így az $a = x + y$ legnagyobb értéke 4.

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$(a^3 - 21a + 20)$;

$$(a-1)(a+5)(a-4)$$

58. Feladat. (AIME, 1983) Mennyi a minimuma a

$$\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$$

kifejezésnek, ahol $0 < x < \pi$.

Megoldásvázlat: Világos, hogy

$$\frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x} = 9x \sin x + \frac{4}{x \sin x}.$$

A $0 < x < \pi$ intervallumban a sin föggvény pozitív, így alkalmazhatjuk a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget, amiből

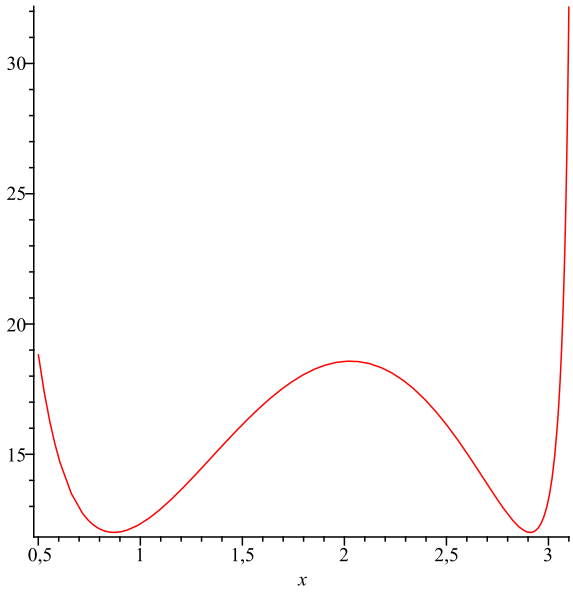
$$\frac{9x \sin x + \frac{4}{x \sin x}}{2} \geq \sqrt{9x \sin x \cdot \frac{4}{x \sin x}} = 6$$

adódik. Így a keresett minimum 12, feltéve, hogy a

$$9x \sin x = \frac{4}{x \sin x}$$

egyenlet megoldható, ami a folytonosság segítségével igazolható.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.36 ábrát!



1.36. ábra. A $\frac{9x^2 \sin^2 x+4}{x \sin x}$ függvény grafikonja

59. Feladat. (AIME, 1984) Mennyi a pontos értéke a következő kifejezésnek?

$$10 \operatorname{ctg} (\operatorname{arc ctg} 3 + \operatorname{arc ctg} 7 + \operatorname{arc ctg} 13 + \operatorname{arc ctg} 21)$$

Megoldásvázlat: Ismert, hogy

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

Jelölje $a = \operatorname{arc ctg} 3, b = \operatorname{arc ctg} 7, c = \operatorname{arc ctg} 13$ és $d = \operatorname{arc ctg} 21$. Ekkor

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{3}, \operatorname{tg} b = \frac{1}{7}, \operatorname{tg} c = \frac{1}{13}, \operatorname{tg} d = \frac{1}{21},$$

és felhasználva az addíciós formulát

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{21}} = \frac{1}{2},$$

és

$$\operatorname{tg}(c+d) = \frac{\frac{1}{13}+\frac{1}{21}}{1-\frac{1}{273}} = \frac{1}{8},$$

végül

$$\operatorname{tg}(a+b+c+d) = \frac{2}{3}.$$

A keresett érték $10 \cdot \frac{3}{2} = 15$.

Megoldás MAPLE-lel: `expand`(10ctg(arcctg 3 + arcctg 7 + arcctg 13 + arcctg 21));

$$15$$

60. Feladat. (AIME, 1986) Mennyi a

$$\sqrt[4]{x} = \frac{12}{7-\sqrt[4]{x}}$$

egyenlet gyökeinek az összege?

Megoldásvázlat: Új változót bevezetve, legyen $y = \sqrt[4]{x}$. Ekkor

$$y^2 - 7y + 12 = 0,$$

így $y_1 = 3, y_2 = 4$. Ezekből kapjuk, hogy $x_1 = 81, x_2 = 256$, és a gyökök összege: 337.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`($\sqrt[4]{x} - \frac{12}{7-\sqrt[4]{x}} = 0, x$);

$$81, 256$$

61. Feladat. (AIME, 1986) Mennyi $3x_4 + 2x_5$, ha x_1, x_2, x_3, x_4 és x_5 kielégíti az alábbi egyenletrendszert:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12,$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 24,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 48,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 96.$$

Megoldásvázlat: Összeadva az egyenleteket, kapjuk, hogy

$$6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 186,$$

és

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31.$$

Ha kivonjuk ezt az egyenlőséget a negyedik illetve ötödik egyenletekből, kapjuk, hogy $x_4 = 17$, illetve $x_5 = 65$, ezért $3x_4 + 2x_5 = 181$.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`($\{x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5 = 96, x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5 = 48,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 24, x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12,$
$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6\}, [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$);

$$[[x_1 = -25, x_2 = -19, x_3 = -7, x_4 = 17, x_5 = 65]]$$

62. Feladat. (AIME, 1988) Mennyi $(\log_2 x)^2$ ha $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$.

Megoldásvázlat: A következő átalakításokban a logaritmus függvény jó ismert azonosságait használjuk. A kezdő

$$\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$$

egyenletből adódik, hogy

$$\log_2(\log_8 x) = \frac{\log_2(\log_2 x)}{3},$$

amiből

$$3\log_2(\log_8 x) = \log_2(\log_2 x),$$

illetve

$$\log_2(\log_8 x)^3 = \log_2(\log_2 x)$$

következik, így

$$\log_2 x = (\log_8 x)^3.$$

Végül kapjuk, hogy

$$\log_2 x = \frac{(\log_2 x)^3}{27},$$

amiből, mivel $\log_2 x$ nem nulla, ezért

$$(\log_2 x)^2 = 27.$$

Megoldás MAPLE-lel: $a :=$`solve`$(\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x), x); (\log_2 a)^2;$

$$27$$

63. Feladat. (AIME, 1989) Mennyi $\sqrt{28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 + 1}$?

Megoldásvázlat: Általánosan oldjuk meg a feladatot, és bebizonyítjuk, hogy minden n pozitív egész szám esetén

$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} = n^2 + 3n + 1.$$

Könnyű látni, hogy $n(n+3) = n^2 + 3n$ és $(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2$. Ezért

$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} = \sqrt{(n^2+3n+1-1)(n^2+3n+1+1)+1} = n^2+3n+1,$$

a keresett végeredmény $28^2 + 3 \cdot 28 + 1 = 869$.

Megoldás MAPLE-lel: `sqrt`$(n(n+1)(n+2)(n+3)+1);$

$$\sqrt{(n^2+3n+1)^2}$$

64. Feladat. (AIME, 1997) Legyen

$$x = \frac{\sum_{n=1}^{44} \cos n^\circ}{\sum_{n=1}^{44} \sin n^\circ}.$$

Mennyi $100x$ egész része?

Megoldásvázlat: Kiírva az összegeket, kapjuk, hogy

$$x = \frac{\sum_{n=1}^{44} \cos n^\circ}{\sum_{n=1}^{44} \sin n^\circ} = \frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \ldots + \cos 44^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \ldots + \sin 44^\circ} =$$

$$\frac{\cos(45-1)^\circ + \cos(45-2)^\circ + \ldots + \cos(45-44)^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \ldots + \sin 44^\circ}$$

Felhasználjuk a

$$\cos(45^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha + \sin\alpha)$$

összefüggést, és így

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \ldots + \cos 44^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \ldots + \sin 44^\circ}{\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \ldots + \sin 44^\circ}.$$

Ebből adódik, hogy

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + x)$$

és $x = \sqrt{2} + 1 \approx 2.414....$ A keresett érték 241.

Megoldás MAPLE-lel: $\texttt{evalf}\left(100\frac{\texttt{sum}\cos\frac{k\pi}{180},k=1..44}{\texttt{sum}\sin\frac{k\pi}{180},k=1..44}\right)$;

241.42135623730950486

65. Feladat. (AIME, 2000, I) Tegyük fel, hogy x, y, z három pozitív valós szám, amelyekre

$$xyz = 1, x + \frac{1}{z} = 5, y + \frac{1}{x} = 29$$

teljesül. Ekkor $z + \frac{1}{y} = \frac{m}{n}$, ahol m és n relatív prím, pozitív egész számok. Mennyi $m + n$?

Megoldásvázlat: Tekintsük az

$$\left(x + \frac{1}{z}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right)\left(z + \frac{1}{y}\right) = 145\frac{m}{n}$$

szorzatot. A bal oldalt kifejtve, kapjuk, hogy

$$xyz + x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xyz} = 2 + 5 + 29 + \frac{m}{n}.$$

A fenti két egyenletből adódik, hogy $r = \frac{m}{n} = \frac{36}{144} = \frac{1}{4}$. Így $m + n = 5$.

Megoldás MAPLE-lel: $\texttt{solve}(\{xyz = 1, x + \frac{1}{z} = 5, y + \frac{1}{x} = 29\}, [x, y, z])$;

$$[[x = 1/5, y = 24, z = 5/24]]$$

66. Feladat. (AIME, 2000) A

$$\lg(2000xy) - (\lg x)(\lg y) = 4,$$

$$\lg(2yz) - (\lg y)(\lg z) = 1,$$

$$\lg(zx) - (\lg z)(\lg x) = 0$$

egyenletrendszernek két megoldása van, (x_1, y_1, z_1) és (x_2, y_2, z_2). Mennyi $y_1 + y_2$?

Megoldásvázlat: Felhasználva a logaritmus azonosságait, kapjuk, hogy

$$\lg x + \lg y - (\lg x)(\lg y) = 1 - \lg 2,$$

$$\lg y + \lg z - (\lg y)(\lg z) = 1 - \lg 2,$$

$$\lg z + \lg x - (\lg z)(\lg x) = 0.$$

Bevezetve az a, b, c új változókat a $\lg x, \lg y, \lg z$ ismeretlenek helyére és átrendezve az egyenleteket, kapjuk, hogy

$$ab - a - b + 1 = \lg 2,$$

$$bc - b - c + 1 = \lg 2,$$

és

$$ac - a - c + 1 = 1.$$

Alakítsuk szorzattá a bal oldalakat, ekkor adódik a következő egyenletrendszer:

$$(a-1)(b-1) = \lg 2,$$

$$(b-1)(c-1) = \lg 2,$$

$$(a-1)(c-1) = 1.$$

Összeszorozva az egyenleteket, majd gyököt vonva

$$(a-1)(b-1)(c-1) = \pm \lg 2,$$

így $b-1=\pm\lg 2$ és $\lg y=b=\pm\lg 2+1$. Ebből $y_1=20, y_2=5$, azaz $y_1+y_2=25$.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`($\{ab-a-b+1=\lg 2, ac-a-c+1=1, bc-b-c+1=\lg 2\}, [a,b,c]$);

$$[[a=0, b=\frac{\ln 10-\ln 2}{\ln 10}, c=0], [a=2, b=\frac{\ln 2+\ln 10}{\ln 10}, c=2]]$$

67. Feladat. (AIME, 2000, II) Ha

$$\frac{2}{\log_4 2000^6}+\frac{3}{\log_5 2000^6}$$

felírható $\frac{m}{n}$ alakban, ahol m és n pozitív egész számok, akkor mennyi $m+n$?

Megoldásvázlat: Könnyű látni, hogy

$$\frac{2}{\log_4 2000^6}+\frac{3}{\log_5 2000^6}=\frac{\log_4 16}{\log_4 2000^6}+\frac{\log_5 125}{\log_5 2000^6}=$$

$$\frac{\lg 16}{\lg 2000^6}+\frac{\lg 125}{\lg 2000^6}=\frac{\lg 2000}{\lg 2000^6}=\frac{1}{6},$$

és a keresett összeg 7.

Megoldás MAPLE-lel: `simplify`($\frac{2}{\log_4 2000^6}+\frac{3}{\log_5 2000^6}$);

$$\frac{1}{6}$$

68. Feladat. (AIME, 2000, II) A

$$2000x^6+100x^5+10x^3+x-2=0$$

egyenletnek pontosan két valós gyöke van, amelyek közül az egyik $\frac{m+\sqrt{n}}{r}$ alakú, ahol m,n,r egészek, m és r relatív prímek, és $r>0$. Mennyi $m+n+r$?

Megoldásvázlat: Megpróbáljuk faktorizálni a hatodfokú polinomot:

$$2000x^6-2+x(100x^4+10x^2+1)=2(1000x^6-1)+x(100x^4+10x^2+1).$$

Vegyük észre, hogy

$$1000x^6 - 1 = (10x^2 - 1)(100x^4 + 10x^2 + 1),$$

és így

$$2000x^6 + 100x^5 + 10x^3 + x - 2 = (20x^2 + x - 2)(100x^4 + 10x^2 + 1).$$

Világos, hogy a negyedfokú faktor pozitív minden x valós számra, ezért az eredeti egyenletünk valós gyökei

$$\frac{-1 \pm \sqrt{161}}{40},$$

vagyis $m + n + r = 200$.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(2000x^6 + 100x^5 + 10x^3 + x - 2 = 0, x)$;

$$-\frac{1}{40} + \frac{1}{40}\sqrt{161}, -\frac{1}{40} - \frac{1}{40}\sqrt{161}, -\frac{1}{10}\sqrt{-5 + 5I\sqrt{3}},$$

$$-\frac{1}{10}\sqrt{-5 - 5I\sqrt{3}}, \frac{1}{10}\sqrt{-5 - 5I\sqrt{3}}, \frac{1}{10}\sqrt{-5 + 5I\sqrt{3}}$$

69. Feladat. (AIME, 2005, I) Jelölje P az $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = 2005$ polinom nem-valós gyökeinek a szorzatát. Mennyi $[P]$?

Megoldásvázlat: Az egyenletből adódik, hogy

$$(x - 1)^4 = 2006.$$

Tehát az egyenletünk gyökei:

$$x_1 = 1 + \sqrt[4]{2006}, x_2 = 1 - \sqrt[4]{2006}, x_3 = 1 + i\sqrt[4]{2006}, x_4 = 1 - i\sqrt[4]{2006}.$$

Ezért

$$[P] = [1 + \sqrt{2006}] = 45.$$

Megoldás MAPLE-lel: `a:=solve`$(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 2005, x)$;

$$a := 2006^{1/4} + 1, I2006^{1/4} + 1, -2006^{1/4} + 1, -I2006^{1/4} + 1$$

`expand`$(a[2]a[4])$;

$$\sqrt{2006}+1$$

70. Feladat. (AIME, 2005,II) Legyen

$$x=\frac{4}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt[8]{5}+1)(\sqrt[16]{5}+1)}.$$

Mennyi $(x+1)^{48}$?

Megoldásvázlat: Világos, hogy

$$x=\frac{4(\sqrt[16]{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt[8]{5}+1)(\sqrt[16]{5}+1)(\sqrt[16]{5}-1)}.$$

Az $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ azonosságot felhasználva, a nevező 4, ezért

$$x=\sqrt[16]{5}-1.$$

Ebből következik, hogy $(x+1)^{48}=125$.

Megoldás MAPLE-lel: $x:=\frac{4}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt[8]{5}+1)(\sqrt[16]{5}+1)}$;

$$x := 0.1058230170$$

$(x+1)^{48}$;

$$124.9999998$$

71. Feladat. (AIME, 2006, I) Mennyi azon x-ek összege, amelyre

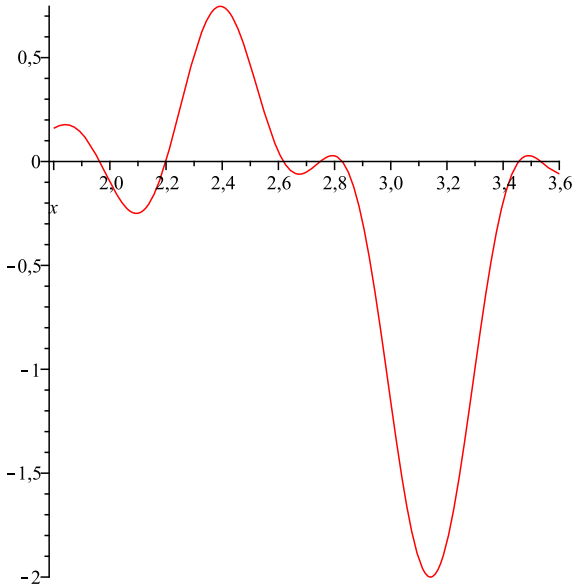
$$\cos^3 3x+\cos^3 5x=8\cos^3 4x\cos^3 x$$

teljesül, ahol az x szöget fokokban mérjük, és $100<x<200$.

Megoldásvázlat: Vegyük észre, hogy

$$2\cos 4x\cos x=\cos 5x+\cos 3x.$$

A fenti összefüggést használva, és bevezetve az $a=\cos 3x, b=\cos 5x$ változókat, a



1.37. ábra. A $\cos 3x \cos 5x(\cos 3x + \cos 5x)$ függvény grafikonja az $[1.8, 3.6]$ intervallumon

következő egyenlet adódik:

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

Ebből $ab(a+b) = 0$, vagyis $\cos 3x = 0$ vagy $\cos 5x = 0$ vagy $\cos 3x + \cos 5x = 0$. Azonban

$$\cos 3x + \cos 5x = 2\cos x \cos 4x = 0,$$

így x lehetséges értékei: $x \in \{150, 126, 162, 198, 112.5, 157.5\}$, a keresett összeg 906.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.37 ábrát!

72. Feladat. (AIME, 2007, I) Adott a $z = 9 + bi$ komplex szám, ahol b egy pozitív valós szám, i az imaginárius egység. Tudjuk, hogy z^2 és z^3 képzetes részei megegyeznek. Mennyi b?

Megoldásvázlat: Ha z^2 és z^3 képzetes részei megegyeznek, akkor $z^3 - z^2$ valós szám. A

$z^3 - z^2 = z^2(z-1) = (81 + 18bi - b^2)(8 + bi) = 648 + 144bi - 8b^2 + 81bi - 18b^2 - b^3 i =$

$$= 648 - 26b^2 + (225b - b^3)i$$

szám valós, vagyis $225b - b^3 = 0$, amiből $b = -15, 0, 15$ következik, azonban b pozitivitása miatt $b = 15$.

Megoldás MAPLE-lel: `expand`$((9 + Ib)^3 - (9 + Ib)^2)$; `factor`$(225b - b^3)$;

$$-b(b - 15)(b + 15)$$

73. Feladat. (AIME, 2008, I) Melyik az a pozitív egész n, amelyre

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}$$

teljesül?

Megoldásvázlat: Ismert összefüggés, hogy

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Ennek az összefüggésnek a kétszeri alkalmazásával:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \operatorname{arctg}\frac{7}{11}$$

és

$$\operatorname{arctg}\frac{7}{11} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \operatorname{arctg}\frac{23}{24}$$

következik. Felhasználva ezeket az értékeket, kapjuk, hogy

$$\operatorname{arctg}\frac{23}{24} + \operatorname{arctg}\frac{1}{n} = \operatorname{arctg}1.$$

Az addíciós képletet használva adódik, hogy

$$\frac{\frac{23}{24} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{23}{24n}} = 1,$$

amiből $n = 47$.

Megoldás MAPLE-lel: $a := \tan(\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{3} - \arctan\frac{1}{4} - \arctan\frac{1}{5})$;

$$\frac{-23 + 24\tan\frac{\pi}{4}}{24 + 23\tan\frac{\pi}{4}}$$

74. Feladat. (AIME, 2010, I) Jelölje (a, b, c) az

$$x^3 - xyz = 2, y^3 - xyz = 6, z^3 - xyz = 20$$

egyenletrendszer valós megoldását. Az $a^3 + b^3 + c^3$ lehetséges legnagyobb értékét $\frac{m}{n}$ alakban tudjuk felírni, ahol m és n relatív prím pozitív egészek. Mennyi $m + n$?

Megoldásvázlat: Legyen (a, b, c) egy lehetséges megoldása az egyenletrendszernek. Az egyenleteket összeadva adódik, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 = 28 + 3abc.$$

Jelölje t az abc szorzatot, ekkor

$$a = \sqrt[3]{t+2}, b = \sqrt[3]{t+6}, c = \sqrt[3]{t+20},$$

amiből

$$t = \sqrt[3]{t+2}\sqrt[3]{t+6}\sqrt[3]{t+20},$$

azaz

$$t^3 = (t+2)(t+6)(t+20),$$

és végül

$$28t^2 + 172t + 240 = 0$$

következik. A másodfokú egyenlet megoldásai: $-4, -\frac{15}{7}$. Ebből a keresett legnagyobb érték: $28 - 3 \cdot \frac{15}{7} = \frac{151}{7}$, és $m + n = 158$.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(t^3 - (t+2)(t+6)(t+20) = 0, t)$;

$$[[-4, -15/7]]$$

75. Feladat. (AIME, 2011, I) Tegyük fel, hogy $x \in [0, \pi/2]$ és

$$\log_{24 \sin x}(24 \cos x) = \frac{3}{2}.$$

Mennyi $24\mathrm{ctg}^2 x$?

Megoldásvázlat: A kezdőfeltételből kapjuk, hogy

$$(24 \sin x)^{\frac{3}{2}} = 24 \cos x.$$

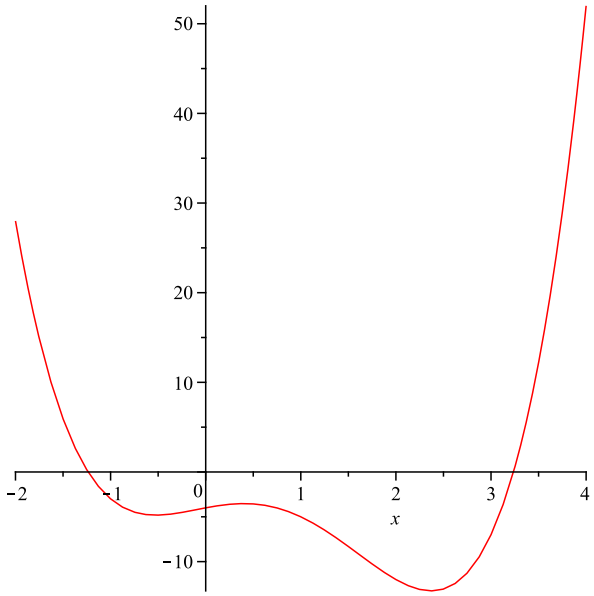
Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, így adódik, hogy

$$24 \sin^3 x + \sin^2 x - 1 = 0.$$

A $\sin x$-ben harmadfokú polinom könnyen szorzattá alakítható:

$$24 \sin^3 x + \sin^2 x - 1 = (3 \sin x - 1)(8 \sin^2 x + 3 \sin x + 1),$$

továbbá az x-re vonatkozó feltétel miatt a négyzetes faktor pozitív, így



1.40. ábra. Az $(x^2-x-1)^2-x^3-5$ függvény grafikonja

Könnyű látni, hogy a szorzat első tényezője $(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ pozitív minden valós x-re, a második tényező zérushelyei $1\pm\sqrt{5}$. Ezek a megoldások adják az eredeti egyenlet összes megoldását.

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$\big((x^2-x+1)^2-x^3-5\big)$;

$$(x^2-x+1)(x^2-2x-4)$$

A feladat ezek után könnyen befejezhető. Lásd a 1.40 ábrát!

78. Feladat. (KöMaL B.4467.) Oldjuk meg az

$$\sqrt{x}=x^2-3x+1+|x-1|$$

egyenletet!

Megoldásvázlat: A megoldásokat az $x\geq 0$ feltétel mellett keressük. Az abszolút érték miatt két esetet különböztetünk meg. Ha $x>1$, akkor egyenletünk a következő alakú:

$$\sqrt{x}=x^2-2x,$$

amiből, négyzetre emelés és átrendezés után

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x = 0$$

adódik. A negyedfokú polinomot könnyű szorzattá alakítani:

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x = x(x-1)(x^2 - 3x + 1),$$

azonban $x > 1$, így a szóba jöhető gyökök az $x^2 - 3x + 1 = 0$ egyenlet gyökei, azaz

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ezen gyökök közül csak a $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ felel meg az $x > 1$ feltételnek, és valóban ki is elégíti az egyenletet.

A második esetben $x \leq 1$. Ekkor egyenletünk

$$\sqrt{x} = x^2 - 4x + 2$$

alakú. Négyzetre emelés, majd átrendezés után a következő negyedfokú egyenletet kapjuk:

$$x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 17x + 4 = 0.$$

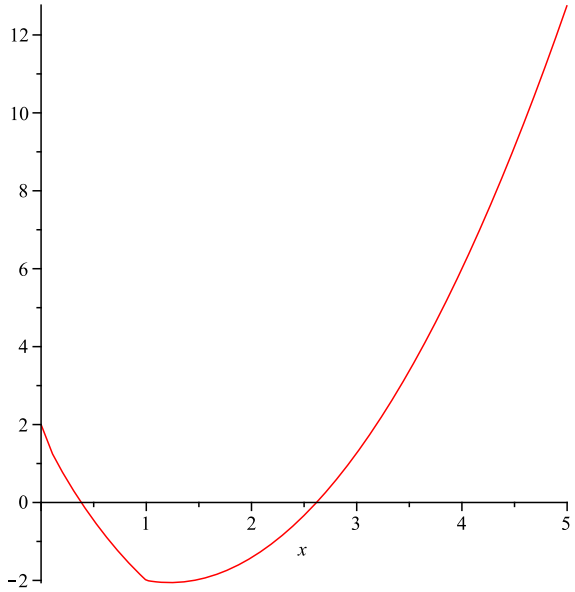
Könnyű látni, hogy az 1 és a 4 gyöke a bal oldalon álló polinomnak, ezért

$$x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 17x + 4 = (x-1)(x-4)(x^2 - 3x + 1) = 0.$$

Az $x = 1$ nem gyöke az eredeti egyenletnek, és hasonlóan a 4 sem. A másodfokú egyenletnek csak az egyik gyöke, $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, tesz eleget az $x \leq 1$ feltételnek és elégíti ki az eredeti egyenletet.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 1.41 ábrát! Használjuk a következő parancsot: `solve`$(x^2 - 3x + 1 + |x-1| - \sqrt{x} = 0)$! Az eredmény

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})^2.$$



1.41. ábra. Az $x^2 - 3x + 1 + |x - 1| - \sqrt{x}$ függvény grafikonja

2. fejezet

Egyenlőtlenségek

1. Feladat. (KöMaL Gy.3166.) Melyik szám a nagyobb: 1997^{1999} vagy 1999^{1997}?

Megoldásvázlat: Ismeretes, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$, minden pozitív n egész számra. Ebből következik, hogy $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n < 9$ is teljesül minden n természetes számra. Ezért

$$\left(\frac{1999}{1997}\right)^{1997} = \left(1+\frac{2}{1997}\right)^{1997} < 9$$

teljesül, a másik oldalon 1997^2 áll, vagyis az első szám a nagyobb.

Megoldás MAPLE-lel: $1997^{1999} - 1999^{1997}$;

$$285595179412938389\ldots096572256081334,$$

tehát az 1997^{1999} szám a nagyobb.

2. Feladat. (KöMaL Gy.3145.) Oldjuk meg az

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{11}}+\frac{1}{x^{13}} \le \frac{7}{x^7}$$

egyenlőtlenséget!

Megoldásvázlat: Legyen $y=\frac{1}{x}$. Ekkor egyenlőtlenségünk

$$y^{13}+y^{11}+y^9-6y^7+y^5+y^3+y \le 0$$

alakú. Az $y = 0$ és az $y = 1$ láthatóan gyöke a bal oldalon álló polinomnak. Ezért

$$y^{13} + y^{11} + y^9 - 6y^7 + y^5 + y^3 + y =$$

$$= y(y-1)(y^{11} + y^{10} + 2y^9 + 2y^8 + 3y^7 + 3y^6 - 3y^5 - 3y^4 - 2y^3 - 2y^2 - y - 1),$$

és tovább kísérletezve az $y = -1$ illetve $y = 1$ gyökökkel, a 11-ed fokú polinomot faktorizálhatjuk a következő módon:

$$y^{11} + y^{10} + 2y^9 + 2y^8 + 3y^7 + 3y^6 - 3y^5 - 3y^4 - 2y^3 - 2y^2 - y - 1 =$$

$$= (y-1)(y+1)^2(y^8 + 3y^6 + 6y^4 + 3y^2 + 1).$$

Összefoglalva, egyenlőtlenségünk a következő alakú

$$y^{13} + y^{11} + y^9 - 6y^7 + y^5 + y^3 + y = y(y-1)^2(y+1)^2(y^8 + 3y^6 + 6y^4 + 3y^2 + 1) \leq 0.$$

Mivel a 8-ad fokú faktor mindig pozitív, a megoldások halmaza könnyen leolvasható: $y = 1, y = -1$ vagy $y < 0$, azaz $x = 1, x = -1$ vagy $x < 0$.

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$\big(y^{13} + y^{11} + y^9 - 6y^7 + y^5 + y^3 + y\big)$;

$$y(y^8 + 3y^6 + 6y^4 + 3y^2 + 1)(y-1)^2(y+1)^2$$

Megjegyzés: Lásd a 2.1 ábrát!

3. Feladat. (KöMaL C.498.) Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget: $x^3+1 > x^2+x$.

Megoldásvázlat: Az egyenlőtlenséget átrendezve, meg kell mutatnunk, hogy $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$. Könnyű szorzattá alakítani a bal oldalon álló polinomot:

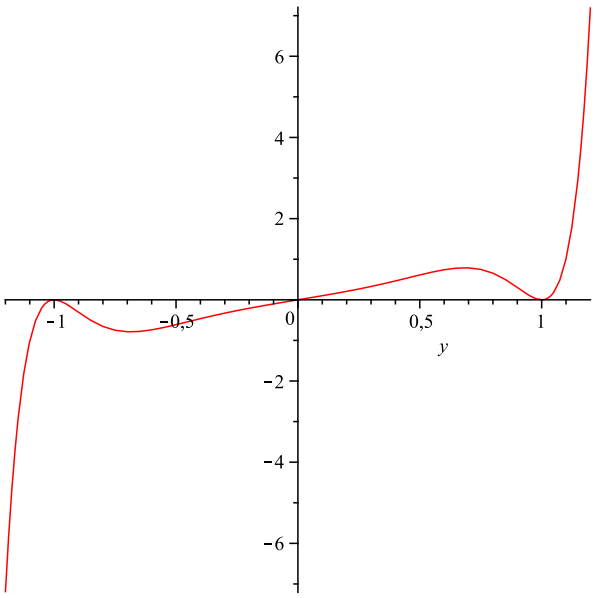
$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1).$$

A feladat megoldása $\{x \in \mathbb{R}, x > -1, x \neq 1\}$.

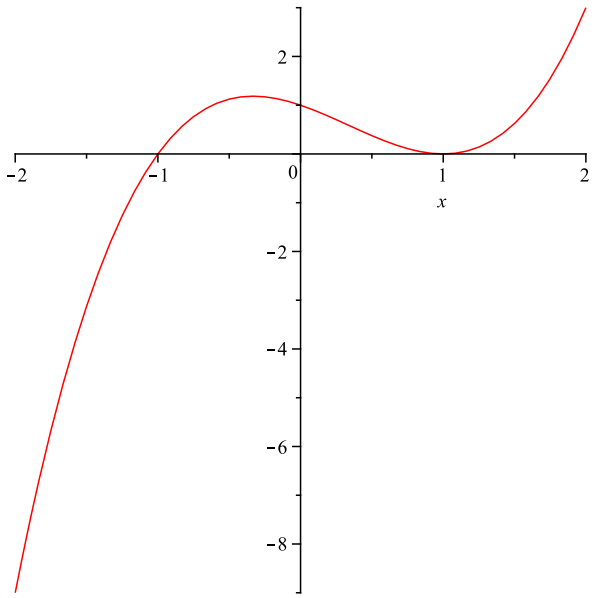
Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 2.2 ábrát!

4. Feladat. (KöMaL C.848.) Határozzuk meg a

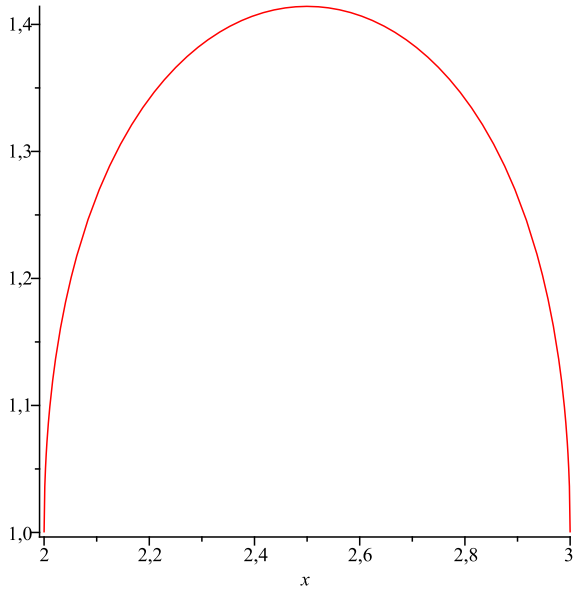
$$\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x}$$



2.1. ábra. Az $x^{13} + x^{11} + x^9 - 6x^7 + x^5 + x^3 + x$ függvény grafikonja



2.2. ábra. Az $x^3 - x^2 - x + 1$ függvény grafikonja



2.3. ábra. A $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}$ függvény grafikonja

kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét!

Megoldásvázlat: A függvény csak pozitív értékeket vesz fel, ezért a pontosan ott veszi fel a szélsőértékeit, ahol a négyzete. Ezért elegendő a

$$(\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x})^2 = 1+2\sqrt{x-2}\sqrt{3-x}$$

függvényt vizsgálni. Ennek a függvénynek nyilvánvalóan minimuma van a $x=2$ és $x=3$ pontokban. A maximum megállapításához tekintsük a számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{(x-2)(3-x)} \le \frac{x-2+3-x}{2} = \frac{1}{2},$$

és pontosan akkor van egyenlőtlenség, ha $x-2=3-x$, azaz $x=2.5$.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 2.3 ábrát!

5. Feladat. (KöMaL B.3948.) A valós a, b számokra teljesül, hogy $a^2+4b^2=4$. Milyen nagy lehet $3a^5b-40a^3b^3+48ab^5$?

Megoldásvázlat: Ha a $c = a/2$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor a feltétel

$$c^2 + b^2 = 1$$

alakba írható át, a feladatban szereplő kifejezés pedig

$$96c^5b - 320c^3b^3 + 96cb^5 = 32cb(3c^4 - 10c^2b^2 + 3b^4) =$$

$$= 32cb(3(c^2 + b^2)^2 - 16c^2b^2) = 32cb(3 - 16c^2b^2).$$

Bevezetve az $x = 4bc$ változót, a

$$8x(3 - x^2)$$

kifejezés maximumát kell vizsgálni, ahol $|x| \leq 2$, mivel $\pm bc \leq b^2 + c^2$. Legyen

$$f(x) = 24x - 8x^3.$$

A polinomnak maximuma lehet a határokon ($x = \pm 2$ helyeken) vagy ott ahol az első derivált értéke 0, azaz

$$24 - 24x^2 = 0$$

egyenlet megoldásainál, amelyek $x = \pm 1$. A második derivált $-48x$, ezért a függvénynek (lokális) maximuma van az $x = 1$ helyen és (lokális) minimuma van az $x = -1$ helyen.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 2.4 ábrát!

6. Feladat. (KöMaL B.3944.) Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azokat az (x, y) valós számpárokat, amelyekre

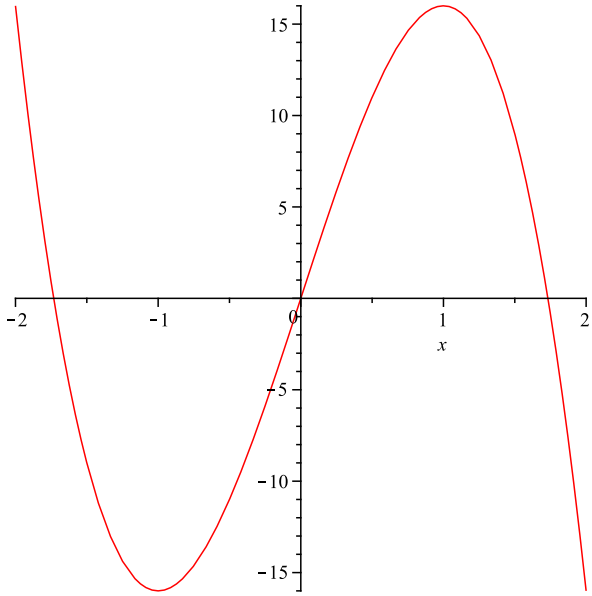
$$\frac{x}{y} + \frac{1}{x} + y \geq \frac{y}{x} + \frac{1}{y} + x.$$

Megoldásvázlat: Az osztás miatt $x \neq 0$ és $y \neq 0$. Átrendezve az egyenletet, kapjuk, hogy

$$\frac{x}{y} + \frac{1}{x} + y - \frac{y}{x} - \frac{1}{y} - x \geq 0.$$

Ezt a kifejezést szorzattá alakítva

$$\frac{(y - x)(x - 1)(y - 1)}{xy} \geq 0$$



2.4. ábra. A $8x(3-x^2)$ függvény grafikonja

adódik.

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$(y/x+1/y+x-x/y-1/x-y)$;

$$(y-1)(-1+x)(x-y)/(xy)$$

7. Feladat. (KöMaL C.542.) Milyen pozitív egész n-ekre teljesül az

$$(n-2)(2+2^2+\ldots+2^n) < n\cdot 2^n$$

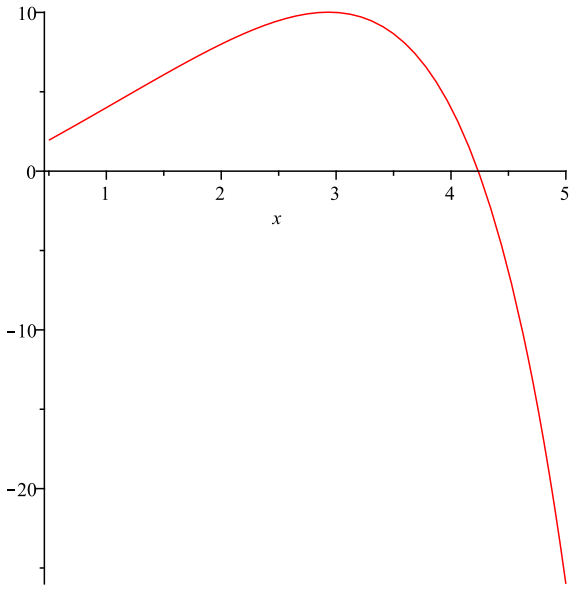
egyenlőtlenség?

Megoldásvázlat: A mértani sor összegképletéből

$$2+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-2,$$

így az

$$(n-2)(2^{n+1}-2) < n\cdot 2^n$$



2.5. ábra. Az $2^{x+2} + 2x - x \cdot 2^x - 4$ függvény grafikonja

egyenlőtlenséget kell megoldani. A bal oldalt kifejtve

$$n \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2} - 2n + 4 < n \cdot 2^n,$$

és

$$n \cdot 2^n + 4 < 2^{n+2} + 2n$$

adódik. Felhasználjuk a jól ismert és teljes indukcióval könnyen bizonyítható $2n \leq 2^n, n = 1, 2, 3, \ldots$ egyenlőtlenséget. Ezzel egyenlőtlenségünk

$$n \cdot 2^n + 4 < 2^{n+2} + 2^n = 5 \cdot 2^n,$$

alakú, amiből $n = 1, 2, 3, 4$ értékek lehetségesek, amelyek eleget is tesznek az eredeti egyenlőtlenségnek.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 2.5 ábrát!

8. Feladat. (AIME, 2000, II) A z komplex számra teljesül, hogy

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos 3^\circ.$$

Határozzuk meg azt a legkisebb egész számot, amelyik nagyobb, mint $z^{2000} + \frac{1}{z^{2000}}$.

Megoldásvázlat: A másodfokú egyenlet megoldásai:

$$z_{1,2} = \cos 3^\circ \pm i \cdot \sin 3^\circ.$$

A szimmetria miatt elegendő a

$$z = \cos 3^\circ + i \cdot \sin 3^\circ$$

számmal foglalkozni. Ekkor a Moivre-képletet használva kapjuk, hogy

$$z^{2000} + \frac{1}{z^{2000}} = 2 \cos 6000^\circ.$$

Mivel $\cos 6000^\circ = -\frac{1}{2}$, ezért a keresett legkisebb egész a 0.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(z + \frac{1}{z} - 2\cos\frac{\pi}{60} = 0, z)$;

$$\cos\frac{\pi}{60} + \sqrt{\left(\cos\frac{\pi}{60}\right)^2 - 1}, \cos\frac{\pi}{60} - \sqrt{\left(\cos\frac{\pi}{60}\right)^2 - 1}$$

9. Feladat. (KöMaL C.873.) Milyen valós x-ek esetén lesz a

$$\sqrt{2\sin x} - \sin x$$

kifejezés értéke a legnagyobb?

Megoldásvázlat: Vezessük be az

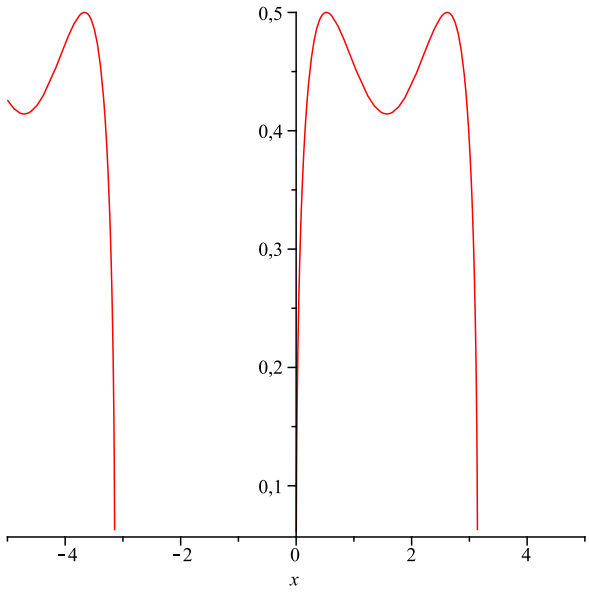
$$y = \sqrt{2\sin x}$$

új változót, amellyel az eredeti függvényünk

$$y - \frac{1}{2}y^2$$

alakú lesz. Ez a másodfokú függvény az $y = 1$ pontban veszi fel a maximális értékét, ezért

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$



2.6. ábra. A $\sqrt{2\sin x} - \sin x$ függvény grafikonja

Ezért függvényünk értéke a

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$$

helyeken lesz a legnagyobb ($k, l \in \mathbb{Z}$), ez az érték $\frac{1}{2}$.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 2.6 ábrát!

3. fejezet

Számelméleti problémák

1. Feladat. (KöMaL C.1115.) Mutassuk meg, hogy minden n természetes szám esetén az

$$n^2(n^2-1)(n^2-n-2)$$

osztható 48-cal.

Megoldásvázlat: Elegendő megmutatni, hogy a kifejezés osztható 3-mal és 16-tal. Vegyük észre, hogy $n^2-1=(n-1)(n+1)$ és $n^2-n-2=(n-2)(n+1)$, ezért

$$n^2(n^2-1)(n^2-n-2)=(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2.$$

A szorzatban 4 egymás utáni egész szám szorzata szerepel, így az osztható $4!=24$-gyel, továbbá n és $n+1$ közül valamelyik páros, így szorzatunk osztható 48-cal.

Megoldás MAPLE-lel: `factor` $\big(n^2(n^2-1)(n^2-n-2)\big)$;

$$(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2$$

2. Feladat. (KöMaL C.3422.) Igazoljuk, hogy $7^{2001}-3^{3335}$ osztható 100-zal.

Megoldásvázlat: Könnyen ellenőrizhető, hogy a 2001 és 3335 legnagyobb közös osztója 667. Ezért

$$7^{2001}-3^{3335}=(7^3)^{667}-(3^5)^{667}$$

osztható az alapok különbségével, $7^3-3^5=100$-zal.

Megoldás MAPLE-lel: $7^{2001} - 3^{3335}$;

$$1099456543933\ldots37230297195618300.$$

Megjegyzés: Látható, hogy a feladat átfogalmazható az alábbi módon. Igazoljuk, hogy a $7^{2001} - 3^{3335}$ kifejezés 5-rendje kettő!

3. Feladat. (KöMaL Gy.3142.) Melyik az a legkisebb 28-cal osztható pozitív egész szám, amelynek 10-es számrendszerbeli alakja 28-ra végződik és számjegyeinek összege 28?

Megoldásvázlat: A számot $100k + 28$ alakban keressük, mert az utolsó két számjegye 28. A szám osztható 28-cal, így 7-tel is, vagyis $100k$-nak és k-nak is oszthatónak kell lenni 7-tel. $100k$ számjegyeinek az összege 18, ezért a $100k$ osztható 9-cel, és k is osztható 9-cel. Kaptuk, hogy k osztható 7-tel és 9-cel, vagyis 63-mal. Nézzük az első néhány ilyen számot:

$$6328, 12628, 18928, \ldots.$$

Az első, vagyis a legkisebb ilyen szám a 18928.

Megoldás MAPLE-lel: `for` a `from` 1 `to` 9 `do; for` b `from` 0 `to` 9 `do; for` c `from` 0 `to` 9 `do`;
$k := a10^4 + b10^3 + c10^2 + 28$;
`if 'and'('mod'(k,` 28`) = 0, a+b+c =` 18`) then print(`k`); end if; end do; end do; end do`;

18928

37828

56728

69328

75628

81928

88228

94528

4. Feladat. (KöMaL B.3353.) Mennyi

$$\left[2\sqrt{1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+1998\cdot 1999\cdot 2000}\right]$$

értéke (az egész rész jele [ ])?

Megoldásvázlat: Foglalkozzunk a gyökjel alatt álló számmal.

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+1998\cdot 1999\cdot 2000=\sum_{i=2}^{1999}(i-1)i(i+1)=\sum_{i=2}^{1999}i^3-\sum_{i=2}^{1999}i.$$

Felhasználva a

$$\sum_{i=1}^{k}i^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

illetve

$$\sum_{i=1}^{k}i=\frac{k(k+1)}{2}$$

formulákat, amelyek könnyen bizonyíthatóak teljes indukcióval, adódik, hogy

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+1998\cdot 1999\cdot 2000=\frac{1999^2\cdot 2000^2}{4}-\frac{1999\cdot 2000}{2},$$

és

$$4(1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+1998\cdot 1999\cdot 2000)=1999^2\cdot 2000^2-2\cdot 1999\cdot 2000.$$

A keresett érték: $1999\cdot 2000-1=3997999$.

Megoldás MAPLE-lel: `floor(2 sqrt(sum` $(i\cdot(i+1)\cdot(i+2), i=1..1998)))$

$$=3997999$$

Megjegyzés: Jakob Bernoullitól (1654-1705) származó klasszikus eredmény, hogy

$$1^k+2^k+\ldots+(x-1)^k=\frac{1}{k+1}\left(B_{k+1}(x)-B_{k+1}(0)\right),$$

ahol $B_{k+1}(X)$ a $(k+1)$. Bernoulli polinomot jelenti, amelynek foka $k+1$.

5. Feladat. (KöMaL C.490.) Bizonyítsuk be, hogy két páratlan négyzetszám különbsége osztható 8-cal.

Megoldásvázlat: $(2k+1)^2-(2l+1)^2=4(k^2-l^2)+4(k-l)=4(k-l)(k+l+1)$. Mivel $k-l$ és $k+l$ paritása ugyanolyan, $k-l$ és $k+l+1$ közül valamelyik páros, azaz a szorzat osztható 8-cal.

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$\big((2k+1)^2-(2l+1)^2\big)$;

$$4(k+1+l)(k-l)$$

6. Feladat. (KöMaL C.497.) Van-e olyan pozitív n egész szám, amelyre $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$, azaz $n!$ pontosan 100 nullára végződik?

Megoldásvázlat: Legendre formulája szerint

$$\mathrm{ord}_5(n!)=\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{25}\right]+\left[\frac{n}{125}\right]+\dots.$$

Meg kell oldani az

$$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{25}\right]+\left[\frac{n}{125}\right]+\ldots=100$$

egyenletet a pozitív egész számok körében. $n=400$ esetén a fenti összeg 99, $n=405,406,407$, 408, 409 esetén 100.

Megoldás MAPLE-lel: `ifactor`(400!);

$$2^{397}3^{196}5^{99}\cdot\dots\cdot 397$$

`ifactor`(401!);

$$2^{397}3^{196}5^{99}\cdot\dots\cdot 401$$

`ifactor`(405!);

$$2^{400}3^{201}5^{100}\cdot\dots\cdot 401$$

7. **Feladat.** (KöMaL C.928.) Felírjuk az egész számokat 1-től egy 50-nel osztható n számig, majd elhagyjuk közülük az 50-nel oszthatókat. Mutassuk meg, hogy a megmaradt számok összege négyzetszám.

Megoldásvázlat: Legyen $n = 50k$. Ekkor

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (50k - 1) + 50k - (50 + 100 + 150 + \ldots + 50k).$$

Így a megmaradt számok összege

$$\frac{50k(50k+1)}{2} - 50 \cdot \frac{k(k+1)}{2},$$

ami

$$\frac{50 \cdot 49 \cdot k^2}{2} = 25 \cdot 49 \cdot k^2.$$

Megoldás MAPLE-lel: `factor`$(\frac{50k(50k+1)}{2} - 25k(k+1))$;

$$1225k^2$$

8. Feladat. (KöMaL K.58.) Hány olyan osztója van a 857304000-nek, amely négyzetszám?

Megoldásvázlat: A 857304000 szám prímtényezős felbontása

$$857304000 = 2^6 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^2.$$

A szám egy általános d osztójának az alakja

$$d = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta,$$

ahol

$$0 \leq \alpha \leq 6, 0 \leq \beta \leq 7, 0 \leq \gamma \leq 3, 0 \leq \delta \leq 2.$$

Az osztó pontosan akkor lesz négyzetszám, ha minden kitevő páros. Így a α-ra 4 lehetőség, β-ra 4 lehetőség, γ-ra 2 és végül δ-ra is 2 lehetőség adódott. Ezért 64 esetben kapunk négyzetszám osztót.

Megoldás MAPLE-lel: `with(numtheory);` A`:=divisors(857304000);` $k := 0$; `for` i `from` 1 `to nops(`A`) do; if type(sqrt(`$A[i]$`), integer) = true then` $k := k + 1$; `end if; end do; print(`k`);`

64

9. Feladat. (KöMaL B.3942.) Melyek azok a kétjegyű páros $\overline{ab}$ számok, amelyek ötödik

hatványa $\overline{ab}$-re végződik?

Megoldásvázlat: Átfogalmazva a problémát, olyan kétjegyű, páros x számokat keresünk, amelyekre $100|x^5 - x$. A binomiális tételből

$$(\overline{ab})^5 = (10a + b)^5 =$$

$$(10a)^5 + 5(10a)^4 b + 10(10a)^3 b^2 + 10(10a)^2 b^3 + 5(10a)b + b^5.$$

Itt az első négy tag láthatóan osztható 100-zal, és az ötödik is, mert b páros szám. Tehát $(\overline{ab})^5$ utolsó két számjegye megegyezik b^5 utolsó két számjegyével. A $b = 0$ esetet könnyű kizárni, b értéke $2, 4, 6$ vagy 8 lehet, amikor is b^5 utolsó két számjegye rendre $32, 24, 76$, illetve 68, ezek lesznek tehát a megfelelő kétjegyű számok.

Megoldás MAPLE-lel: `for` i `from` 10 `by` 2 `to` 98 `do:` `if mod`$(i^5 - i, 100) = 0$ `then` `print`(i)`; end if; end do`;

$$\{24, 32, 68, 76\}$$

10. Feladat. (KöMaL B.4196.) Legyen n pozitív egész. Határozzuk meg a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{n}$$

szám tizedesvessző utáni első számjegyét.

Megoldásvázlat: Teljes indukcióval könnyű bizonyítani, hogy

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1}{6},$$

és

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

A keresett összeg

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{n} = \frac{(n+1)(n+2)}{3}.$$

Látható, hogy ha n nem osztható 3-mal, akkor az összeg egész szám, ha n hárommal osztható, akkor a tizedesvessző utáni első számjegy 6.

Megoldás MAPLE-lel: `factor(sum(`$k(k+1)$`, `$k=1..n$`));`

$$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

11. Feladat. (KöMaL B.4378.) Legyen p pozitív prímszám. Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$x^3y^3 + x^3y^2 - x^2y^3 + x^2y^2 - x + y = p + 2$$

egyenletet.

Megoldásvázlat: A megoldás ötlete az egyszerű

$$x^3y^3 + x^3y^2 - x^2y^3 + x^2y^2 - x + y - 2 = p$$

átalakításon és a bal oldal szorzattá alakításán múlik, hiszen egy prímszámnak "kevés" osztója van. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$x^3y^3 + x^3y^2 - x^2y^3 + x^2y^2 - x + y - 2 = (xy-1)(x^2y^2 + x^2y - xy^2 + 2xy + x - y + 2),$$

ezért $xy - 1 = \pm 1$ vagy $xy - 1 = \pm p$, és a másik faktor ennek megfelelően $\pm p$ vagy ± 1.
$xy - 1 = 1$: ekkor $xy = 2$ és

$$x^2y^2 + x^2y - xy^2 + 2xy + x - y + 2 = 4 + 2(x-y) + 4 + x - y + 2 = 3(x-y) + 10.$$

Ha $x = 1, y = 2$, akkor $3(x-y)+10 = 7$, ha $x = 2, y = 1$, akkor $3(x-y)+10 = 13$, ha $x = -1, y = -2$, akkor $3(x-y)+10 = 13$, ha $x = -2, y = -1$, akkor $3(x-y)+10 = 7$, így az

$$(x, y) = (1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)$$

számpárok megoldásai a feladatnak.
$xy - 1 = -1$: ekkor $xy = 0$, vagyis $x = 0$ vagy $y = 0$. Az első esetben $-y + 2 = -p$, azaz $y = p + 2$, a második esetben $x + 2 = -p$, azaz $x = -p - 2$. A megoldások az

$$(x, y) = (0, p + 2), (-p - 2, 0)$$

számpárok.

$xy - 1 = p$, ekkor az

$$x^2y^2 + x^2y - xy^2 + 2xy + x - y + 2$$

faktor 1. Azonban

$$x^2y^2 + x^2y - xy^2 + 2xy + x - y + 2 = (xy + 1)(xy + 1 + x - y) + 1,$$

amiből

$$(xy + 1)(xy + 1 + x - y) = 0$$

adódik. Mivel $xy = p + 1$, ezért $p + 2 + x - y = 0$, amit visszahelyettesítve az előző egyenletbe

$$x(p + 2 + x) = p + 1$$

adódik, ami lehetetlen.

$xy - 1 = -p$, ekkor

$$(xy + 1)(xy + 1 + x - y) + 1 = -1,$$

amiből

$$(2 - p)(1 - p + x - y) = -2$$

következik, amiből $p = 3$ és így $(x, y) = (1, -2)$, vagy $(2, -1)$.

Megoldás MAPLE-lel: `factor(`$x^3y^3 + x^3y^2 - x^2y^3 + x^2y^2 - x + y - 2$`);`

$$(yx - 1)(x^2y^2 + yx^2 - y^2x + 2yx + x - y + 2)$$

12. Feladat. (KöMaL K.311.) A $77^{2009} + 77^{2010} + 77^{2011} + 77^{2012}$ láthatóan osztható 7-tel és 11-gyel. Adjuk meg az összes olyan prímszámot, amivel osztható ez a szám.

Megoldásvázlat: $77^{2009} + 77^{2010} + 77^{2011} + 77^{2012} = 77^{2009}(1 + 77 + 77^2 + 77^3) = 462540 \cdot 77^{2009}$. Könnyen látható, hogy 462540 osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel. Rövid próbálkozás után kapjuk a 13-at és így az 593-at. Tehát a szám prímtényezőinek halmaza: $\{2, 3, 5, 13, 593\}$.

Megoldás MAPLE-lel: `ifactor` $\left(77^{2009}+77^{2010}+77^{2011}+77^{2012}\right)$;

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^{2009} \cdot 11^{2009} \cdot 13 \cdot 593$$

13. Feladat. (KöMaL K.18.) Határozzuk meg azokat az a, b, c és d különböző számjegyeket úgy, hogy $\overline{abcd} : \overline{dcba} = 4$, ahol $\overline{abcd}$ és $\overline{dcba}$ négyjegyű számokat jelölnek.

Megoldásvázlat: A feltételből kapjuk, hogy $4 \cdot \overline{dcba} = \overline{abcd}$. Átírva ezt számjegyekre

$$1000a + 100b + 10c + d = 4000d + 400c + 40b + 4a$$

és

$$332a + 20b = 1333d + 130c$$

adódik. Látható, hogy $d = 1$ vagy $d = 2$ és mivel d páros, ezért $d = 2$. A $2a-3d = 2a-6$ osztható 10-zel, $a-3$ osztható 5-tel, így $a = 3$ vagy 8, azonban a legalább 4, ezért $a = 8$. Ezeket az értékeket beírva, kapjuk, hogy

$$2656 + 20b = 2666 + 130c,$$

azaz

$$2b = 1 + 13c.$$

Ez utóbbi egyenletnek a $(b, c) = (7, 1)$ számjegy-páros tesz eleget.

Megoldás MAPLE-lel: `for` a `from` 1 `to` 9 `do; for` b `from` 0 `to` 9 `do; for c from` 0 `to` 9 `do; for d from` 1 `to` 9 `do; if` $1000a + 100b + 10c + d = 4(1000d + 100c + 10b + a)$ `then print`$(1000a+100b+10c+d)$`; end if; end do; end do; end do; end do;`

8712

14. Feladat. (KöMaL C.781.) Határozzuk meg azokat a pozitív $p > q > r$ prímszámokat, amelyekre $p^2 - (q + r)^2 = 136$.

Megoldásvázlat: A bal oldal könnyen szorzattá alakítható:

$$(p + q + r)(p - q - r) = 136 = 2^3 \cdot 17.$$

Tegyük fel, hogy $r > 2$. Ekkor a $p + q + r$ faktor páratlan, vagyis $p + q + r = 17$ és $p - q - r = 8$, ami nyilván lehetetlen. Kaptuk, hogy $r = 2$. Ekkor

$$p + q + 2 = 34, p - q - 2 = 4,$$

vagy

$$p + q + 2 = 68, p - q - 2 = 8.$$

Az első esetben $p = 19, q = 13$, a második esetben $p = 38, q = 28$.

Megoldás MAPLE-lel: `with(numtheory);`
`divisors(136);`

$$\{1, 2, 4, 8, 17, 34, 68, 136\}$$

15. Feladat. (KöMaL C.854.) Igazoljuk, hogy minden pozitív egész n esetén fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3}{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)} = 2n^2 - 1.$$

Megoldásvázlat: Teljes indukcióval könnyen bizonyítható, hogy

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

és

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

teljesül minden n pozitív egészre. Ezeket a formulákat felhasználva, kapjuk, hogy

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = \frac{(2n)^2(2n+1)^2}{4} - 8\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

és

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \frac{2n(2n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)}{2},$$

továbbá

$$\frac{n^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2}{n(2n+1) - n(n+1)} = \frac{n^2(2n^2-1)}{n^2}.$$

Megoldás MAPLE-lel: `factor` $\left(\frac{\texttt{sum}((2k-1)^3,k=1..n)}{\texttt{sum}(2k-1,k=1..n)}\right)$;

$$2n^2 - 1$$

16. Feladat. (KöMaL B.3671.) Oldjuk meg az $(x^2 + y)(x + y^2) = (x - y)^3$ egyenletet az egész számok körében!

Megoldásvázlat: Ha $y = 0$, akkor minden x egész szám megoldása az egyenletnek. A továbbiakban feltesszük, hogy $y \neq 0$. Az egyenletet átrendezve és leosztva y-nal, kapjuk a

$$2y^2 + (x^2 - 3x)y + (3x^2 + x) = 0$$

y-ban másodfokú egyenletet. Mivel y egész, a másodfokú egyenlet diszkriminánsának egész számnak kell lenni, vagyis a

$$(x^2 - 3x)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3x^2 + x) = x(x - 8)(x + 1)^2$$

kifejezésnek teljes négyzetnek kell lennie. Ez a kifejezés pontosan akkor lesz teljes négyzet, ha $x(x - 8)$ teljes négyzet, vagyis meg kell oldani az

$$x(x - 8) = k^2$$

egyenletet x, k ismeretlen egészekben. Az egyenletetből

$$(x - 4)^2 - k^2 = (x + k - 4)(x - k - 4) = 16$$

következik, amiből a lehetséges x, k értékek

$$(x, k) = (-1, 3), (0, 0), (8, 0), (9, 3).$$

Megoldás MAPLE-lel: `factor(`$(x^2 + y)(y^2 + x) - (x - y)^3$`);`

$$y(yx^2 + 2y^2 + x + 3x^2 - 3yx)$$

`solve(`$yx^2 + 2y^2 + x + 3x^2 - 3yx = 0, y$`);`

$$-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\sqrt{x^4-6x^3-15x^2-8x}, -\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\sqrt{x^4-6x^3-15x^2-8x}$$

`factor(`$x^4-6x^3-15x^2-8x$`);`

$$x(x-8)(x+1)^2$$

17. Feladat. (KöMaL C.990.) Határozzuk meg azokat az egész számokat, amelyekre a

$$6x^2-167x-4823$$

kifejezés értéke a) prímszám; b) a lehető legkisebb egész szám.

Megoldásvázlat: A másodfokú polinomot könnyű szorzattá alakítani:

$$6x^2-167x-4823=(2x-91)(3x+53).$$

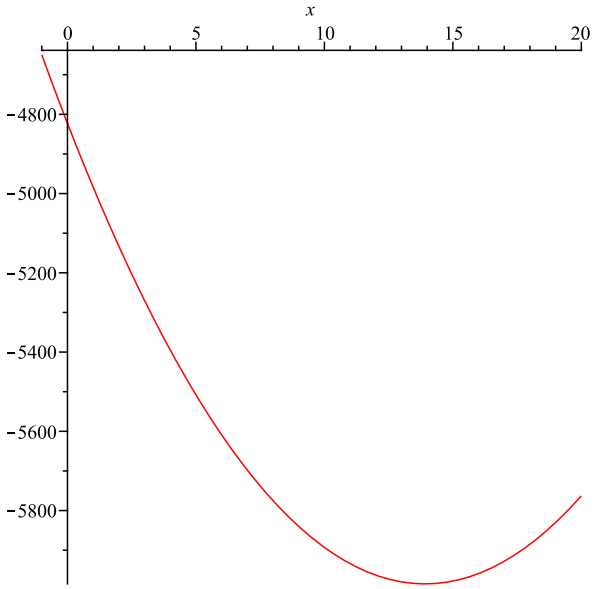
Ezért $(2x-91)(3x+53)$ csak akkor lehet prím, ha a szorzat egyik tényezője 1 vagy -1. Így négy lehetőségünk van.
I) $2x-91=1, x=46, p=191$,
II) $2x-91=-1, x=45, p=-188$,
III) $3x+53=1, x=-\frac{52}{3}$,
IV) $3x+53=-1, x=-18, p=127$. Világos, hogy a kifejezés értéke $x=-18$ és $x=46$ esetében lesz prímszám.

A feladat b) részére a választ a teljes négyzetté kiegészítés adja meg:

$$6x^2-167x-4823=6\left(x^2-\frac{167}{6}x-\frac{4823}{6}\right)=6\left(\left(x-\frac{167}{12}\right)^2-\frac{143641}{144}\right).$$

Látható, hogy a függvény a minimumát az $x=\frac{167}{12}$ helyen veszi fel, ezért a legkisebb egész számot a minimumhelyet közrefogó egész számoknál, vagyis az $x=13$ vagy $x=14$ helyeken veheti fel. $x=13$-ra a kifejezés -5980, $x=14$-re -5985, így a kifejezés értéke $x=14$ esetében lesz a legkisebb egész szám.

Megoldás MAPLE-lel: a) `factor(`$6x^2-167x-4823$`);`



3.1. ábra. A $6x^2 - 167x - 4823$ függvény grafikonja

$$(3x + 53)(2x - 91)$$

b) Lásd a 3.1 ábrát!

18. Feladat. (KöMaL C.994.) Legyen $x < y < z$. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a következő egyenletet:

$$3^x + 3^y + 3^z = 179415.$$

Megoldásvázlat: Mivel a bal oldalon álló összeadandók 3-rendje különböző, így az összeg rendje az összeadandók 3-rendjének a legkisebbike lesz, vagyis x. A 179415 3-rendje 4, ezért $x = 4$. Ezt felhasználva

$$3^y + 3^z = 179334.$$

A fentihez hasonló okoskodással $y = 7$ adódik, amiből

$$3^z = 177147 = 3^{11},$$

vagyis $z = 11$.

Megoldás MAPLE-lel:
`for` z `from` 3 `to` 20 `do:` `for` y `from` 2 `to` $z-1$ `do:` `for` x `to` $y-1$ `do:`
`if` $3^x + 3^y + 3^z = 179415$ `then print`(x, y, z)`; end if; end do; end do; end do;`

$$\{4, 7, 11\}$$

19. Feladat. (KöMaL C.985.) Egy kétjegyű számot megszoroztunk 4-gyel, majd a kapott eredmény mögé írtuk az eredeti kétjegyű számot. Így olyan számhoz jutottunk, amelynek pontosan 6 osztója van. Mi lehetett az eredeti kétjegyű szám?

Megoldásvázlat: Jelölje x a keresett számot. A fenti eljárást elvégezve a

$$4 \cdot 100 \cdot x + x = 401x$$

számhoz jutunk, aminek a feltétel miatt pontosan 6 osztója van. Két esetet kell megkülönböztetni, a számnak vagy egy darab prímosztója van, azaz

$$401x = p^5,$$

vagy két különböző prím osztja, ekkor

$$401x = p_1^2 p_2$$

alakú. Vegyük észre, hogy a 401 prím, ezért az első eset nem lehetséges. A másodikban $p_2 = 401$, x egy olyan kétjegyű szám, ami egy prímszám négyzete. Két lehetőség van $x = 25$ vagy $x = 49$.

Megoldás MAPLE-lel:
$B := \{\}$`; for` x `from` 10 `to` 99 `do;` A`:= divisors`$(401x)$;
`if nops`(A) `=` 6 `then` $B := B$ `union` $\{x\}$ `end if; end do; print`(B);

$$B = \{25, 49\}$$

20. Feladat. (KöMaL C.982.) Bizonyítsuk be, hogy $5^{2008} + 4$ összetett szám.

Megoldásvázlat: Világos, hogy

$$5^{2008} + 4 = (5^{1004})^2 + 2^2 = (5^{1004} + 2)^2 - 4 \cdot 5^{1004}.$$

Ebből adódik, hogy

$$5^{2008} + 4 = (5^{1004} - 2 \cdot 5^{502} + 2)(5^{1004} + 2 \cdot 5^{502} + 2).$$

Mivel a jobb oldalon álló két tényező nagyobb mint egy, ezért beláttuk az állítás helyességét.

Megoldás MAPLE-lel: `factor(`$x^4 + 4$`);`

$$(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

21. Feladat. (KöMaL C.950.) Milyen számrendszerben helyes a következő szorzás?

$$166 \cdot 56 = 8590.$$

Megoldásvázlat: A szorzásból következik, hogy

$$(n^2 + 6n + 6)(5n + 6) = 8n^3 + 5n^2 + 9n.$$

Ezt kifejtve adódik, hogy

$$3n^3 - 31n^2 - 57n - 36 = 0,$$

amit szorzattá alakítva, kapjuk, hogy

$$(n - 12)(3n^2 + 5n + 3).$$

Ebből következik, hogy a szorzás a 12-es számrendszerben helyes.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(3n^3 - 31n^2 - 57n - 36 = 0, x)$;

$$12, \frac{-5}{6} + \frac{1}{6} I\sqrt{11}, \frac{-5}{6} - \frac{1}{6} I\sqrt{11}$$

22. Feladat. (KöMaL B.4293.) Három pozitív egész szám összege 2010, reciprokainak

összege pedig $\frac{1}{58}$. Melyek ezek a számok?

Megoldásvázlat: Jelölje a számokat a, b és c. Ekkor

$$a + b + c = 2010$$

és

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{58}.$$

A második egyenletet átszorozva, kapjuk, hogy

$$58(ab + bc + ac) = abc,$$

ebből adódik, hogy a 29 osztója az abc szorzatnak és így az a, b és c számok valamelyikének. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a = 29k$. Ekkor

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{58} - \frac{1}{29k} = \frac{k-2}{58k},$$

és ebből

$$58k(b + c) = (k - 2)bc$$

adódik. Látható, hogy 29 osztója a $(k-2)bc$ szorzatnak, így 29 osztója a $k-2, b$ vagy c számoknak. Ha $29|k-2$, akkor $k = 31, 60, 89$ stb. lehet, és ebből $a = 899, 1740, 2581$ stb. lehet. Mivel az a, b, c pozitív egész számok, ezért elegendő az $a = 899$ és az $a = 1740$ eseteket megvizsgálni. Ha $a = 899$, akkor

$$b + c = 1111$$

és

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{58} - \frac{1}{899} = \frac{1}{62}.$$

Az utóbbi egyenlet bal oldala

$$\frac{b + c}{bc} = \frac{1111}{bc} = \frac{1}{62}.$$

Ekkor meg kell oldani a

$$62(b + c) = bc$$

egyenletet, ahol b és c ismeretlen pozitív egészek. Könnyű átrendezéssel adódik, hogy

$$(b-62)(c-62) = 62^2$$

teljesül, amiből

$$b - 62 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 31, \pm 62, \pm 124, \pm 961, \pm 1922, \pm 62^2\}$$

és ugyanez igaz a $c - 62$ faktorra is. Könnyen áttekinthető, hogy az $a = 899$ esetben nem kapunk megoldást. Az $a = 1740$ esetben (lényegében) egy megoldást kapunk:

$$(b, c) \in \{(90, 180), (180, 90)\}.$$

Megoldás MAPLE-lel: `for` a `from` 59 `to` 670 `do; for` b `from` a `to` 2010 `do; for` c `from` b `to` 2010 `do; if 'and'(a+b+c =` 2010`,` $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{58}$`) then print(`$a, b, c$`); end if; end do; end do; end do;`

23. Feladat. (KöMaL B.4300.) Bizonyítsuk be, hogy 35 egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege mindig osztható 35-tel.

Megoldásvázlat: Be kell bizonyítani, hogy

$$n^2 + (n+1)^2 + \ldots + (n+34)^2$$

osztható 35-tel, minden n természetes számra. Ismert, hogy

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (k-1)^2 = \frac{k(k-1)(2k-1)}{6},$$

és

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Ekkor az összegre

$$n^2 + (n+1)^2 + \ldots + (n+34)^2 = 35 \cdot n^2 + 34 \cdot 35 \cdot n + 17 \cdot 23 \cdot 35$$

adódik, ami láthatóan osztható 35-tel, minden n természetes számra.

Megoldás MAPLE-lel: `factors(sum(`$(k+i)^2$`,` $i = 0..34$`));`

$$[35, [[391 + 34k + k^2, 1]]]$$

24. Feladat. (KöMaL B.4268.) Határozzuk meg

$$(\sqrt{2010} + [\sqrt{2010}])^{100}$$

tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni hatodik számjegyet.

Megoldásvázlat: Először is figyeljük meg, hogy

$$(\sqrt{2010} + [\sqrt{2010}])^{100} + (\sqrt{2010} - [\sqrt{2010}])^{100} = 2\sum_{i=0}^{50} 2010^i \cdot [\sqrt{2010}]^{100-2i}$$

egész szám. Ha sikerül megmutatni, hogy $(\sqrt{2010}-[\sqrt{2010}])^{100}$ kicsi, akkor világos, hogy a kérdezett szám a tizedesvessző után "sok" kilencest tartalmaz. Egyszerű számolás adja, hogy $\sqrt{2010} = 44.83...$, ezért

$$(\sqrt{2010} - [\sqrt{2010}])^{100} < 0.84^{100} < 10^{-6}.$$

A fenti indoklás miatt beláttuk, hogy a keresett számjegy a 9-es.

Megoldás MAPLE-lel: $\texttt{evalf}_{220}((\texttt{sqrt}(2010) - \texttt{floor}(\texttt{sqrt}(2010)))^{100}$;

$$1.16339598729696740828510871... \cdot 10^{-8}$$

25. Feladat. (KöMaL B.4243.) Mutassuk meg, hogy $65^{64} + 64$ összetett szám!

Megoldásvázlat: Teljes négyzetté egészítjük ki a fenti számot:

$$65^{64} + 64 = (65^{32} + 8)^2 - 2 \cdot 8 \cdot 65^{32} = (65^{32} + 8)^2 - (4 \cdot 65^{16})^2.$$

Alkalmazzuk az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ azonosságot, és kapjuk, hogy

$$65^{64} + 64 = (65^{32} - 4 \cdot 65^{16} + 8)(65^{32} + 4 \cdot 65^{16} + 8),$$

azaz számunk felbontható két, egynél nagyobb szám szorzatára, így nem lehet prím.

Megoldás MAPLE-lel: `ifactor`$(65^{64}+64)$;

$$3916733 \cdot 12653 \cdot 848064026205894987841230736413208938269543326969\times$$

$$2500297 \cdot 895093650271812409853825544577909 61 \cdot 89009 \cdot 136573 \cdot 929501$$

26. Feladat. (KöMaL C.1001.) Egy egész számnak két prímosztója van. Osztóinak száma 6, osztóinak összege 28. Melyik ez a szám?

Megoldásvázlat: A keresett szám $n = p^\alpha q^\beta$ alakú, ahol p és q különböző prímszámok és $\alpha, \beta \geq 1$, $(\alpha+1)(\beta+1) = 6$, továbbá $\sigma(n)$-nel jelölve az n szám pozitív osztóinak az összegét, $\sigma(n) = 28$. Könnyen látható, hogy az n szám pq^2 alakú, ezért

$$1 + p + pq + pq^2 + q + q^2 = 28.$$

Világos, hogy $q \leq 3$, egyébként túl nagy lenne az összeg. Ha $q = 2$, akkor

$$1 + p + 2p + 4p + 2 + 4 = 28,$$

amiből $p = 3$ adódik. Ha $q = 3$, akkor

$$1 + p + 3p + 9p + 3 + 9 = 28,$$

és ebből $13p = 15$, ami lehetetlen. A keresett szám az $n = 12$.

Megoldás MAPLE-lel: `with(numtheory); for` i `from 1 to 27 do;` A`:=divisors(`i`);` k`:=nops(A);` B`:=0; for` j `from 1 to` k `do;` $B := B + A[j]$`; end do; if` $B = 28$ `then print(`i, B`); end if; end do;`

$$12, 28$$

27. Feladat. (KöMaL C.1075.) Melyik az a háromjegyű szám, amely tizenkétszer akkora, mint a számjegyeinek az összege?

Megoldásvázlat: Jelölje a keresett számot (vagy számokat) $\overline{abc}$. Ekkor

$$12(a+b+c) = 100a + 10b + c,$$

azaz

$$88a = 2b + 11c.$$

A b számjegy osztható 11-gyel, vagyis $b = 0$, ezért $8a = c$, $a = 1, c = 8$. A keresett szám a 108.

Megoldás MAPLE-lel: `for` a `from` 1 `to` 9 `do; for` b `from` 0 `to` 9 `do; for` c `from` 0 `to` 9 `do; if` $100a + 10b + c = 12(a + b + c)$ `then print`$(100a + 10b + c)$`; end if; end do; end do; end do;`

28. Feladat. (KöMaL C.1070.) Egy szám n alapú számrendszerben felírt alakja 2011, az $(n + 3)$ alapú számrendszerben pedig 537. Melyik ez a szám?

Megoldásvázlat: A feltételeket felhasználva, kapjuk, hogy

$$2n^3 + n + 1 = 5(n+3)^2 + 3(n+3) + 7.$$

Ebből az egyenletből

$$2n^3 - 5n^2 - 32n - 60 = 0$$

következik. Ha az egyenletnek van egész gyöke, akkor az a 60 osztója, és kettőnek pontosan az első hatványával osztható. Rövid próbálkozás után $n = 6$ adódik, így a harmadfokú polinom szorzattá alakítható:

$$2n^3 - 5n^2 - 32n - 60 = (n-6)(2n^2 + 7n + 10).$$

A másodfokú polinomnak nincs valós zérushelye, ezért a feladat egyetlen megoldása a 6-os, illetve 9-es számrendszer, a szám pedig a 439.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(2n^3 - 5n^2 - 32n - 60 = 0, n)$;

$$[[6, -7/4 + \frac{1}{4}I\sqrt{31}, -7/4 - \frac{1}{4}\sqrt{31}]]$$

29. Feladat. (KöMaL K.289.) Ha egy háromjegyű számnak elhagyjuk a középső számjegyét, akkor pontosan a hetedét kapjuk. Melyik ez a háromjegyű szám?

Megoldásvázlat: Jelölje a keresett számot (vagy számokat) $\overline{abc}$. Ekkor

$$7(10a + c) = 100a + 10b + c,$$

azaz

$$6c = 30a + 10b,$$

illetve

$$3c = 15a + 5b.$$

Látható, hogy c osztható 5-tel, azaz $c = 0$ vagy $c = 5$. A $c = 0$ érték nyivánvalóan nem lehetséges, $c = 5$, amiből $a = 1, b = 0$. A keresett szám a 105.

Megoldás MAPLE-lel: `for` a `from` 1 `to` 9 `do; for` b `from` 0 `to` 9 `do; for` c `from` 0 `to` 9 `do; if` $100a + 10b + c = 7(10a + c)$ `then print`$(100a + 10b + c)$ `end if; end do; end do; end do;`

30. Feladat. (KöMaL C.1082.) Egy hatjegyű szám első számjegyét áthelyezzük a szám végére, majd az így kapott hatjegyű szám első számjegyét ismét áthelyezzük a szám végére. Így egy olyan hatjegyű számot kapunk, amely az előbbinek háromszorosa, az eredetinek pedig $\frac{3}{5}$-szöröse. Melyik az eredeti hatjegyű szám?

Megoldásvázlat: Jelölje az eredeti számot

$$u = \overline{abcdef} = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f,$$

és legyen $x = 10^3c + 10^2d + 10e + f$. Ezekkel a jelölésekkel az új számok

$$v = 10^5b + 10x + a$$

és

$$w = 10^2x + 10a + b.$$

Mivel $w = 3v$, ezért

$$3(10^5b + 10x + a) = 10^2x + 10a + b,$$

amiből

$$42857b = 10x + a$$

következik. x egy négyjegyű szám, ezért $b = 1$ vagy 2. Ha $b = 2$, akkor $a = 4$ és

$x = 8571$, a megfelelő hatjegyű szám $u = 428571$, ez azonban nem felel meg a $w = \frac{3}{5}u$ feltételnek. Ha $b = 1$, akkor $a = 7$ és $x = 4285$, a kapott hatjegyű szám az $u = 714285$, és ez a szám már eleget tesz a másik feltételnek is.

Megoldás MAPLE-lel: `for` a `from` 1 `to` 9 `do; for` b `from` 0 `to` 9 `do; for` c `from` 0 `to` 9 `do; for` d `from` 0 `to` 9 `do; for` e `from` 0 `to` 9 `do; for` f `from` 0 `to` 9 `do;` $m := a10^5 + b10^4 + c10^3 + d10^2 + 10e + f$`;` $n := b10^5 + c10^4 + d10^3 + 10^2e + 10f + a$`;` $o := c10^5 + d10^4 + 10^3e + 10^2f + 10a + b$`; if` $o = 3n$ `then print(`m`); end if; end do; end do; end do; end do; end do; end do;`

428571

714285

Könnyú kiszámolni, hogy a fenti két számból a 714285 felel meg a feladat feltételeinek.

31. Feladat. (KöMaL C.701.) Mutassuk meg, hogy

$$1 \cdot 2 \cdots 1001 + 1002 \cdot 1003 \cdots 2002$$

osztható 2003-mal.

Megoldásvázlat: Az 1002 ugyanolyan maradékot ad 2003-mal osztva, mint az $1002 - 2003 = -1001$. Az 1003 ugyanolyan maradékot ad 2003-mal osztva, mint az $1003 - 2003 = -1000$, és így tovább. Vagyis a fenti szám ugyanolyan maradékot ad 2003-mal osztva, mint az

$$1 \cdot 2 \cdots 1001 + (-1001)(-1000)(-999) \cdots (-1).$$

Látható, hogy ez utóbbi szám 0, így a feladat állítása igaz.

Megoldás MAPLE-lel: `product`$(i, i = 1..1001)$+`product`$(i, i = 1002..2002)$ `mod` 2003;

0

32. Feladat. (KöMaL C.704.) Mely n természetes számokra igaz, hogy

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \cdots \cdot \log_n (n+1) = 10?$$

Megoldásvázlat: Ismert, hogy

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Ezt az összefüggést alkalmazva, kapjuk, hogy

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \frac{\log_3 4}{\log_3 2} = \log_2 4,$$

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 = \log_2 4 \cdot \log_4 5 = \frac{\log_4 5}{\log_4 2} = \log_2 5,$$

végül

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdots \log_n(n+1) = \log_2 n \cdot \log_n(n+1) = \frac{\log_n(n+1)}{\log_n 2} = \log_2(n+1).$$

Ezért meg kell oldani a

$$\log_2(n+1) = 10$$

egyenletet, aminek az $n = 1023$ a megoldása.

Megoldás MAPLE-lel: `evalf(product(`$\log_i(i+1)$`, i = 2..1023));`

10

33. Feladat. (KöMaL B.3542.) Bizonyítsuk be hogy ha egy $1111\ldots11$ alakú szám osztható 7-tel, akkor 37-tel is.

Megoldásvázlat: A feltételből tudjuk, hogy

$$7 | 1111\ldots11 = \frac{10^n - 1}{9}.$$

Ebből következik, hogy n osztható 6-tal, vagyis a szám osztható $10^6 - 1$-gyel. Azonban

$$10^6 - 1 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37,$$

így állításunkat bizonyítottuk.

Megoldás MAPLE-lel: 1 és 40 között kiíratjuk, hogy milyen kitevőre osztható $\frac{10^n-1}{9}$ 7-tel.

`for` i `from` 1 `to` 40 `do; if` $(10^i-1)/9$ `mod` 7 = 0 `then print(`i`) end if; end do;`
$\{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$.

Ebből megsejthetjük, hogy a csupa egyesből álló számok pontosan akkor oszthatóak 7-tel, ha a megfelelő kitevő osztható 6-tal. Ekkor könnyű belátni, hogy a szám 37-tel is osztható.

34. Feladat. (KöMaL B.3522.) Oldjuk meg az egész számok körében a

$$2x^4 + x^2y^2 + 5y^2 = y^4 + 10x^2$$

egyenletet.

Megoldásvázlat: Átrendezve az egyenletet, kapjuk, hogy

$$2x^4 + x^2y^2 + 5y^2 - y^4 - 10x^2.$$

Vegyük észre, hogy

$$2x^4 + x^2y^2 + 5y^2 - y^4 - 10x^2 = (2x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 5) = 0.$$

Ebből vagy $2x^2 = y^2$, és ekkor $x = y = 0$ vagy $x^2 + y^2 = 5$. Ez utóbbi egyenletnek 8 megoldása van az egész számok körében:

$$x = \pm 2, y = \pm 1, x = \pm 1, y = \pm 2.$$

Ezért az egyenletnek összesen 9 megoldása van.

Megoldás MAPLE-lel: `factor(`$2x^4 + x^2y^2 + 5y^2 - y^4 - 10x^2$`);`

$$(2x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 5)$$

35. Feladat. (KöMaL B.3530.) Számítsuk ki a

$$\binom{2002}{0} - \binom{2001}{1} + \binom{2000}{2} - \ldots - \binom{1001}{1001}$$

kifejezés értékét.

Megoldásvázlat: Tetszőleges pozitív n egészre legyen

$$S_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i \binom{n-i}{i}.$$

Feladatunk kiszámolni S_{2002}-t. Az

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

azonosság felhasználásával, hogy

$$S_n = S_{n-1} - S_{n-2}$$

teljesül minden $n \geq 3$ természetes számra. Könnyű számolás adja, hogy

$$S_1 = S_6 = 1, S_2 = S_5 = 0,$$

és

$$S_3 = S_4 = -1.$$

Ebből teljes indukcióval könnyen kijön, hogy minden k pozitív egészre

$$S_{6k} = S_{6k+1} = 1, S_{6k+2} = S_{6k+5} = 0, S_{6k+3} = S_{6k+4} = -1.$$

Mivel $2002 = 6 \cdot 333 + 4$, a keresett érték $S_{2002} = -1$.

Megoldás MAPLE-lel: `sum`$((-1)^i$`binomial`$(2002-i, i)$, $i = 0..1001)$;

$$-1$$

36. Feladat. (KöMaL B.3517.) Bizonyítsuk be, hogy $71|61! + 1$.

Megoldásvázlat: A Wilson tétel miatt $70! + 1$ osztható 71-gyel. Meg kell mutatni, hogy

$$61! - 70!$$

osztható 71-gyel.

$$61! - 70! = 61!(1 - 62 \cdot 63 \cdot 64 \cdots 69 \cdot 70),$$

azonban egyszerű számolás mutatja, hogy $1-(-9)(-8)\cdot\ldots\cdot(-1) = 9!+1 = 19\cdot 71\cdot 269$.

Megoldás MAPLE-lel: `ifactor` $(61!+1)$;

$$= 71\cdot 227\cdot 48795702665964504883\times$$

$$\times 64541477356418303363178883342601506650579810075890514489579 1$$

37. Feladat. (KöMaL C.648.) Mennyi a $2^{\log_6 18}\cdot 3^{\log_6 3}$ pontos értéke?

Megoldásvázlat: Felhasználva a logaritmus függvény jól ismert azonosságait,

$$\log_6 18 = \log_6 3 + \log_6 6 = \log_6 3 + 1.$$

Ezért

$$2^{\log_6 18}\cdot 3^{\log_6 3} = 2\cdot 2^{\log_6 3}\cdot 3^{\log_6 3} = 2\cdot 6^{\log_6 3} = 6.$$

Megoldás MAPLE-lel: `evalf(`$2^{\log_6 18}3^{\log_6 3}$`)`;

$$6.000000001$$

38. Feladat. (KöMaL B.3474.) Határozzuk meg az

$$(\underbrace{111\ldots 111}_{112\,\text{darab}})^2$$

hátulról számított hetvenharmadik számjegyét.

Megoldásvázlat: Ha "kézzel" elvégezzük a négyzetreemelést, akkor látható, hogy a

$$(\underbrace{111\ldots 111}_{112\,\text{darab}})^2$$

szám hátulról számított hetvenharmadik számjegye megegyezik a

$$\underbrace{111\ldots 11}_{73\,\text{darab}} + \underbrace{111\ldots 11}_{72\,\text{darab}}0 + \underbrace{111\ldots 11}_{71\,\text{darab}}00 + \ldots + 11\underbrace{000\ldots 00}_{71\,\text{darab}} + 1\underbrace{000\ldots 00}_{72\,\text{darab}}$$

szám hátulról számított hetvenharmadik számjegyével. Ez utóbbi számot felírhatjuk

zárt alakban:

$$\frac{10^{73}-1}{9}+10\cdot\frac{10^{72}-1}{9}+10^2\cdot\frac{10^{71}-1}{9}+\ldots+10^{71}\cdot\frac{10^2-1}{9}+10^{72}\cdot\frac{10-1}{9}=$$

$$=73\cdot\frac{10^{73}}{9}-\frac{1+10+10^2+\ldots+10^{72}}{9}=8\cdot10^{73}+\frac{10^{73}-1}{9}-\frac{1+10+10^2+\ldots+10^{72}}{9}+\frac{1}{9}=$$

$$8\cdot10^{73}+\frac{8}{9}\cdot\underbrace{111\ldots111}_{73\,\text{darab}}+\frac{1}{9}=8\cdot10^{73}+\frac{1}{9}\cdot\underbrace{888\ldots888}_{72\,\text{darab}}9$$

azaz a szám hátulról számított hetvenharmadik jegye 0.

Megoldás MAPLE-lel: `‘mod‘(`$\left(\frac{10^{112}-1}{9}\right)^2-1,10^{72}$`);`

$$0$$

38. Feladat. (KöMaL K.252.) Hat egymást követő egész szám összegét megszorozzuk a következő hat egész szám összegével. Mutassuk meg, hogy az így kapott szorzat 36-os osztási maradéka mindig ugyanannyi.

Megoldásvázlat: Jelölje a számokat

$$6k,6k+1,\ldots,6k+5,$$

illetve

$$6k+6,6k+7,\ldots,6k+11.$$

A megfelelő összegek $36k+15$ illetve $36k+51$, a szorzat

$$(36k+15)(36k+51)=36^2k^2+66\cdot36k+15\cdot51.$$

Ez a szám minden k-ra annyi maradékot ad 36-tal osztva, mint $15\cdot51$, vagyis a keresett maradék 9.

Megoldás MAPLE-lel: `‘mod‘(`$(36k+15)(36k+51),36$`);`

$$9$$

40. Feladat. (KöMaL C.595.) Melyek azok a háromjegyű számok, amelyek egyenlők a

számjegyeik faktoriálisainak összegével?

Megoldásvázlat: Jelölje $N = \overline{abc}$ a keresett számot (számokat). Ekkor

$$100a + 10b + c = a! + b! + c!.$$

Világos, hogy a szám nem tartalmazhat $7, 8, 9$ számjegyeket, mert ezek faktoriálisa nagyobb mint 1000. Ha a szám tartalmaz hatos számjegyet, akkor $6! = 720$ miatt, tartalmaz egy legalább hetes számjegyet, ami nem lehetséges. A számnak tartalmaznia kell ledalább egy ötöst, mert $3 \cdot 4! = 72$, így nem kapnánk háromjegyű számot. Ha egyetlen ötös van a számban, akkor a szám $5! + 2 \cdot 0!$ és $5! + 2 \cdot 4!$ közé esik, ezért a szám egyessel kezdődik, a harmadik számjegy faktoriálisa $1, 2, 6, 24$ lehet, ezért a szóba jöhető számok

$$121 + 1, 121 + 2, 121 + 6, 121 + 24,$$

amelyek közül a 145 jó megoldás.

Ha a szám két ötös számjegyet tartalmaz, akkor a szám $240 + 0!$ és $240 + 4!$ közé esik, tehát kettessel kezdődik. A számjegyek faktoriálisainak az összege 242, azonban ez a szám még ötöst sem tartalmaz.

Ha a szám három ötöst tartalmaz, akkor kapjuk az 555 számot, azonban

$$3 \cdot 5! \neq 555.$$

A feladatnak összesen egy megoldása van: $145 = 1 + 4! + 5!$.

Megjegyzés: A feladat nyilvánvaló általámosítása a következő probláma: Határozzuk meg azokat a természetes számokat, amelyak egyenlőek a számjegyeik faktoriálisainak az összegével! Legyen az ilyen tulajdonságú számok közül k egy n-jegyű szám. Ekkor $k \geq 10^n$, a számjegyei faktoriálisainak az összege legfeljebb

$$n \cdot 9! = 362800n.$$

Feltételünkből adódik, hogy

$$10^n \leq 363800n.$$

Könnyen látható, hogy ebből $n \leq 6$ következik.

Megoldás MAPLE-lel: `for` a `from` 1 `to` 9 `do; for` b `from` 0 `to` 9 `do; for` c `from`

0 to 9 do; if $100a + 10b + c$ = factorial(a)+factorial(b)+factorial(c) then print(a, b, c); end if; end do; end do; end do;

$$1, 4, 5$$

41. Feladat. (KöMaL C.570.) Határozzuk meg azokat a háromjegyű prímszámokat, amelyekben a számjegyek szorzata 189.

Megoldásvázlat: A 189 felírható $3^3 \cdot 7$ alakban. Mivel számjegyekről van szó, így a keresett prímszám (prímszámok) a $3, 7, 9$ számjegyekből fognak állni. 6 lehetőségünk van, ezek közül a $379, 397, 739, 937$ prím, a $793 = 13 \cdot 61, 973 = 7 \cdot 139$ nem prím.

Megoldás MAPLE-lel: for a from 1 to 9 do; for b from 0 to 9 do; for c from 0 to 9 do; $n := 100a + 10b + c$; if (isprime(n) = true) and ($abc = 189$) then print(n); end if; end do; end do; end do;

42. Feladat. (KöMaL C.573.) Határozzuk meg mindazokat az n pozitív egész számokat, amelyekre

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = 1 + 2 + \ldots + (2n - 1) + 2n.$$

Megoldásvázlat: Ismeretes, hogy

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

és

$$1 + 2 + \ldots + (2n - 1) + 2n = \frac{2n(2n+1)}{2}.$$

Ezekből a formulákból kapjuk, hogy

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n(2n+1),$$

és mivel n pozitív egész, így $n = 5$.

Megoldás MAPLE-lel: factor(sum($k^2, k = 1..n$)-sum($k, k = 1..2n$));

$$\frac{1}{6}n(2n+1)(n-5)$$

43. Feladat. (KöMaL B.3342.) Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokat, amelyekre $n^2 - 19n + 99$ négyzetszám.

Megoldásvázlat: Meg kell oldani a

$$n^2 - 19n + 99 = m^2$$

diofantikus egyenletet. 4-gyel beszorozva mind a két oldalt, kapjuk, hogy

$$4n^2 - 76n + 396 = (2n - 18)^2 - 324 + 396 = (2n - 18)^2 + 72 = (2m)^2.$$

Ezt átrendezve és szorzattá alakítva

$$(2m - 2n + 18)(2m + 2n - 18) = 72,$$

és

$$(m - n + 9)(m + n - 9) = 18.$$

Megoldásként kapjuk, hogy

$$(n, m) = (1, 9), (9, 3), (10, 3), (18, 9).$$

Megoldás MAPLE-lel: `for` n `from` 1 `to` 30 `do; if type(sqrt(`$n^2-19n+99$`), integer) = true then print(`n`); end if; end do;`

1

9

10

18

44. Feladat. (HMMT, 2005) Tudjuk, hogy a 27000001-nek négy különböző prímosztója van. Mennyi az összegük?

Megoldásvázlat: Világos, hogy

$$27000001 = 300^3 + 1^3 = 301 \cdot (300^2 - 300 + 1) =$$

$$7 \cdot 43 \cdot (301^2 - 30^2) = 7 \cdot 43 \cdot 271 \cdot 331.$$

Megoldás MAPLE-lel: `ifactor`(27000001);

$$\{7, 43, 271, 331\}$$

45. Feladat. (ARML, 2002) Legyen a egy egész szám, úgy, hogy

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{23} = \frac{a}{23!}$$

teljesül. Mennyi az a 13-mal vett osztási maradéka?

Megoldásvázlat: Az egyenletből következik, hogy

$$a = 23! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{23}\right).$$

A 23 összeadandóból a $\frac{23!}{13}$ nem osztható 13-mal. Ennek a számnak a 13-mal való osztási maradéka

$$1 \cdot 2 \cdots 6 \cdot (-6) \cdot (-5) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdots 10$$

13-mal való osztási maradékával egyezik meg. Ez pedig $(6!)^3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ 13-mal való osztási maradékával egyezik meg. Mivel $6! = 720 = 55 \cdot 13 + 5$, a maradék $7 \cdot 625$ 13-mal való osztási maradékával egyezik meg, ami 7.

Megoldás MAPLE-lel: `‘mod‘(factorial(23)(sum(`$1/n$`, `$n = 1..23$`)), 13)`;

$$7$$

46. Feladat. (MOSP, 1998) Bizonyítsuk be, hogy $3, 4, 5$ vagy 6 egymás után következő szám négyzetének az összege sohasem teljes négyzet. Adjunk példát 11 egymás után következő számra, amelyekre igaz, hogy négyzetösszegük teljes négyzet.

Megoldásvázlat: Tegyük fel, hogy 3 egymás után következő szám négyzetének az összege teljes négyzet. Ez azt jelenti, hogy a

$$3n^2 + 2 = (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = y^2$$

egyenletnek van egész megoldása n és y egész számokban. Ismert, hogy egy teljes négyzet hárommal osztva 0 vagy 1 maradékot ad. A bal oldal 2 maradékot ad hárommal osztva, vagyis az egyenletnek nincs megoldása.

Vizsgáljuk most 4 egymás után következő szám négyzetének az összegét, azaz tekintsük az

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 4n^2 + 4n + 6 = y^2$$

egyenletet, n és y ismeretlenekben. Mivel a bal oldal páros, ezért y^2 is páros, amiből y páros volta következik. Ezért a 4 osztója az y^2-nek, ugyanekkor a bal oldal 2-nek pontosan az első hatványával osztható, így ellentmondást kaptunk.

Ha 5 egymás után következő négyzetszám összegét tekintjük, akkor

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = y^2$$

egyenletet kapjuk. A bal oldal osztható 5-tel, így a jobb oldal is, tehát $5|y$, és $25|y^2 = 5(n^2+2)$. Ebből $5|n^2+2$, azonban egy négyzetszám 5-tel osztva $0, 1, 4$ maradékot adhat, ezért az 5 nem lehet osztója az $n^2 + 2$-nek semmilyen n egész számra.

6 egymás után következő négyzetszám összegének a vizsgálata a következő egyenletet adja:

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 6n^2 + 6n + 19 = y^2.$$

Ismert, hogy egy négyzetszám 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot ad. A bal oldal

$$6n^2 + 6n + 19 = 6n(n+1) + 19$$

alakú. Mivel n és $n+1$ közül az egyik páros, ezért $6n(n+1)$ osztható 4-gyel és így a bal oldal 4-gyel osztva 3 maradékot ad.

A 11 négyzetszám összege a

$$11n^2 + 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 11n^2 + 110 = y^2$$

egyenlethez vezet. Ennek az egyenletnek könnyen láthatóan egy megoldása az $n = 1, y = 11$. Valóban

$$(-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 121 = 11^2.$$

Megoldás MAPLE-lel: `for` n `from` 1 `to` 1000 `do: if type(sqrt(`$11n^2$`+110), integer) = true then print(`n`): end if; end do;`

1

23

43

461

859

47. Feladat. (AIME, 1983) Jelölje a_n a $6^n + 8^n$ sorozatot. Mennyi a maradéka a_{83}-nak 49-cel osztva?

Megoldásvázlat:

$$a_{83} = (7-1)^{83} + (7+1)^{83}.$$

A binomiális tételt használva, ez az összeg

$$2\left(7^{83} + \binom{83}{2} \cdot 7^8 1 + \ldots + \binom{83}{82} \cdot 7\right)$$

lesz, amelyben az utolsó tagtól eltekintve az összes osztható lesz 49-cel. Így a_{83} ugyanolyan maradékot ad 49-cel osztva, mint $2 \cdot 83 \cdot 7$, vagyis 35-öt.

Megoldás MAPLE-lel: $6^{83} + 8^{83}$`mod`49;

35

48. Feladat. (AIME, 1983) Mi a legnagyobb kétjegyű prímosztója a $\binom{200}{100}$ binomiális együtthatónak?

Megoldásvázlat: A binomiális együtthatót kifejtve, kapjuk, hogy

$$\binom{200}{100} = \frac{200!}{100!100!}.$$

A keresett p prím kétjegyű, ha $p > 50$, akkor a nevező pontosan a p négyzetével osztható. Ki kell választani azt a legnagyobb ilyen p prímet, amelyre a számláló a p harmadik hatványával is osztható. Ez a prím a 61.

Megoldás MAPLE-lel: `ifactor(`$\binom{200}{100}$`);`

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 37 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 101 \cdots 199$$

49. Feladat. (AIME, 1986) Melyik az a legnagyobb pozitív n egész szám, amelyre teljesül, hogy $n + 10$ osztja $n^3 + 100$-at.

Megoldásvázlat: Elosztjuk az $n^3 + 100$ polinomot az $n + 10$ polinommal. Ekkor

$$\frac{n^3 + 100}{n + 10} = n^2 - 10n + 100 - \frac{900}{n + 10}.$$

Világos, hogy $n + 10$-nek 900 osztójának kell lenni, ezért n lehetséges legnagyobb értéke $n = 890$.

Megoldás MAPLE-lel: `with(numtheory); divisors(900);`

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 25, 30, 36, 45, 50, 60, 75, 90, 100, 150, 180, 225, 300, 450, 900\}$

50. Feladat. (AIME, 1986) Jelölje S a 1000000 valódi osztói tizes alapú logaritmusának az összegét. Melyik egész szám van a legközelebb S-hez.

Megoldásvázlat: Először meghatározzuk 1000000 osztóit:

$$2^0 \cdot 5^0, 2^0 \cdot 5^1, \ldots, 2^0 \cdot 5^6,$$

$$2^1 \cdot 5^0, 2^1 \cdot 5^1, \ldots, 2^1 \cdot 5^6,$$

$$2^2 \cdot 5^0, 2^2 \cdot 5^1, \ldots, 2^2 \cdot 5^6,$$

$$2^3 \cdot 5^0, 2^3 \cdot 5^1, \ldots, 2^3 \cdot 5^6,$$

$$2^4 \cdot 5^0, 2^4 \cdot 5^1, \ldots, 2^4 \cdot 5^6,$$

$$2^5 \cdot 5^0, 2^5 \cdot 5^1, \ldots, 2^5 \cdot 5^6,$$

$$2^6 \cdot 5^0, 2^6 \cdot 5^1, \ldots, 2^6 \cdot 5^6.$$

Az osztók logaritmusainak az összege helyett elegendő kiszámolni az osztók szorzatát, ami esetünkben

$$2^{7(0+1+2+3+4+5+6)} \cdot 5^{7(0+1+2+3+4+5+6)} = 10^{147},$$

és a valódi osztók szorzata 10^{141}, a valódi osztók logaritmusainak az összege 141.

Megoldás MAPLE-lel: A:=`divisors(1000000);` $P := 1$; `for` i `from` 1 `to nops(`A`) do;` $P := PA[i]$; `end do; print(`$\log_{10}(P)$`);`

147

51. Feladat. (AIME, 1987) Mennyi $3x^2y^2$, ha x, y olyan egészek, hogy $y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517$?

Megoldásvázlat: Átrendezve az $y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517$ egyenletet, kapjuk, hogy

$$3x^2y^2 + y^2 - 30x^2 - 10 = 507.$$

Szorzattá alakítás után adódik, hogy

$$(3x^2 + 1)(y^2 - 10) = 3 \cdot 13^2.$$

A $3x^2 + 1$ értéke nem lehet 1 (ebből $x = 0$ következne, ami nem lehetséges), nem lehet $3, 39, 169, 507$, így csak az $3x^2 + 1 = 13$ esetet kell ellenőrizni, amiből $x^2 = 4$ és $y^2 = 49$. Ekkor $3x^2y^2 = 588$.

Megoldás MAPLE-lel: `factor(`$3x^2y^2 + y^2 - 30x^2 - 10$`);`

$$(y^2 - 10)(3x^2 + 1)$$

52. Feladat. (AIME, 1987) Számoljuk ki a

$$\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$$

tört értékét!

Megoldásvázlat: Felhasználjuk az $x^4+4y^4=(x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)$ azonosságot az x^4+324 típusú kifejezésekre. Ebből

$$x^4+324=(x^2-6x+18)(x^2+6x+18)$$

adódik. Kapjuk, hogy

$$10^4+324=58\cdot 178, 22^4+324=370\cdot 634,$$

$$34^4+324=970\cdot 1378, 46^4+324=1858\cdot 2410, 58^4+324=3034\cdot 3730,$$

illetve

$$4^4+324=10\cdot 58, 16^4+324=178\cdot 370,$$

$$28^4+324=634\cdot 970, 40^4+324=1378\cdot 1858, 52^4+324=2410\cdot 3034.$$

Az eredeti tört értéke 373.

Megoldás MAPLE-lel: $\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^4+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$;

$$373$$

53. Feladat. (AIME, 1995) Jelölje $f(n)$ a $\sqrt[4]{n}$-hez legközelebbi egészet. Mennyi a következő összeg értéke

$$\sum_{k=1}^{1995}\frac{1}{f(k)}?$$

Megoldásvázlat: Világos, hogy ha

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)^4<n<\left(k+\frac{1}{2}\right)^4,$$

akkor $f(n) = k$. Ezért

$$\left\lfloor \left(k + \frac{1}{2}\right)^4 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^4 \right\rfloor$$

darab olyan értéke van n-nek, amelyre $f(n) = k$. Mivel

$$\left(k + \frac{1}{2}\right)^4 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^4 = 4k^3 + k,$$

ezért az összegben minden egyes $\frac{1}{k}$ összeadandó $4k^3 + k$-szor fog szerepelni, ez az összeg pontosan

$$(4k^3 + k)\frac{1}{k} = 4k^2 + 1.$$

Ha tekintjük a

$$\sum_{k=1}^{6}(4k^2 + 1) = 370$$

összeget, ez lefed összesen

$$\sum_{k=1}^{6}(4k^3 + k) = 1785$$

tagot az 1995 összeadandóból álló összegnél, marad tehát 210 összeadandó, amelyre $f(n) = 7$. Ez a maradék összeg $210 \cdot \frac{1}{7} = 30$, ezért a teljes összeg értéke 400.

Megoldás MAPLE-lel: $\texttt{sum}\left(\frac{1}{\texttt{round}(\sqrt[4]{n})}, n = 1..1995\right)$;

400

54. Feladat. (AIME, 1998) Legyen

$$A_k = \frac{k(k-1)}{2} \cdot \cos\frac{k(k-1)\pi}{2}.$$

Mennyi $|A_{19} + A_{20} + \ldots + A_{98}|$?

Megoldásvázlat: Világos, hogy a $\frac{k(k-1)}{2}$ szám egész szám, így a feladatban szereplő

$$\cos\frac{k(k-1)\pi}{2}$$

1 vagy -1, attól függően, hogy k 4-gyel osztva milyen maradékot ad. Ezért kapjuk, hogy

$$A_{19} + A_{20} + \ldots + A_{98} =$$
$$-\frac{18 \cdot 19}{2} + \frac{19 \cdot 20}{2} + \frac{20 \cdot 21}{2} - \frac{20 \cdot 21}{2} - \frac{21 \cdot 22}{2} + \ldots - \frac{97 \cdot 98}{2} = -80.$$

Megoldás MAPLE-lel: `sum(`$k(k-1)\cos\frac{k(k-1)\pi}{2}, k = 19..98$`);`

$$-80$$

55. Feladat. (AIME, 2000/I) Az $(ax+b)^{2000}$ binomiális kifejtésében, ahol a és b relatív prím pozitív egészek, az x^2 és x^3 együtthatói megegyeznek. Mennyi $a + b$?

Megoldásvázlat: A binomiális tétel alapján

$$(ax + b)^{2000} = (ax)^{2000} + \ldots + \binom{2000}{3}(ax)^3 b^{1997} + \binom{2000}{2}(ax)^2 b^{1998} + \ldots.$$

Ebből adódik, hogy

$$\binom{2000}{3} a^3 b^{1997} = \binom{2000}{2} a^2 b^{1998},$$

ezért, egyszerűsítések után, $666a = b$. Mivel $(a, b) = 1$, ezért $a = 1, b = 666, a + b = 667$.

Megoldás MAPLE-lel: `coeff(`$(ax + b)^{2000}, x^2$`);coeff(`$(ax + b)^{2000}, x^3$`);`
`factor(`$1331334000b^{1997}a^3 - 1999000b^{1998}a^2$`);`

$$1999000b^{1997}a^2(666a - b)$$

56. Feladat. (AIME, 2000, II) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek 6 páratlan potitív, és 12 páros pozitív osztója van?

Megoldásvázlat: Használjuk a $d(n)$ osztók száma függvény zárt alakját. Ha $n = 1$, akkor $d(1) = 1$, ha $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$, akkor

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_s + 1).$$

Mivel a keresett n számnak 18 osztója van összesen, ezért $d(n) = 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, ami mutatja, hogy n-nek legfeljebb három különböző prímosztója lehet. Mivel vannak páros osztói, ezért az egyik prímosztó biztosan a 2. Felírhatjuk az n-et $n = 2^\alpha m$ alakban, ahol m páratlan szám, és a feltételekből adódik, hogy $d(m) = 6$. Ebből következik, hogy $m = p^5$ vagy $m = p_1^2 p_2$ alakú, ahol p, p_1, p_2 prímszámok. Az első esetre a legkisebb példa $3^5 = 243$, a másodikra $3^2 \cdot 5 = 45$. Nyilvánvalóan a második eset felel meg nekünk, a keresett szám $2^2 \cdot 45 = 180$.

Megoldás MAPLE-lel: 1000-ig meghatározzuk azokat az n számokat, amelyeknek 18 osztója van:

`for` n `from` 1 `to` 1000 `do;` A`:= divisors(`n`); if nops(`A`) =` 18 `then print(`n`) end if; end do;`

Az első érték 180, ami megfelel annak a feltételnek is, hogy 6 páratlan és 12 páros osztója van.

57. Feladat. (AIME, 2000, II) Tudjuk, hogy valamely N természetes számra

$$\frac{1}{2!17!} + \frac{1}{3!16!} + \frac{1}{4!15!} + \frac{1}{5!14!} + \frac{1}{6!13!} + \frac{1}{7!12!} + \frac{1}{8!11!} + \frac{1}{9!10!} = \frac{N}{1!18!}$$

teljesül. Mennyi $\left[\frac{N}{100}\right]$?

Megoldásvázlat: Szorozzuk meg 19!-sal az egyenlet minkét oldalát. Ekkor kapjuk, hogy

$$\frac{19!}{2!17!} + \frac{19!}{3!16!} + \frac{19!}{4!15!} + \frac{19!}{5!14!} + \frac{19!}{6!13!} + \frac{19!}{7!12!} + \frac{19!}{8!11!} + \frac{19!}{9!10!} = \frac{19!N}{1!18!}.$$

Ismert, hogy

$$\binom{19}{0} + \binom{19}{1} + \binom{19}{2} + \ldots + \binom{19}{17} + \binom{19}{18} + \binom{19}{19} = 2^{19}.$$

Mivel

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

ezért

$$1 + 19 + 2\left(\binom{19}{2} + \binom{19}{3} + \ldots + \binom{19}{8} + \binom{19}{9}\right) + 19 + 1 = 2^{19}$$

teljesül. Jelölje S az

$$\frac{19!}{2!17!}+\frac{19!}{3!16!}+\frac{19!}{4!15!}+\frac{19!}{5!14!}+\frac{19!}{6!13!}+\frac{19!}{7!12!}+\frac{19!}{8!11!}+\frac{19!}{9!10!}$$

összeget, ezzel a jelöléssel

$$40+2S=2^{19},$$

azaz

$$S=2^{18}-20.$$

Ebből következik, hogy

$$N=\frac{S}{19}=13796$$

és a keresett érték 137.

Megoldás MAPLE-lel: $\frac{1}{19}$`(sum(binomial(`$19,i$`), `$i=10..17$`));`

13796

58. Feladat. (AIME, 2001, I) Határozzuk meg azon kétjegyű pozitív egész számoknak az összegét, amelyek oszthatóak mind a két számjegyükkel.

Megoldásvázlat: A keresett kétjegyű egész számokat jelölje $10a+b$, ekkor

$$a|10a+b, a|b$$

és

$$b|10a+b, b|10a.$$

Ezekből az oszthatósági relációkból kapjuk, hogy

$$b=ka, ka|10a, k|10$$

azaz $b=a, b=2a$ vagy $b=5a$. Így a megfelelő kétjegyű számok vagy $11a$ alakúak, az összegük

$$11+22+33+\ldots+99=495,$$

vagy $12a$ alakúak, ezen számok a $12, 24, 36, 48$, összegük 120, és $15a$ alakúak, ez csak a 15 esetében lehetséges, így a keresett összeg 630.

Megoldás MAPLE-lel: $A := \{\}$; `for` a `from` 1 `to` 9 `do; for` b `from` 0 `to` 9 `do;` $n := 10a + b$; $x := n$ `mod` $a; y := n$ `mod` b; `if` $(x = 0$ `and` $y = 0)$ `then` $A := A + n$; `end if; end do; end do; print(`A`)`

630

59. Feladat. (AIME, 2002, II) Melyik az a legkisebb k egész szám, amelyre az

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2$$

összeg többszöröse a 200-nak?

Megoldásvázlat: Ismert, hogy

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

ezért meg kell határozni a legkisebb k egészt, amelyre a

$$k(k+1)(2k+1)$$

többszöröse az 1200-nak. Mivel $1200 = 16 \cdot 3 \cdot 25$, ezért a fenti szorzatnak oszthatónak kell lenni 16-tal, 3-mal és 25-tel. Megjegyezzük, hogy a

$$k(k+1)(2k+1)$$

szorzat minden k egész számra osztható 3-mal. Valóban, ha k osztható hárommal, akkor az első faktor, ha k 1-et ad maradékul hárommal osztva, akkor a $2k+1$, végül, ha k 2-őt ad maradékul hárommal osztva, akkor $k+1$ osztható hárommal. A 16-tal való oszthatóság miatt k $16t$ vagy $16t+15$ alakú, ahol t pozitív egész, és hasonlóan (k, $k+1$ és $2k+1$ páronként relatív prímek) k $25s, 25s+24$ vagy $25s+12$ alakú, ahol s pozitív egész. A kínai maradéktételt alkalmazva, kapjuk, hogy

$$k = 400v, 400v + 112, 400v + 224, 400v + 175, 400v + 287, 400v + 399$$

alakú. Ebből $k = 112$ a legkisebb olyan egész, amelyre a fenti összeg többszöröse a 200-nak.

Megoldás MAPLE-lel: $a :=$`sum`$(n^2, n = 1..k)$; `for` k `from` 1 `to` 1000 `do; if` a `mod` 200 $=$ 0 `then print(`k`); end if; end do;`

$$112, 175, 224, \ldots$$

60. Feladat. (AIME, 2003, I) Tegyük fel, hogy

$$\frac{((3!)!)!}{3!} = k \cdot n!,$$

ahol k, n pozitív egészek és n a lehető legnagyobb pozitív egész. Mennyi $n + k$?

Megoldásvázlat: Könnyű látni, hogy

$$\frac{((3!)!)!}{3!} = \frac{(6!)!}{6} = \frac{720!}{6} = 120 \cdot 719!,$$

ezért $n + k = 839$.

Megoldás MAPLE-lel: Először megállapítjuk, hogy melyik az a legkisebb n természetes szám, amelyre $a = \frac{((3!)!)!}{3!}$ kisebb, mint $n!$.
`for` n `from` 1 `to` 1000 `do; if` $\frac{a}{\texttt{factorial}(n)} < 1$ `then print(`n`); end if; end do;`
Látható, hogy a legkisebb ilyen n a 720. Ezért kiszámoljuk a $\frac{a}{719!}$ hányadost, amelyre 120-at kapunk.

61. Feladat. (AIME, 2006, I) Jelölje N azt, hogy a

$$1!2!3!4! \cdot \cdots \cdot 99!100!$$

szám tízes számrendszerben hány nullára végződik. Mennyi maradékot ad N 1000-rel osztva?

Megoldásvázlat: Ahhoz, hogy meghatározzuk, egy egész szám hány nullára végződik, elegendő meghatározni, hogy 5-nek pontosan hányadik hatványával osztható, vagyis mennyi az 5 rendje. A Legendre formula alapján

$$ord_5(n!) = \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{25}\right] + \left[\frac{n}{125}\right] + \ldots,$$

és az összeg nyilván véges, hiszen az 5 hatványai előbb-utóbb "túlugorják" az n-et, így egy 1-nél kisebb valós szám egész részét kell venni. Ezt a formulát alkalmazva adódik az 5 rendjére 1124, amelynek maradéka 1000-rel osztva 124.

Megoldás MAPLE-lel: `ifactor(product(factorial(`k`), `$k = 1..100$`));`

$$2^{4731} \cdot 3^{2328} \cdot 5^{1124} \cdot 7^{734} \cdot 11^{414} \cdot 13^{343} \cdot 17^{250} \dots$$

A fenti alakból látható, hogy, hogy a szám 1124 darab nullára végződik, ezért 1000-rel osztva 124-et ad maradékul.

62. Feladat. (AIME, 2007, I) Hány olyan pozitív, 10^6-nál kisebb négyzetszám van, amely a 24 többszöröse?

Megoldásvázlat: Mivel a négyzetszám a 24 többszöröse, ezért oszthatónak kell lenni 9-cel és 16-tal is, vagyis $(12a)^2$ alakú, ahol a egy egész szám. Könnyen látható, hogy ilyen szám $\left[\frac{1000}{12}\right] = 83$ darab van.

Megoldás MAPLE-lel:
$A := \{\}$`; for k from 1 to 1000 do; if` k^2 `mod` $24 = 0$ `then` A`:=` A `union` $\{k\}$`; end if; end do; nops(`A`);`

83

63. Feladat. (AIME, 2008, I) Legyenek x és y pozitív egészek. Ha $x^2+84x+2008 = y^2$, akkor mennyi $x + y$?

Megoldásvázlat: Teljes négyzetté kiegészítve az $x^2 + 84x + 2008$ polinomot, kapjuk, hogy

$$(x + 42)^2 - 42^2 + 2008 = y^2,$$

azaz

$$y^2 - (x + 42)^2 = 244$$

és

$$(y + x + 42)(y - x - 42) = 244.$$

Mivel x, y pozitív egészek, ezért a bal oldalon álló második faktor is pozitív, így $y >$

$x + 42 \geq 43$. Ebből következik, hogy

$$y + x + 42 \geq 87.$$

A 244-nek egy 87-nél nagyobb osztója van, a 122. Ebből

$$x + y + 42 = 122,$$

$$y - x - 42 = 2,$$

és $2y = 124, y = 62, x = 18$.

Megoldás MAPLE-lel: `ifactor(244);`

$$2^2 \cdot 61$$

64. Feladat. (AIME, 2008, II) Ha

$$N = 100^2 + 99^2 - 98^2 - 97^2 + 96^2 + \cdots + 4^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2,$$

ahol az összeadások és a kivonások kettessével állnak, akkor N-et osztva 1000-rel mennyi a maradék?

Megoldásvázlat: Az 1000-rel való oszthatóság szempontjából a 100^2 elhagyható. A négyzetek kükönbségét faktorizálva

$$N - 100^2 = (99-98)(99+98) - (97-96)(97+96) + (95-94)(95+94) + \cdots + (3-2)(3+2) - 1 =$$

$$\underbrace{197 - 193}_{4} + \underbrace{189 - 185}_{4} + \cdots + \underbrace{5 - 1}_{4} =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{197 - 5}{8} + 1 \right) = 100.$$

Megoldás MAPLE-lel: `sum`$((4k)^2 + (4k-1)^2 - (4k-2)^2 - (4k-3)^2, k = 1..25);$

$$10100$$

65. Feladat. (AIME, 2009, II) Jelölje $n!!$ az n szemifaktoriálist, ami $n(n-2)(n-4) \cdot$

$\cdots 3 \cdot 1$, ha n páratlan és $n(n-2)(n-4)\cdots 4 \cdot 2$ ha n páros. Ha tekintjük a $\sum_{i=1}^{2009} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}$ törtet, akkor annak redukált alakjában a nevező felírható $2^a \cdot b$ alakban, ahol b páratlan. Mennyi $\frac{ab}{10}$?

Megoldásvázlat: Először állapítsunk meg néhány egyszerű tulajdonságát a szemifaktoriálisoknak! Könnyen látható a definíciókból, hogy

$$(2n)!! = 2^n \cdot n!, (2n)!! \cdot (2n-1)!! = (2n)!.$$

Felhasználva ezeket az összefüggéseket, kapjuk, hogy

$$\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} = \frac{(2i-1)!!(2i)!!}{((2i)!!)^2} = \frac{(2i)!}{((2i)!!)^2} = \frac{(2i)!}{2^{2i}(i!)^2} = \frac{\binom{2i}{i}}{2^{2i}},$$

vagyis az összeg, amiről a fenti információ kell

$$S = \sum_{i=1}^{2009} \frac{\binom{2i}{i}}{2^{2i}}.$$

Legyen

$$S_1 = \sum_{i=1}^{2009} \binom{2i}{i} \cdot 2^{2 \cdot 2009 - 2i}.$$

Mivel S_1 egész szám és

$$S = \frac{S_1}{2^{2 \cdot 2009}}$$

így S redukált tört alakjában a nevező egy olyan 2^a alakú szám, ahol $a \leq 2 \cdot 2009$, és így $b = 1$. Az a kitevő meghatározásához S_1 2-rendjét kell meghatározni. Mivel $(2i-1)!!$ páratlan, ezért

$$ord_2((2i)!) = ord_2((2i)!!) + ord_2((2i-1)!!) = ord_2(2^i) + ord_2(i!) + ord_2((2i-1)!!) = i + ord_2(i!)$$

teljesül. Ezt felhasználva

$$ord_2\left(\binom{2i}{i}\right)) = i - ord_2(i!),$$

és

$$ord_2\left(\binom{2i}{i} \cdot 2^{2 \cdot 2009 - 2i}\right) = 2 \cdot 2009 - i - ord_2(i!)$$

Az

$$f(i) = 2 \cdot 2009 - i - ord_2(i!)$$

függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért felhasználva a rend

$$ord_2(a+b) = \min(ord_2(a), ord_2(b)),$$

ha $ord_2(a) \neq ord_2(b)$ tulajdonságát, adódik, hogy

$$ord_2(S_1) = ord_2\left(\binom{2 \cdot 2009}{2009}\right) = 2009 - ord_2(2009!).$$

A Legendre-képletet használva

$$ord_2(2009!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2009}{2^k} \right\rfloor = 1004 + 502 + \cdots + 3 + 1 = 2001,$$

ezért

$$ord_2(S_1) = 2009 - 2001 = 8,$$

és

$$a = 2 \cdot 2009 - ord_2(S_1) = 4010.$$

Végül kapjuk, hogy

$$\frac{ab}{10} = \frac{4010 \cdot 1}{10} = 401.$$

Megoldás MAPLE-lel: $a :=$`sum`$(((2i-1)!!)/((2i)!!), i = 1..2009);$

$$\frac{6693254562\ldots13981551}{134984099\ldots812161024}$$

`ifactor(denom(`a`));`

$$2^{4010}$$

66. Feladat. (AIME, 2010, I) Mennyi a

$$9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot \cdots \cdot \underbrace{99\ldots9}_{999\,\text{darab}\,9-\text{es}}$$

szorzat maradéka 1000-rel osztva?

Megoldásvázlat: Világos, hogy minden 99-től nagyobb tényező -1-et ad maradékul 1000-rel osztva. Ez összesen 997 egész szám, így ezek szorzata is -1-et ad maradékul 1000-rel osztva. A maradék tehát $(-1) \cdot 9 \cdot 99 = -851$ illetve 109.

Megoldás MAPLE-lel: `mul(`$10^i - 1$`, `$i = 1..999$`) mod 1000`;

109

67. Feladat. (KöMaL B.4449.) Hány nullára végződik a $4^{5^6}+6^{5^4}$ szám tízes számrendszerbeli alakja?

Megoldásvázlat: Mivel a szám osztható legalább 2^{5^4}-nel, ezért megvizsgáljuk, hogy 5-nek hanyadik hatványával osztható. A binomiális tételből kapjuk, hogy

$$4^{5^6} = (5-1)^{5^6} = \sum_{i=0}^{5^6} \binom{5^6}{i} 5^i (-1)^{5^6-i}$$

és

$$6^{5^4} = (5+1)^{5^4} = \sum_{i=0}^{5^4} \binom{5^4}{i} 5^i.$$

Világos, hogy $i = 0$-ra az első összegben -1 van, a második összegben 1, vagyis ezek kiejtik egymást. Ha $i = 1$, akkor a megfelelő összeg $5^7 + 5^5 = 26 \cdot 5^5$. Megmutatjuk, hogy ha $i > 1$ akkor $\binom{5^6}{i}5^i(-1)^{5^6-i}$ és $\binom{5^4}{i}5^i$ is osztható 5^6-nal. Az állítás nyilvánvaló $i \geq 6$ esetén. Ha $2 \leq i \leq 4$, akkor

$$\binom{5^k}{i} = \frac{5^k(5^k-1)\cdots(5^k-i+1)}{i!},$$

vagyis a szám osztható 5^k-nal, így $\binom{5^6}{i}5^i(-1)^{5^6-i}$ és $\binom{5^4}{i}5^i$ is osztható 5^6-nal. Az $i = 5$ esetben könnyen látni, hogy a

$$\binom{5^6}{i}, \binom{5^4}{i}$$

binomiális együtthatók oszthatóak 5-tel, amiből már következik, hogy a vizsgált összeg osztható 5^5-nel, de nem osztható 5^6-nal, vagyis a szám 5 darab nullára végződik.

Megoldás MAPLE-lel: $4^{5^6}+6^{5^4}$;

$$153944614141262623913 2\ldots 484800000$$

a válasz: 5 darab nullára végződik.

68. Feladat. (KöMal C.1160.) Mennyi a maradék, ha a

$$2012^{2013}+2013^{2012}$$

összeget elosztjuk $2012\cdot 2013$-mal?

Megoldásvázlat: Vizsgáljuk a

$$\frac{2012^{2013}+2013^{2012}}{2012\cdot 2013}$$

törtet. Tagonkénti osztással

$$\frac{2012^{2013}+2013^{2012}}{2012\cdot 2013}=\frac{2012^{2012}}{2013}+\frac{2013^{2011}}{2012}.$$

A binomiális tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$2012^{2012}=(2013-1)^{2012}=2013A+(-1)^{2012}=2013A+1,$$

ahol A egy pozitív egész szám, és hasonlóan adódik, hogy

$$2013^{2011}=(2012+1)^{2011}=2012B+1^{2011},$$

ahol B egy pozitív egész szám. Ezekkel a jelölésekkel

$$\frac{2012^{2013}+2013^{2012}}{2012\cdot 2013}=\frac{2013A+1}{2013}+\frac{2012B+1}{2012}=$$

$$A+\frac{1}{2013}+B+\frac{1}{2012}=A+B+\frac{2013+2012}{2012\cdot 2013},$$

azaz a keresett maradék 4025.

Megoldás MAPLE-lel: $2012^{2013}+2013^{2012}$ `mod` $(2012\cdot 2013)$;

4025

Megjegyzés: A feladat nyilvánvaló általánosítása: Mennyi a maradék, ha az

$$n^{n+1} + (n+1)^n$$

összeget elosztjuk $n(n+1)$-gyel? A megoldás hasonlóan történik. Vizsgáljuk az

$$\frac{n^{n+1} + (n+1)^n}{n(n+1)}$$

törtet. Tagonkénti osztással kapjuk, hogy

$$\frac{n^{n+1} + (n+1)^n}{n(n+1)} = \frac{n^n}{n+1} + \frac{(n+1)^{n-1}}{n}.$$

Mivel $n^n = (n+1-1)^n = A(n+1)+(-1)^n$ és $(n+1)^n = Bn+1$, ahol A és B természetes számok, ezért

$$\frac{n^n}{n+1} + \frac{(n+1)^{n-1}}{n} = A + \frac{(-1)^n}{n+1} + B + \frac{1}{n},$$

azaz a keresett maradék $(-1)^n n + n + 1$.

69. Feladat. (KöMal B.4503.) Határozzuk meg azokat a négyjegyű négyzetszámokat, amelyeknek két első és két utolsó számjegye egyenlő.

Megoldásvázlat: A szám négyjegyű és két első és két utolsó számjegye egyenlő, ezért $\overline{aabb}$ alakban keressük, és

$$x^2 = \overline{aabb}.$$

Mivel x^2 négyjegyű, ezért $1000 \le x^2 \le 9999$, így $31 \le x \le 99$ telejesül. Világos, hogy

$$x^2 = 1000a + 100a + 10b + b = 11(100a + b),$$

ezért $11|x^2$, és így $11|x$. A szóba jöhető számok $33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$, a megfelelő négyzetek közül egyedül a

$$88^2 = 7744$$

felel meg a feladat feltételeinek.

Megoldás MAPLE-lel: `for` a `from` 1 `to` 9 `do; for` b `from` 0 `to` 9 `do;` $n := a(10^3 + 10^2) + 11b$`; if type(sqrt(`$n$`), integer) = true then print(`$n$`); end if; end do; end do;`

70. Feladat. (KöMal K.356.) A $2{*}01{*}2$ hatjegyű szám két számjegye hiányzik. Milyen számjegyeket írjunk a hiányzó helyekre, hogy az így kapott hatjegyű szám osztható legyen 36-tal és 117-tel is?

Megoldásvázlat: Mivel a $36 = 4 \cdot 9$ és $117 = 9 \cdot 13$, ezért hatjegyű számunknak oszthatónak kell lenni 4-gyel, 9-cel és 13-mal. A 4-gyel való oszthatóság miatt az utolsó két számból képzett szám osztható 4-gyel, ezért az utolsó előtti számjegy (uesz) csak $1, 3, 5, 7, 9$ lehet. Mivel a hatjegyű szám osztható 9-cel is, ezért a számjegyek összege is osztható 9-cel, ha az uesz 1, akkor a második számjegye 3, ha az uesz 3, akkor a második számjegy 1, ha az uesz 5, akkor a második számjegy 8, ha az uesz 7, akkor a második számjegy 6, és végül, ha az uesz 9, akkor a második számjegy 4 lehet. A megfelelő számok

$$230112, 210132, 280152, 260172, 240192.$$

Tudjuk, hogy a keresett szám még 13-mal is osztható. Ennek a feltételnek már csak a 210132 tesz eleget, ezért a keresett számjegyek az 1 és a 3.

Megoldás MAPLE-lel: `for` a `from` 0 `to` 9 `do; for` b `from` 0 `to` 9 `do;` $n := 2 \cdot 10^5 + a10^4 + 100 + 10b + 2$`; if` n `mod` $(36 \cdot 13)$ `=` 0 `then print(`n`); end if; end do; end do;`

71. Feladat. (KöMal Gy.3254.) Van-e olyan köbszám, amelynek tizes számrendszerbeli alakja

$$ababab1$$

alakú?

Megoldásvázlat: Jelöljön $n = k^3$ egy olyan tulajdonságú köbszámot, amely a fenti alakú. Mivel $10^6 \leq n < 10^7$, ezért $100 \leq k \leq 215$. Felhasználva a tizes számrendszerbeli alakot, kapjuk, hogy

$$n = 1 + b \cdot 10 + a \cdot 100 + b \cdot 1000 + a \cdot 10^4 + b \cdot 10^5 + a \cdot 10^6 =$$

$$= 1 + b(10 + 10^3 + 10^5) + a(10^2 + 10^4 + 10^6).$$

Ebből adódik, hogy

$$n = 1 + (10 + 10^3 + 10^5)(b + 10a),$$

és így $n-1$ osztható 30-cal. Mivel

$$n-1 = k^3 - 1 = (k-1)(k^2+k+1)$$

osztható 30-cal, megmutatjuk, hogy $k-1$ is osztható 30-cal. Mivel a szám köbe páratlan, ezért k páratlan és $k-1$ páros. A k szám köbe $3l+1$ alakú, ahol l egy egész szám, ezért a k szám is csak $3l+1$ alakú lehet. Világos, hogy a k szám nem osztható hárommal, és ha $3l+2$ alakú lenne, akkor a köbe is ugyanilyan alakú. Ha k osztható 5-tel, akkor k^3-1 nem osztható 5-tel, ha $k = 5l+2$ alakú, akkor $k^3 - 1 = (5l+2)^3 - 1$ kettőt ad maradékul 5-tel osztva, ha $k = 5l+3$, akkor k^3-1 egy maradékot ad 5-tel osztva, végül, ha $k = 5l+4$ alakú, akkor k^3-1 három maradékot ad 5-tel osztva. Tehát $k = 5l+1$ alakú, ebből következik, hogy $k = 30l+1$ alakú. A $100 \leq k \leq 215$ intervallumban ilyen számok a $k = 121, 151, 181, 211$, amelyek közül egyedül a 211 felel meg,

$$211^3 = 9393931.$$

Megoldásvázlat MAPLE-lel: `for` a `from` 1 `to` 9 `do; for` b `from` 0 `to` 9 `do;` $n := a10^6 + b10^5 + a10^4 + b10^3 + a10^2 + 10b + 1$; `if type(`$\sqrt[3]{n}$`, integer) = true then print(`$n$`); end if; end do; end do;`

4. fejezet

Polinomok és függvények

1. Feladat. (KöMaL B3426.) Mit kapunk maradékul, ha az x^{2001} polinomot elosztjuk $(x+1)^2$-nel?

Megoldásvázlat: A polinomok maradékos osztásának tétele értelmében a maradék vagy azonosan nulla, vagy legfeljebb egy elsőfokú polinom, mondjuk $a \cdot x + b$. Ekkor felírható, hogy

$$x^{2001} = f(x)(x+1)^2 + a \cdot x + b.$$

Behelyettesítve az $x = -1$-et, kapjuk, hogy $b - a = -1$. Deriválva mindkét oldalt, adódik, hogy

$$2001x^{2000} = f'(x)(x+1)^2 + 2(x+1)f(x) + a.$$

Megint behelyettesítve az $x = -1$-et, kapjuk, hogy $2001 = a$, amiből a maradék polinom $2001x + 2000$.

Megoldás MAPLE-lel: `taylor` $\left(x^{2001}, x = -1, 2002\right)$;

$$-1 + 2001(x+1) - 2001000(x+1)^2 + 1333333000(x+1)^3 - \ldots - 1333333000(x+1)^{1998} +$$

$$2001000(x+1)^{1999} - 2001(x+1)^{2000} + (x+1)^{2001}$$

2. Feladat. (KöMaL 3664.) Keressük meg azt a legalacsonyabb fokú egész együtthatós $p(x)$ polinomot, amelyre teljesül, hogy főegyütthatója 1, továbbá $p(0) = 0, p(1) = 1$ és $p(-1) = 3$.

Megoldásvázlat: Világos, hogy nincs olyan lineáris $p(x)$ polinom, amelyre teljesülnének

a feltételek. Megmutatjuk, hogy másodfokú, 1 főegyütthatós polinom sem létezik úgy, hogy $p(0) = 0, p(1) = 1$ és $p(-1) = 3$. Keressük a polinomot $x^2 + ax + b$ alakban. Mivel $b = 0$, ezért $1 + a = 1$ és $1 - a = 3$, ami ellentmondás. Így a keresett polinom legalább harmadfokú, $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$, a konstans tag 0, mert $p(0) = 0$. Ekkor $0 = a + b$ és $4 = a - b$, azaz $a = 2$ és $b = -2$.

Megoldás MAPLE-lel:

`with(CurveFitting);`

`PolynomialInterpolation`$([[0,0],[1,1],[-1,3]], x))$;

$$2x^2 - x$$

Mivel a kapott polinom nem főpolinom, ezért a harmadfokú polinomok között keressük a megoldást. Így kapjuk a fenti egyenletrendszert az együtthatókra:

`solve` $(\{a - b = 4, a + b = 0\}, [a, b])$;

$$[[a = 2, b = -2]]$$

3. Feladat. (KöMaL B.3581.) Mennyi az

$$|1001 + 1000x + 999x^2 + \ldots + 2x^{999} + x^{1000}|$$

függvény legkisebb értéke?

Megoldásvázlat: Legyen

$$g(x) = 1001 + 1000x + 999x^2 + \ldots + 2x^{999} + x^{1000},$$

ezzel a jelöléssel keresendő a $|g(x)|$ függvény legkisebb értéke. Megkeressük a $g(x)$ polinom legkisebb értékét. Ha ez az érték negatív, akkor mivel $g(x)$ pozitív értékekre pozitív és a polinomfüggvény folytonos, ezért $g(x)$ valamilyen valós x-re 0-t vesz fel, vagyis ebben az esetben $|g(x)|$ legkisebb értéke nulla lenne. A $g(x)$ legkisebb értékét negatív x-ek esetén keressük. Tekintsük a

$$g(x)(x-1)^2 = x^{1002} - 1002x + 1001$$

függvényt, vagyis

$$g(x) = \frac{x^{1002} - 1002x + 1001}{(x-1)^2}.$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol az első derivált nulla.

$$g'(x) = \frac{(x-1)^2(1002x^{1001} - 1002) - 2(x-1)(x^{1002} - 1002x + 1001)}{(x-1)^4},$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $g'(-1) = 0$, és legyen

$$g'(x) = (x+1)h(x).$$

Megmutatjuk, hogy $h(x) > 0$ minden $x <$ számra. Valóban,

$$h(x) = \frac{g'(x)}{x+1} =$$

$$\frac{2}{(x-1)^3(x+1)} \cdot \left[(501x^{1001} - 501)(x-1) - x^{1002} - 1002x - 1001\right] =$$

$$\frac{2}{(x-1)^3(x+1)} \cdot (500x^{1002} - 501x^{1001} + 501x - 500) =$$

$$\frac{2}{(x-1)^3(x+1)} \cdot \left(500(x^{1002} - 1) - 501x(x^{1000} - 1)\right).$$

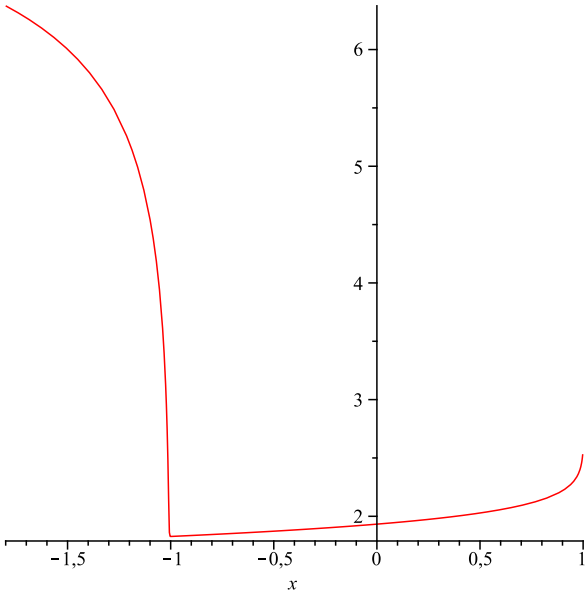
Ha $x < -1$, akkor a tört pozitív, a zárójelben szereplő kisebbítendő is pozitív, a kivonandó negatív. Ha $-1 < x < 0$, akkor a tört negatív, a kisebbítendő is negatív, a kivonandó pozitív. Ebből az következik, hogy $h(x) > 0$, ha $x < 0, x \neq -1$. A g függvény második deriváltja

$$g''(x) = 1003002\frac{x^{1000}}{(x-1)^2} - \frac{4(1002x^{1001} - 1002)}{(x-1)^3} + \frac{6(x^{1002} - 1002x + 1001)}{(x-1)^4},$$

amibe behelyettesítve az $x = -1$ értéket, pozitív számot kapunk, ezért a $|g(x)|$ függvénynek az $x = -1$ pontban lesz minimális az értéke, és ez $|g(-1)| = 501$.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 4.1 ábrát!

4. Feladat. (KöMaL C.588.) Írjuk fel az $f : (-\infty, -2) \to \mathbb{R}, x \to 2x^2 + 8x + 7$ függvény inverzét.



4.1. ábra. A $\ln\ln\frac{x^{1002}-1002x+1001}{(x-1)^2}$ függvény grafikonja

Megoldásvázlat: Az $y = 2x^2 + 8x + 7$-ből $y = 2(x+2)^2 - 1$ adódik, így $(x+2)^2 = \frac{y+1}{2}$. Világos, hogy minden $x < -2$ értékhez pontosan egy $y > -1$ érték tartozik, és minden $y > -1$ esetén $\frac{y+1}{2} > 0$ és pontosan egy olyan $z < 0$ szám létezik, melyre $z^2 = \frac{y+1}{2}$ teljesül, vagyis pontosan egy $x < -2$ szám, melyre $\frac{x+2}{2} = \sqrt{\frac{y+1}{2}}$. A függvény inverze a

$$g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, y \to -\sqrt{\frac{y+1}{2}} - 2$$

függvény.

Megoldás MAPLE-lel: `solve(`$2x^2 + 8x + 7 = y, x$`);`

$$-2 + \frac{1}{2}\sqrt{2+2y}, -2 - \frac{1}{2}\sqrt{2+2y}$$

5. Feladat. (KöMaL B.3327.) Adjunk meg egy egész együtthatós polinomot, amelynek a $\cos\frac{\pi}{10}$ zérushelye!

Megoldásvázlat: Ismeretes, hogy

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha.$$

Ezt tételt akár a Moivre-képlet, akár az addíciós tételek segítségével bizonyíthatjuk. Ezért

$$0 = \cos 5\cdot\frac{\pi}{10} = 16\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)^5 - 20\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)^3 + 5\cos\frac{\pi}{10},$$

ebből künnyen leolvasható, hogy egy egész együtthatós polinom, amelynek zérushelye a $\cos\frac{\pi}{10}$:

$$16x^4 - 20x^2 + 5.$$

Megoldás MAPLE-lel: `convert` $(\cos(\pi/10)$`, 'radical');` $\frac{1}{4}\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$

6. Feladat. (KöMaL B.3446.) Határozzuk meg a $q(x)$ polinomot úgy, hogy a $p(x) = x^2 + x + 1$ polinommal

$$p^2(x) - 2p(x)q(x) + q^2(x) - 4p(x) + 3q(x) + 3 \equiv 0$$

azonosság teljesüljön.

Megoldásvázlat: A feltételt átírva kapjuk, hogy

$$(p(x) - q(x))^2 \equiv 4p(x) - 3q(x) - 3.$$

Ha $q(x)$ foka $\deg q \geq 3$, akkor a bal oldalon egy $2\deg q$, a jobb oldalon egy $\deg q$ fokú polinom állna, ez lehetetlen. Ha $q(x)$ foka kettőnél kisebb, akkor a jobb oldalon negyedfokú, a bal oldalon másodfokú polinom áll, ami szintén lehetetlen. Így $\deg q(x) = 2$, és legyen

$$q(x) = ax^2 + (b+1)x + c + 1$$

alakú. Ha az a főegyüttható nem egy, akkor a jobb oldalon egy negyedfokú polinom áll, a bal oldalon egy másodfokú, ezért $a = 1$. A továbbiakban a $q(x)$ polinomot

$$q(x) = x^2 + (b+1)x + c + 1$$

alakban keressük. Ekkor

$$(p(x) - q(x))^2 = (bx + c)^2,$$

és

$$4p(x)-3q(x)-3 = 4x^2+4x+4-3x^2-3(b+1)x-3(c+1)-3 = x^2+(1-3b)x-2-3c.$$

A megfelelő együtthatókat összevetve kapjuk, hogy $(b,c) = (1,-1),(-1,-2)$, vagyis

$$q_1(x) = x^2+2x, q_2(x) = x^2-1.$$

Megoldás MAPLE-lel: A $q(x)$ polinom másodfokú, lásd a fenti gondolatmenetet, ezért $q(x) = ax^2+bx+c$. `p := ` x^2+x+1`; q := ` ax^2+bx+c`;`

$$p := x^2+x+1$$

$$q := ax^2+bx+c$$

`collect(expand(`$p^2-2pq+q^2-4p+3q+3$`), `x`);`

$$(a^2-2a+1)x^4+(2ab-2b+2-2a)x^3+(-1+2ac-2b-2c+b^2+a)x^2+$$

$$(-2c-2+b+2bc)x+c^2+c$$

`solve(`$\{c^2+c=0, a^2-2a+1=0, -2c-2+b+2bc=0, 2ab-2b+2-2a=0, -1+2ac-2b-2c+b^2+a=0\}, [a,b,c]$`);`

$$[[a=1,b=0,c=-1],[a=1,b=2,c=0]]$$

7. Feladat. (AIME, 1986) Az $1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$ polinom felírható $a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17}$, alakban, ahol $y = x+1$. Mennyi a_2?

Megoldásvázlat: Látható, hogy az

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$$

összeg egy 1 kezdőtagú, $-x$ hányadosú mértani sor elsõ 18 elemének az összege, ezért a

jól ismert formulát alkalmazva

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{16} - x^{17} = \frac{(-x)^{18} - 1}{-x - 1} = \frac{1 - x^{18}}{x + 1} = \frac{1 - (y-1)^{18}}{y}$$

adódik. Mivel az y^2 együtthatóját kell kiszámolni, ezért elegendő kiszámolni az $(y-1)^{18}$-ban az y^3 együtthatóját. A binomiális tételt használva:

$$(y-1)^{18} = y^{18} - 18y^{17} + \binom{18}{2}y^{16} - \ldots - \binom{18}{15}y^3 + \binom{18}{16}y^2 - \binom{18}{17}y + 1,$$

ezért

$$a_2 = \binom{18}{15} = 816.$$

Megoldás MAPLE-lel: `f:=sum(`$(-1)^i x^i, i = 0..17$`);`

$f := 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8-x^9+x^{10}-x^{11}+x^{12}-x^{13}+x^{14}-x^{15}+x^{16}-x^{17}$

`taylor(`$f, x = -1, 18$`);`

$$18-153(x+1)+816(x+1)^2-3060(x+1)^3+8568(x+1)^4-18564(x+1)^5+31824(x+1)^6-$$
$$43758(x+1)^7+48620(x+1)^8-43758(x+1)^9+31824(x+1)^{10}-18564(x+1)^{11}+$$
$$8568(x+1)^{12}-3060(x+1)^{13}+816(x+1)^{14}-153(x+1)^{15}+18(x+1)^{16}-(x+1)^{17}$$

8. Feladat. (AIME, 1988) Határozzuk meg az a és b egész számokat úgy, hogy x^2-x-1 osztója legyen az $ax^{17} + bx^{16} + 1$ polinomnak.

Megoldásvázlat: Tegyük fel, hogy valamely $P(x)$ egész együtthatós polinomra teljesül, hogy

$$(x^2 - x - 1)P(x) = ax^{17} + bx^{16} + 1.$$

Keressük a $P(x)$ polinomot

$$P(x) = a_{15}x^{15} + a_{14}x^{14} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

alakban. Könnyű látni, hogy

$$(x^2-x-1)P(x) = (x^2-x-1)(a_{15}x^{15}+a_{14}x^{14}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0) =$$

$$a_{15}x^{17}+(a_{14}-a_{15})x^{16}+(a_{13}-a_{14}-a_{15})x^{13}+\ldots+$$

$$+(a_j-a_{j+1}-a_{j+2})x^j+\ldots+(a_0-a_1-a_2)x^2-(a_1+a_0)x-a_0.$$

Az együtthatókat összevetve, kapjuk, hogy

$$a_0=-1, a_1=1, a_2=-2, a_3=3, a_4=-5, a_5=8.$$

Folytatva a fenti számsorozatot, kapjuk, hogy

$$a_j=(-1)^{j+1}F_j,$$

ahol F_j a Fibonacci sorozat j. tagját jelöli (A Fibonacci sorozat olyan másodrendű rekurzív sorozat, amelyre $F_0=1, F_1=1$ és $F_{j+2}=F_{j+1}+F_j$ teljesül). Így könnyű számolás adja, hogy

$$a=a_{15}=F_{15}=987.$$

Megoldás MAPLE-lel: `A := solve(`$x^2-x-1=0, x$`);`

$$A := \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

`solve(`$\{aA[1]^{17}+bA[1]^{16}+1=0, aA[2]^{17}+bA[2]^{16}+1=0\}, [a,b]$`);`

$$[[a=987, b=-1597]]$$

9. Feladat. (AIME 2001, I) Mennyi az összege az

$$x^{2001}+\left(\frac{1}{2}-x\right)^{2001}=0$$

egyenlet valós és nem-valós gyökeinek, ha tudjuk, hogy az egyenletnek nincs többszörös

gyöke.

Megoldásvázlat: Világos, hogy a polinom foka 2000, mert a binomiális tételből adódóan kapjuk a $-x^{2001}$ tagot is. Mivel nincs többszörös gyök, ezért ha x gyök, akkor $\frac{1}{2} - x$ is, így 1000 pár olyan gyökünk van, amelynek az összege $\frac{1}{2}$, azaz az összes gyök összege 500.

Megoldás MAPLE-lel: `coeff(`$x^{2001} + (1/2 - x)^{2001}, x^{2000}$`);`

$$\frac{2001}{2}$$

`coeff(`$x^{2001} + (1/2 - x)^{2001}, x^{1999}$`);`

$$-500250$$

10. Feladat. (AIME, 2004, I) Jelölje C az x^2 együtthatóját az

$$(1 - x)(1 + 2x)(1 - 3x) \cdots (1 + 14x)(1 - 15x)$$

szorzat kifejtésében. Mennyi $|C|$?

Megoldásvázlat: A gyökök és együtthatók közötti összefüggésekből adódik, hogy az

$$f(x) = (1 - x)(1 + 2x)(1 - 3x) \cdots (1 + 14x)(1 - 15x)$$

szorzatban az x együtthatója

$$-1 + 2 - 3 + \ldots + 14 - 15 = -8.$$

Ezért $f(x)$ felírható

$$f(x) = 1 - 8x + Cx^2 + x^3 Q(x)$$

alakban, ahol $Q(x)$ egy polinom.

$$f(-x) = 1 + 8x + Cx^2 - x^3 Q(-x),$$

és

$$f(x)f(-x) = 1 + (2C - 64)x^2 + x^3 Q_1(x),$$

ahol $Q_1(x)$ egy polinom. Azonban

$$f(x)f(-x) = (1-x^2)(1-4x^2)\cdots(1-225x^2),$$

és összevetve az x^2 együtthatóját,

$$2C - 64 = -(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 14^2 + 15^2) = -1240$$

adódik, amiből $|C| = 588$.

Megoldás MAPLE-lel: `coeff(mul(`$1 + (-1)^i ix, i = 1..15), x^2$`);`

$$-588$$

11. Feladat. (AIME, 2007, I) A $P(x)$ polinom egy harmadfokú polinom. Melyik az a legnagyobb k szám, amelyre $Q_1(x) = x^2 + (k-29)x - k$ és $Q_2(x) = 2x^2 + (2k-43)x + k$ polinomok egyaránt osztói a $P(x)$-nek?

Megoldásvázlat: Világos, hogy a két másodfokú polinomnak van egy közös gyöke, legyen ez α. Ekkor α gyöke a

$$Q_2(x) - 2Q_1(x) = 15x + 3k$$

polinomnak is, vagyis $15\alpha + 3k = 0, \alpha = -\frac{k}{5}$. A $-\frac{k}{5}$ gyöke a $Q_1(x)$ polinomnak, azaz

$$\frac{k^2}{25} + (k-29)\cdot\left(-\frac{k}{5}\right) - k = 0,$$

amiből $k^2 = 30k$ adódik, így a k legnagyobb értéke $k = 30$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $k = 30$-ra a $Q_1(x)$ és $Q_2(x)$ polinomoknak van közös gyöke.

Megoldás MAPLE-lel: `resultant(`$x^2 + (k-29)x - k, 2x^2 + (2k-43)x + k, x$`);`

$$1080k - 36k^2$$

`factor(`$1080k - 36k^2$`);`

$$-36k(-30 + k)$$

12. Feladat. (AIME 2010, I) Legyen $P(x)$ másodfokú valós együtthatós polinom,

amelyre

$$x^2 - 2x + 2 \leq P(x) \leq 2x^2 - 4x + 3$$

teljesül, minden valós x esetén. Tegyük fel, hogy $P(11) = 181$. Mennyi $P(16)$?

Megoldásvázlat: Teljes négyzetté alakítva a másodfokú polinomokat, kapjuk, hogy

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1,$$

és

$$2x^2 - 4x + 3 = 2(x-1)^2 + 1.$$

Ebből következik, hogy a $P(x)$ polinomnak is (globális) minimuma van az $x = 1$ pontban, azaz

$$P(x) = a(x-1)^2 + b = ax^2 - 2ax + c$$

alakban kereshető, ahol a, c valós számok, és a pozitív. A nagyságrendi feltétel miatt

$$P(1) = 1, P(11) = 181,$$

ebből

$$-a + c = 1, 99a + c = 181.$$

Kivonva az egyenleteket egymásból

$$a = \frac{9}{5}$$

adódik, $c = \frac{14}{5}$. A $P(x)$ polinom

$$P(x) = \frac{9}{5}x^2 - \frac{18}{5}x + \frac{14}{5},$$

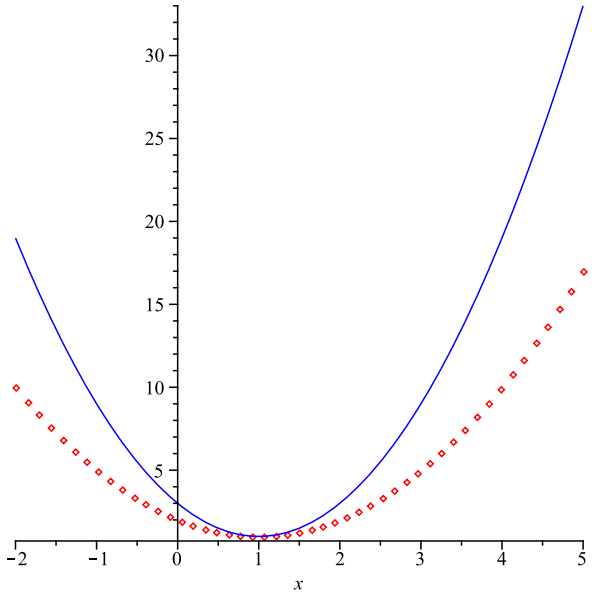
és $P(16) = 406$.

Megoldás MAPLE-lel: Lásd a 4.2 ábrát!

13. Feladat. (AIME, 2010, II) Keressük meg azt a legkisebb pozitív egészt n-t, amellyel az

$$x^4 - nx + 63$$

polinom két nem-konstans, egész együtthatós polinom szorzatára bomlik.



4.2. ábra. Az $x^2 - 2x + 2$ és a $2x^2 - 4x + 3$ függvények grafikonjai

Megoldásvázlat: Két esetet különböztetünk meg, aszerint, hogy a tényezők között egy első- és egy harmadfokú, illetve két másodfokú polinom szerepel. Megjegyezzük, hogy ha egy egész együtthatós polinom nem triviális módon felbomlik két racionális együtthatós polinom szorzatára, akkor felbomlik két, ugyanilyen fokszámú egész együtthatós polinom szorzatára is, és mivel a faktorizálandó polinom egy főegyütthatós, ezért a faktorok is egy főegyütthatósak lesznek.

1. eset:

Az első esetben tegyük fel, hogy

$$x^4 - nx + 63 = (x - \alpha)(x^3 + ax^2 + bx + c)$$

írható, ahol α, a, b, c egész számok. Látható, hogy α osztója a 63-nak, ezért

$$\alpha = \pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 9, \pm 21, \pm 63$$

leheséges. Az

$$(x - \alpha)(x^3 + ax^2 + bx + c) = x^4 + (a - \alpha)x^3 + (b - \alpha a)x^2 + (c - \alpha b)x - \alpha c$$

alakból

$$a = \alpha, b = \alpha^2, c - \alpha^3 = -n,$$

végül $c = -\frac{63}{\alpha}$ miatt

$$n = \alpha^3 + \frac{63}{\alpha}$$

következik. Ebből az alakból látszik, hogy csak az $\alpha > 0$ értékeket kell tekinteni, és n a minimális értéket $\alpha = 3$ esetén veszi fel, ekkor $n = 48$.

2. eset:

Ekkor

$$x^4 - nx + 63 = (x^2 + a_1x + b_1)((x^2 + a_2x + b_2).$$

Kifejtve a szorzatot

$$a_1 + a_2 = 0, b_1 + b_2 + a_1a_2 = 0, a_1b_2 + b_1a_2 = -n, b_1b_2 = 63$$

adódik. Az első egyenletből $a_1 = -a_2$, ezt beírva a másodikba, kapjuk, hogy

$$b_1 + b_2 = a_1^2.$$

Mivel $b_1b_2 = 63$, ezért elegendő a $(b_1, b_2) = (1, 63), (3, 21), (7, 9)$ eseteket vizsgálni, amelyek közül a $(b_1, b_2) = (1, 63), (7, 9)$ esetek felelnek meg, ezekből n-re a 496 illetve a 8 értékeket kapjuk.

Megoldás MAPLE-lel: `for` n `from` 1 `to` 10000 `do; if irreduc(`$x^4-nx+63$`) = false then print(`n`);end if;end do;`

8

48

64

352

496

736

9264

5. fejezet

Sorozatok

1. Feladat. (KöMaL C.1087.) Egy számtani sorozat első eleme 1, a második eleme n, első n elemének összege pedig $33n$. Határozzuk meg n értékét.

Megoldásvázlat: A számtani sorozat differenciája $n-1$. Az első n tag S_n összegére vonatkozó képletet használva

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(1 + (n-1)^2)}{2} = 33n.$$

Az egyszerűsítések után $n = 9$ adódik.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$((n-1)^2 + 2 = 66, n)$;

$$[[9, -7]]$$

2. Feladat. (KöMaL K.13.) Határozzuk meg a

$$7^1 + 7^2 + \ldots + 7^{2005}$$

összeg utolsó két számjegyét.

Megoldásvázlat: A mértani sor összegképletét használva

$$7^1 + 7^2 + \ldots + 7^{2005} = \frac{7^{2006} - 7}{6}.$$

A binomiális tételből következik, hogy

$$7^{2006} = (50-1)^{1003} = 1000A - \binom{1003}{2}2500 + 1003 \cdot 50 - 1 = 1000B + 649,$$

azaz

$$\frac{7^{2006}-7}{6} = \frac{1000B+649-7}{6} = \frac{500B}{3} + 107,$$

és $\frac{500B}{3}$ utolsó két számjegye nyilvánvalóan 0. Tehát az utolsó két számjegy 07 lesz.

Megoldás MAPLE-lel: `sum` $(7^i, i = 1..2005)$;

$$30797610223128525661\ldots2262083769819607$$

3. Feladat. (KöMaL C.778.) Egy számtani sorozatban jelölje S_m a sorozat első m elemének az összegét. Bizonyítsuk be, hogy minden $n > k \geq 1$ esetén

$$\frac{S_{n+k}}{n+k} = \frac{S_n - S_k}{n-k}.$$

Megoldásvázlat: Ismert, hogy

$$S_{n+k} = \frac{(n+k)(a_1+a_{n+k})}{2} = \frac{(n+k)(2a_1+(n+k-1)d)}{2},$$

és hasonlóan

$$S_n = \frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}, S_k = \frac{k(2a_1+(k-1)d)}{2},$$

amiből

$$S_n - S_k = \frac{2a_1(n-k) + (n(n-1) - k(k-1))\,d}{2}.$$

Azonban

$$n(n-1) - k(k-1) = (n-k)(n+k-1),$$

ami bizonyítja az állítást.

Megoldás MAPLE-lel: `f:=`$\frac{(2a_1+(n+k-1)d)(n+k)}{2(n+k)} - \frac{(2a_1+(n-1)d)n-(2a_1+(k-1)d)k}{2(n-k)}$; `simplify`$(f)$;

$$0$$

4. Feladat. (KöMaL C.752.) Igazoljuk, hogy ha az a, b, c pozitív számok egy mértani sorozat egymást követő elemei, akkor az

$$a+b+c,\ \sqrt{3(ab+bc+ca)},\ \sqrt[3]{27abc}$$

számok is egy mértani sorozat elemei.

Megoldásvázlat: Mivel az a, b, c pozitív számok egy mértani sorozat egymást követő elemei, így $ac = b^2$ teljesül. Meg kell mutatni, hogy

$$\sqrt[3]{27abc} \cdot (a+b+c) = 3(ab+bc+ac).$$

$27abc = 27b^3$ és

$$\sqrt[3]{27abc} = 3b,$$

így a bal oldal

$$3b(a+b+c) = 3(ab+bc+b^2) = 3(ab+bc+ac).$$

Megoldás MAPLE-lel: `factor(3b(a+b+c)-3(ab+bc+ca));`

$$3b^2 - 3ca$$

5. Feladat. (KöMaL C.984.) Egy pozitív számokból álló számtani sorozat nem feltétlenül egymás után következő tagja a, b és c. Tudjuk, hogy

$$\frac{c-b}{a} + \frac{a-c}{b} + \frac{b-a}{c} = 0.$$

Adjuk meg a sorozat differenciáját!

Megoldásvázlat: A feltétel mindkét oldalát megszorozva kapjuk, hogy

$$0 = bc(c-b) + ac(a-c) + ab(b-a) = bc^2 - b^2c + a^2c - ac^2 + ab(b-a) =$$

$$c^2(b-a) - c(b^2-a^2) + ab(b-a) = (b-a)(c^2 - c(a+b) + ab) =$$

$$(b-a)(c-a)(c-b).$$

Ebből $a = b$ vagy $a = c$ vagy $b = c$ következik, ezért a számtani sorozat differenciája 0.

Megoldás MAPLE-lel: `factor(`$bc(c-b)+ac(a-c)+ab(b-a)$`);`

$$-(-c+b)(a-c)(-b+a)$$

6. Feladat. (KöMaL C.1064.) Az x, y, z valós számok egy nem konstans számtani sorozat egymást követő tagjai, melyekre teljesül, hogy

$$\cos x + \cos y + \cos z = 1,$$

$$\sin x + \sin y + \sin z = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mennyi a sorozat 12. tagjának tangense, ha az első tag x volt?

Megoldásvázlat: Vegyük az egyenletek négyzeteit és adjuk őket össze:

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2\cos x \cos y + 2\cos x \cos z + 2\cos y \cos z = 1$$

illetve

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z + 2\sin x \sin y + 2\sin x \sin z + 2\sin y \sin z = \frac{1}{2},$$

az egyenleteket összeadva, felhasználva a

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 = 1,$$

és

$$\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$$

összefüggéseket

$$3 + 2\cos(x-y) + 2\cos(x-z) + 2\cos(y-z) = \frac{3}{2}$$

adódik. Mivel az x, y, z egy nem konstans számtani sorozat egymást követő tagjai, ezért

$$y = x + d, z = x + 2d.$$

Így a

$$3 + 2\cos(-d) + 2\cos(-2d) + 2\cos(-d) = \frac{3}{2}$$

egyenlőséget kapjuk, ebből

$$2\cos d + \cos 2d = -\frac{3}{4}.$$

Mivel

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1,$$

ezért

$$2\cos^2 d + 2\cos d - \frac{1}{4} = 0.$$

A másodfokú egyenlet egyetlen megoldása felel meg a $\cos d \geq -1$ feltételnek:

$$\cos d = \sqrt{\frac{3}{8}} - \frac{1}{2}.$$

Az $x = y - d$ és $z = y + d$ helyettesítéseket alkalmazva a feladat első egyenletében, kapjuk, hogy

$$\cos(y - d) + \cos y + \cos(y + d) = 1,$$

és ebből

$$\cos y = \frac{1}{1 + 2\cos d} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ezekből az adatokból a d és y értékek könnyen meghatározhatóak, a sorozat 12. tagja pedig $y + 10d$.

Megoldás MAPLE-lel: `solve`$(2x^2 + 2x - 1/4 = 0, x)$;

$$[[-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{6}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6}]]$$

7. Feladat. (KöMaL B.3529.) Egy mértani sorozat első néhány tagjának összege 11, négyzetösszegük 341, köbösszegük 3641. Határozzuk meg a sorozat tagjait.

Megoldásvázlat: A megadott feltételek szerint:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 11,$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 341,$$

és

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = 3641.$$

A mértani sor összegképletét felhasználva, kapjuk, hogy

$$a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 11,$$

$$a_1^2 \frac{q^{2n} - 1}{q^2 - 1} = 341,$$

és

$$a_1^3 \frac{q^{3n} - 1}{q^3 - 1} = 3641.$$

Megjegyezzük, hogy $q \neq 1$, különben $a_1 n = 11, a_1^2 n = 341$ adódik, amiből $n = \frac{11}{31}$ következne. Az első egyenlettel elosztva a második illetve harmadik egyenletet, kpjuk az

$$a_1 \frac{q^n + 1}{q + 1} = 31,$$

illetve

$$a_1^2 \frac{q^{2n} + q^n + 1}{q^2 + q + 1} = 331$$

egyenleteket. Mivel

$$a_1(q^n - 1) = 11(q - 1)$$

és

$$a_1(q^n + 1) = 31(q + 1),$$

ezért az egyenleteket kivonva, kapjuk, hogy

$$a_1 = 10q + 21,$$

és

$$q^n = \frac{11(q - 1)}{10q + 21} + 1 = \frac{21q + 10}{10q + 21}.$$

(Világos, hogy $a_1 \neq 0$). Ezeket az értékeket behelyettesítve a

$$a_1^2 \frac{q^{2n} + q^n + 1}{q^2 + q + 1} = 331$$

egyenletbe, kapjuk, hogy

$$2q^2 + 5q + 2 = 0,$$

így $q_1 = -2, q_2 = -\frac{1}{2}$. Ennek megfelelően kapjuk, hogy

$$a_1 = 1, n = 5$$

vagy

$$a_1 = 16, n = 5.$$

Megoldás MAPLE-lel: `solve(`$2q^2 + 5q + 2 = 0, q$`);`

$$-\frac{1}{2}, -2$$

8. Feladat. (AIME, 1989) Tegyük fel, hogy n egy pozitív egész, és jelöljön d egy számjegyet a 10-es számrendszerben. Mennyi n, ha tudjuk, hogy

$$\frac{n}{810} = 0.d25d25d25\ldots.$$

Megoldásvázlat: Felhasználjuk a végtelen mértani sor összegképletét:

$$0.d25d25d25\ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d25}{1000^n} = \frac{100d + 25}{999},$$

amiből kapjuk, hogy

$$\frac{n}{810} = \frac{100d + 25}{999},$$

ezért

$$n = 30\frac{100d + 25}{37} = 750\frac{4d + 1}{37}.$$

A 750 és a 37 relatív prímek, így a 37-nek osztania kell a $4d + 1$-et. Ez csak a $d = 9$ esetén lehetséges, ezért $4d + 1 = 37$ és $n = 750$.

Megoldás MAPLE-lel: for d from 1 to 9 do; `if type(`$(1/999)(810(100d{+}25))$`, integer) = true then print(`d`); end if; end do;`

9. Feladat. (AIME, 1993) Legyen

$$P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8,$$

és $P_0(x) = P_{n-1}(x - n)$. Mennyi az együtthatója az x-nek a $P_{20}(x)$ polinomban?

Megoldásvázlat: A definíciót követve világos, hogy

$$P_{20}(x) = P_{19}(x-20) = P_{18}(x-20-19) = \ldots = P_1(x-19-18-17-\ldots-2) = P_0(x-(20+\ldots+1)),$$

azaz

$$P_{20}(x) = P_0(x - 210).$$

A $P_0(x)$ polinom definícióját felhasználva,

$$P_0(x - 210) = (x - 210)^3 + 313(x - 210)^2 - 77(x - 210) - 8,$$

így ebben a kifejezésben kell kiszámolni x együtthatóját.

$$(x - 210)^3 = x^3 - 3 \cdot 210x^2 + 3 \cdot 210^2x - 210^3,$$

$$((x - 210)^2 = x^2 - 2 \cdot 210x + 210^2.$$

A keresett együttható:

$$3 \cdot 210^2 - 313 \cdot 2 \cdot 210 - 77 = 630 \cdot 210 - 626 \cdot 210 - 77 = 840 - 77 = 763.$$

Megoldás MAPLE-lel: `expand(subs(`$x = x - 210, x^3 + 313x^2 - 77x - 8$`))`;

$$x^3 - 317x^2 + 763x + 4558462$$

10. Feladat. (AIME, 2002, I) Legyen $k \geq 1$ egész szám és

$$a_k = \frac{1}{k^2 + k}.$$

Tudjuk, hogy

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} = \frac{1}{29}$$

valamely pozitív egész $m < n$ számokra. Mennyi $m + n$?

Megoldásvázlat: Vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Ebből adódik, hogy

$$\frac{1}{m^2+m} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^2+(n-1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

amiből az összegzés után az

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{29}$$

egyenletet kapjuk. Tovább alakítva, az

$$(m-29)(n+29) = -29^2$$

egyenletet kapjuk. Mivel m és n pozitív egész számok, könnyű látni, hogy ebből $m-29 = -1$ és $n + 29 = 29^2$ következik, így $m + n = 28 + 28 \cdot 29 = 30 \cdot 28 = 840$.

Megoldás MAPLE-lel: `for` n `from 1 to 10000 do; if type(`$1/(1/29+1/n)$`, integer) = true then print(`n`); end if; end do;`

812

11. Feladat. (AIME, 2002, II) Ismert, hogy

$$\log_6 a + \log_6 b + \log_6 c = 6,$$

ahol a, b, c egy növekvő mértani sorozatot alkotó pozitív egészek és $b - a$ teljes négyzet. Mennyi $a + b + c$?

Megoldásvázlat: Az egyenletből adódik, hogy

$$abc = 6^6.$$

Mivel $a = \frac{b}{q}$ és $c = bq$, ezért $b = 36$ (ne feledjük el, hogy az a, b, c számok pozitív egészek). Ismert, hogy $b - a$ teljes négyzet, így az a-ra szóba jöhető értékek $a = 11, 20, 27, 32$ és 35. A megfelelő hányadosértékek:

$$\frac{36}{11}, \frac{36}{20} = \frac{9}{5}, \frac{36}{27} = \frac{4}{3}, \frac{36}{32} = \frac{9}{8}, \frac{36}{35}.$$

Rövid számolás mutatja, hogy csak a $\frac{4}{3}$ jöhet szóba hányadosként, ekkor $c = 48$. A keresett összeg: $a + b + c = 111$.

Megoldás MAPLE-lel: `for` a `from 1 to 36 do:` $c := 1296/a$`; if 'and'(type(`c`, integer) = true, type(sqrt(36−`a`), integer) = true) then print(`a`): end if: end do;`

$$\frac{27}{36}$$

12. Feladat. (AIME, 2007, II) Az $x_0, x_1, \ldots$ egy növekvő mértani sorozat, amely a 3 egész kitevős hatványaiból áll. Tudjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{7} \log_3(x_n) = 308$$

és

$$56 \leq \log_3\left(\sum_{n=0}^{7} x_n\right) \leq 57$$

teljesül. Mennyi $\log_3(x_{14})$?

Megoldásvázlat: Az első egyenlettel foglalkozunk. A logaritmus azonosságait felhasználva

$$\log_3(x_0 \cdot x_0 q \cdot x_0 q^2 \cdot x_0 q^3 \cdot x_0 q^4 \cdot x_0 q^5 \cdot x_0 q^6 \cdot x_0 q^7) = 308,$$

azaz

$$\log_3(x_0^8 \cdot q^{1+2+\ldots+6+7}) = 308.$$

Ezért

$$x_0^8 q^{28} = 3^{308}.$$

Felhasználva a feltételt, adódik, hogy $x_0 = 3^a, q = 3^b$ ahol a, b pozitív egész számok. Így

$$8a + 28b = 308.$$

Ebből a lehetséges (a, b) párok:

$$(a, b) = (35, 1), (28, 3), (21, 5), (14, 7), (7, 9)$$

A mértani sor összegképletét használva

$$\sum_{n=0}^{7} x_n = x_0 \frac{q^8 - 1}{q - 1} = 3^a \frac{3^{8b} - 1}{3^b - 1}.$$

Ebből következik, hogy az $a + 7b$ összeg "nagyjából" az [56,57] intervallumba esik. Könnyű látni, hogy a fenti számpárokból csak a $(21, 5)$ pár tesz ennek a feltételnek eleget, ezért

$$x_{14} = x_0 q^{14} = 3^{21} 3^{5 \cdot 14} = 3^{91}, \log_3(x_{14}) = 91.$$

Megoldás MAPLE-lel: `for` a `from` 1 `to` 280 `do:`
`for` b `from` 1 `to` 300 `do:`
`if` $8a + 28b = 308$ `then print`(a, b)`;end if;end do;end do;`

$$7, 9$$

$$14, 7$$

$$21, 5$$

$$28, 3$$

$$35, 1$$

14. Feladat. (AIME, 2009, I) Egy háromjegyű számot mértaninak hívunk, ha számjegyei különbözőek, és balról jobbra haladva, egy mértani sorozatot alkotnak. Mennyi a különbsége a legnagyobb és a legkisebb mértani számnak?

Megoldásvázlat: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a legnagyobb mértani szám 9-essel kezdődik, hiszen például a 931 is mértani szám A második számjegy

nem lehet sem a 8, sem a 7, mert ezekben az esetekben a harmadik számjegy nem lenne egész. Ha a második számjegy a 6, akkor a harmadik számjegy a 4, így a legnagyobb mértani szám a 964. Könnyű látni, hogy a legkisebb mértani szám a 124, így a keresett különbség: $964 - 124 = 840$.

Megoldás MAPLE-lel: `for` a `from` 1 `to` 9 `do:` `for` b `from` 0 `to` 9 `do:` `for` c `from` 0 `to` 9 `do:` `if` ‘`and`‘$(b^2 = ca, (-c+b)(a-c)(-b+a) <> 0)$ `then` `print`(a, b, c)`;` `end if; end do; end do; end do;`

$1, 2, 4$

$1, 3, 9$

$2, 4, 8$

$4, 2, 1$

$4, 6, 9$

$8, 4, 2$

$9, 3, 1$

$9, 6, 4$

6. fejezet

Feladatok

1. Feladat (IMOLL, 1969) Fejtsük ki a $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}$ kifejezést két különböző módon, és ennek segítségével bizonyítsuk be, hogy

$$\binom{10}{1}-\binom{10}{3}+\frac{1}{2}\binom{10}{5}=2^4.$$

2. Feladat (IMOLL, 1966) Hány valós megoldása van az

$$x=1964\sin x-189$$

egyenletnek?

3. Feladat (IMOLL, 1966) Tekintsük az $a_1, a_2, \ldots, a_{99}, a_{100}$ egymás után következő száz természetes számot. Mennyi az utolsó két számjegye az

$$a_1^8+a_2^8+\ldots+a_{100}^8$$

összegnek?

4. Feladat (IMOLL, 1971) Tudjuk, hogy az

$$x+y+z=3,$$

$$x^3+y^3+z^3=15,$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = 35$$

egyenletrendszernek van egy olyan valós x, y, z megoldása, amelyre $x^2 + y^2 + z^2 < 10$. Mennyi $x^5 + y^5 + z^5$?

5. Feladat (IMOLL, 1972) Határozzuk meg az

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^2$$

egyenlet egész (x, y) megoldásait!

6. Feladat (IMOLL, 1972) Ha a 13^{101} tízes számrendszerben felírt számot átírjuk hármas számrendszerbe, akkor mi az utolsó két számjegy?

7. Feladat (IMOLL, 1973) Racionális vagy irracionális a

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$$

szám?

8. Feladat (IMOLL, 1973) Bizonyítsuk be, hogy $2^{147} - 1$ osztható 343-mal!

9. Feladat (IMOLL, 1974) Legyen $n \geq 2$ pozitív egész, és tekintsük az

$$x^n - x^{n-2} - x + 2 = 0$$

egyenletet. Határozzuk meg minden n-re azokat a z komplex megoldásait az egyenletnek, amelyekre $|z| = 1$ teljesül.

10. Feladat (IMOLL, 1974) Határozzunk meg egy olyan harmadfokú, egész együtthatós polinomot, amelynek gyökei a

$$\sin\frac{\pi}{14}, \sin\frac{5\pi}{14}, \sin\frac{-3\pi}{14}.$$

11. Feladat (IMOLL, 1976) Bizonyítsuk be, hogy a $19^{1976}+76^{1976}$ osztható $F_4 = 2^{2^4}+1$-gyel! Mutassuk meg, hogy van legalább négy, az F_4-nél nagyobb prímosztója!

12. Feladat (IMOLL, 1976) Legyenek a, b, c, d pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2.$$

13. Feladat (IMOLL, 1976) Legyen $x = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, ahol a, b pozitív egészek, $x < 1976$. Bizonyítsuk be, hogy x törtrésze nagyobb mint $10^{-19.76}$!

14. Feladat (IMOLL, 1976) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$3x_1 - x_2 - x_3 - x_5 = 0,$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_4 - x_6 = 0,$$

$$-x_1 + 3x_3 - x_4 - x_7 = 0,$$

$$-x_2 - x_3 + 3x_4 - x_8 = 0,$$

$$-x_1 + 3x_5 - x_6 - x_7 = 0,$$

$$-x_2 - x_3 + 3x_4 - x_8 = 0,$$

$$-x_1 + 3x_5 - x_6 - x_7 = 0,$$

$$-x_3 - x_5 + 3x_7 - x_8 = 0,$$

$$-x_4 - x_6 - x_7 + 3x_8 = 0.$$

15. Feladat (IMOLL, 1978) Egyszerűsítsük a következő kifejezést:

$$\frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)},$$

ahol a, b, c pozitív valós számok.

16. Feladat (IMOLL, 1978) Határozzuk meg az összes olyan α valós számot, amelyre az

$$x^2 - 2x[x] + x - \alpha = 0$$

egyenletnek két nemnegatív megoldása van.

17. Feladat (IMOLL, 1978) Az A szám egy $2m$ darab 1-es számjegyből álló szám. B egy m számjegyű, csupa 4-esből álló számjegy. Bizonyítsuk be, hogy $A + B + 1$ teljes négyzet.

18. Feladat (IMOLL, 1978) Legyen

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

ahol $p \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \ldots + C_p^{p-1} + C_{p-1}^{p-1},$$

és ennek az összefüggésnek a segítségével számoljuk ki az

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + 97 \cdot 98 \cdot 99$$

összeget!

19. Feladat (IMOLL, 1979) Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{20}{60} < \sin 20^\circ < \frac{21}{60}$$

20. Feladat (IMOLL, 1979) Ha p és q természetes számok, úgy, hogy

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

teljesül, akkor mutassuk meg, hogy p osztható 1979-cel.

21. Feladat (IMOLL, 1979) Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot \sin^2 36^\circ - 1} = \cos 72^\circ.$$

22. Feladat (IMOLL, 1980) Határozzuk meg az

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980}$$

szám tizedestört alakjában a tizedesvessző előtt és után álló számokat.

23. Feladat (IMOLL, 1980) Oldjuk meg az

$$x^3 + x^2y" + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1)$$

egyenletet, ahol x és y ismeretlen valós szám.

24. Feladat (IMOLL, 1982) Oldjuk meg az

$$x^3 - y^3 = 2xy + 8$$

egyenletet az egész számok körében!

25. Feladat (IMOLL, 1982) Határozzuk meg a valós a paraméter összes lehetséges értékét, amelyre a

$$16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0$$

egyenlet négy olyan valós gyöke van, amelyek mértani sorozatot alkotnak.

26. Feladat (IMOLL, 1982) Legyen $p(x)$ egy olyan harmadfokú egész együtthatós polinom, amelynek a főegyütthatója 1 és az egyik gyöke a másik két gyökének a szorzata. Mutassuk meg, hogy a $2p(-1)$ többszöröse a $p(1) + p(-1) - 2(1 + p(0))$-nak!

27. Feladat (IMOLL, 1983) Jelölje α az

$$x^3 - 5x - 50 = 0$$

egyenlet valós gyökét. Az x_n sorozatot definiáljuk a következő módon:

$$x_1 = 5, x_{n+1} = \sqrt[3]{5x_n + 50}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$x_{n+1}^3 - \alpha^3 = 5(x_n - \alpha)$$

és

$$\alpha < x_{n+1} < x_n.$$

28. Feladat (IMOLL, 1983) Jelölje $(F_n)_{n\geq 1}$ a Fibonacci sorozatot, azaz $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Legyen $P(x)$ egy 990-ed fokú polinom, amelyre

$$P(k) = F_k, k = 992, 993, \ldots, 1982$$

teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$P(1983) = F_{1983} - 1.$$

29. Feladat (IMOLL, 1983) Az $1, 2, 3, \ldots, 1983$ számok közül melyiknek van a legtöbb pozitív osztója?

30. Feladat (IMOLL, 1984) Bizonyítsuk be, hogy öt egymás után következő pozitív egész szorzata nem lehet teljes négyzet!

31. Feladat (IMOLL, 1984) Legyenek a, b, c pozitív számok, amelyekre

$$a + b + c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

teljesül. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\sqrt{y-a} + \sqrt{z-a} = 1,$$

$$\sqrt{z-b} + \sqrt{x-b} = 1,$$

$$\sqrt{x-c} + \sqrt{y-c} = 1$$

egyenletrendszernek pontosan egy valós (x, y, z) megoldása van.

32. Feladat (IMOLL, 1984) Tekintsük a

$$\sum_{k=1}^{1985} \varepsilon_k k^5$$

összegek halmazát, ahol $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Melyik a halmazban előforduló legkisebb pozitív érték?

33. Feladat (IMOLL, 1985) Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\sqrt{x} - \frac{1}{y} - 2w + 3z = 1,$$

$$x + \frac{1}{y^2} - 4w^2 - 9z^2 = 3,$$

$$x\sqrt{x} - \frac{1}{y^3} - 8w^3 + 27z^3 = -5,$$

$$x^2 + \frac{1}{y^4} - 16w^4 - 81z^4 = 15.$$

34. Feladat (IMOLL, 1985) Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5}.$$

35. Feladat (IMOLL, 1985) Léteznek-e olyan pozitív m, n egészek, hogy

$$5m^2 - 6mn + 7n^2 = 1985$$

teljesüljön?

36. Feladat (IMOLL, 1985) Az a, b, c valós számokra teljesül, hogy

$$\frac{1}{bc - a^2} + \frac{1}{ca - b^2} + \frac{1}{ab - c^2} = 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{(bc - a^2)^2} + \frac{b}{(ca - b^2)^2} + \frac{c}{(ab - c^2)^2} = 0$$

teljesül!

37. Feladat (IMOLL, 1985) Írjuk fel az $5^{1985} - 1$ számot három olyan szám szorzataként, amelyek mindegyike nagyobb 5^{100}-nál!

38. Feladat (IMOLL, 1985) Legyen $n \geq 1$ pozitív egész és

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^6}{2^k}.$$

Mennyi $\lim_{n\to\infty} A_n$?

39. Feladat (IMOLL, 1985) Az x, y, z valós számokra teljesül, hogy

$$x + y + z = xyz.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2) = 4xyz$$

teljesül.

40. Feladat (IMOLL, 1986) Írjuk át kettes számrendszerbe a 27^{1986} számot. Az így kapott kettes számrendszerbeli számnak mi az utolsó 8 számjegye?

41. Feladat (IMOLL, 1986) Kersssünk négy olyan, 70000-nél kisebb számot, amelynek több mint 100 (pozitív) osztója van!

42. Feladat (IMOLL, 1986) Legyenek a, b, c tetszőleges valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$(-a+b+c)^2(a-b+c)^2(a+b-c)^2 \geq (-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$$

teljesül!

43. Feladat (IMOLL, 1986) Kerssük meg a

$$x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z = 8$$

egyenletrendszer összes egész megoldását!

44. Feladat (IMOLL, 1987) Határozzuk meg azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre az $n!$ pontosan 1987 darab nullára végződik!

45. Feladat (IMOLL, 1987) Határozzuk meg az

$$3z^2 = 2x^3 + 385x^2 + 256x - 58195$$

egyenlet összes (x, y) egész megoldását!

46. Feladat (IMOLL, 1988) Legyen n egy pozitív egész és tekintsük az

$$u_n(x) = (x^2 + x + 1)^n$$

polinomot. Mennyi a páratlan együtthatók száma az $u_n(x)$ kifejtésében?

47. Feladat (IMOLL, 1988) Jelölje a az

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

egyenlet legnagyobb pozitív gyökét. Bizonyítsuk be, hogy $\left[a^{1788}\right]$ és $\left[a^{1988}\right]$ egyaránt osztható 17-tel!

48. Feladat (IMOLL, 1988) Legyen

$$g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Mi a maradék, ha a $g(x^{12})$ polinomot elosztjuk a $g(x)$ polinommal?

49. Feladat (IMOLL, 1988) Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész x számot, amelyre teljesül, hogy x számjegyeinek a szorzata $x^2 - 10x - 22$.

50. Feladat (IMOLL, 1988) Az f függvényt a pozitív egész számok halmazán definiáljuk, a következő módon.

$$f(1) = 1, f(3) = 3, f(2n) = f(n),$$

$$f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n),$$

és

$$f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n).$$

Határozzuk meg azon 1988-nál nem nagyobb pozitív egész n-ek számát, amelyre $f(n) = n$ teljesül.

51. Feladat (IMOLL, 1988) Definiáljuk az $(F_n)_{n\geq 0}$ Fibonacci-sorozatot a következő módon:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2.$$

Mennyi a legnagyobb közös osztója F_{1960} és F_{1988}-nak?

52. Feladat (IMOLL, 1989) Ismert, hogy

$$\frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x+y+z)} = \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x+y+z)} = a.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\cos(y+z) + \cos(x+z) + \cos(x+y) = a.$$

53. Feladat (IMOLL, 1989) Oldjuk meg a valós számok halmazában a

$$3x^3 - [x] = 3$$

egyenletet!

54. Feladat (IMOLL, 1989) Valós számok $x_0, x_1, x_2, \ldots$ sorozatát a következő módon definiáljuk: $x_0 = 1989$ és $n \geq 1$-re legyen

$$x_n = -\frac{1989}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k.$$

Mennyi $\sum_{n=0}^{1989} 2^n x_n$?

55. Feladat (IMOLL, 1989) Tekintsük az

$$f(x) = a \sin^2 x + b \sin x + c$$

függvényt, ahol a, b, c valós számok. Az $f(x)$-re teljesülnek a következő feltételek: $f(x) = 384$, ha $\sin x = \frac{1}{2}$, az $f(x)$ abszolút maximuma 444, az $f(x)$ abszolút minimuma 364. Mennyi a, b, c?

56. Feladat (IMOLL, 1989) Legyenek S_1, S_2 négyzetszámok. Oldjuk meg az $S_2 - S_1 = 1989$ egyenletet!

57. Feladat (IMOLL, 1989) Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \ldots + \frac{1}{478} + \frac{1}{479} - \frac{2}{480} = 2\sum_{k=0}^{159} \frac{641}{(161+k)(480-k)}.$$

58. Feladat (IMOLL, 1989) Minden $n \geq 0$ egészre egyértelműen léteznek olyan a_n, b_n és c_n egészek, hogy

$$(1 + 4\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{4})^n = a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4}.$$

Bizonyítsuk be hogy, ha $c_n = 0$ akkor $n = 0$.

59. Feladat (IMOLL, 1990) Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{1990}$$

szám irracionális!

60. Feladat (IMOLL, 1990) Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget

$$\sum_{k=0}^{995} \frac{(-1)^k}{1991-k}\binom{1991-k}{k} = \frac{1}{1991}!$$

61. Feladat (IMOLL, 1990) Legyen $f(0) = f(1) = 0$ és

$$f(n+2) = 4^{n+2}f(n+1) - 16^{n+1}f(n) + n \cdot 2^{n^2}, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(1989), f(1990)$ és $f(1991)$ osztható 13-mal.

62. Feladat (IMOLL, 1990) Legyen a, b, c tetszőleges valós szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ac + a^2) \geq (ab + ac + bc)^3.$$

63. Feladat (IMOLL, 1990) Adott k pozitív egészre legyen $f_1(k)$ a k számjegyei összegének a négyzete, továbbá $f_{n+1}(k) = f_1(f_n(k))$. Mennyi $f_{1991}(2^{1990})$?

64. Feladat (IMOLL, 1990) Határozzuk meg a

$$x^3 + y^3 = 1,$$

$$x^5 + y^5 = 1$$

egyenletrendszer összes (valós) megoldását!

65. Feladat (IMOLL, 1990) Mennyi a minimális értéke a

$$\sqrt{15 - 12\cos x} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}\sin x} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x} + \sqrt{10 - 4\sqrt{3}\sin x - 6\cos x}$$

kifejezésnek?

66. Feladat (IMOSL, 2009) Legyenek az a, b, c pozitív számok, amelyekre

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$$

teljesül. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

67. Feladat (IMOSL, 1996) Legyenek a, b, c pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{ab}{ab + a^5 + b^5} + \frac{bc}{bc + b^5 + c^5} + \frac{ca}{ac + a^5 + c^5} \leq 1.$$

68. Feladat (IMOSL, 2000) Legyenek a, b, c pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

69. Feladat (IMOSL, 1975) Legyen $x_0 = 5$ és $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$45 < x_{1000} < 45.1.$$

70. Feladat (IMOSL, 1995) Legyenek a, b, c pozitív valós számok, amelyre $abc = 1$ teljesül. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

71. Feladat (IMOSL, 1975) Mennyi a

$$\left[\sum_{n=1}^{10^9} n^{-2/3}\right]$$

kifejezés értéke?

72. Feladat (IMOSL, 1960) Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{2x+1})^2} < 2x + 9.$$

73. Feladat (IMOSL, 1960) Határozzuk meg azon háromjegyű, 11-gyel osztható N számokat, amelyekre teljesül, hogy $\frac{N}{11}$ a számjegyei négyzetének az összege.

74. Feladat (IMOSL, 1967) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$x^2 + x - 1 = y,$$

$$y^2 + y - 1 = z,$$

$$z^2 + z - 1 = x.$$

75. Feladat (IMOSL, 1967) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$|x + y| + |1 - x| = 6,$$

$$|x+y+1|+|1-y|=4.$$

76. Feladat (IMOSL, 1967) Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ valós számra teljesül, hogy

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

77. Feladat (JMOP, 2012) Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, amelyekre teljesül, hogy a pozitív osztóinak a szorzata 24^{240}.

78. Feladat (JMOP, 2012) Hány pozitív egész n megoldása van az

$$\left[\frac{1000000}{n}\right] - \left[\frac{1000000}{n+1}\right] = 1$$

egyenletnek?

79. Feladat (TITEE, 2012) Hány számjegyű (a 10-es számrendszerben) a $\sum_{n=0}^{99} 3^n$ szám?

80. Feladat (TITEE, 2012) Hány olyan 10000-nél nem nagyobb n természetes szám van, amelyre $[\sqrt{n}]$ osztja n-et?

81. Feladat (TITEE, 2012) Legyen n természetes szám. Definiáljuk az $\{a_k\}$ sorozatot a következő módon:

$$a_1 = \frac{1}{n(n+1)}, a_{k+1} = -\frac{1}{k+n+1} + \frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i, k = 1, 2, 3, \ldots$$

Mennyi a_2, a_3 illetve a_k? Legyen

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n\to\infty} b_n = \ln 2$.

82. Feladat (FTST, 2006) Legyenek a, b, c pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

83. Feladat (ARO, 2009) Az a, b, c valós számokra teljesül, hogy

$$(a+b)(b+c)(c+a) = abc,$$

$$(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) = a^3b^3c^3.$$

Bizonyítsuk be, hogy $abc = 0$.

84. Feladat (ARO, 2007) Legyen $n > 3$ pozitív egész és jelölje $n?$ az n-nél kisebb prímek szorzatát. Oldjuk meg az

$$n? = 2n + 16$$

egyenletet.

85. Feladat (IZO, 2005) Legyenek a, b, c pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{c}{a+2b} + \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} \geq 1.$$

86. Feladat (IZO, 2005) Legyenek a, b, c, d pozitív valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{c}{a+2b} + \frac{d}{b+2c} + \frac{a}{c+2d} + \frac{b}{d+2a} \geq \frac{4}{3}.$$

87. Feladat (IZO, 2006) Legyenek a, b, c, d valós számok, amelyekre

$$a + b + c + d = 0$$

teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 + 12 \geq 6(abc + abd + acd + bcd).$$

88. Feladat (IZO, 2006) Oldjuk meg a

$$n = \varphi(n) + 402$$

egyenletet, ahol $\varphi(n)$ az n-nél nem nagyobb, az n-hez relatív prím pozitív egész számok halmazát jelenti.

89. Feladat (RNO, 2001) Bizonyítsuk be, hogy nem léteznek olyan a, b egész számok, amelyekre

$$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 = 2001$$

teljesül.

90. Feladat (RNO, 2001) Oldjuk meg az

$$2^{x^2+x} + \log_2 x = 2^{x+1}$$

egyenletet a valós számok halmazán.

91. Feladat (USAIMTS, 1992) Egy tetszőleges pozitív n egész számra jelölje $P(n)$ az n szám pozitív osztóinak a számát. Határozzuk meg azt a legkisebb n számot, amelyre

$$P(P(P(n))) > 10^{12}$$

teljesül.

92. Feladat (HMMT, 2008) Az x, y pozitív valós számokra teljesül, hogy

$$x^2 + y^2 = 1, x^4 + y^4 = \frac{17}{18}.$$

Mennyi xy?

93. Feladat (HMMT, 2008) Legyen $f(x) = x^3 + x + 1$. Tegyük fel, hogy g egy harmadfokú polinom, amelyre $g(0) = -1$ és a g polinom gyökei az f polinom gyökeinek a négyzete. Mennyi $g(9)$?

94. Feladat (HMMT, 2008) Mennyi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2^{n+k}}.$$

95. Feladat (HMMT, 2008) Mennyi p, ha a

$$\lim_{x\to\infty} x^p \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} - 2\sqrt[3]{x}\right)$$

határérték egy nem nulla valós szám.

96. Feladat (HMMT, 2008) Legyen

$$f(x) = \sin^6\left(\frac{x}{4}\right) + \cos^6\left(\frac{x}{4}\right).$$

Mennyi az f függvény 2008. deriváltja az $x = 0$ helyen?

97. Feladat (HMMT, 2008) Legyen

$$T = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^{3x} + e^{2x} - 1}{e^{3x} + e^{2x} - e^x + 1} dx.$$

Mennyi e^T?

98. Feladat (HMMT, 2008) Határozzuk meg az össze olyan (a, b) számpárt, amelyre a

$$10, a, b, ab$$

számok számtani sorozatot alkotnak.

99. Feladat (HMMT, 2008) Határozzuk meg az

$$(x + y)^2 = (x + 1)(y - 1)$$

egyenlet valós (x, y) megoldásait!

100. Feladat (HMMT, 2008) Tegyük fel, hogy

$$x + \sin y = 2008,$$

és

$$x + 2008 \cos y = 2007$$

teljesülnek az x, y valós számokra, ahol $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Mennyi $x + y$?

101. Feladat (HMMT, 2008) Mennyi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+4}?$$

102. Feladat (HMMT, 2008) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x+\sqrt{4x+\sqrt{16x+\sqrt{\ldots+\sqrt{4^{2008}x+3}}}}}-\sqrt{x}=1.$$

103. Feladat (HMMT, 2008) Legyen a $P(x)$ polinom 2008-ad fokú és

$$P(0)=2007, P(1)=2006, P(2)=2005, \ldots, P(2007)=0.$$

Mennyi $P(2008)$?

104. Feladat (HMMT, 2008) Az x és y olyan valós számok, amelyreke

$$56x+33y=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$33x-56y=\frac{x}{x^2+y^2}$$

teljesülnek. Mennyi $|x|+|y|$?

105. Feladat (HMMT, 2008) Az a, b, c nem-nulla valós számok, amelyekre

$$a+b+c=0, a^3+b^3+c^3=a^5+b^5+c^5$$

teljesül. Mennyi $a^2+b^2+c^2$?

106. Feladat (HMMT, 2008) Mennyi

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}65^\circ-2\operatorname{tg}40^\circ)?$$

107. Feladat (HMMT, 2008) Számoljuk ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$$

végtelen összeget!

108. Feladat (HMMT, 2004) Határozzuk meg azt a legnagyobb n természetes számot, amelyre $((n!)!)!$ osztója $(2004!)!$-nak!

109. Feladat (HMMT, 2004) Számoljuk ki a következő kifejezés pontos értékét!

$$\left[\frac{2005^3}{2003 \cdot 2004} - \frac{2003^3}{2004 \cdot 2005}\right].$$

110. Feladat (HMMT, 2004) Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$x^4 + (2-x)^4 = 34$$

egyenletet!

111. Feladat (HMMT, 2004) Ha x egy valós szám, amelyre

$$x^3 + 4x = 8,$$

akkor mennyi $x^7 + 64x^2$?

112. Feladat (HMMT, 2004) Az ötödfokú P polinom rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha z egy olyan komplex szám, amelyre

$$z^5 + 2004z + 1 = 0$$

teljesül, akkor $P(z^2) = 0$. Mennyi $\frac{P(1)}{P(-1)}$?

113. Feladat (HMMT, 2004) A k, x, y pozitív valós számok, úgy, hogy

$$3 = k^2\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + k\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

teljesül. Mennyi a k lehetséges legnagyobb értéke?

114. Feladat (SMT, 2010) Hány nullára végződik $\binom{200}{124}$?

115. Feladat (SMT, 2010) Mennyi az összege az alábbi egyenlet gyökeinek összegének?

$$\frac{1}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-2}+\frac{3}{x^2-3}+\frac{4}{x^2-4}=2010x-4.$$

116. Feladat (SMT, 2006) Melyik az a legkisebb n természetes szám, amelyre a

$$\binom{2006}{n}$$

binomiális együttható osztható 7^3-nal.

117. Feladat (SMT, 2006) Az a, b, c valós számokra teljesül, hogy

$$ab-a=b+119,$$

$$bc-b=c+59,$$

$$ca-c=a+71.$$

Mennyi $a+b+c$?

118. Feladat (SMT, 2006) Legyenek a és b nem-nulla számjegyek. Oldjuk meg a

$$\overline{aabb}=n^4-6n^3$$

egyenletet!

119. Feladat (SMT, 2006) Számoljuk ki a következő végtelen sor összegét:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k+2}+(k+2)\sqrt{k}}$$

120. Feladat (SMT, 2006) Számoljuk ki a következő végtelen sor összegét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2-n+1}\right)$$

121. Feladat (SMT, 2006) Pozitív egész számok sorozatát a következő módon definiáljuk:

$$m_1 = 1, m_i = 10m_{i-1} + 1, i = 2, 3, \ldots, 2006.$$

Hány 37-tel osztható szám van az $m_1, m_2, \ldots, m_{2006}$ sorozatban?

122. Feladat (SMT, 2006) Mennyi a legkisebb értéke a

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy - 4yz - 4x - 2z + 15$$

kifejezésnek, ahol x, y, z valós számok.

123. Feladat (SMT, 2006) Mennyivel egyenlő a következő véges összeg:

$$\sum_{x=2}^{10} \frac{1}{x(x^2-1)}$$

124. Feladat (PUMC, 2009) Mi a közös gyöke az alábbi három polinomnak?

$$x^3 + 41x^2 - 49x - 2009,$$

$$x^3 + 5x^2 - 49x - 245,$$

$$x^3 + 39x^2 - 117x - 1435.$$

125. Feladat (PUMC, 2009) Milyen pozitív k egészre lesz maximális a

$$\binom{200}{k} \cdot \binom{100}{k}$$

szorzat értéke?

126. Feladat (PUMC, 2009) Ismert, hogy

$$17! = 355687ab809600.$$

Mivel egyenlő az a és b számjegy?

127. Feladat (PUMC, 2010) Mennyi a

$$(63x - 61)^4$$

polinom együtthatóinak az összege?

128. Feladat (PUMC, 2010) Mennyivel egyenlő a következő összeg?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[\sqrt[n]{2010} \right] - 1 \right)$$

129. Feladat (PUMC, 2010) Jelölje S azon valós x-ek összegét, amelyekre

$$4^x = x^4$$

teljeül. Melyik egész szám van a legközelebb S-hez?

130. Feladat (PUMC, 2010) Legyen

$$f(x) = x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}}}.$$

Melyik az a legkisebb pozitív egész x, amelyre $f(x) \geq 50\sqrt{x}$ teljesül?

131. Feladat (PUMC, 2010) Jelölje α, β, γ a

$$3x^3 - 5x^2 + 2x - 6 = 0$$

egyenlet gyökeit. Mennyi a

$$\left(\frac{1}{\alpha - 2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta - 2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma - 2}\right)^2$$

kifejezés értéke?

132. Feladat (PUMC, 2010) Legyen

$$\frac{1}{\sqrt[5]{2}-1} = a + b\sqrt[5]{2} + c\sqrt[5]{4} + d\sqrt[5]{8} + e\sqrt[5]{16},$$

ahol a, b, c, d, e egész számok. Mennyi $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$?

133. Feladat (PUMC, 2010) Melyik a legnagyobb pozitív egész szám, amelyre

$$\sigma(n) = 28,$$

ahol $\sigma(n)$ az n pozitív osztóinak az összegét jelenti.

134. Feladat (PUMC, 2010) Egyszerűsítsük a következő törtet!

$$\frac{1010\overbrace{11\ldots11}^{2011\text{egyes}}0101}{1100\underbrace{11\ldots11}_{2011\text{egyes}}0011}.$$

135. Feladat (PUMC, 2010) Jelölje $f(n)$ az n számjegyeinek az összegét. Mennyi

$$\sum_{n=1}^{99} f(n).$$

136. Feladat (AIME, 1984) Mennyi ab, ha

$$\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$$

és

$$\log_8 b + \log_4 a^2 = 7?$$

137. Feladat (KöMaL B.3740.) Tekintsük az

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{3}, a_{n+1} = \frac{2a_n}{3} - a_{n-1}, (n \geq 1)$$

rekurzióval meghatározott sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan n pozitív egész szám, amelyre $a_n > 0,9999$.

138. Feladat (KöMaL B.3451.) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\arcsin x + \arcsin \sqrt{15}x = \frac{\pi}{2}.$$

139. Feladat (KöMaL B.3512.) Keressük meg a 81-nek azt a legkisebb többszörösét,
a) amelyik csak az 1
b) amelyik csak az 1 és a 0 számjegyeket tartalmazza.

140. Feladat (KöMaL B.3773.) Osztható-e

$$20^{2004} + 16^{2004} - 3^{2004} - 1$$

323-mal?

141. Feladat (KöMaL B.3863.) Mutassuk meg, hogy az

$$1^{2005} - 2^{2006} + 3^{2006} - 4^{2006} + \ldots - 2004^{2006} + 2005^{2006}$$

szám osztható 1003-mal. Osztható-e 2006-tal is?

142. Feladat (KöMaL B.3846.) Oldjuk meg a

$$\sqrt[4]{2-x} + \sqrt[4]{15+x} = 3$$

egyenletet.

143. Feladat (KöMaL C.1048.) Mutassuk meg, hogy

$$\frac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}.$$

144. Feladat (KöMaL K.267.) Tudjuk, hogy

$$\overline{ab} + \overline{acb} = 2 \cdot \overline{ba},$$

ahol $\overline{ab}, \overline{ba}$ kétjegyű, $\overline{acb}$ háromjegyű szám. Határozzuk meg az összeadásban szereplő számjegyeket, ha $c = 0$.

145. Feladat (KöMaL C729.) Oldjuk meg a

$$2x \lg x + x - 1 = 0$$

egyenletet a valós számok halmazán.

146. Feladat (KöMal B.4531.) Oldjuk meg az

$$(x^2 + 100)^2 = (x^3 - 100)^3$$

egyenletet.

147. Feladat (KöMaL A.358.) Az a, b, c pozitív számokra teljesül, hogy $abc = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{a+b+c} \geq 3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{a^2+b^2+c^2}.$$

148. Feladat (KöMaL B.3442.) Van-e olyan 2001 jegyű természetes szám, amely a tízes számrendszerben felírva megegyezik a 2001-edik hatványának utolsó 2001 számjegyével?

149. Feladat (KöMaL Gy.3175.) Tetszőleges pozitív a, b számokra igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)}.$$

150. Feladat (KöMaL B.4556. Oldjuk meg az

$$x^3 = 5x + y,$$

$$y^3 = 5y + x$$

egyenletrendszert.

7. fejezet

Néhány hasznos tétel

1. Tétel (Binomiális tétel) Legyenek a, b tetszőleges komplex számok és n egy pozitív egész szám. Ekkor

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Bizonyítás. Lásd [2].

2. Tétel (Euler-Fermat tétel) Legyenek a és m tetszőleges pozitív egészek és tegyük fel, hogy $(a, m) = 1$. Ekkor

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

teljesül, ahol $\phi()$ az Euler-féle függvény.

Bizonyítás. Lásd [1].

3. Tétel (Wilson-tétel) Legyen p tetszőleges prímszám. Ekkor

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

teljesül.

Bizonyítás. Lásd [1].

4. Tétel (Moivre-képlet) Legyen a z komplex szám trigonometrikus alakja

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

és legyen n egy tetszőleges pozitív egész. Ekkor

$$z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

teljesül.

Bizonyítás. Lásd [2].

5. Tétel (Legendre-formula) Legyen p egy tetszőleges prímszám, és jelölje $\mathrm{ord}_p(n)$ az n természetes szám p-rendjét. Ekkor

$$\mathrm{ord}_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^i} \right]$$

teljesül.

Bizonyítás. Lásd [1].

Irodalomjegyzék

[1] Gyarmati Edit és Turán Pál, Számelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.

[2] Szendrei János, Algebra és számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.

[3] www.komal.hu.

[4] www.artofproblemsolving.com.

Tartalomjegyzék

1. Egyenletek 5

2. Egyenlőtlenségek 83

3. Számelméleti problémák 93

4. Polinomok és függvények 145

5. Sorozatok 159

6. Feladatok 171

7. Néhány hasznos tétel 197

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.